Қ. Абдрахманов

# «Геометрия негіздері»

(Оқу құралы)

Шымкент 2020ж.

УДК 514.18(0758)
ББК 22.151.3я73

Оқу құралын басуға Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік педагогикалық университетінің оқу әдістемелік кеңесі ұсынған, хаттама
№5 25.04.2020

**Пікір жазғандар:**

**Қаратаев Ж.К.** –ф.м.ғ.к., доцент, М. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті

**Ибрагимов Р.І.** п.ғ.д., доцент: Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік педагогикалық университеті

Абдрахманов Қ.
Геометрия негіздері / оқу құралы/
Шымкент 2020.-175 бет

ISBN-

Оқу құралында Евклидтік геометрия, Лобачевскийдің гиперболалық геометриясы және Риманның эллиптикалық геометриясы. Осы теориялардың аксиоматикалық құрылымын Вейль аксиомалары негізінде келтіруді көрсеткен.Сондайақ мектеп курсы геометриясының логико-аксиоматикалық құрылымдары қарастырылып, мектеп оқулықтарына талдау жасалған.

Ұсынылған оқу құралы 5В010900-«Математика» , 5В012600- «Математика-физика» , 5В012700-«Математика- информатика» мамандықтарының студенттері мен осы пәннен сабақ беретін оқыутушыларға арналған

# Мазмұны

# Кіріспе

«Геометрия негіздері» пәнінен ұсынылып отырған оқу құралында геометрияның логика-аксиоматикалық негіздері және евклидттік емес геометрияларды зерттеу әдістері қарастырылады.Оқу құралында математикалық құрылым ретінде евклидттік геометрияның Гильберт және Вейль бойынша теориялық негіздемелері қарастырылған.Евклидттік емес геометриялардың математикалық құрылымдары мен олардың интерпретациялары келтірілген.

Геометрия негіздері пәнінің ең таңдаулы тарауларының бірі Лобачевский геометриясының логикалық құрылымы мен модельдері зерттелген.

Геометрияның негізгі бөлімдерінің бірі «өлшеулер теориясы» егжей тегжейлі қарастырылып,мектеп геометриясының оқулықтарына шолу жасалды.

«Геометрия негіздері» пәні жоғарға геометрияның ең негізгі бөлімдерінің бірі болып табылады.Бұл пән келешек математика пәні мұғалімдері үшін ең қажетті пәндердің бірі болып табылады.

Оқу құралы автордың көп жылдардын бері оқыған лекциялары және орыс тіліндегі [1,2] оқу құралдары негізінде құрастырылған.

Бұл оқу құрылымы физика-математика мамандығының студенттеріне және жоғары геометрия пәнін оқитын студенттер мен оқытушылар үшін көмекші құрал ретінде пайдалы болады деп санаймыз.

Осы оқу құралының электрондық нұсқасы қашықтықтан оқитын студенттерге де өте қажет болады.

# 1.Математикалық құрылымдар және евклидтік емес геометриялар

## 1.1 Математикалық құрылым ұғымының мәні

Кез келген А жиын берілген болсын. Осы жиында бір немесе бірнеше қатынастарды анықтау және сол қатынас(қатынастар) орындалатын шарттарды (аксиомаларды) беру мүмкін. Бұл жағдайда А жиынында құрылым анықталған дейміз. Сонан соң берілген аксиомалардан құрылымның кейбір қасиеттерін келтіріп шығару мүмкін. Бұл қасиеттер, әдетте, лемма, теоремалар түрінде баяндалады. Құрылымда кеңірек үйрену нәтижесі оны сипаттайтын ерекшеліктерін ашу мүмкіндігін береді. Құрылымға тиісті мәліметтерді белгілі бір системаға салу, яғни үйреніп отырған теориясын жарату мүмкін. Бұл теория А жиындағы құрылымның аксиоматикалық теориясы болады. А жиынның элементтерінің табиғаты мұнда ешқандай роль атқармайды.

«Математикалық құрылым» ұғымын қалыптастыру әлемді танудың маңызды ғылыми құралы – аксиоматикалық әдістің дамуымен байланысты. Мәселе мынада, қазіргі кезде осы күнгі математиканың көптеген бағыттары тек қана аксиоматикалық әдістің, яғни, сәйкес аксиомалар жүйесінің /аксиоматика/ негізінде құрылады. Ал математика ғылымының әр саласына тән аксиомалардың өзі ұзақ және күрделі тарихи даму процесінде пайда болды. Бастапқы мәліметтер адамның практикалық қызметінің нәтижесінде жинақталады, қордаланады. Осындай мағлұматтарды тексереді, нақтылайды, жүйелейді және басқада бастапқы мәліметтерден шығарып алу мүмкін болатындары, олардың ішінен алынып тасталады. Кейде, қалған қарапайым мәліметтер /аксиома/ тізімінің толық еместігі байқалады, яғни бұл мәліметтер барлық теоремаларды қорытуға жеткілікті бола алмайды. Мұндай жағдайда бұл тізімге жетпей тұрған аксиомалар қосылады. Нәтижесінде, аксиомалардың толық жиынтығы /аксиоматика/ қалыптасады. Осындай аксиоматика жүйесі негізінде қазіргі математиканың ондаған бағыттары дамуда, олардың қатарына: қарапайым /элементар/ математиканың аксиоматикасы, натурал санның аксиоматикасы, метрикалық және векторлық кеңістіктің аксиоматикасы, сан өрісінің аксиоматикасы, группаның аксиоматикасы, ықтималдықтар теориясының аксиоматикасы, математикалық құрылымдардың аксиоматикасы және басқалар жатады.

Егер кез келген жиын элементтерінің арасында тұжырымдардың /аксиомалардың/ белгілі жүйесімен сипатталатын қандай да қатынас анықталса немесе операция тағайындалса, онда осы бір жиында математикалық құрылым анықталған дейді.

«Құрылым» ұғымының басты ерекшелігі – табиғаты әр алуан болатын жиын элементтеріне оның жарамды болатындығында және де қарастырылатын қатынастар /немесе операциялар/ сипатының таңдалу тұрғысынан жоғары дәрежеге ие екендігінде.

Сондықтан белгілі аксиомалардың жиынтығымен қандай да бір жиын элементтері ие болатын қатынастар мен операциялардың мәнді қасиеттері сипатталады.

Шексіз көп әралуан құрылымдар бар және олардың жиынтығын белгілі бір ретпен оқу, зерттеу математиканың әр түрлі бөлімдерінің мазмұнын құрайды. Бұл қазіргі математиканы құрастыруға, яғни оны аксиоматикалық әдіспен құрылымдардың жүйесі ретінде көрсетіп берудің мүмкіндігін білдіреді.

## Математикалық құрылымдардың типі және олардың сипаттамасы

Математика ғылымында «құрылым» терминін енгізген Н.Бурбаки барлық математиканың іргетасын құрайтын бірнеше негізгі құрылымдарды ғана анықтады.

Нақтырақ айтқанда, олар бір-біріне келтірілмейтін құрылымдардың үш типін: алгебралық құрылымдарды, реттік құрылымдарды, топологиялық құрылымдарды анықтады /дегенмен, Бурбакилердің өздері негізгі құрылымдардың саны түпкілікті анықталды деп есептемейді/.

Математикалық құрылымдар аксиоматикасының мән-мағынасына тереңдемей, құрылымдардың негізгі типтерін жалпы түрде ғана қарастырайық.

### Алгебралық құрылым

а/ Жиындардың тобын, яғни әр алуан сипаттағы элементтерден және онда анықталған операциялардан құралған әр түрлі жиындарды қарастырайық. Әрбір жиынды құрайтын элементтердің табиғатына назар аудармай, осы қарастырып отырған топқа енетін кез-келген жиынды $A=\{x,y,z,...\}$ символымен белгілейік. A жиынында анықталатын операцияны f арқылы белгілейік. A жиынына тиісті кез-келген x және y элементтері үшін осы жиыннан сәйкес операцияның нәтижесі болатын z элементі табылады, яғни

$$\forall x,y \in \mathrm{A}, \quad \exists z \in A, \quad z=f\,(x,y)$$

Осында қарастырылатын жиындардың әрқайсысында анықталған операциялардың барлығы үшін ақиқат болатын жалпы қасиеттерді бөліп көрсетейік.

Коммутативтік: $\forall x,y \in \mathrm{A}, \quad f(x,y)=f\,(y,x)$

Ассоциативтік: $\forall x,y,z \in \mathrm{A}, \quad f\,(f\,(x,y),\,z) \;=\; f\,(x,\,f\,(y,\,z\,))$

Қайтымдылық: $\forall x,y \in \mathrm{A}, \quad \exists z \in A, \quad f\,(x,y) = Z$

Жалпы түрде өрнектеліп көрсетілген осындай үш қасиетті негізгі аксиомалар ретінде қабылдап, осы аксиомалар жүйесінен қарастырылып отырған жиындар тобына енетін /A,f/ жиынының кез-келгені үшін ақиқат болып табылатын басқа да салдарлар мен теориялық тұжырымдарды қорытып шығаруға болады.

Жоғарыда қарастырылған қасиеттермен /аксиомалармен/ сипатталатын /A,f/ жиынын коммутативтік топтың құрылымымен жабдықталған дейді. Осындай группаның құрылымы **алгебралық типтегі құрылымның** мысалы бола алады.

**Анықтама:** А жиында берілген қатынас А дағы екі элемент арқылы үшінші элементті бір мәнді (қалыпты) анықтаса, әдетте мұндай қатынас композиция заңы деп аталады.

**Анықтама:** Егер құрылым анықтамасындағы қатынас композиция заңынан тұрса,мұндай құрылым алгебралық құрылым деп аталады.

А жиында анықталған композиция заңы(бинарлық амал) әртүрлі болуы мүмкін. * амал А дағы бекітілген бір композиция заңы болсын. Сонда * амал А жиында алгебралық құрылым (А, *) ны анықтады дейміз. А жиында анықталған түрлі композиция заңдары түрлі алгебралық құрылымдарға алып келеді.

**Алгебралық құрылымға мыналар жатады: топтар, сақина, өріс, Буль құрылымы, т.с.с.**

### Реттік құрылым

б/ Алдыңғы жағдайдағыдай қандай да бір жиындардың тобын қарастырайық және бұған енетін әрбір жиын элементтерінің арасында қатынастар анықталсын.

Өткен жағдайға ұқсас қарастырылатын жиындар тобына тиісті кез-келген жиынды А={x,y,z,...} символымен, ал онда анықталатын қатынасты – P символымен белгілейік. Осындай жиындардың әрқайсысында анықталған қатынастар үшін ақиқат болып табылатын жалпы қасиеттерді бөліп көрсетейік.

1. Рефлексивтік: $(\forall x \in A), xPx$
2. Антисимметриялық: $(\forall x, y \in A); xPy \wedge yPx \Rightarrow x \equiv y$
3. Транзитивтік: $(\forall x, y, z \in A); xPy \wedge yPz \Rightarrow xPz$

Бастапқы аксиомалар ретінде осы үш қасиетті қабылдап барлық тұжырымдарды жиындар тобына енетін кез келген /A,P/ жиыны үшін де сәйкес қағидалар ақиқат болып табылатын жалпы теория құруға болады. Жоғарыда қарастырылған қасиеттермен /аксиомалармен/ сипатталатын /A,P/ жиынын қатаң емес реттік құрылымымен жабдықталған дейді. Бұл құрылым **реттік типтегі құрылымның** мысалы бола алады.

**Анықтама:** Егер кез келген А жиында 1-3 аксиомаларды қанағаттандыратын Р қатынас берілген болса, оны А жиында реттік құрылым анықталған деп атайды.

Мысалдар келтірейік: 1) Нақты сандар R жиынында «үлкен», «кіші», қатынастары 1-3 аксиомаларды қанағаттандырады , сондықтан да олар реттік құрылымға мысал болады. Яғни, (R,үлкен), (R, кіші) құрылымдар реттік құрылымдар.

### Топологиялық құрылым

в/ Қандай-да жиындардың тобын алайық. Осы жиындар тобына енетін әрбір жиынынан ішкі жиындардың тобын бөліп алайық.

Қарастырылатын жиындар тобының кез-келген жиынын Р, ал оған сәйкес қандай да ішкі жиындардың тобын Q арқылы белгілесек, онда оларға тән келесі жалпы қасиеттерді тұжырымдауға болады:

Q$\neq \phi, \phi \notin Q, \forall A \in Q, B \in Q, \exists / C \subseteq (A \cap B) / C \in Q$

Мұндай фильтрлеуші жиынның құрылымын анықтайтын Q жиыны, P жиынының фильтрі деп аталады. Фильтрлеуші жиынның құрылымы **құрылымның топологиялық типінің** мысалы бола алады.

### Математиканың «архитектурасы»

Іргетасын жоғарыдағыда айтқандай негізгі құрылымдар құрайтын, математиканы ары қарай түзу, конструкциялау екі негізгі тәсілмен іске асады: әртүрлі құрылымдардан түзілген күрделі құрылым құрастыру арқылы; қандайда негізгі құрылымның аксиомаларына бір немесе бірнеше толықтама аксиомалар қосу барысында пайда болатын арнаулы математикалық құрылым құрастыру арқылы жүзеге асырылады.

«Күрделі» құрылымның жеке мысалы ретінде коммутативтік сызықтық-реттелген топтың құрылымын, ал «арнаулы» құрылым ретінде- сызықтық реттік құрылымды алуға болады.

Күрделі құрылымның жасалуы математиканың бүкіл бір бөлімінің, ал арнаулы құрылымның түзілуі қандайда жалпы теориядан бөлінген әр түрлі өзінше дамитын теорияның (математика бөлімдерінің) пайда болуына алып келеді.

Математиканың қандай да бір бөлімін( мысалы, натурал сандар ұғымына анықтама болатын Пеано аксиомасы құрудың **аксиоматикалық әдісін** қарастырайық:

1. Құрастырылатын бөлім шеңберінде анықталмайтын (яғни анықтамасыз қабылданатын) алғашқы терминдер деп аталатын, саны шектеулі ұғымдар мен олардың арасындағы қатынастар іріктеледі;

2. Бастапқы ұғымдар мен қатынастардың өзара байланысын тағайындайтын және оларды жанама түрде анықтайтын ақиқаттығы дәлелдеусіз қабылданатын бірнеше бастапқы тұжырымдар-аксиомалар алынады;

3. Қарастырылатын бөлімге енгізілетін барлық жаңа ұғымдар бастапқы терминдер немесе бұрын анықталған қатынастар арқылы анықталады, ал бөлімнің барлық жаңа тұжырымдары (терминдері) дедукциялық жолмен алғашқы терминдердің немесе аксиомалардың (немесе бұрын дәлелденген теоремалардың) негізінде дәлелденеді және де қорытып шығару ережесі (ақиқат сөйлемнің бірі екінші бір ақиқат сөйлемнен туындайды) беріледі және ол математикалық логикада зерттеледі;

4. Аксиоматикалық теорияны нақты объектілер жиынында жүзеге асыру үшін аксиоматикалық теорияның көрнекі көрсетіліп берілуі (немесе модулі) пайдаланылады.

### Аксиоматикалық әдіс

Қандайда бір математикалық теорияны аксиоматикалық әдіспен анықтау үшін, алдымен ол теория қарастыратын объектілер және олардың арасындағы қатыстар анықталады. Ол объектілер мен қатыстарды бұл теорияның негізгі ұғымдары дейді. Математикада бір ұғымға анықтама беру үшін бұрын анықталған басқа ұғымдарды пайдаланады. Сонан соң бірқатар ұғымдар топтамасы анықтамасыз алынып,солардың жәрдемімен басқа ұғымдарды анықтауға тура келеді. Анықтамасыз алынатын бұл ұғымдармен қатар бірқатар тұжырымдарды дәлелсіз алады. Ол тұжырымдар бұл теорияның аксиомалары делінеді. Ол аксиомалар алынған негізгі ұғымдар арасындағы қатыстарды сипаттайды.

Әрине, анықтамасыз алынатын ұғымдар(аксиомалар) қалауынша алына бермейді. Олар белгілі бір шарттарға, талаптарға сай болады. Атап айтқанда аксиомалар жүйесі –қайшылықсыз, тәуелсіз және толық (жеткілікті) болуы керек.

Алынған ұғымдар мен олар арасындағы қатыстар және аксиомалар тізімі теория басында келтіріледі. Солардың жәрдемімен жаңа ұғымдар анықталып теоремалар тұжырымдалып, олар дәлелденеді.

Математикада аксиоматикалық(дедуктивтік) әдістің жаратылуына грек ғалымдарынан Пифагор, Аристотель, Платон, Евклид т.с.с. лар бастапқы қадам қойған. Бұл салада әсіресе, Евклидтің (Б.Э.Д. 340-287ж.ж.) қызметі үлкен болған. Евклид «Негіздер» (Бастамалар) деп атаған еңбегінде геометрияның логикалық құрылымын негіздеу мақсатында алдын ала анықтамалар келтіріп, кейін аксиомалар, постулаттар системасын қабылдады. Осылай ол өз заманының талабына сай геометрия «скелетін» құрды.

Аксиоматикалық әдістің мағынасын дұрыс түсіну мақсатында, орта мектепте үйренілетін геометрия курсына назар аударайық. Мұнда бірнеше теоремалар дәлелденген болып, дәлелденген әрбір теорема өзінен алдын келген теоремаларға негізделеді, сол сияқты,жұмыста дәлелсіз қабылдау үшін қажет болған пікірлер және ұғымдарды кездестіреміз: нәтижеде анықтамасыз қабылданған объекттер ( мысалы, нүкте, түзу, жазықтық, ара қашықтық) оларды байланыстыратын қатыстар (мысалы, нүктенің түзу бойында орналасуы,түзудегі кез келген нүктенің сол түзудегі басқа екі нүктенің «арасында» орналасуы, кесінді және бұрыштардың тең (конгруэнт) тігі) пайда болады.

Негізгі объекттер, оларды байланыстыратын қатыстар және тиісті аксиомалар системасын таңдап алу өте жауапты мәселе. Аксиоматикалық әдіс негізінде ой қорытуды қысқаша былайша сипаттау мүмкін: Бастапқыда анықталмайтын негізгі объекттер таңдап алынады,кейін оларды өзара байланыстыратын негізгі қатынастар-аксиомалар системасы таңдалады, сонан соң осы аксиомалар негізінде логика заңдылықтарына негізделген жағдайда жаңа—жаңа сөйлемдер (теоремалар) дәлелденеді.

**Аксиомалар системасына қойылатын талаптар**

Кез келген математикалық теорияның негізі ретінде алынған, қабылданған аксиомалар системасы мынадай талаптарға жауап беруі тиіс:

1) логика заңдылықтары бойынша аксиомалар системасынан бірін –бірі терістейтін екі сөйлем келіп шықпайтын болсын, яғни аксиомалар системасы қайшылықсыз болсын;
2) аксиомалар системасында қатысқан әрбір аксиома қалғандарының логикалық қорытындысы болмауы –теорема түрінде дәлелденбеуі тиіс ,

яғни аксиомалар системасындағы әрбір аксиомасы тәуелсіз болуы керек;

3) аксиомалар системасы қатарына осы системадан логикалық тұрғыда келіп шықпайтын жаңа аксиоманы қосу мүмкін бе,яғни аксиомалар системасы толық(кемелденгендік) қасиетіне мойынсынама ? Осы сұраққа жауап беретін болуы керек, яғни толық (кемелденген) аксиомаларға негізделеді.

Геометрияны аксиоматикалық құруға тиісті бұл сұрауларға 19 ғасырда толық жауап табылды. Бұл сұрауға жауап беруде ұлы орыс математигі Н.И.Лобачевский шығармашылығы және 19 ғасыр ғалымдарынан Е.Бельтрами, А.Пуанкаре, Ф.Клейн зерттеулері шешуші рол атқарды. Аксиомалардың белгілі системасы негізінде жүргізілетін тұжырымдардың қарама-қайшылыққа алып келу немесе келмеуі мәселесін шешуде математикада модель (интерпретация, сараптау) идеясы қолданылады.

Анықтама: Белгілі объекттердің жиындарының бірі анықталған болып, сол жиын элементтері арасында негізгі қатынастар( қатыстар) сақталып, мұнда аксиомалардың барлық шарттары орындалса, бұл аксиомалар системасының моделі құрылған деп аталады.

Мысалдар келтірейік. **1-мысал.** Бүтін сандар жиыны қосу амалына сәйкес, группа (топ) құратыны үшін, бұл жиын группа аксиомалары системасының моделі бола алады (мұнда негізгі объекттер бүтін сандар болып, негізгі қатынас қосу амалы болады).

**2-мысал.** Жазықтықтағы барлық геометриялық векторлар жиыны сызықтық кеңістік аксиомалары системасының моделі болады (мұнда негізгі объект геометриялық вектор болып, негізгі қатынастар векторларға қолданылатын сызықтық амалдар-қосу, векторды сан(скаляр)ға көбейту)

**Анықтама.** Аксиомалар системасынан бірін-бірі терісттейтін екі тұжырым келіп шықпайтын болса, бұл система қайшылықсыз( қарама-қарсы емес) система деп аталады. Керісінше, аксиомалар системасы қайшылықты система деп аталады.

Математикада қайшылықты системалармен жұмыс жүргізілмейді. Аксиомалар системасының қайшылықсыздығы қалай дәлелденеді?

Аксиомалар системасының қайшылықсыздығы осы система моделінің таңдап алынуына байланысты шешіледі. Егер тексерілетін аксиомалар тізімі берілген моделде орындалатындығы әйтеуір бір тәсілмен шешілсе және бұл модель объекттердің табиғатында қайшылыққа ұшырамаса,онда аксиомалардан бірін-бірі логикалық терістейтін екі тұжырым келіп шықпайтындығы, яғни бірде-бір фактты әрі дәлелдеп, әрі терістеп болмайтындығы белгілі болады. Мұны аксиомалардың қайшылықсыздығын дәлелдеу жолы дейміз.

**Анықтама.** Қайшылықсыз аксиомалар системасында әрбір аксиома сол системадағы қалған барлық аксиомалардың логикалық қорытындысы болмаса, мұндай аксиомалар системасы тәуелсіз система деп аталады.

Олай болса, аксиомалар системасының тәуелсіз болу талабы әрбір аксиоманың қалған аксиомалардың қорытындысы(нәтижесі, салдары) еместігін тексерумен дәлелденеді. Бұл мәселе төмендегідей шешіледі.

Аксиомалардың қайшылықсыз $A_1$, $A_2$,...,$A_п$ системасына тиісті, мысалы, $A_п$ аксиоманың тәуелсіз екендігін көрсету үшін бұл системадан $A_п$ ді шығарып тастап, оның орнына $A_п$— аксиома, яғни $A_п$нің мазмұнын терістейтін тұжырым енгізіп, аксиомалардың жаңа системасын құрастыру және оның қайшылықсыз екендігін дәлелдеу керек.

Аксиомалар системасының бір аксиомасының тәуелсіздігі, яғни оның өзбетінше аксиома екендігі бұл системадағы аксиомалар санын кемейту мүмкін еместігін білдіреді.

Аксиомалар системасының толықтылығының мазмұны мыналарды білдіреді, яғни аксиомалар қоспай осы теорияға тиісті әрбір дауды осы системаға сүйеніп оның орындылығын немесе терiскейін айту мүмкін болсын. Бұл талаптың орындалуы әдетте система үшін құрылған екі модель арасындағы изоморфизм деп аталатын ұғымға негізделеді.

**Анықтама.** Аксиомалар системасының екі Е, $E^1$ моделінің негізгі объектті (нүкте, түзу, жазықтық) арасында өзара біртекті сәйкестік орнатылған болып, бұл сәйкестікте элементтер(объект) екі моделде де біртүрлі қатынаста болса, яғни, $A \in E = A^1 \in E^1$ болса, бұл екі модель изоморфты деп аталады.

**Анықтама.** Аксиомалар системасына тиісті кез келген тұжырымдардың дұрыс немесе дұрыс еместігін анықтау мүмкін болса, аксиомалардың бұл системасы толық (кемелденген) деп аталады.

Аксиомалардың қайшылықсыз С(сумма) системасы берілген болсын, осы система негізінде құрылған теорияның барлық тұжырымдарын үш сыныпқа жіктеу мүмкін:

1. С(сумма) және одан логикалық тұрғыда келіп шығатын қорытындылар жәрдемінде дәлелдеу мүмкін болған тұжырымдар.
2. С(сумма) және одан логикалық тұрғыда келіп шығатын қорытындылар жәрдемінде терістеу мүмкін болған тұжырымдар.
3. С(сумма) және одан логикалық тұрғыда келіп шығатын қорытындылар жәрдемінде дәлелдепте және терістепте болмайтын\ мүмкін болған тұжырымдар.

Демек, С(сумма)ның әйтеуір бір моделі құрастырылған болса, 1 сыныпқа кіретін тұжырымдар осы модельде орынды болады, 2 сыныпқа кіретін барлық тұжырымдар осы модельде орынды болмайды, 3 сыныпқа кіретін тұжырымдар осы модельде орынды болып, С(сумма) ның басқа сондай моделі бар болып, сонда бұл тұжырымдар орынды болмайды. Мұнан белгілі болғандай, С(сумма) ның кез келген екі моделі өзара изоморф болса, аксиомалардың мұндай системасы толық болады.

Демек, аксиомалардың әйтеуір бір системасының толықтылығын дәлелдеу үшін оның кем дегенде екі моделін алып, олардың өзара изоморфтығын көрсету жеткілікті.

Математикада аксиомалардың толық болмаған системасыменде жұмыстар жүргізілуі мүмкін. Мысалы, группа аксиомалары системасы төрт аксиомадан құралған болып, олар толық емес, себебі бұл системаның бір-біріне изоморф болмаған екі моделін көрсету мүмкін. Ақиқатында, рационал сандар жиыны қосу амалына сәйкес группа құрады, мұнан басқа барлық нақты сандар жиыны да қосу амалына сәйкес группа құрады. Бірақ, бұл екі модель арасында изоморф сәйкестік құру мүмкін емес, себебі рационал және нақты сандар жиыны арасында өзара біртекті сәйкестік жоқ.

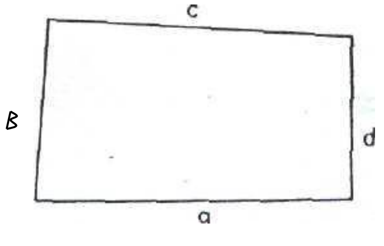
## 1.2 Геометрияның алғашқы ұғымдары

Математиканың негізгі салаларының бірі — геометрия, дүниеге ерте келіп, адамзат қоғамынын, даму тарихымен бірге жасасып келе жатқан ежелгі ғылым.

Ғылымның басқа салалары сияқты, геометрия да өмір талабынан, тіршілік қажетінен туған. Мұнан төрт мың жылдай бұрынғы тарихи деректерге қарағанда, геометрияның, алғашқы элементтері Египет (Мысыр) топырағында, Нил дариясының бойында пайда болған. Бұлай болуының, себептері де бар еді. Нилдін, екі жағындағы құнарлы шағын жерді жыл сайын тасыған су басып кетіп отырған, сондықтан оны дәл өлшеп бөле білу қажет болған.

Сол ерте кездің өзінде египеттіктер төрт бұрышты жердің ауданын өлшеу үшін калыптасқан, тұрмыста дағдыға айналған мынадай формуланы қолданған:

$$S=\frac{a+c}{2}\cdot\frac{b+d}{2}.$$



1-сызба

Мұндағы *a, Ь, c, d* әріптері арқылы төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғаларының ұзындықтары белгіленген (1-сызба).

Әрине, бұл формуланы пайдаланып кез- келген төрт бұрыштың ауданын дәл табуға болмайды, тек бұрыштары тік немесе соған жақын келетін төртбұрыштың ауданын ғана анықтауға болады.

Ал геометрия деп аталынудың өзі гректің жер өлшеу (землемерие) деген сөзінен алынған. Қазірде бұл атау математиканың үлксн бір саласына ғылыми термин болып сіңіп, кең ұғымға, пән атағына айналды.

Соңғы кездердегі ғылыми зерттеулерге қарағанда, вавилондықтардың геометрия саласындағы табыстары египеттіктердікінен кем болмаған, тіпті бірсыпыра мәселелерді шешкендс вавилондықтар алда болған: олардың қолдаған тәсілін алгебраның бастамасында аңғаруға болады.

Сөйтіп, геометриялық ғылыммен, алғаш жер өлшеу, үй салу тағы сондай тіршілік әрекеттерінен туып, сонан бірте-бірте терең абстракциялық бейнелерді кең шолитын, оларды мүлтіксіз логика тәсілімен зерттейтін, үнемі дамыған ғылым болды.

Қазіргі геометрия өзінің алғашкы дәрежесінен әлде қайда жоғары сатыға көтеріліп, теория жағынан терең бойлап, кең өріс алғанымен, практикадан қол үзбей, онымен байланысын күшейте түсуде.

Негізгі геометриялық ұғымдардың кейбіреулерінің қайдан шыққаны туралы айта кетейік.

Геометрияға ертеден сіңіп, ал қазір тіпті әдетке айналып кеткен терминдердің көбі тұрмыста кездесетін заттардың, құбылыстардың аттарынан алынғанын көреміз. Мысалы, «нүкте» орыстың «ткнуть», «уколоть» — тесу, шаншу деген сөзінен, ал түзу латынның «кендір» жіп деген сөзінен алынғаны айқын. Геометрияда нүкте, түзу деген ұғымдар өзінің тікелей мағынасын жойып, абстракциялық түсініктерге айналған. Сондай-ақ, грекше доптың атауы сфера, «ойын сүйегі» — куб, қарағайдың безі — конус тағы сондай атаулар геометриялық нақтылы ұғым беріп, төл терминге айналып кеткен. Көзге іліне қоймайтын керулі жіп түзу бейнесін берді десек, бір шеті бекітілген жіп циркуль орнына қолданылған. Жіпті тарту арқылы көпбұрыштарды сызу әдісі де ертеде көп қолданылған. Ол былай тұрсын, ежелгі Қытай мен Индия елдерінде тіпті геометрлер өздерін «жіп тартушылар» деп те атаған.

Геометрияның кайдан және қалай шыққаны туралы әр түрлі пікірлер бар. Мысалы, Аристотельдің (б. э. д. 384—322 ж.)' айтуынша, математиканы алға бастырып дамытқан — ғұлама абыздар (жрентер), олар бос уақытының бәрін математика теориясын шығаруға жұмсаған.

Мүмкін, абыздардың(жрецтердің) математика теориясымен көбірек шұғылдануға уақыт тапқандары рас та болар, бірак, олар математиканы өз ойларынан шығарды деу шындыкқа үйлесе қоймайды. Өйткені олардан бұрынғы практикада қолданылған математикалық фактілер жеткілікті болуға тиісті. Әрине, жрецтер сол фактілерді зерттеп, жинастырып, жүйеге келтіруге ат салысып, оларды ұрпақтан - ұрпаққа жеткізуге көмектескені рас болар , олар сол кездегі сауатты адамдар болды да, мәдениет мәселелеріне назар аударып отырды.

Геометрияны бір жүйеге келтірген шын ғалымдардың ішінде есімі тарихқа енбсй, ұмытылып қалғандары да аз емес, өйткені математиканың кейбір тараулары тым алыстан, адам баласының ең алғашқы саналы қадамынан басталады да, көптеген деректер сақталмаған. Геометрия ең көне пәндердің бірі болып табылады. Бізге жетіп келген тарихи мұраларға сүйенсек, геометриядан алынған алғашқы мәліметтер Үндістанда, Вавилонда, Мысыр және Қытайда пайда болып, олар таза практикалық талаптарды қанағаттандырған.

## Евклидтен бұрынғы геометрия

Бастауыш геометрияның ең бірінші авторы гректің атақты математигі Евклид (б. э. д. 330—275 ж.) өзінен бұрынғы ғасырлар бойы жиналғаи деректерді бір кітапка сыйғызьп, «Негіздер» деген атпен оқулық жазған. Одан бұрын талай геометрлер ғылымға көп еңбек сіңіргені даусыз. Бірақ олардың тек кейбіреулері туралы ғана көмескі деректер сақталған.

Тарихи деректерге қарағанда, геометрия ертедегі Египет пен Вавилоннан Грецияға ауыскан.

Басқа елдердің ғылыми табыстарын үйреніп, оларды өз еліне таратқан, өз жерінде онан әрі дамытуға алға бастырған грек ғалымдарының есімдері тарихта түгел сақталмағанымен біздің жыл санауымызға дейінгі VII—VIII ғасырларда геометрия ғылымын зерттеп дамытқан ғалымдар Фалес, Пифагор, Демокрит, Платон, Евдокс төңірегінде топтасқан ғалымдар екені анық. Ғалымдарды топтастырушы ұстаз болған осы Фалес, Пифагор, Демокрит, Платон, Евдокс туралы азды-көпті деректер келтірейік.

**Милеттік Фалес (б. э. д. 624—548 ж)** — «Ежелгі заманның жеті данышпанының» біріншісі деп аталған ғалым. Бұл өзінің ұзақ өміріндс ғылымның көп салаларында еңбек етіп, елеулі із қалдырған. Астрономия, философия, математика салаларында көп мұра қалдырумен қатар, ол мемлекеттік және моральдық зандарды да, жазып, өз заманында әйгілі адам болғаны мәлім.

Фалес геометрияның бірсыпыра теоремаларын тұжырымдап айтып, дәлелдеген. Мысалы, диаметрдін, шеңберді қақ бөлетіндігі, тең бүйірлі үшбұрыштың табанындағы бұрыштарының өз ара тендігі, вертикаль бұрыштардын өз ара теңдігі. туралы теоремалар, жарты шенберге іштей сызылған бүрыштын, тік болатындығы туралы теорема, үшбұрыш өзінің бір қабырғасы мен сол қабырға мен іргелес екі бұрышы бойынша анықталатындығы туралы теорема, тарихшылардын айтуынша, Фалес дәлелдеген теоремалар.

Математика тарихшыларынын. кейбіреулері Фалестің кезінде логикаға сүйенген, анықтамалар мен аксиомаларға негізделген геометрия болуға мүмкін емес еді деген пікірді қолдайды. Бірак, Прокл мен Евдокс өз тұсындағы математиканы олардан мың, жыл бұрын өмір сүрген Фалеске танды деудің қисыны келмейді. Біздің жыл санауымыздан 500—600 жыл бұрын ғана емес, онан мың, жыл бұрын да математика жүйеге келтірілген ғылым болды деген пікір көп мәліметтермен дәлелденеді. Қалайда Фалес және басқалар Вавилон мен Египетте сөне бастаған математиканы Греция топырағына көшіріп, оның қайта өркендеп, дамуына жол ашты деген пікірге ешкім таласа алмайды.

**Пифагор (б. э. д. 580—500 ж.).** Самостық Пифагордың атағы тек математиктерге ғана емес, мектепте оқыған жастардың, бәріне әйгілі. Онын, тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасының, квадраты онын, катеттерінің квадраттарының қосындысына тең деген теоремасы ($c^2$ = $a^2$ + Ь$^2$)көпшілікке әйгілі ақиқат ретінде «екі жердегі екі — терт» дегендей ұғымға айналды.

Пифагордын өмірбаяны туралы мәлімет аз болғанымен, онын, атағы тым зор. Ол Самос аралында туып, жасында Египет пен Вавилонияны аралап, математика, астрономия және философия ғылымдарын сонда оқып үйренген. Одан кейін Италияға көшіп, Сицилияда өзінің. атақты «Пифагор мектебін» ұйымдастырған. Бұл мектеп математика мен астрономиянын дамуына үлкен әсер еткендігі мәлім..

Пифагор және онын, шәкірттерI астрономия мен математиканың талай мәселелерін зерттеген, маңызды-маңызды теоремаларды дәлелдеген. Мысалы, мынадай теоремаларды атауға болады: 1) үшбұрыштын ішкі бұрыштарының қосындысы туралы теорема; 2) жазықтықты дұрыс үшбұрыштарға, төртбұрыштарға, алтыбұрыштарға дәл бөлуге болатындығы туралы теорема; 3) квадрат теңдеулерді геометрияша шешу әдісі; 4) өлшемдес емес кесінділердің болатындығы туралы теорема т. б.

Бүл келтірілтен теоремалардың әрқайсысы ол кездегі математика жағдайында ірі табыс еді, алайда ең ірі табыс деп өлшемдес емес кесінділер туралы теореманы тануға тура келеді.

Жоғарыда аталған тік бұрышты үшбұрыш туралы теорема жайында бірер сөз айта кетуге тура келеді. Пифагордан бұрын қабырғалары 3, 4, 5 сандарына тең, «египеттік үшбүрыш» деп аталатын үшбұрыш белгілі болған. Оның қабырғаларының арасындағы байланыс мына теңдікпен өрнектеледі: $3^2 + 4^2 =5^2$. Ал Пифагор мұны жалпы түрде, кез келген тік бұрышты үшбұрыш үшін дәлелдеген ($c^2 = a^2 +$ *Ь*$^2$). Мұндай жалпылап топшылау математиканың Пифагор мектебінде жоғары сатыға көтерілгендігін көрсетеді.

Пифагорлықтар сандар туралы, олардың ерекше қасиеттері туралы көптеген жалған пікірлер айтқан. «Достық», «қуаныш», «бақыт» тағы сондай халықтық ұғымдар сандарға тәуелді, соларға бағынышты деп үйреткен. Дгожина бақыттың, шайтан дюжинасы бақытсыздықтың нышаны деген соқыр сенім Пифагор тұсынан бері келе жатуы мүмкін.

Пифагор мектебіндс Пифагордыц жеке басына табыну, мистикаға салыну, ғылыми табыстарын көпке дейін жасырын сақтап, жариялағанда «ұстаздың» табысы деп санау әдетке айналған; онда шыққан геометрия оқулығын «Пифагордың мұрасы» деп атау міндет болған.

Дегенмен Пифагор және оның шәкірттері өз тұсындағы математика табыстарын бслгілі ғылыми жүйеге келтіріп, келесі ІІІ ғасырдағы грек математикасының дамуына үлкен жағдай туғызып, оның өрлеуіне көп себепкер болған .Сондықтанда Пифагордың атағы мыңдаған жылдар бойы даңққа бөленіді.

**Демокрит (б. э. д. 460—370 жылдар шамасы) және Платон (б. э. д. 427—347 ж.).** Ежелғі грек ғылымының атақты уәкілдері Демокрит пен

Платонды атамай кетуге болмайды. Бұлардың әрқайсысы тарихтан, әсіресе философия тарихынан, көрнекті орын алады. Екеуінің дүниеге көзқарасы бірі-біріне қарама-қарсы болғанмен, әрқайсысы философия мсн математикаға өз үлесін қосып, бағалы пікірлер айтқан. Демокрит — материалист, Платон идеалист. Маркстін, Демокритті «гректердің бірінші энциклопедиялық ақылды адамы» деп жоғары бағалағаны көпшілікке мәлім.

Аристотельдің айтуынша, Демокрит ғылымның барлық салаларынан хабардар болып, өзінше пікір айтқан ғалым. Ол философия, математика, физика, метеорология, зоология, эстетика мәселелерімен шұғылданып, көптеген еңбек жазған. Демокриттің, философия саласындағы аса құнды пікірі — оның «бөлінбейтіндер» — атомдар туралы пікірі. Математика тарихшыларынын, айтуынша, Демокриттің бұл пікірі геометрияда үлкен роль атқарған. «Бөлінбейтіндер» методына сүйеніп, Демокрит пирамида мен конустын, көлемдері туралы теорсмаларды тапқан. Кейінде Демокриттің бұл методын Архимед пайдаланып, аудан мен көлем жөнінде бірсыпыра жаңалықтар ашқан. Екі мын жылдан аса уақыт өткеннен кейін де Демокриттің бөлінбейтіндер методын Декарт, Кавальери, Паскаль сияқты ғалымдар пайдаланған. Демек, жаңа математиканың айнымалылар математикасының — негізін салуға Демокриттің де қатысы бар деуге болады.

Платон да ғылыми өмірдің қайнаған ортасында өмір сүріп, көптеген грек философтары мен математиктеріне ұстаз болған, академия құрып, оны басқарған. Сонымсн катар өз тұсындағы математика кемеңгерлерінен сабақ алып, математикаға ерекше назар аударған. «Геометрияны білмейтіндерге академияның есігі жабық»,— деген шартты жариялаған да Платон болған. Бұл шартты ол академия есігінің кірер алдына қақтырып қойыпты деген аңыз бар. Шынында, геометрияның негізгі анықтамалар мен аксиомаларға сүйеніп ғылыми жүйеге түсуіне, оның логикалық пән болуына Платон бірінші қатысқан ғалым. ІІІ ғасырда геометриянын, толық оқулығын жазып шығарған Евклидті де Платонның, шәкірті деп санайды.

**Евдокс (б. э. д. 410—356 ж.)** өз кезіндегі аса білімді адамдардың бірі болған. Астрономия, математика, механика мәселелерімен шұғылданған. Математика саласындағы аса маңызды еқбектерінің, бірі — пропорция теориясы. Кейін Евклид өзінік «Негіздерінде» осы теорияны пайдаланған. Евдокстің, математика ғылымына сіңірген құнды еңбегінің екіншісі — «түгесу методы» (метод исчерпывания). Осы методты қолданып, Евдокс пирамиданың, конустың, шардың көлемдерін тапқан.

Геометрияның Евклидке дейінгі даму үдерісіне қысқаша назар аударайық. Эрамыздан алдыңғы 7-6 ғасырларда Грецияның Милет қаласында жасаған Фалес өз дәуірінен алдын жинақталған тәртіпсіз геометриялық фактерді жалпылап, логика заңдылықтары негізінде дәлелдеуге қарекет жасаған. Фалес мынадай теоремаларды дәлелдеген:

1. Диаметрге тірелген іштей сызылған бұрыш тік бұрыш.
2. Дөңгелектің диаметрі оны тең екіге бөледі.
3. Вертикал бұрыштар тең

4. Тең қабырғалы үшбұрыштың табанындағы бұрыштары тең және басқалар.

Эрамызға дейінгі 6-5 ғасырларда геометрия көбірек Италияда дами бастаған. Бұл дәуірді Пифагор дәуірі деу мүмкін. Бұл дәуірде де фактерді ғылыми негіздеуге қарекеттер болған. Төмендегі теоремалардың логикалық дәлелдеуі де осы дәуірге сәйкес келеді.:

1. Үшбұрыш ішкі бұрыштарының қосындысы 180 градусқа тең.
2. Жазықтықты дұрыс үшбұрыштар, төртбұрыштар және алтыбұрыштармен орап шығу мүмкін.
3. Тік бұрышты үшбұрыш гипотенузасына жасалған квадрат ауданы катеттерге жасалған квадраттар аудандарының қосындысына тең.

Мұнан басқакөптеген мәліметтер де осы дәуірдің табысы болған. Мысалы, квадрат теңдеуді геометриялық шешу әдісі, дұрыс көпжақтың бес түрі (тетраэдр, гексаэдр, октаэдр, додекаэдр, және икосаэдр). Жетіскен табыстардың ең маңыздысы- жалпы өлшемге ие болған кесінділердің бар болуын дәлелдеу үлкен ғылыми табыс есептелінеді.

Эрамызға дейінгі 4 ғасырда геометрияның даму орталығы Афина қаласына көшті. Математика ғылымының бұл дәуірдегі дамуында Платон, Аристотель, Демокриттің философиялық мектептері және Евдокс, Менехм сияқты үлкен математикатердің үлесі үлкен болды. Бұл ғылыми мектеп мүшелері төмендегі екі мәселені шешуді қарастырғаны мәлім:

1. Геометрияны ғылыми негізде баяндау қағидалары, оның тұжырымдарын аксиома, анықтама және теоремаларға ажырату;
2. Дәлелдеудің формасы мен әдістерін жарату: анализ, синтез, кері ұйғару әдісімен дәлелдеу және тағы басқалар.

Бұл мәселелер негізінен логика ғылымының жаратушысы Аристотель (эрамызға дейінгі 384-322жылдар) еңбектерінде жарық көрген. Қорытындылай келе , Евклидке дейінгі дәуірде пәнді (әсіресе геометрияны) дедуктив негізде құрудың негізгі қағидалары кемелденіп орындалған, олар мыналар:

1. Негізгі ұғымдар(объекттер, оларды байланыстыратын қатынастар) келтіріледі;
2. Барлық керек аксиомалар баяндалады;
3. Теоремалар келтіріледі;
4. Әрбір теорема өзінен алдыңғы теоремаларға және аксиомаларға негізделіп дәлелденеді;
5. Жаңа енгізілген ұғымдарға анықтамалар беріледі.

Геометрияны дедуктивтік принциптерде(қағидаларда) құруды грек ғалымы Евклид өз заманасына сай қанағаттанарлықтай етіп шешті, 13 кітәптен тұратын «Негіздер» атты еңбегін жазды.

## 1.3 Евклид және оның геометриясы

Евклид өмірі жайлы бізге толық мәлімет жетіп келмеген. Ол біздің эрамызға дейінгі 300 жылдарды өмір сүрген болып, Птолемей патшалық жасаған дәуірде математикадан сабақ берген және патша ұйымдастырған музейдің математика бөлімін ашқан. Аңыз бойынша , күндердің бірінде патша Евклидті шақырып « «геометрияны үйренуге «Негіздер»ден де қысқа жол барма?» деп сұрағанда Евклид өркөкіректікпен былай деген екен: «Геометрияда патшалар үшін арнайы жол жоқ». Мұнан басқа Евклидтің «Оптика» және басқа еңбектеріде белгілі.

**Гректің ұлы математигі Евклидтің (б.э.д.330—275ж.)** өткен дәуірлерден мұра болып қалған, түрліше әдебиеттер мен трактаттарда және олардан басқа да деректерде бытырап жүрген геометриялық фактілерді мұқият жинастырып, жүйеге келтіріп, ғылыми анықтамалар мен аксиомаларға негізделген келесі еңбек жазғаны, оны «Негіздер» (латынша «Элементтер») деп атағаны көпшілікке мәлім. Бул оның атағын бүкіл әлемге әйгілі еткен мәңгілік мұра боп саналады. '

Сөйтіп, Евклидтің «Негіздері» оған дейінгі геометриялық табыстардың қорытындысы, автордың педагогикалық және ғылми зерттеулердің нәтижесі болып есептеледі.

Адамзат тарихында Евклидтің «Негіздер» шығармасы мен салыстыру мүмкін болған және әлі күнге дейін өз қадірін жоғалтпаған, өз заманасына сай терең ғылыми негізде жаратылған бірде-бір шығарманы көрсетуге болмайды. Оның тек қана 1482 жылдан бастап 500 реттен көбірек қайта баспада жарияланғандығы және дүниедегі өте көп тілдерге аударылғандығы жоғарыдағы пікірді растайды.

«Негіздер» он үш кітаптан құралады, ол .дүние жүзінің түрлі тілдерінде 500-ден аса рет басылып шығыпты.

Евклидта талай ұрпақ оқулық ретінде пайдаланған бұл «Негіздері» кейбір елдерде (Англия) қазірдің өзінде де оқулық больп саналады, өйткені ол ғылми-меодикалық жағынан өте жатық жазылған, сонымен қатар онда дедукциялык метод кең турде қолданылып, ол тұжырымды, жүйелі түрде жазылған.

Евклид өзінің «Негіздері» арқылы бүкіл дүниеге әйглі ғалым болғанымен, оның өз өмірі туралы мәліметтер тым аз кездеседі. Оньщ комментаторы, одан жеті жүз жыл ксйін больш өткен Проклдің айтуынша, Евклид Александрияда, Птолемей патшаның кезінде өмір сүргсн. Тарихшылардың айтуынша, Евклид өте адал, шын-шыл, кіші пейілді адам болған, ғылымға мейліншс берілген, ғылым жолын катты ұстаған ғалым болған. Проклдің айтуынша, Птолемей патшаның геометриямен айналысу себебі

—. Геометрияда «Негіздерде» көрсетілген әдістерден басқа жеңіл жол бар ма? — деп қойған сұрағына;

— Геометрияда патшаларға арналған жеңіл жол жоқ,—деп Евклид жауап беріпті. Құдіретті патша алдында тайсалмай осылайша жауап беруін оның, шыншылдығының, ғылымға шексіз берілгендігінің бір мысалы деп тануға болады.

Енді сол «Негіздердің» мазмұнына қысқаша тоқтайық.

Евклидтің «Негіздері»—он үш кітап. Алғашкы алты кітабы планиметрияға, келесі үш кітабы бүтін сандардың теориясына арналған, ал оныншы кітабында иррационал сандардың геометриялық теориясы жөнінде айтылып, солардың үш кітабында стереометрия туралы баяндайды. Евклидтің «Негіздері» бастауыш математиканы түгелінен қамтиды, тек кейіннен зерттеліп қосылған кейбір арнаулы мәселелерден басқа бастауыш математика түгелімен бұл шығармаға кірген деуге болады.

Біздің, ерекше көңіл бөлетін мәселелсріміз сол алғашқы алты кітапта баяндалған. Бірінші кітапта үшбұрыштардың тең болу шарттары, үшбүрыштардың қабырғалары мен бүрыштары арасындағы қатыстар,үшбұрыштарды жасау, түзулердің параллельдігі мен перпендикулярлығы, параллелограмдардың қасиеттері, үшбұрыштар мен көпбүрыштардың тен шамалы болуының шарттары, көпбұрышты тең шамалы үшбұрыштарға түрлендіру мәселелері және Пифагор теоремасы қарастырылған.

Екінші кітапта $(а+в)^{2} = а^{а}$ $+2ав+в^{2}$, $(а-в)в=ав+в^{2}$ және осы сияқты тепе-теңдіктер геометриялық формада талданады. Бұл кітэп квадрат теңдеуді геометриялық әдіспен шешумен аяқталады. Мұнда фигуралардың теңдігі жөніндегі кейбір теоремалар қарастырылған.,

Үшінші кітап шсңбер туралы. Мұнда негізінен шеңберге өткізілген жанама, қиюшы, центрлік бұрыштар, іштей сызылған бұрыштар қараған.

Төртінші кітапта шеңберге іштей және сырттай сызылған көпбүрыштарға арналған болып, дұрыс төртбұрыш, бесбұрыш, алтыбұрыш және онбесбұрыштарды жасау көрсетілген.

Бесінші кітапта пропорция теориясы баяндалады. Бұл тсорияны қазіргі математикада үлкен орын алатын иррационал шамалар теориясынық негізі деп санауға болады. Осы заманғы математиканың бір негізгі үғымы болып саналатын Дедекинд аксиомасының негізін де осы теориядан іздеу керек.

Бесінші кітапта тағы бір тамаша аксиома келтірілген, ол Архимед аксиомасы. Архимедтін, көптеген аксиомаларының ішінде бүл аксиома ерекше орын алады, сондыктан оны келтіре кетейік: «Кез келген екі кесіндіні салыстырғанда, қысқа кесіндіні жеткілікті есе қайталасак, ұзын кесіндіден асьш түседі».

Алтыншы кітапта пропорциялар теориясының қолданысы ретінде көпбұрыштардың үқсастығы теориясы мен көпбұрыш аудандарын табу берілген. Бұл кітап жоғарыда аталған екінші кітаппен мазмұндас.

Жетінші , сегізінші және тоғызыншы кітаптар арифметика және сандар теориясына арналған. Бұл кітаптардағы екі бүтін санның ең үлкен ортақ бөлгішін табу алгоритмі көңіл аударарлықтай өте маңызды болып, тағы да жай сандардың шексіздігі дәлелденеді.

Оныншы кітапта иррационал сандар теориясы қаралады.

Он бірінші, он екінші және он үшінші кітаптар стереометрияға арналған болып, оларда көпжақтар, айналу денелері және олардың көлемдері қаралып, дұрыс көпжақтар жайлы мәліметтер беріледі.

Евклид «Негіздерінің» әр кітабы жүйеді тәртіппен жазылган дедік. Біріншіден, бірқатар анықтамалар, одан кейін постулаттар мен аксиомалар келтіріледі, акырында соларға сүйене отырып теоремалар дәлелденеді. Бұл әдіс бастан аяк бұлжытылмай қолданылып отырады. Аристотель зерттеп шығарған мұндай логикалық әдіс ғылымның көп салаларына кең тарап. дәстүрлі жолға айналған.

Евклид дәлелдемелерінде барлык, жағдайды талдап, күмән қалдырмауды көздеген. Дегенмен күмән туғызатын мәселелер де кейіннсн табылып, олардың кейбіреулері ғасырлар бойы ғылыми таласқа түскенін, Евклид акиқат деп таныған мәселелердің кейбіреулері бертін келе өзгеріске ұшырап, жаңа идеялар туғызғанын ілгеріде сөз етеміз.

Сөйтіп, «Негіздердің» іргесін қалаған жалпы ұғымдарға кешейік. Келтірілген 13 кітаптің әрқайсысы ұғымдардың анықтамаларынан басталады, мысалы, бірінші кітапта 23 анықтама берілген, олардың кейбіреулерін келтірейік.

### Негізгі анықтамалар:

1. Нүкте дегеннің бөлігі жок.
2. Сызық дегеніміз ені жоқ ұзындық.
3. Сызықтың ұштары — нүктелер.
4. Өзінің нүктелеріне сәйкес бірдей орналасқан сызық түзу болады.
5. Бет дегеніміз — ұзындығы мен ені ғана бар нәрсе.
6. Беттің шекаралары сызықтар болады.
7. Жазықтық дегеніміз өзінің түзулеріне сәйкес бірдей орналасқан бет.
8. Жазық бұрыш дегеніміз — жазықтықтағы бір-бірі мен кездесетін және бір түзудің бойында жатпайтын екі сызықтың өз ара көлбеуі т.с.с.

Анықтамалардан кейін постулаттар (қазіргі уақытта постулар пен аксиома бір-бірінен ерекшеленбейді) мен аксиомалар беріледі.

### Постулаттар:

I. Әр нүктеден басқа кез келген нүктеге дейін түзу жүргізу мүмкін болсын..

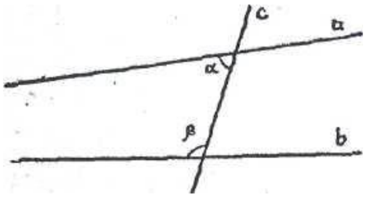
II. Шенелген тузуді қанша болса да соза беруге мүмкін болсын.

. III. Кез келген нүктеден қалаған радиуспен шенбер сызу мүмкін болсын.

IV. Барлық тік бұрыштар өзара тең болсын.

V. Екі түзуді үшінші бір түзумен қиып өткенде оның қай жағындағы ішкі тұстас бұрыштардың қосындысы екі тік бұрыштан кем болса, жеткілікті етіп созғанда ол түзулер сол жақтан қиылысады.

Былайша айтқанда, V постулат төмендегі жағдайды сипаттайды: егер а және *Ь* түзулерін *с* түзуі қиып өткенде пайда болған ішкі тұстас а және в бұрыштарының . қосындысы екі тік бұрыштан кем болса, сонда *а* мен' *Ь* түзулері жеткілікті етіп созғанда а және в бұрыштары жағында қиылысады (2-сызба).



Бұл ақырғы постулат параллелдік туралы Евклидтің әлемге әйгілі бесінші постулаты есептеледі. Евклидтің постулаттары тек қана геомөтриялык бей-нелерге арналған сияқты, өйткенI мүндағы келтірілетін ұғьщдардың бәрі де геометриялық ұғымдар. Постулаттардың аксиомаларға қарағанда бірінші көзге түсетін ерекшелігі осы, әйтпесе олардың аксиомалардан басқа өзгешелігі болмауға тиісті.

Ал бұл V постулат сөйлем құрылысы жағынан басқа постулаттардан ерекше болып көрінеді. Шын назар салғанда тіпті постулатка (аксиомаға) ұқсамайды: теорема тәрізді болып көрінеді. Евклидтің мұны осылайша тұжырымдап айтуында бір жасырын сыр бар деп ұғуға болады. Сондыктан да ғасырлар бойы бұл туралы ой туып, көп математиктер оны зерттей бастаған; постулат деп қабылдамай, теорема деп дәлелдей бастаған, турліше пікірлер жарыстырып, айтысқа салған.

Бәлкі, Евклидтің мұны әдейі жұмбақ етіп келтіруінің де бір себебі болған шығар. Теорема етіп дәлелдей алмай, жоғарыда айтылған көмескі түрінде ұсынып, ғалымдарға ой салуға мәжбүр болған болуы да мүмкін. Қалайда, V постулат түрлі пікірлер туғызып, талай математиктерге ой салып, мыңдаған жыл бір ұрпақтан екінші ұрпаққа көшіп, XIX ғасырға дейін шешілмей келді. Тек XIX гасырдың басында орыстың атақты ғалымы Николай Йванович Лобачевский Евклидтің геометриясын зерттей келіп, геометрия-ныц жаңңа идеясын тауып, өз геометриясын, евклидтік емес геометрияны, құрғанда ғана талас толастап, V постулат даудан арылды деуге болады.

Міне, сонымен байланысты V постулат туралы тарихта болған мәселелерді ілгеріде ерекше айтуға тиісті боламыз. Енді ЕвклидтІң аксиомаларын келтірейік.

### Аксиомалар

1. Әрқайсысы үшінші шамаға тең шамалар өз ара да тең болады.
2. Егер тең шамаларға тең шамаларды қоссақ, тең шамалар шығады.
3. Егер тең шамалардан тең шамаларды алсақ, тең шамалар қалады.

4. Егер тек емес шамаларға тең шамалар қосылса, ·тең емес шамалар шығады.
5. Егер тең шамаларды екі еселесе, тең шамалар шығады.
6. Тең шамалардың жартылары да тең болады.
7. Біріне-бірі сыйып дәл келстіндер тең болады.
8. Бүтін бөлігінен артық.
9. Екі түзудің арасына кеңістік сыймайды.

Евклидтің аксиомалары тек геометриялық бейнелер үшін емес, кез келген заттардың, ұғымдардың бәріне де қатысты, оларға еркін қолдануға жарайтынын көреміз. Мәселен, егер *А = С, В=С* болса, онда *А = В;* мұнда *А, В, С* деп белгіленгендер — сандар, кесінділер, заттың салмағы немесе үшбұрыштар және басқа ұғымдар болуы да мүмкін. Гильберт аксиомалардың, логикалық құрылысы ешбір ақаусыз болсын, олар қандай ұғымдарға болса да қолданылсын деген талаптардыда қойған. Евклидтің өзі де аксиомаларды «адам ойының жалпы табыстары» деп атаған.

Біз жоғарыда Евклидтін, «Негіздерде» кездесетін сегіз анықтама, бес постулатты және тоғыз аксиоманы келтірдік. Бұлар Евклид геометриясының логикалық іргесін қалап, мінсіз геометриялық жүйе құруға негіз болатын ұғымдар. Евклид барлық тұжырымдамалар осылардың салдары болып шығуын өзіне міндет етіп қойған Бұл міндетті негізінде орындап шыққанына Евклидтің еңбегінің екі мыңнан аса жыл бойы ескірмей оқулық болып келгені куә.

Бірақ ғылымның үнемі дами беруімсн, математиканың жаңа сатыға көтерІліп үдеуімен байланысты, Евклид «Негіздерінің» кемшіліктері де табылып, ол кемшіліктер. ді жою әрекеттері XX ғасырға дейін созылды. Міне, сол **кемшіліктер туралы қысқаша айта кетейік.**

Анықтамалар — Евклид геометриясындагы әлсіз, сын көтермейтін ұғымдардың бірі. Біріншідсн, бұл анықтамалар тек сыртқы сипаттама түріндс берілген, оларды геометрияда толық пайдалануға келмейді, өйткені олар негізінде дұрыс сипатталмаған және анықтауға жатпайтын бейнелерді — нүктелерді, түзулерді, жазықтықтарды — анықтаймын деп, оларды категория қатарына келтіріп, ғылыми мәнін көмескілендіріп алған. Нүкте, түзу сызық және жазықтық деген ұғымдардың бәрі де жалпы геометриялық үғымдар мағынасында жұмсалғаны болмаса, оларға математикада аныктама берілмейтіні еленбеген. Бұл абстракцияланған ұғымдар практикада нақтылы мағына тауып, геометриянық өрісін кеңітіп, оны ғылымның жоғары сатысына көтеретіні ескерілмеген. Бұл мүмкін Евклидтің кінәсы емес шығар, мұны сол кездегі ғылымнын, ондайлық жоғары дәрежеде болмағандығынан туған жағдай деп түсінген дұрыс болар.

Евклидтің постулаттары мен аксиомаларында бірден көзге түсетін кемшілік — олардын түгел болмауында, геометрияны логика зандарына сай құру үшін керекті аксиомалар толық жстіспеуіндс. Мәселен**, «үздіксіздік» аксиомасы еш жерде кездеспейді, бұл өте басты кемшілік.**

«Негіздсрдегі» бірінші теорема: «Берілген *АВ* кесіндісі бойынша тең қабырғалы үшбұрыш құру керек» делінген. Мұны дәлелдеу үшін Евклид мына әдісті колданады: кесіндінің *Л* нүктесінен *ЛВ* радиусымен шеңбер сызады, одан кейін *В* нүктесінен *ВА* радиусымен екінші шеңбер сызады. Екі шеңбердің қиылысқан *С* нүктссін Л және *В нү*ктелерімен косып, тең қабырғалы үшбұрышты табады.

Бұл шеңберлерді сызуда Евклид «кез келген нүктемен қалаған радиуспен шеңбер сызуға болады» деген постулатка сүйенеді, бірак Евклид аксиомаларының ішінде «үздіксіздік» аксиомасы болмағандықтан, екі шеңбердің ең болмаса бір нүктеде қиылысуы ешбір аксиомаға негізделмегсн, интуицияға сенгендіктен туған. Евклидтің кітабында «арасында», «бір жағында», «ішінде», «сыртында» және басқа сондай ұғымдар кездеспейді. Сондықтан кей теоремаларды дәлелдегенде бұл ұғымдарды ескермеу салдарынан қате шешімдерге келіп отырады.

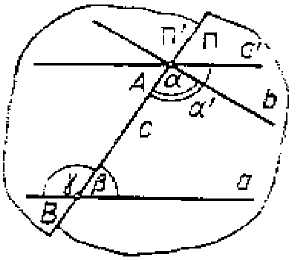
Жоғарыда келтірілген постулаттар мен аксиомалар логикаға сүйенген геометриялық жүйе құруға жеткіліксіз екенін, кейін, геометрияның аксиоматикасын қарастырғанда байқаймыз.

Енді V постулатқа ерекше тоқтап, оның тарихымен байланысты мәселелерге көшейік.

# 2.Бесінші постулат және оны дәлелдеу әрекеттері

## 2.1 Бесінші постулатқа эквивалентті (мәндес) ұйғарымдар

Теорема (кері теорема). *Егер а түзуінен тысқары жататын әрбір А нүктесінен сол а түзуіне параллель болатын бір ғана түзу өтетін болса, онда V постулат дұрыс болады* (оны теорема ретінде дәлелдеуге болады).



2-сызба

■ Тік бұрыштың шамасын *d* әрпімен белгілейік..Жазық бұрыш екі тік бұрыштың қосындысындай болады, сондықтан оның шамасы 2d-ге тең болады.

*а* түзуі мен $A \not\subseteq a$ нүктесі берілсін, *А* нүктесі арқылы екі түзу, атап айтқанда, *а* түзуін *В* нүктесінде ,қиып өтетін *с* түзуі мен

$a+\beta<2d$ (1)

теңсіздігін қанағаттандыратын *в* түзуі өтсін (2-сызба). *в* түзуі *а* түзуін қиып өтетіндігін және олардың $в \cap a$ қиылысу нүктесі *с* түзуімен шектелген, *а* мен *в* бұрыштары орналасқан, П жарты жазықтығында жататындығын дәлелдеу керек.

$a'+\beta'=2d.$ (2)

болатындай етіп, бір $A \in a'$ түзуін жүргізейік. Сонда (1), $(2) \Rightarrow a<a' \Rightarrow в \neq a'$

$Y + \beta = 2d$ (3)

болатындықтан, (2), (3) $\Rightarrow a' = \gamma$ шығады. Бұдан $a' \backslash\backslash a$ болатындығы көрінеді (ал *а'* түзуі *а* түзуін қиып өтеді деу тағы да үшбұрыштың сыртқы бұрышы туралы теоремаға қайшы қорытындыға келтірер еді, сыртқы бұрыш туралы теореманың дәлелдемесінде V постулат пайдаланылмайды). Біз айтылып отырған параллель түзудің біреу ғана болатындығын постулат ретінде қабылдадық. Сондықтан *в* түзуі *а* түзуін($в \neq a'$) қиып өтеді. Енді

$b \cap a \in П$ болатындығын дәлелдеу ғана қалды. $a<a'$ және $a'=\gamma$ болғандықтан, $a<\gamma$ болады. Сондықтан *а* және *в* түзулері *с* түзуімен шектелген, бірақ *а* мен в бұрыштарын қамтымайтын $П^{/}$ жарты жазықтығында қиылыса алмайды, өйткені қиылысады деп ұйғару, тағы да үшбұрыштың сыртқы бұрышы туралы теоремаға қайшы қорытындыға келеміз, олай болса, *a* және *b* түзулері П жарты жазықтығында қиылысады. ■

Сонымен, V постулат мынадай ұйғарымға эквивалент болады: $A \notin a$ нүктесінен өтіп, берілген *a* түзуіне параллель болатын бір ғана түзу болады.

Одан әрі екі параллель түзуді үшінші бір түзу қиып өткенде құралатын сәйкес бұрыштардың конгруэнт болатындығы, үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы **2d** тең болатындығы т.б. теоремалар дәлелденеді. Демек, V постулат геометрияның маңызды теоремаларының көпшілігінің негізінде жатыр.

Евклид заманынан XIX ғасырдың аяғына дейін V постулатты дәлелдеу жолында көптеген әрекеттері болды (Прокл — б. э. дейінгі V ғ., Омар Хайям— 1048—1123 жылдар, Валлис— XVII ғ., Саккери мен Ламберт — XVIII ғ., Лежандр — 1752— 1833 жылдар). Әдетте мұны дәлелдемекші болған авторлар V постулаттың өзіне пара-пар баска бір пікірге сүйеніп отырған, солай етіп отырғандықтарын өздері аңғармаған. Біз ол қате «дәлелдемелерді» қарастырмаймыз, тек кейбір дұрыс нәтижелерге ғана тоқталамыз, бұл дұрыс нәтижелердін ең айкын дәлелдемелерін Лежандр тапқан.

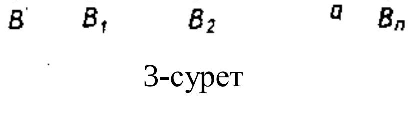
Ең әуелі Лежандр Насыреддин Тусидың (бұл — XIII ғасырда өмір сүрген азербайжан математигі) мынадай теоремасын дәлелдеді:

Теорема. *Егер әрбір үшбұрыштың бұрыштарының қосындысы 2d-ға тең болса, онда V постулат дұрыс болады.* (Демек, бұл сөйлем V постулаттың тағы да бір эквиваленті болады, өйткені тура ұйғарым дұрыс).

*a түзуі мен* $A \notin a$ *нүктесі берілсін.* $(AB)\perp a$, $a'\perp(AB)$ түзулерін $A \in a'$ жүргізейік. $a \cap a' = 0$ болатындығы мәлім, $a'$ тан басқа кез келген бір $A \in в$ түзуі *a* түзуін киып өтетіндігін және шекарасы *(AB)* болатын, $\beta$ сүйір бүрышы жататын жарты жа-зықтықта қиып өтетіндігін дәлелдейік (3-сурет). Айтылып отырған жарты жазықтықта *a* түзуінің бойына біртіндеп мынадай кесінділерді өлшеп салайық: $[BB_1] \cong [AB]$, $[B_1B_2] \cong [AB_1]$, ... , $[B_{n-1}Bn] \cong [AB_{n.1}]$.

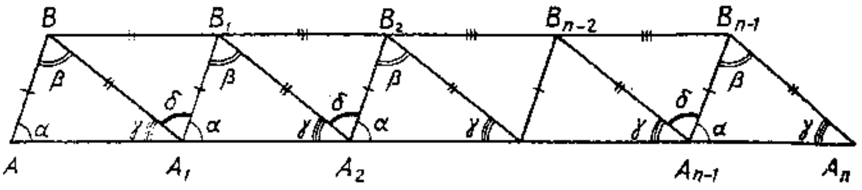
Шарт бойынша әрбір үшбұрыштың бүрыштарының қосындысы 2d-re тең болатындықтан және салуымыз бойынша $ABB_1$ үшбұрышы тең бүйірлі болғандықтан, $<BAB_1 = <AB_1B = d/2$ болады.

Ал $<AB_1B$ бұрышы тең бүйірлі $<A\ B_1B_2$ үшбұрышының сыртқы бұрышы болады, сондықтан $AB_2\ B_1 = d/4$. Одан әрі де осылай қарастырып, $<AB_nB = d/2^n \ => <BAB_n = d — d/2^n$ болатындығына көз жеткіземіз.



3-сурет

Шарт бойынша $\beta < d$. Ал $n$ санын кажетінше, $<BAB_n>$ β болатындай етіп ала беруге болады. Сонда $b$ түзуі $ABB_n$ үшбұрышының $A$ төбесінен өтіп, оның ішкі облысын қиып өтетін болады. Одан $b$ түзуінің



4-сурет

$a$ түзуін $B$ мен $B_n$ арасында жататын бір нүктеде қиып өтетіндігі туралы қорытынды шығады.

Теорема (Саккери — Лежандрдың бірінші теоремасы). *Кез келген үшбұрыштың бұрыштарының қосындысы 2d-ден артық бола алмайды.*

■ Бір $ABA_1$ үшбұрышын алайық та, $(AA_1)$ түзуінің бойына $[AA_1]$ кесіндісін $n$ рет өлшеп салайық (4-сурет): $[AA_1]\cong[A_1A_2]]\cong\ldots\cong[A_{n\cdot 1}A_{n\cdot}]$
Осы кесінділердің әрқайсысында $ABA_1$үшбұрышына конгруэнт болатын бір үшбұрыш салайық (бәрі де $(AA_1)$ түзуінің $ABA_1$ үшбұрышы жатқан жағынан салынады). Сонда мынадай конгруэнт үшбұрыштар шығады (екі қабырғасы мен $\delta = 2d—(a + \gamma)$ бұрыштары бойынша):
$\Delta BA_lB_l\cong B_lA_2B_2\cong\ldots\cong\Delta B_n\text{-}_2A_n\text{-}_1$, $\mathbf{B_{n\text{-}1t}}$ **бұдан** $[\mathbf{B}B_l]\cong[B_lB_2]\cong\ldots$ $\cong[B_n\text{-}_2B_{n\text{-}1}]$
кесінділерінің конгруэнттігі шығады.
$a+\beta+\gamma\leq 2d$ болатындығын дәлелдейік. Керісінше ұйғарып,
$a+\beta+\gamma\leq>2d$ (4) делік. Бірақ $a+\beta+\gamma\leq=2d$
(4), $\mathbf{(5)}\Rightarrow \beta>\delta\Rightarrow\mathbf{[AA_l]>[BB_l]}$
шығады (екі-екіден сәйкес конгруэнт қабырғалары **бар** $\Delta \mathbf{ABA_1}$ және $\Delta BA_1B_1$ үшбұрыштарын қараңыз).
Сынық сызық туралы теорема бойынша:
$\mathbf{[AA_n]<[AB] + [BB_1] +[B_1B_2] + \ldots + [B_{n\text{-}2}B_{n\text{-}1}] + [B_{n\text{-}1}A_n],}$
яғни $\mathbf{n\,[AA_1]<[AB] +(n\text{-}1)\,[BB_1] +[BA_1]\Rightarrow n\,([AA_1] - [BB_1])}$
$\mathbf{<[AB] + [BA_1]- [BB_1].}$ Қысқаша былай белгілеп алайық:
$\mathbf{[AA_1]- [BB_1] = [PQ],}$ $\mathbf{[AB] + [BA_1]- [BB_1] = [CD].}$ Сонда
$\mathbf{n[PQ]< [CD].}$ **(6)**
болады. $n$ санын қажетінше үлкен етіп ала беруге болатындықтан, (6) теңдік Архимед аксиомасына қайшы келеді. ■

Ендеше, $a+\beta+\gamma>2d$ деп ұйғару дұрыс емес. Сондықтан, $a+\beta+\gamma\leq 2d$

Сонымен, ешқандай үшбұрыштың бұрыштарының қосындысы $2d$ ден аспайтын болды. Енді мынадай сұрақ туады: бұл қосынды кейбір үшбұрыштарда $2d$ -ден кем, кейбір үшбұрыштарда 2d-ге тең болып шығып жүрмес пе екен? Мәселенің олай бола алмайтындығы Саккери — Лежандрдын, екінші теоремасынан (біз бұл теореманың дәлелдемесін келтірмейміз) көрінеді:

*Егер бір үшбұрыштың бұрыштарының қосындысы 2d-ге тең* ***болса, онда*** *кез* ***келген*** *үшбұрыштың бұрыштарының қосындысыда 2d-ге тең болады.*
Салдар. Егер бір үшбұрыштың қосындысы *2d-ден* кем болса, онда кез келген үшбұрыштың бұрыштарынsocket қосындысы да *2d-ден* кем болады.

## 2.2 Бесінші постулат проблемасы және оны дәлелдеу әрекеттері

Евклидтің кітабындағы бірінші 28 теорема V постулатқа сүйенбей дәлелденеді. Тек қана 29-теоремада V постулат бірақ рет қолданылады, сондықтан осы және үшінші параграфтағы айтылған ссбептерге байланысты Евклидтен кейіпгі ғалымдар оны постулаттар тізбегінен, алыптастаса да болады ғой деген ойға келеді. Әрине ол үшін бұл постулатты теорема ретінде дәледеу керек.

.Евклидтің V постулатын дәлелдеуге қатысқан математиктердің санын келтіру өте қиын, өткен екі мың, жыл ішінде әр елде, әр кезде бұл мәселеге соқпай кеткен математик жоқ деуге болады. Шығыста да, Батыста да математиктер бұған ерекше назар аударды: кейбіреулер бар өмірін осыған сарп етіп, ешбір шсшімге келе алмаса, кейбіреулерI шешімгс келдім деген сеніммен өмірін өткізді. Сонымен, V постулатты дәлелдеу математикадағы үлкен бір проблемаға айналды.

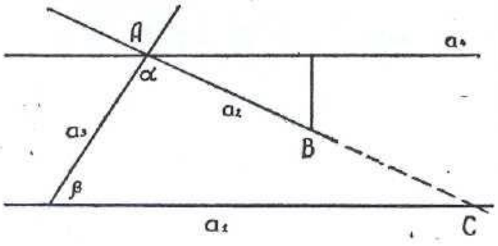
Енді осы проблеманы зерттеумен шұғылданған ғалымдардың басты-басты уәкілдерінің V постулатты өздерінше дәлелдемекші болғандағы зерттеулерге қысқаша тоқталайық.

**1. Прокл (410—485)**—гректің атақты математигі Евклид «Негіздерінін.» бірінші кітабына латын тілінде «комментарий» жазып, оған көптеген қосымшалар енгізген ғалым. Оның еңбегі күнI бүгінге дейін сақталған, 1873 жылы ағылшын тілінде басылып шыққан данасы Англияда қазірде тарихи мұра есебінде бағаланады.

Тарихи мәліметтерге қарағанда Прокл Евклид еңбектерін Египетте және Вавилонияда оқып зерттеген. 0л Афинада мектеп ұйымдастырып, геометриядан сабақ *бе*ріп, V ғасырдағы ірі математик және философ атағына ие болған.

V постулат туралы Прокл: «Бұл, постулаттар қатарынан шығарылуға тиісті, ол шынында теорема»,— деп жазады. Прокл V постулаттын, теорема есебінде дәлелденетініне ешбір шүбә келтірмсйді, қайткенде де теорема түрінде дәлелденеді деп сенеді. Сондықтан да оны теорема етіп дәлелдеу Проклдан басталуы мүмкін.

V постулатты Проклдың теорема етіп дәлелдегенін келтіре кетейік.



5-сызба.

БІр жазықтықтағы екі түзуді *a,* және $a_2$ деп белгілеп, оларды қиып өтетін үшінші түзуді $а_3$ деп белгілейік. 5-сызбада көрсетілгендей, a+в<2d болсьн.

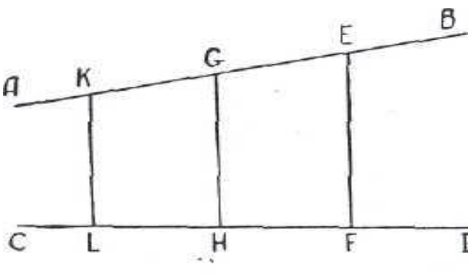
Жеткілікті етіп созғанда $a_x$ және $a_2$ түзулсрі бір *C* нүктесінде қиылысуға тиістілігін дәлелдеу кcрек.

Көрсетілген *A* нүктесі арқылы $a_x$ түзуіне параллель етіп $а_4$ түзуін жүргіземіз $a_2$ түзуінің бойынан алып нүктесін алып, одан $о_4$ түзуіпе перпендикуляр түсірейік. Сонда *Л* нүктесінен *B* пүктесі $a_2$ түзу бойымен қашықтаған сайын оның $а_4$ түзуінеи ара қашықтығы өсе береді. Ал параллель екі түзудің *{n* мен $a_4$*)* қашықтығы әрқашан да тұрақты шама, сондықтап $a_x$ тузуінің бойында да $a_2$ түзуінің бойында да жататын С нүктесі табылады. Теорема дәлелденді. Бұл дәлелдемесінде Прокл екі параллель түзулердің ара қашықтығын тұрақты шама деп алып отыр. Сондықтан теореманың дәлелдемесі толық болу үшін осы жағдайды да дәлелдеу керек еді. Ал параллель түзулердін, ара қащықтығы тұрақты шама болады деп ұйғарудың өзі V постулатпен парапар . Олай болса бұл дәлелдеу толық емес деп табылады.

**2. Нәсіреддин (1201-1274)** Евклидтің «Негіздерін» араб тіліне бірінші аударған азербайжанның атақты математигі. Өзінін, аудармасында ол көптеген комментарийлармен ескертулерді қосып, талқылап берген, біра қоның аудармасы үщ жүз жылдай жарыққа шықпай, тек 1594 жылы Римде басылған. Нәсіреддин де Евклидтің V постулатын дәлелдемекші болып көп еңбектенген. Ол ғалымдардың ішіндегі ең бірінші болып постулатты дәлелдеуге үшбүрыштың ішкІ бұрыштарының қосындысын қолданып, «бұрыштар проблемасы» деп аталатын мәселені енгізген. Сондықтан да Нәсіреддиннің зерттеген мәселесі ғылым тарнхында ерекше орын алады, өйткені одан кейін дәлелдеушілердің кө6і соның жолымен әрекеттер жасағанын көреміз.

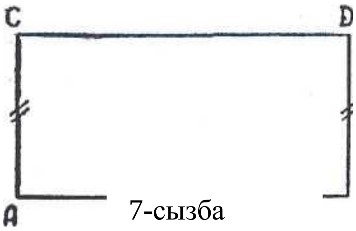
V постулатты дәлелдеу үшін Нәсіреддин төмендегі үш лемманы қарастырады.

Лемма. *AB* және *CO* екі түзу берілсін (4-сызба). *AB* тузуінің бойындағы *K, 0, E* нүктслерінен *CO* түзуіне *KL, CH, EF* перпсндикулярлар түсірілсін дс, олардың *AB* түзуімен жасайтын



6-сызба

бұрыштары бір-біріне тең болмасын. Сонда $ЛВ$ мен $СО$ түзулері сүйір бұрыштар жағынан бір-біріне жақындайды да, ал доғал бұрыштар жа ғынан қашықтайды. Бұл лемманы Нәсіреддин дұрыс дәлелдемейді.



7-сызба

II лемма. $AB$ кесіндісін алып, оның 1 және $B$ нүктелерінен $ЛС$ жэпо $BO$ перпендикулярларын жүргізейік, олардың бойына $AC = BO$ кесінділерін салайық, сонда $C$ және $O$ нүктелерін қоссақ, $ABCO$ төртбұрышының $ЛСО$ және $BOC$ бұрыштары тік болады да, $ЛВ$ кесіндісі $OC$ кесіндісіне тең болады (6-сызба),

Дәлелдеу қарсы жору арқылы жүргізіледі. $АСФ$ деп ұйғарайық; онда ол не сүйір, не доғал болуға тиісті. Біз оны сүйір бүрыш делік, онда, 1 леммаға сойкес, $ЛС>OB$ болады, бірақ бұл В қойылып отырған шартка қайшы келеді, өйткені $AC$ деп алдық. Сондыктан $ACO$ тік бұрыпг болу керек.$BOC$ бұрышьшың да тік екендігін және $CO$ мен $AB$ ке-сінділерініц бір-біріне тең екендігін осылай дәлелдеуге болады.

$A$ мен $B$ бұрыштары тік, $AC$ мсн $BO$ қабырғалары тең болатын $ABOC$ төртбүрышын бірінші рет Омар Хайям қарастырған. Сондықтан да осындай төртбұрыштарды Омар Хайямның төртбұрыштары дейді.

III лемма. Әр үшбұрыштың бұрыштарының қосындысы екі тік бұрышқа $(2d)$ тең.

Бұл лемманы дәлелдеу ушін жоғарыдағы $ABCO$ төрт-бұрышын алып, оған $Аи$ диагоналын жургізеді. Одан шыққан екі үшбұрыштың ($ABO$ мсн $AOC$) әрқайсысынын бұрыштарының қосындылары екі тік бұрышқа тең деп дәлелдейді.

Нәсіреддин осы үш леммапы пайдалапып, V постулатты дәлелдеуге кіріседі.Бірақ бірінші леммасының дәлелдемесі қате болғандықтан, ол V постулаттық мәселесін шешті деп айта алмаймыз.Нәсіреддиннің үшбурыштың ішкі бүрыштарыныц қосындысы екі тік бұрышқа (2<і-ге) тең дегенінің өзі V постулатқа парапар, онымен эквивалентті екендігін ескертейік.

## Саккери, Ламберт және Лежандр жұмыстары

V постулатты дәлелдеу үшін төртбұрышты пайдаланған математиктің бірі — Саккери, енді соның көзқарасына да тоқтай кетейік.

**3. Саккери** (1667—-1733)— Италия математигі. Ол 1733 жылы өзінің «Кемкетігінен арылған Евклид» деген кітабын шығарып, онда Нәсіреддин қарастырған Омар Хайямнын, төртбурышын зерттейді. Сол арқылы V постулатты дәлелдеуге әрекет жасайды. Омар Хайямның тертбұрышында $A$ мсн $B$ бүрыштарып тік бұрыштар деп алып,Саккери $C$ және $O$ бұрыштарынын. өз ара тең екендігін дәлелдеп алып, олар туралы үш түрлі жорамал жасайды:

1. Олар тік бүрыштар.
2. Олар доғал бүрыштар.

3. Олар сүйір бұрыштар.

Саккери бірінші жағдайды дәлелдсуге айрықша на-зар аударды, өйткеиі онда V постулатты дәлелдеу қиын болмайды. Бірінші жағдайды дәлелдеу үшін екінші мен үшінші жағдайлардық қайшылыққа соқтыратынын дәлелдеу керск. Саккери скінші жағдайдың қайшылыққ келтіретініп дәлслдейді. Бірақ қанща әрекет жасаса да, үшінгпі жағдайдың қайшылыққа кслтіретінін дәлслдей алмады. Саккери осы үшінші жорамалынан қандай қорытынды шығатындығын аңғара алмаган, ал шынында онық бүл жорамалы кейіп Лобачевский геометриясьша келтірді

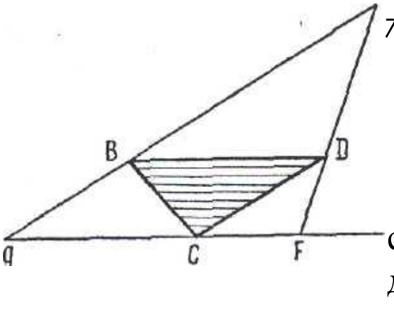
**4. Лежандр** (1752—1833). Үшбүрыштың ішкі бұрыштары- ның проблемасы Нәсіреддиннен басталып, оған Саккери тоқта- ғанын жоғарыда айттық. Бүл мәселемен келесі математиктер де, әсіресе француз матсматигі Лежандр көп шұғылданды. Ол «Геометрияның негіздері» деп аталатын өзінін үлкен кітабын шығарды, ол кітап көпжылдар бойы атаулы оқулық болып келді. Бұл кітабында, басқа да еңбектерінде, Лежандр «бүрыштар проблемасына» қайта оралып, V постулат мәселесін толық зерттеді, өзінік дәлел- демесін берді.

Лежандр V постулатты дәлелдеу үшін үшбүрыштың Ішкі $\alpha, \beta, \gamma$ бұрыштарынын, косындысы жөнінде үш түрлі ұйғаруды қарастырады;

1) $\alpha+\beta+\gamma=\pi$,
2) $\alpha+\beta+\gamma>\pi$,
3) $\alpha+\beta+\gamma<\pi$.

Лежандр бірінші жағдайды дәлелдегенде V постулатты да дәлелдеугс болады дейді. Ал бірінші жағдайды дәлелдеу ушін соңғы екі жағдайды кайшылыққа келтіру керек, Екінші жағдайдың қайшылыққа келтіретінін Лежандрды дәлелдегенін ескертіп, снді үшінші үйғарудың орындалмайтындығын Лсжапдрдың өзінше қалай дәлелдегенін өзөн қарастырайық,

Бір я>е>0 саи алып, *ЛВС* үшбүрышыньтқ (8-сызба) бұрыштарының қосьщдысы я—е-ге тең деп алайык- *В* тө-бесі арқылы *АС* қабырғасыиа параллель, *С* төбесі арқылы *АВ* қабырғасына параллель тузулер жүргізейік.



8-сызба

Осы тузулер *О* нүктесінде қиылысын. Пайде болған *ВСО* үшбүрышының да бұрыштарының қосындысы *л* — 8-ге теи болуга тиіс. Енді *О* нүк-тесі арқылы түзу жургі-зейік, ол *А* бұрышыныи қабырғаларын *Е* және *Ғ* нүктелерінде қиып өтсін, *СОҒ* және *ВЕО* үшбурыштарының бұрыштарының қосындылары да я-дем артпауға тиісті. Бул қосындыларды я — й және *л* — γ деп белгілейік (б>0, γ>0).

Енді осы үшбұрыштардың бурыштарының қосындысын табайық:

$$2(\pi-\varepsilon)+(\pi-\delta)+(\pi-\gamma)=4\pi-2\varepsilon-\delta-\gamma.$$

Бұл қосындыны басқа түрде де жазуға болады. *B, C, D* нүктелеріндс әрқайсысы *π*-ге тең үш бұрыштар пайда болады. Сондықтан, *6(AEF)* деп *AEF* үшбұрышынық ішкі бурыштарыныц қосындысын белгілесек және ε, δ, γ сандардың ең кішісі е болса, онда.    Осыдан

$$S(AEF)\leqslant\pi-4\varepsilon.$$

Жоғарыда көрсетілген әдісті қолдапып, бурыштарының қосындысы *π*—8ε-нан кем, онан әрі бурыштарының қосындысы *π*~ Ібе-нан ксм үшбүрыштардьг құра беруге болады. Бара-бара бүрыштарының қосындысы π—2" ε-нан кем үшбурыш құруға да болады. Онда ε қандай аз сан болмасын, бүтіп *n* саны өскенде 2"ε сапы тұрақты π санынан асып кетедІ. Бул жағдай қайшылыққа әкеліп соғады; ушбурыштың бұрыштарының қосындысы теріс саннан кем болыл шығады. Осығап сүйеніп, Лежандр теореманы дәлелдедім деп аяқтайды.

Лежандрдың қатесі нсде? Ол *A* бүрышының скі қабырғасын да қиып, *O* нүктесі арқылы өтетін *EF* түзуіи жургіземіз деп отыр, ал ондай түзуді әркашан да жургізе беругс болмайтындыгын сскермеген. Мүныц өзі Евклидтің V постулатымен эквивалентті

Сөйтіп, біз V постулатты дәлелдсу әрекеттеріне қысқаша тоқтадык, бірақ ол постулатты дәлелдеу мүмкін емес скендігі тек XIX ғасырда ғана айқындалды.

## 2.3 Бесінші постулат проблемасының шешілуі

Евклид геометриясың сынаушылар, онын, V постулатын «дәлелдеушілер» ғасырлар бойы ойға сіңіп, әдетке айналған, негізгі қағидалары мызғымастай берік геометрияның жүйссін бұза алмай, онық ақиқаттығына сенуге мәжбүр болды. Сонымен қатар ғалымдар жаца геометрияның, V постулатты оғап ұқсас емес басқа постулатпен ауыстырудан туатын, сонымен бірге Евклид геометриясына қайшы кслмсйтін, логикалық заңды геометриянын, іргесін қалай бастады. Бұл геометрия орыстыц атақты  математигі Н. И. Лобачевскийдің батыл ойынан, онын енгізген жаңа постулатынан келіп туды.

Басында Н. И. Лобачевский де V постулатты дәлелдемекші болған. Ол үшін қарсы жору тәсілін қолданып, V постулаттық орнына оған кері жағдайды аксиома ретінде алған. Егер де осы аксиомаға және Евклидтің барлық аксиомалары мен калған постулаттарына сүйене отырып, логикалық заң бойыпша салдарлар шығаратын болсақ, онда сол салдарлардың арасында бір-біріне қайшы болатындары табылу керек те, осы қайшылық арқылы V постулатты дәлелдеген боламыз деп ойлады Лобачевский. Бірақ бұл алып отырған аксиомалар системасынан Лобачевский ешқандай қайшылық, таба алмады да, өзінің жаңа геометриясын құрды. Лобачевский геометриясы евклидтік емсс геометрия болады, себебі бұл геометрияда V постулат орындалмайды.

Біз Евклидтің V постулатына ерекше тоқтадық, өйткені оны қабылдау немесе кабылдамаудан геометрияның жүйесі, барлық құрылымы өзгеретін көрінеді. Бұл жерде атақты Гаусстын, (1777—1855) бір хатында жазған (1816 ж.) мынадай сөздерін келтірген орынды:

«Геометрияның негіздері туралы проблемадай көп талқыланған мәселелер математика саласында некен саяқ, сөйтсе де екі мың жыл ішінде біздің нактысында Евклидтен алыстап кете алмағанымызды ашықтан ашық мойындауымыз керек. Ғылымға лайықты нәрсе — кемшілікті бүркеп жасқап жасырудан да оны осылайша ашықтан ашық турасынан мойындяу».

Бұл әділ мойындау. Мұны V постулатты дәлелдеудсн түңілгендіктен, сонымен қатар жаца геометрияға батыл жол таппағандықтан туган мойындау дсп түсіну кcрек. Әсіресе Гаусс тәрізді данышпан математиктің олай деуі тек дағдарыстык салдары ғана болып қоймай, келесі жаңа геометрияның нұсқасын сезгендіктен туған болар деп ойлаймыз. Бұған да дәлел келтіруге болады.

Евклидтік емес геометрия системасының бастапқы идеялары кейбір ғалымдардьң (Саккери, Ламберт, Гаусс, Больяи) еңбектерінде көрінс бастаған. Олардың кейбіреулері оны кезінде аңғара да алмаған. Мәселен, Саккери V постулатты дәлелдемекші болып өзінің үшінші ұйғаруын қарастырғанда евклидтік емес геометрияның элементтеріне келіп соққан. Ол оны өзі дсе сезбей қалған. Ал Гаусстың өзі де мен жаңа геометрияның идеясына келдім, бірақ Евклидтің V постулатын жақтаушылардын. «араның ұясындай» гулеген тобынан қаймықтым деп айтуы — оның да жаңа геометрия ашуға аз еңбек сіңірмегендігін көрсетеді. Венгер математигі Япош Больяидің (1802—1860) Евклидті аса назар салып көп жылдар бойы зерттегені, V постулатты дәлелдеу мүмкін емес дегсн қорытындыға келгені, жаңа геометрияның желісін кұра бастағаны мәлім. Бірақ Гаусс та, Больяи да тап Лобачевскийдей батыл пікір айтып, жаңа геометрияны құру мәселесі толык шешу дәрежесіне көтеріле алмаған. 1826 жылы Лобачевский өз геометриясынын негізгі мәселелерін Қазан университетінде баяндап, келесі жылдары оны әріқарай толықтырып зерттей берген. Сондықтан да 1826 жылы Лобачевскийдің евклидтік емес геометриясынық дүниеге келген жылы деп есептейміз. Еске алатын тағы бір жағдай: Гаусс пен Больяи еңбектері Лобачевскийге белгісіз болған, ал Лобачевскийдің еңбектері Гаусcқа, ол арқылы Больяиға жетіп отырған.

Демек, евклидтік емес геометрияны құрып, геометрия саласында төңкеріс жасаған Лобачевский болса, бұл жаңалықты ашуға Гаусс та, Больян да ат салыскан. Бұл туралы проф. В. Ф. Каганныц екі томдық «Геометрия негіздері» деген кітабында толық айтылған.

Лобачевскийдің жаңа геометриясын өз тұсындағы ғалымдардың көбі елемей, тіпті карсы пікірлер айтып, оның тарихи ролін кемітуге тырысқан. Тек итальян математигі Э. Бельтрамн 1868 ж. өзініц «Евклидтік емес геометрияға түсінік» деген еңбегін жариялағаннан кейін және ғылымның, әсіресе физиканың, ілгері дамуымен байланысты ол геометрияның іргесі беки түсті, оның іс жүзінде кәдеге асатыны анық бола бастады. Данышпан Эйнштейннің шығарған жаңа теориясы да Лобачевский кеністігінде өріс алып, орыс данышпанының ғылымға сіңірген тамаша жаңалығының қандай маңызы бар екендігі бүкіл әлемге аян болды.

Лобачевский өз геометриясында, ойдың тым биік сатысынан қарап, «қиялдық геометрия» деп атаған, өйткені тек сызбаға сүйеніп, немесе интуицияға сүйеніп жобалаудан ойдағыдай нәтиже шыға бермейді. Сондықтан да ондай жағдайларда терсң ой, батыл пікір, кең өрісті логика қажет болады.

Сонымен, V постулат проблемасы тек XIX ғасырда шешілді. Оны жете зерттеп, толық шешкен Н. И. Лобачевский болды, ол V постулатты дәлелдеуге болмайды, Евклид геометрнясымен қатар қайшылықсыз евклидтік емес геометрияны құруға болады деген қорытындыға келді, сондай геометрияиы құрды. Алайда V постулатты зерттеген басқа ғалымдардың еңбектері зая кетті деуге болмайды, өйткені олар геометрияның ішкі логикалық байланыстарын зерттеу мәселесіне көп еңбек сіңірді.

## 2.4 Евклидтік емес геометрияның ашылуы

2000 жыл бойы ғалымдар V постулатты дәлелдеумен айналысқанымен XIX ғасырға дейін ол проблема шешілмеді. Тек XIX ғасырдың басында ғана бір біріне тәуелсіз үш ғалым орыс- Қазан Университетінің профессоры Николай Иванович Лабочевский (1792-1856), ұлы неміс ғалымы Карл Фридрих Гаус (1777- 1855), Венгер офицері Янош Боян (1802-1860) бұл проблеманы шешті. Шешкенде жұрт ойлағандай V постулдатты басқа постулат, аксиомалар арқылы дәлелдеген жоқ, қайта V постулаттың басқа аксиома, постулаттарға тәуелсіз екенін оның олар арқылы дәлелденбейтінін көрсетіп, Саккеридің сүйір бұрыш проблемасымен мәндес тұжырыммен V постулатты алмастыру арқылы жаңа евклиддік емес геометрия ашу арқылы дәлелдеді.

Сөйтіп Евклид геометриясы сияқты қайшылықсыз жаңа геометрия дүниеге келді. Бұл екі геометрияның бір бірінен өзгешелігі евклид геометриясында берілген нүктеден берілген түзумен қиылыспайтын тек бір түзу жүргізуге болады десе, жаңа геометрияда қиылыспайтын кемінде екі түзу жүргізуге болады дейді.

Сөйтіп олар паралель түзулер теориясы арқылы бір-бірінен өзгешеленеді. Паралельдік теорияға қатысты емес геометрия бөлімін (яғни екі геометрияға ортақ геометрия бөлімін) абсолюттік геометрия геометрия дейді.

Жаңа геометрияны ашу, оны насихаттау мен қорғауда бұл үш ғалымның сіңірген еңбегі бірдей емес.

Мысалы Гаусс 1816 жылдың өзінде жаңа геометрияның кейбір идеяларымен айналысқан, бірақ ол туралы ешқандай еңбек жарияламаған. Ол туралы ол қайтыс болғаннан кейінгі жолдастарына жазған хаттарынан белгілі болды. Жолдастарына бұл туралы құпиялық сақтауын талап кеткен. Оның бұлай ету себебі жаңа геометрияны көпшілік қабылдамайды, түсінбейді. Сондықтан абыройдан айрылып қалам ба деп қорықты.

1832 жылы Янош Боян «Апендекис» деген еңбегінде жаңа геометрияның негіздерін жетілген және жүйелі түрде баяндаған. Бірақ еңбек оның замандастарына түсініксіз болып қала берді.

Жаңа геометрияның нағыз жасаушысы, барынша қорғаушысы, насихатшысы Н. А. Лобачевский болды. Ол 1 желтоқсан 1792 жылы Төменгі Новгродта дүниеге келді. 1802 жылы Қазан гимназиясын, 1807 жылы Қазан Университетін бітіріп, сол университетте оқытушылыққа қалдырылды. 1814 жылы адъюнкт, 1816 жылы профессор болды. 1820 жылы декан, 1827-46 жылдар ректор, 1846-55 жылы Қазан округтық оқу жүйесінде қызмет істеді. 1855 жылы соқыр болып 12 ақпан 856 жылы дүние салды. Ол 7 ақпан 1826 жылы физика –математика факультеті мәжілісінде жаңа геометрия ашқанын хабарлаған. Ол жаңа геометрияны қорғау мен насихаттау мақсатында бірқатар еңбектер жазды:

- Геометрия бастамасы жайлы (1824-30)
- Қиялды геометрия (1835 жылы орыс, 1837 француз тілінде)
- Қиялды геометрияны кейбір интегралдарды шешуге пайдалану (1836)
- Паралельдік теориясымен толықтырылған жаңа геометрияның бастамасы (1835-38)
- Паралельдік теория жайлы геометриялық зерттеулер (неміс тілінде 1846)
- Планиметрия (1855)

Бұл еңбектерінде Евклидттің V постулатын басқа аксиома, постулаттар жәрдемімен дәлелдеуге болмайтынын айқын тұжырымдап берді. Жаңа геометрияның қайшылықсыздығын көрсету мақсатында, ол өз геометриясына арнап планиметрия, тригонометрия, стереометрия жасады.

Лобачевский еңбегін көп ғалымдар түсінбеді. Тіпті орыстың күшті математиктерінің бірі академик М.В. Остроградскийде оның жаңалығына қарсы болды. Тек Гаус өлгеннен кейін оның жазбаларында Лобачевский еңбектеріне жоғары баға бергені анықталғаннан кейін, 1868 жылы Италия ғалымы Э. Бальтрамидің «Евклидтік емес геометрияға түсінік» деген еңбегі, 1871 жылы неміс математигі Ф Клейннің (1849-1925) «Евклидтік емес геометрия жайлы» деген еңбегінде жаңа геометрияның қайшылықсыздығын дәлелдегеннен кейін ғана Лобачевский еңбегі мақұлданды. Ағылшын математигі Клиффорд, Лобачевскийді математиканың Копернигі деп атады.

Лабочовскийге дейін Евклид геометриясы кеңістік жайлы бірден бір ілім деп келсе, бұл еңбектерден кейін бұл пиғыл өзгерді, геометрияны жалпылау басталды.

Жаңа Евклидтік емес геометрияны гиперболалық геометрия деп те атайды.

### 2.5 Лобачевский және оның геометриясы.Лобаческий аксиомасы

1. Николай Иванович Лобачевский (1792—1856) Нижний Новгородта (қазір Горький қаласы) туған. Ол Қазан университеті жанындағы гимназияны, содан кейін Қазан университетін бітірген, бітіргеннен кейін сонда оқытушылық қызметке ,қалдырылған. Профессор болып көп жыл осы университетте еңбек еткен, тек өмірінің соңғы жылдарында ғана қызметтен босаған. 1826 ж. 7 февральда (ескі санат бойынша) Н. И. Лобачевский Қазан университетінің физика-математика факультетіне «Геометрия принциптері жөніндегі пайымдаулар» деген атпен параллель түзулердің теориясы туралы баяндамасын тапсырған. 1829 ж. ол «Қазан университетінің ғылыми жазбаларында» өзінің «Геометрияның бастамалары туралы» атты мақаласын жариялаған. Бұл мақала жаңа геометриядан жарияланған ең алғашқы жұмыс еді. Одан кейінгі жылдарда Лобачевский геометриядан тағы да бірталай шығармалар жазып бастырды.

Н. И. Лобачевский өзінің жариялаған еңбектерінде Евклидтің V постулатын геометриянық қалған аксиомаларынан қорытып шығаруға болмайтындығын айқын тұжырымдап және негіздеп берген тұңғыш ғалым болды. Оған дейін V постулат проблемасымен шұғылданған ғалымдар — Прокл, Хайям, Валлис, Ламберт, Саккери, Лежандр т. б. V постулатты дәлелдеу мақсатын алға қойған болса, Лобачевский алдымен осы постулатты мүлде алып тастайды да, оның орнына мынадай аксиома (Лобачевский аксиомасы) келтіреді:

V*. $a$ түзуі мен $A \notin .a$ нүктесі берілсін. Онда $(A, a)$ жазықтығында $A$ нүктесінен өтіп, $a$ түзуін қиып өтпейтін ең кем дегенде екі түзу болады.

V* аксиомасы мен Евклид геометриясының барлық аксиомаларын (V постулаттан басқасын) пайдалана отырып, Лобачевский өзінің жазықтықтағы және кеңістіктегі геометриясын дамытады, тригонометриялық формулаларды табады және анализдің осы жаңа геометрияда қолданылуын көрсетеді. Жаңа геометрияны ғалым өзі «болжал геометрия» деп атады (ол кейін Лобачевский геометриясы немесе гиперболалық геометрия деп аталатын болды). Өзінің геометриясы еш уақытта қайшылықтарға келтірмейтіндігін дәлелдеу мақсатымен, Лобачевский бұл геометрияның аналитикалық зерттеуін келтіреді және бұл проблеманы (қайшылықсыздық проблемасын) өз заманы тұрғысынан алғанда қанағаттанарлық дәрежеде шешеді.

Лобачевский өзінің геометриясының математикалық анализде, жемісті түрде қолданылуы мүмкіндігін көрсетті, ол соған дейін шығарылмай келген көптеген интегралдарды есептеп шығарып берді.

2. Лобачевский геометриясының ол қабылдаған аксиоманың тікелей салдары болып табылатын ең қарапайым фактілерін атап өтейік.

1-теорема. *Кез келген ABC үшбұрышының ішкі бұрыштарының $\sigma_{ABC}$ қосындысы 2d-ден кем болады.*

■ Саккери — Лежандрдың 1-теоремасы бойынша $\sigma_{ABC} \leq 2d$. Ал $\sigma_{ABC} = 2d$ деп ұйғарсак, V постулат дұрыс болып шығады, ол V* аксиомаға кайшы келеді. Сондықтан, $\sigma_{ABC} < 2d$. ■

■ Салдар. Кез келген жай төртбұрыштың ішкі бұрыштарының косындысы 4*d*-ден кем болады. ■

■ *ABCD* жай төртбұрышының ішкі бұрыштарының косындысы
$\sigma_{ABC} + \sigma_{ACД} < 2d + 2d = 4d$. ■

2-теорема. *Үшбүрыш бұрыштарының қосындысы тұрақты шама емес, басқаша айтқанда, ол қосынды барлық үшбұрыштарда бірдей болмайды.*

■ Керісінше ұйғарып, бұл қосынды тұрақты делік. *A'* пен *C'* нүктелері *ABC* үшбұрышының *[AB]* және *[BC]* қабырғаларының ішкі нүктелері болсын (9-сурет). Ұйғаруымыз бойынша

$\sigma_{A'B'C'} = \sigma_{ABC}$ яғни

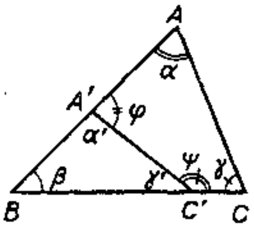
$$\alpha' + \beta + \gamma' = \alpha + \beta + \gamma \Rightarrow \alpha' + \gamma' = \alpha + \gamma \qquad (1)$$

$$(\alpha' + \varphi = 2d, \quad \nu' + \phi = 2d) \Rightarrow (\alpha' + \gamma') + (\varphi + \phi) = 4d \qquad (2)$$

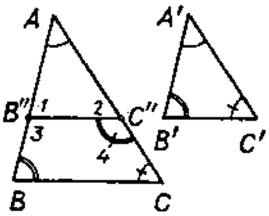
$(1), (2) \Rightarrow \alpha + \gamma + \varphi + \phi = 4d$

шығады, яғни *AA'C'C* жай төртбұрышының ішкі бұрыштарының қосындысы 4d-ге тең болады. Бұл қорытынды 1-теореманың салдарына қайшы келеді. Сондықтан, $\sigma'_{ABC} \neq \sigma_{ABC}$

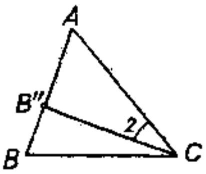
3-теорема. *Егер ABC үшбұрышының үш бұрышы A'B'C үшбұрышының өздеріне сәйкес үш бұрышына конгруэнт болса, онда ол үшбұрыштар конгруэнт болады.* *ABC* мен *A'B'C'* үшбұрыштарында $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$, болсын. $[AB] \neq [A'B']$ деп ұйғарайық, нақтылық үшін $[AB] > [A'B']$ делік. Онда $\exists B'' \in [AB] \mid [AB''] \cong [A'B']$ болады (10-сурет). Енді $C'' \in [AC) \setminus [AC''] \cong [A'C']$ нүктесін алайық.



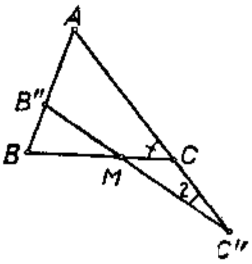
9-сурет



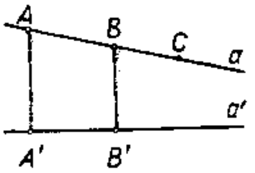
10-сурет



11-сурет



12-сурет



13-сурет

Сонда $\Delta AB''C''\cong\Delta A'B'C'$ болады (конгруэнттіктің 1 белгісі бойынша). Сондықтан, $\angle 1\cong\angle B$ $\angle 2\cong\angle C$ (3)

$[BC]\cap[B''C'']=\varnothing$ болатындығын дәлелдейік. Керісінше ұйғарайық:

$[BC]\cap[B''C'']=M$ болсын. Бұл жағдайда екі мүмкіндік болады:

а) $M=C$,

б) $\mu(BMC)$.

Осыларды қарастырып көрейік,

а) Егер $M=C$ болса, $C''=C$, сондықтан $\angle 2<\angle C$ болады, ол (3) шартқа қайшы келеді (11-сурет).

б) Егер $\mu(BMC)$ деп ұйғарсақ (12-сурет), $MCC''$ үшбұрышында $\angle 2\cong\angle C$ болады, мұндай қорытынды үшбұрыштың сыртқы бұрышы туралы теоремаға іқайшы келеді.

Сонымен, $[BC]\cap[B''C'']=\varnothing$. Бұдан $\mu(AC''C)$ шығады. Сонда

$\angle 1+\angle 3=2d$, $\angle 2+\angle 4=2d$ (4)

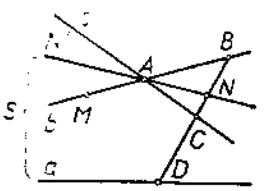
(3), (4)=> $\angle 3+\angle D=2d$ $\angle 4+\angle C = 2d$,

Демек, $BB''C''C$ дөңес төртбұрышының ішкі бұрыштарының қосындысы 4d-ге тең болып шығады, мұндай корытынды 1-теореманың салдарына қайшы келеді. Сөйтіп, $[AB]\not\cong[A'B']$ дейтін ұйғарым қайшылыққа әкеледі. Демек, $[AB]\cong[A'B']$ және $\Delta ABC\cong\Delta A'B'C$ болады (конгруэнттіктің II белгісі бойынша).

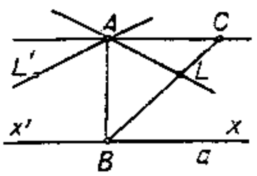
4-теорема. *а және а' түзулері бір жазықтықта жатып, қиылыспайтын болсын, А, В, С*$\in a$ \ $\mu(ABC)$ *болсын; А' және В′ нүктелері сәйкес А және В нүктелерінің а' түзуіндегі ортогональ проекциялары болсын. Онда* $\angle A'AC<\angle B'BC$ *болады* (13-сурет).

Керісінше ұйғарайық: $\angle A'AC\geq\angle B'BC$. Осы тенсіздіктің екі жақ бөлігіне де $ABB'$ бұрышын қоссақ,

$\angle A'AC+\angle B'BC\geq 2d$ демек, $A'ABB'$ дөңес төртбұрышының ішкі бұрыштарының



14-сурет



15-сурет

қосындысы 4d-ден кем емес болып шығады, ал мұндай қорытынды 1-теореманың салдарына қайшы келеді.

5-теорема. *Жазықтықта а түзуі мен* $A\notin a$ *нүктесі берілсін. Онда осы жазықтықта жатып, А нүктесінен өтетін ал, а түзуін қимайтын түзулердің шексіз жиыны болады.*

Лобачевский аксиомасы бойынша *А* нүктесінен өтетін және *а* түзуін қимайтын екі түзу — b мен *с* түзулері — болады (14-сурет). *а* түзуі *с* түзуімен шектелген жарты жазықтықтардың біреуінде ғана жатады және бұл жарты жазықтық b түзуін *[MA)* сәулесі бойынша қияды. *[MA)* сәулесінің толықтауышы болатын сәуленің бойынан бір $B\neq A$ нүктесін алайық. *В* нүктесі мен *а* түзуі екі түрлі жарты жазықтықта жатады (ол жарты жазықтықтардың шекарасы *с* түзуі болады). Сондықтан, егер $D\in a$ болса, $[BD]\cap c=C$ болады.

*N* нүктесі *[BC]* кесіндісінің ішкі нүктесі болсын. Біз $(AN)\cap a=\varnothing$ дейміз. Керісінше ұйғарайық: $(AN)\cap a=S$ болсын. $[AN)\subset[c,B)$ және $[c,B)\cap a=\varnothing$ болатындықтан, $S\notin[AN)$ болады. Демек, S нүктесі *[AN')* сәулесінің толықтауышы болатын *[AN)* сәулесінің нүктесі.

*NDS* үшбұрышы мен *b* түзуіне Паш аксиомасын қолданайық. *b* түзуі бұл үшбұрыштың төбелерінің ешқайсысынан да өтпейді, оның *[NS]* қабырғасын қияды, бірақ *[ND]* қабырғасын қимайды. Сондықтан *b* түзуі айтылып отырған үшбұрыштың *[DS]* қабырғасын қияды. Сонда біз мынадай қорытындыға келеміз: $a\cap b\neq\varnothing$. Бірақ бұл қорытынды берілген шартқа қайшы келеді. Сондықтан, $(AN)\cap a=\varnothing$. *[BC]* кесіндісіндегі нүктелердің жиыны шексіз болғандықтан, теорема толық дәлелденді деуге болады.

3. Жазықтықта *а* түзуі мен $A\notin a$ нүктесін алайық. $(AB)\perp a\times(B\in a)$ және $(AC)\perp(AB)$ түзулерін жүргізейік (15-сурет). 5-теорема бойынша *А* нүктесінен өтетін, бірақ *а* түзуін қимайтын түзулердің шексіз жиыны болады. Осы жиында *(АС)* тузуі де болады.

Егер түзу *А* нүктесінен өтіп, сәуле бойынша *ВАС* тік бұрышын қиятын болса, онда ол түзу *[BC]* кесіндісін де қияды. Осы *[BC]* кесіндісінің нүктелерін мынадай заң бойынша екі класқа, $K_1$ және $K_2$ кластарына, бөлейік:

$M\in K_1 \Leftrightarrow M\in[BC]$ және $(MA)\cap]a\neq\varnothing$

$M\in K_2\Leftrightarrow M\in[BC]$ және $(MA)\cap a =\varnothing.$

*[BC]* кесіндісінің әрбір нүктесі екі кластың біріне ғана кіретіндігі, сонымен бірге $B\in K_1$, $C\in K_2$ болатындығы айқын. $K_1$ класында В-ден басқа да нүктелер болады. *BAC* бұрышының *а* түзуінде жататын ішкі *D* нүктесін алсақ, $[AD)\cap[BC]=M\in K_1$ болады. $K_2$ класында С-ден басқа да нүктелер болады, өйткені V* аксиома бойынша *(MA)* | $(MA)\neq(AC)$, $(MA)\cap a=\varnothing$ болады және егер

осы түзудің $[MA)$ сәулесі $BAC$ бұрышымен сыбайлас $BAC$ бұрышының ішкі сәулесі болса, онда $BAC$ бұрышының орнына $BAC'$ бұрышын қарастырамыз.

$M_0 \in K_1, M_o \neq B$ және $N_0 \in K_2$ болсын. Онда: $\mu(BM_0N_0)$. Керісінше ұйғарайық: $M_o$ нүктесі $B$ мен $N_o$ нүктелерінің арасында жатпайды делік. $M_0 ,N_0 \in [BC]$ және $M_0 \neq N_0$ болғандықтан, $\mu(BN_0\, M_0)$ мүмкіндігі ғана қалады. Бірақ олай болғанда $[M_0\, A) \cap a = D_0$ (мұндай нүкте бар, өйткені $M_0 \in K_1$) болады. $(AN_0)$ түзуі $BAD_0$ үшбұрышының ішкі $N_o$ нүктесінен өтеді, демек, бұл түзу үшбұрыштың $[BD_Q]$ қабырғасын қиып өтеді, сондықтан ол $a$ түзуін де қиып өтеді. Бірақ $N_0 \in K_2 =>$ $(AN_0) \cap a = \varnothing$ шығады. Қайшылыққа кездестік.

Сонымен, $[BC]$ кесіндісі нүктелерінің екі класқа, $K_1$ және $K_2$ кластарына, бөлшектенуі дедекинд аксиомасының барлық шарттарын қанағаттандырады, сондықтан $[BC]$ кесіндісі нүктелерінің жиыны үстінде дедекинд кимасы болады. Бұл қиманы $L$ нүктесі жасайтын болсын. $L \in K_2$ екендігін дәлелдейік.

Керісінше ұйғарайық: $L \in K_1$. Сонда $(AL) \cap a = D$ болады.

$D \in [BX) = a \cap [(AB),C)$ болады (өйткені $D$ нүктесі $[BX)$ сәулесінің толықтауыш сәулесінде жатады деп ұйғарғанда үшбұрыштың сыртқы бұрышы туралы теоремаға қайшы қорытындыға келеміз).

$P \in [BX) \mid \mu(BDP)$ нүктесін алайық. Онда $(AP) \cap [LC] = P_0 \mid \mu(LP_0C)$ болады және дедекинд қимасын жасайтын $L$ нүктесінің қасиеті бойынша $P_0 \in K_2$ болады. Бұл қорытынды $(AP_0) \cap a \neq \varnothing$ қорытындысына кайшы келеді.

Сондықтан, $L \in K_2$ және сонымен бірге $\mu(BML) \Rightarrow M \in K_1$ деп қорытамыз.

$(AB)$ түзуі бойынша $(AL)$ түзуіне симметриялы болатын $(AL')$ түзуін алайық. Бұл $(AL)$ және $(AL')$ түзулерінің мынадай қасиеттері болады.

а) Бұл түзулер $a$ түзуін кимайды,

б) $(AL)$ және $(AL')$ түзулерінен құралатын төрт вертикаль бұрыштың екеуінің ішінде орналасатын, төбелері $A$ нүктесінде болатын шоқтың барлық түзулері $a$ түзуін қиып өтеді, ал калған екі вертикаль бұрыштың ішінде орналасатын вертикаль шоғы $a$ түзуін қимайды.

а) және б) қасиеттері болатын $(AL)$ және $(AL')$ түзулерін Лобачевский $a$ түзуіне *параллель* түзулер деп, ал $BAL$ бұрышын $A$ нүктесіндегі $a$ түзуі бойынша анықталатын *параллельдік бұрышы* деп атаған. Демек, параллельдік бұрыш Лобачевский жазықтығында әрдайым сүйір бұрыш болады.

$[BX')$ сәулесі $[BX)$ сәулесінің толықтауышы болған жағдайда $(AL)$ түзуі а түзуіне $[BX)$ бағытында , ал $(AL')$түзуі а түзуіне $[BX')$бағытында параллел түзу дейді.

Сонымен , әрбір $A \notin a$ нүктесінен а түзуіне параллел болып екі түзу өтеді: Олардың бірі а түзуінің бағыты бойынша, екіншісі екінші бағыты бойынша параллел болады.

Егер а және в түзулері бір жазықтықта жатып, біріне-бірі параллель болмаса, сөйте тұра қиылыспайтын болса, ажырасатын (бытырайтын) түзулер деп аталады. $A \notin a$ нүктесінен а түзуімен ажырасатын сансыз көп түзулердің өтетіндігін түсіну қиын емес.

# 3. Гильберт аксиомалар жүйесіне шолу

## 3.1 Д.Гильберттің «Геометрия негіздері»

Евклид аксиомалар жүйесінің жеткіліксіздігі, элементар геометрияның қатаң ғылыми логикалық жолмен негіздеуге жарамсыздығы айтылды.

XIX ғасырдың 60 жылдарында көрнекілікке сүйенбей, шындығы көрініп тұр деген сенімге берілмей тек логикалық заңдарға сүйене отырып элементар геометрияны құруға жарайтын аксиома жүйесін жасау қажеттілігі көтерілді. Бұл қажеттілік Лобачевский геометриясының Б.Римманың эллипстік геометриясының шығуымен арта түсті.

Мұндай аксиомалар жүйесін жасауды Венгер математигі Паштың (1843-1930) «Жаңа геометрия жайындағы лекциялары» (1882) Италия ғалымы Дж Пеанонын (1858-1932) «Геометрия негіздерін логикалық баяндау» (1889), Верензенің «Геометрия негіздері» (1891), В.Ф. Каганның, Д Гильберттің, Г.Вейльдің еңбектері жарияланды.

Неміс математигі Давид Гильберттің (1862-1943) 1899 жылы шыққан «Геометрия негіздері» атты еңбегінде тұңғыш рет Евклидтік геометрияны логикалық жолмен құруға жеткілікті болатын аксиомалар тізімі келтіріледі.

Осы күнгі математикадағы аксиоматикалық әдіспен математикалық құрылымдардың қазіргі тұрғыдан қарастырылатын теориясы Гильберттің осы еңбегінен басталады деуге болады. Оған 1903 жылы Лобачевский атындағы Халықаралық сыйлық берілді.

Гильберттің баяндауы бойынша Евклидтік үш өлшемді $E_3$ кеңістік құрылымының базасы элементтері «нүктелер» деп аталатын Н, элементтері «түзулер» деп аталатын Т, элементер «жазықтықтар» деп аталатын Ж үш жиыннан тұрады.

Бұл база элеметтері арасындағы болуы мүмкін қатыстарады «Жатады» («тиісті»), «арасында жатады», «конгруентті» сөздерімен белгілейді.

Бұл қатыстардың, элементтердің нақты сипаты нені білдіреді, қандай екені айтылмайды, тек олардан төменде келтірілген аксиомалар талаптарын қанағаттандыру ғана талап етіледі.

Гильберт аксиомалар жүйесі 5 топқа бөлінетін 20 аксиомалардан тұрады. Оларда 26 талап келтірілген. Сөйтіп Гильберт аксиомалар жүйесінде «нүкте», «түзу», «жазықтық», «жатады», «арасында жатады», «конгруентті» негізгі, алғашқы ұғымдар болып табылады. Гилберт үш өлшемді евклидтік кеңістік деп элементтері «нүкте», «түзу», «жазықтық» деп аталатын, өзара «жатады», «арасында жатады», «конгруентті» қатыстарда болатын және 20 аксиома талаптарын қанағаттандыратын Н,Т, Ж, ішкі жиындарынан тұратын $E_3$ жиынды түсінеді. «Нүкте», «түзу», «жазықтық», «жатады», «арасында жатады», «конгруентті» ұғымдары Евклидтік $E_3$ кеңістігінің аксиомалар жүйесімен анықталатындықтан олар бұл кеңістіктің негізгі ұғымдары болып табылады.

Енді әр топқа енетін аксиомаларды тұжырымдап, олар негізінде құрылатын геометрия мәселелеріне шолу жасайық.

## 3.2 I- топ.Тиістілік аксиомалары

Тиістілік (немесе байланыс) аксиомалары негізгі ұғымдар - нүктелер түзулер, жазықтықтардың өзара орналасу қасиеттерін «жатады» сөзі арқылы сипаттайды. Ол мынадай 8 аксиомадан тұрады.

1-1 A,B нүктелері қандай болса да олар жататын (олардан өтетін) бір а түзуі болады.

1.2 A, B нүктелері қандай болса да олардан өтетін түзу бірден артық болмайды.

1.3 Әрбір түзуде кемінде екі нүкте жатады. Бір түзуде жатпайтын кемінде үш нүкте болады.

1.4 Бір түзуде жатпайтын A,B,C, нүктелер қандай болса да ол нүктелер жататын (ол нүктелерден өтетін) α жазықтық болады. Әрбір жазықтықта жататын кемінде бір нүкте өтеді.

1.5 Бір түзуде жатпайтын үш нүкте қандай болса да олар арқылы өтетін жазықтық біреуден артық болмайды.

1.6. Егер а түзуінің A, B, нүктелері бір α жазықтықта жатса, онда ол түзудің барлық нүктесі сол α жазықтықта жатады.

1.7. Егер екі α, β жазықтықтардың бір A ортақ нүктесі болса онда олардың кемінде тағы бір ортақ нүктесі B болады.

1.8. Бір жазықтықта жатпайтын кемінде 4 нүкте болады.

Осы аксиомаларға сүйеніп бірқатар теоремаларды дәлелдеуге болады. Олардың кейбірі мыналар.

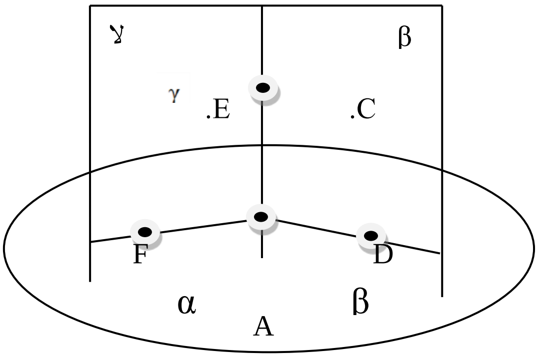
1- Теорема. Екі түзудің ортақ нүктесі біреуден артық болмайды.
Дәлелі: Ортақ екі нүктесі болады десек 1-2 бойынша олар беттеседі де бірақ түзуге айналады.

2- Теорема. а түзуі және онда жатпай А нүктесі арқылы бір тек жазықтық өтеді.

Шынында да 1-3 бойынша а түзуінде В.С. екі нүкте жатады, ал 1-4, 1-5 бойынша А,В,С нүктені басып жалғыз жазықтық өтеді.

3- Теорема. Екі жазықтықтың бір ортақ нүктесі болса онда олардың барлық ортақ нүктелері жататын ортақ түзуі болады.
Сандарды:

1. Екі қиылысып жатқан түзулер арқылы бір, тек бір жазықтық өтеді.
2. Жазықтық пен онда жатпайтын түзудің ортақ нүктесі біреуден артық болмайды.
3. Әрбір жазықтықта бір түзу бойында жатпайтын кемінде үш нүкте болады.



16-сурет

***Дәлелі:*** α жазықтығы берілген. 1-4 аксиома бойынша α- де жататын А, 1-8 бойынша α- де жатпайтын В нүкте болады (16- сурет).
1-2 бойынша АВ түзу болады. 1-3 бойынша АВ-да жатпайтын С нүкте болады. 1-4,1-5 бойынша А,В,С, ны болып β жазықтық өтеді. α мен β – ға А ортақ болғандықтан олардың 1-7 бойынша тағы бір ортақ нүктесі Д болады және Д нүкте жазықтығында жатады, 1-8 бойынша β – да жатпайтын Е нүкте болады. Егер Е € α жатса, онда теорема дәлелденеді, жатпаса Е,А,В арқылы өтетін γ жазықтық болады. Оның α мен А артық нүктесі болғандықтан тағы да бір ортақ F нүктесі болады. Сөйтіп А,Д, F нүктелер α жазықтықта жатады.

### 3.3 ІІ-топ.Реттілік аксиомалары

Түзу нүктелері белгілі тәртіпте (ретте) орналасады, яғни реттік қатыста болады деп есептеледі. Ол «арасында жатады» деген сөз арқылы сипатталады. (Жазуды қысқарту үшін егер бір түзудің В нүктесі сол түзудің А мен С нүктелерінің арасында жатса $\overline{ABC}$ деп жазуға келісейік).

Бұл аксиомалар тобы 4 аксиомалардан тұрады.

ІІ- 1. Егер В нүкте А мен С нүктелерінің арасында жатса онда А,В,С, бір түзудің әртүрлі нүктелері болады және В нүкте С мен А нүктелердің арасында жатады.

II- 2. Егер A мен B бір түзудің нүктелері болса онда AB түзудің нүктелері бойында $\overline{ABC}$ болатын кемінде бір C нүкте болады.

II-3. Түзудің әртүрлі үш нүктесінің ішінде екеуінің арасында жататын нүкте бірден көп болмайды.

II-4. (Паш аксиомасы) A,B,C, бір түзуде жатпайтын үш нүкте, ал a олар жатқан жазықтықтың бұл нүктелерінің бірде – бірін басып өтпейтін түзуі болса және егер a түзуі AB кесіндінің ішкі нүктелерінен өтсе, онда ол не AC не BC кесіндінің ішкі нүктелерінен өтеді. I, II топ аксиомаларына сүйеніп кесінді, сәуле, бұрыш жарты жазықтық, сынық сызық, үшбұрыш, көпбұрыш, ұғымдарын ендіруге және көптеген теоремаларды дәлелдеуге болады.

II- 2 аксиомадан кез келген кесіндінің кемінде бір сыртқы нүктесінің болатындығы шығады.

***$1^0$- теорема.*** Егер A,C әртүрлі нүктелер болса олар арасында жататын кемінде бір B нүкте болады.

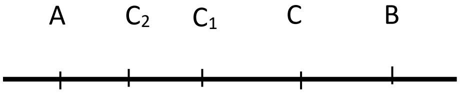
***Дәлелі***: 1-1,2 бойынша AC түзуі болады. 1-3 бойынша AC да жатпайтын бір Д нүкте болады. Д нүкте мен AC түзу бір жазықтықты анықтайды. II-2 бойынша $\overline{ADE}$ болатын E нүкте болады. $\overline{ECE}$ болатын F нүкте болады.

Дәл осы сияқты 2) бір түзудің үш нүктесінің тек біреуі қалған екеуінің арасында жататындығын; 3) Егер $\overline{ABC}$, $\overline{BCD}$ болса B мен C- ның, A мен Д ның арасында жататындығын; 4) егер $\overline{ABC}$, $\overline{ACD}$ болса онда $\overline{BCD}$, $\overline{ABD}$ болатынын дәлелдеуге болады.

Осыларға сүйеніп 5) түзудің екі нүктесінің арасында шексіз көп нүктелер болатынын дәлелдейік.

Дәлелі. a түзуі бойында A,B нүктелерге жатсын. $1^0$ теорема бойынша A мен B нүктелер арасында C нүкте жатады, A мен C ның арасынан $C_1$ табылады. $4^0$ теорема бойынша $C_1$ нүкте A мен B арасында жатады.
$1^0$ теорема бойынша A мен $C_1$ арасынан $C_2$ табылады. 4-теорема бойынша $C_2$ нүкте A мен C арасында жатады.

Осы процесті соза отырып A мен B арасынан қалаған санды нүкте табуға болады. Біз A мен B арасында санаулы жиынды нүкте болатынын дәлелдедік. Санаусыз жиынды нүктелер болатынын дәлелдеуге I, II аксиомалары жеткіліксіз.



### 3.4 III-топ.Конгруэнттілік аксиомалары

Кесінділер, бұрыштар өзімен немесе басқа кесінділермен, басқа бұрыштармен қандай да бір қатыста болуы мүмкін. Бұл қатысты «Конгруэнтті» (немесе «тең» ) деген сөзбен белгілейміз. «Конгруэнттік» қатыстар мына төмендегі 5 аксиома талаптарын қанағаттандыруы керек.

III-1. AB – кесінді және a түзуінде жатқан $A_1$ нүкте берілсе, онда бұл түзуде AB- ға конгруэнтті болатын яғни $AB = A_1B_1$ болатын $B_1$ нүкте табылады.

Сонымен қатар $AB = BA$ болуы да талап етіледі.

III-2. Егер $A_1B_1 = A_3B_3$ $A_2B_2 = A_2B_2$ болса, онда $A_1B_1 = A_3B_3$ болады.

III-3. $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, болсын, онда $A_1B_1 = A_2B_2$, $B_1C_1=B_2C_2$ болса онда $A_1C_1 = A_2C_2$ болады.

III-4. $\angle(a,b)$ бұрышы және $a_1$ түзуімен анықталатын $\alpha$ жарты жазықтығы берілсе онда $a_1-$дің кез келген O нүктесінен шығатын $\angle(a,b) = \angle(a \quad b \quad )$ болатыны $\alpha$ жарты жазықтықта бір ғана $b_1$ сәуле болады. $\angle(a_1b_1) = \angle(a_1b_1), \angle(a_1b_1) = \angle(b_1a_1)$ болуы талап етіледі.

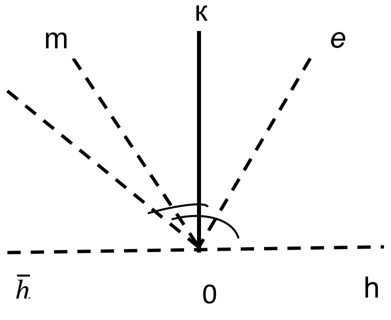
III-5. $A \quad B \quad C$ бір түзуде жатпайтын нүктелер болсын. $A_1B_1C_1$ нүктелері бір түзуде жатпайтын нүктелер болсын. Егер бұл кезде $AB = A_1B_1, AC = A_1C_1$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ болса, онда $\angle ABC = A_1B_1C_1$ болады.

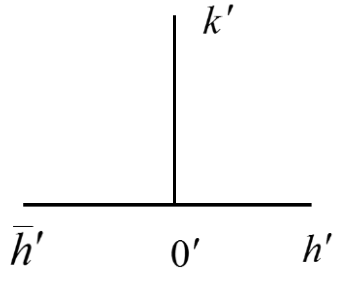
Осы аксиомаларға сүйене отырып эквивалеттік қатысты (рефлексивтік, симетриялық, транзитивтік қатыстар), кесінділердің, бұрыштардың, үшбұрыштардың теңдігі, бұрыштың түрі, сыртқы бұрыш, Δ- тың қабырғалары мен бұрыштары арасындағы қатыстар, кесінді ортасы, бұрыш бисектриссасы ұғымдарын ендіруге, координата жүйесін ендіруге болады. Бұлар туралы теоремаларды дәлелдеуге болады.

**Теорема**: Барлық тікбұрыштар өзара тең болады

Дәлелі Бұрыш тік делінеді егер ол өзінің сыбайлас бұрышына тең болса. Сондықтан теорема шарты бойынша $\angle(hk) = \angle(\bar{h}k)$, $\angle\left(\bar{h}', k'\right) =< \left(\bar{h}', k'\right)$ болады. $\angle(hK) =< \left(\bar{h}'K'\right)$ екенін дәлелдеу керек. (388-сурет). $\angle(h'k') \neq \angle(hk)$ дейік. Онда III- 4 аксиома бойынша $\angle(h'k') \neq \angle(hl)$ болатын бұрыш табылады. III-4 бойынша m табылып, $< (lк) =< (mk)$ болады. Бұлардан $\angle(hl) = \angle(hm)$ болады. Транзитивтік қасиет бойынша $\angle(hm) = \angle(hl) = \angle(h'k')$ (*). Бұдан бұрыш тең болса, оған сыбайлас бұрыш та тең болатындықтан $\angle(hm) = \left(\bar{h}'\bar{k}'\right) = \angle(h'k')$ болып шығады.

Сонымен $\angle(hm) = (h'm')$; $\angle(h'k') = \angle(hl)$. Ал, бұл III- 4 аксиомаға қайшы Сондықтан $\angle(h'k') \neq \angle(kh)$деген дұрыс емес, олар тең болады.





17-сурет

18-сурет

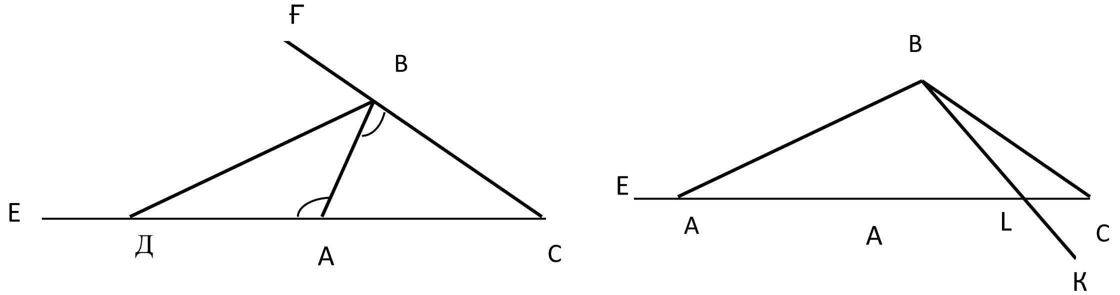
***Теорема.*** Үшбұрыштың сыртқы бұрышы өзімен сыбайлас емес ішкі бұрыштарынан үлкен болады.

**Дәлелі**: АВС үшбұрыштың А төбесіндегі сыртқы бұрышы <ВАЕ болсын. Соның АВС дан үлкен болатынын дәлелдейік.

Алдымен < ВАЕ = < АВС (1*) дейік (19-а сурет). Бұрыш тең болса сыбайлас бұрыштарында тең болатындықтан < ВАС = < АВҒ (2*). ІІІ-1 аксиома бойынша АЕ да ВС = АД болатын Д табылады. Үшбұрыштың теңдік белгісі бойынша Δ АВС = Δ АВД болады. Бұдан $\angle CAB = \angle AB\ddot{A}$ (3*) шығады.

(2*) мен (3*) ден $\angle ABD = \angle ABF$ (4*) болады. Сонда ІІІ- 4 аксиома бойынша ВД мен ВҒ сәулелер беттесуі керек, яғни Д нүкте ВС түзуінде жату керек. Онда СВ мен СА да беттесер еді. Сөйтіп А,В,С түзуде жатар еді. Ал бұл теорема шартына қайшы. Сондықтан < ВАЕ ≠ < АВС болады.

Енді $\angle BAE < \angle ABC$ дейік. Онда $\angle EAB = \angle ABL$ болатын (19- б сурет) ВК түзу табылады (ІІІ-4 бойынша). Бұл кезде Δ АВL дің ішкі бұрышы сыртқы бұрышына тең болып қалды. Бұл теорема дәлелдемесінің бірінші бөлігі бойынша мүмкін емес. Сондықтан үшбұрыштың ішкі бұрышы басқа төбенің сыртқы бұрышына тең де, одан үлкен де болмайды екен. Сондықтан ол кіші болады.



а) б)

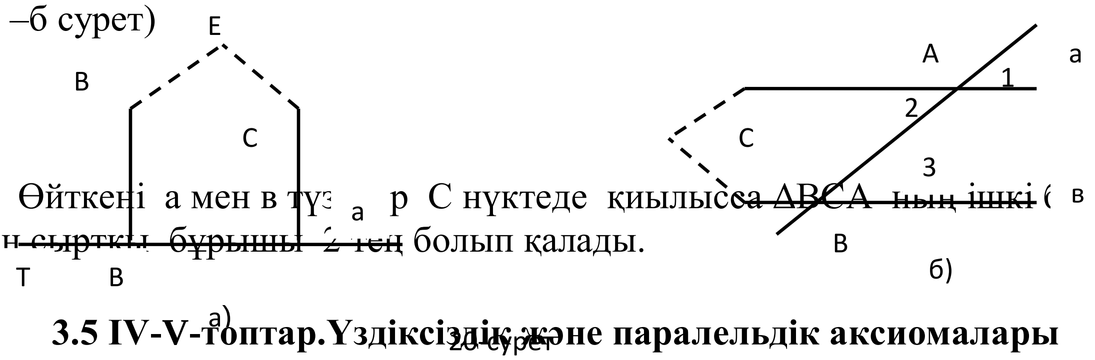
19-сурет

Бұдан мынадай салдарлар шығады.

***1 салдар.*** Егер а түзуге в мен с түзудің екеуіде перпендикуляр болса, онда олар өзара қиылыспайды (390-а сурет).

Себебі Е нүктеде қиылысады десек ΔАВЕ нің ішкі бұрышы $\angle BAE$ мен сыртқы бұрышы < ЕВТ тең болып қалады.

***2 салдар***. Екі түзуді үшінші түзу қиғандағы айқыш бұрыштары (2,3) немесе сәйкес бұрыштары (1,3) тең болса онда ол түзулер қиылыспайды. (390 –б сурет)



28-сурет

Өйткені а мен в түзулер С нүктеде қиылысса ΔВСА ның ішкі бұрышы 1 мен сыртқы бұрышы 2 тең болып қалады.

## 3.5 IV-V-топтар.Үздіксіздік және паралельдік аксиомалары

Алғашқы үш топ аксиомаларына сүйеніп кесіндіні салыстыру мәселесін (яғни үлкен, кіші, тең ұғымдарын) анықтауға болады. Бірақ ол топ аксиомалары кесіндіні өлшеу процесін (бұл процес қорытындысында кез келген кесіндінің бірлік кесіндіге қатынасы бір санмен өрнектелуі керек) негіздеуге жеткіліксіз. Кесіндіні өлшеу процесі үздіксіздік аксиомаларына негізделеді. Бұл топ аксиомаларын анықтауды Гильберт баяндауынан ептеп ауытқып, ол аксиомаларды қазіргі кездегідей тұрғыда тұжырымдаймыз.

IY -1 (Архимед аксиомасы) АВ, СД кесінділері берілсін. Онда АВ кесіндінің бойында СД кесіндіге конгурентті болатын $A\,A_1,\ A_1A_2,\ A_2A_3, \ldots,\ A_{n-1}A_n$ кесінділерді жасайтын және $A_1$ нүкте А мен $A_2$ нің, $A_2$ нүкте $A_1$ мен $A_3$ тің ... $A_{n-1}$ нүкте $A_{n-2}$ мен $A_n$ нүктенің, В нүкте $A_{n-1}$ мен $A_n$ ның арасында жататын саны шектелген $A_1$, $A_2$, ...$A_n$ нүктелері болады.

IY-2 (Кантор аксиомасы) Кез –келген а түзуінде әрбір келесісі алғашқысының ішіне орналасқан $A_1B_1$, $A_2$ $B_2$, ..., $A_n$ $B_n$,... шексіз кесінділер тізбегі берілсін және алдын ала берілген СД кесіндісі қандай болсада *n* номері табылып $A_n$ $B_n$ кесіндісі СД кесіндісінде де кіші болсын. Онда а түзуі бойынан барлық кесінділердің ішінде жататын бір Х нүкте табылады.

Архимед аксиомасы сайлап алынған бірлік кесіндіге сәйкес кез келген кесіндіге сай келетін, оның ұзындығы деп аталатын санды анықтауға мүмкіндік береді.

Ал, Кантор аксиомасы кесіндіні өлшеу процесіне кері процесті, яғни кез келген берілген санға ұзындығы осы санға тең болатын кесіндінің болатындығын негіздеуге мүмкіндік береді.

IY – 2 аксиомада айтылған X нүкте жалғыз ақ болады. Өйткені X тан басқа Y нүкте бар десек онда кез келген n үшін $XУ < A_nB_n$. Ал бұл шартқа қайшы. Демек барлық кесінділерінің ішкі нүктесі болатын бір- ақ нүкте болады.

Бұл екі аксиоманың орнына Дедекинда аксиомасы делінетін бір ғана аксиоманы алуға болады. Дедекинд (1831-1916) бұл теорияны «Үздіксіздік және ирационал сан» (1872) деген еңбегінде баяндаған.

**Дедекинда аксиомасы**. Егер AB кесіндісінің ұштарын қоса барлық нүктелері былайша екі класқа бөлінсе.

1. Кесіндінің әрбір нүктесі бұл кластардың тек біреуіне ғана енетін болса, A бірінші B екінші класқа жатса

2. Бірінші кластың A дан өзге әрбір нүктесі A нүктемен 2 кластың кез келген екінші кластың B нүктеден өзге әрбір нүктесі бірінші кластың әрбір нүктесімен B нүктесінің арасында жатса, онда AB кесіндісінде тек 1 ғана C нүктесі табылып A мен C арасындағы әрбір нүкте бірінші класқа, C мен B нүкте арасындағы кез келген нүкте 2 класқа жатады. Ал C нүктенің өзі екі кластың бірінде жатады. C нүктені екі кластың шекаралық нүктесі дейді. Сол сияқты C нүкте Дедекинда қимасын анықтайды деп те атайды. Гильберт өзінің аксиоматикасында Архимед аксиомасы мен толықтылық аксиомасын (ол екеуі жиылып Дедекинда аксиомасы мен мәндес болады) пайдаланған. Евклидтің негіздерінде үздіксіздік аксиома мүлдем жоқ.

I-IY топ аксиомаларына сүйеніп кесінді мен бұрыштары өлшеу теориясын баяндауға, түзудің әрбір нүктесіне бір нақты санды сәйкестендіруге болады (олар туралы жеке тарауда айтылады).

I-IY - топ аксиомаларының салдарына түзу мен шеңбердің қиылысуы, екі шеңбердің қиылысуы туралы теоремалар да жатады.

## Y –топ Паралельдік аксиома.

Бір жазықтықта жататын ортақ нүктесі жоқ түзулерді өзара паралель түзулер дейді.

Параллель түзулер болады ма? Ондай түзулердің болатындығын I-III- топ аксиомалар жүйесінің салдары ретінде дәлелденген мына тұжырымдар растайды.

1.Бір жазықтықта жатқан а,в түзулерінің үшінші с түзуі қиып өткенде шығатын айқыш бұрыштары (немесе сәйкес бұрыштары) тең болса, онда а мен в паралель болады.

2. Бір түзуге перпендикуляр екі түзу өзара паралель болады.

Бұл екеуінен тікелей мына теорема шығады.

3. Берілген түзуден тыс жатқан әрбір нүктеден ол түзуге паралель түзу жүргізуге болады.

Бұдан мынадай сұрақ шығады?

Түзуден тыс жатқан нүктеден ол түзуге қанша паралель түзу жүргізуге болады?

Бұл сұраққа 1- IY топ аксиомаларының жәрдемімен жауап беруге болмайды. Ол аксиомалар жеткіліксіз. Ол сұраққа жауап беру үшін паралельдік аксиома деп аталатын мына тұжырымды қосу керек.

***Паралельдік аксиома.*** а түзу А онда жатпайтын нүкте болсын. Онда А нүктесі мен α түзуі жатқан жазықтықта А нүктеден а түзуімен қиылыспайтын бірден артық емес түзу жүргізуге болады.

Бұл аксиоманың Евклидтің V постулатымен мәндес екенін дәлелдегенбіз. Осы I-V топ аксиомаларына сүйеніп параллель түзулерді үшінші түзумен қиғанда шығатын айқыш бұрыштарының тең болатындығын, үшбұрыштың бұрыштарының қосындысы 2d болатындығын, үшбұрыштың сыртқы бұрыштарының өзімен сыбайлас емес бұрыштарының қосындысына тең болатындығын, үш нүктені басып бір ғана шеңбер өтетіндігін, шеңберге іштей сызылған бұрыш қасиеттерін дәлелдеуге, ұқсастық теориясын баяндауға ауданды өлшеу, Пифагор теоремасы, тригонометрияны ендіруге болады. Тікбұрышты координата жүйесін пайдаланып нүкте арасын табу, түзу жазықтық қасиетін аналитикалық жолмен зерттеу мүмкін болады.

V постулаттың көпке дейін шешілмеуіне евклидтік анықтама, аксиомалардың дәл, жеткілікті болмағаныда себеп болған, олар қайшылықсыз теория құруға мүмкіндік бермеді. Тіпті V постулат шешілгенмен V постулат проблемасы дәл тұжырымдалмады. Гильберт аксиомалар жүйесі жасалғаннан кейін V постулат проблемасын, Лобачевскии геометриясын дәл тұжырымдауға мүмкіндік туды.

V постулат проблемасы: I- I V Гильберт аксиомалар жүйесі арқылы V постулатты (V топ аксиомасын) дәлелдеу.

***Лобачевский қорытындысы***: V постулат I- IY топ аксиомаларының салдары емес немесе I-I V аксиомалар тобына V аксиоманы жоққа шығаратын ұйғарым ендіріп логикалық қайшылықсыз жаңа геометрия шығарып алуға болады.

I-IV топ аксиомалары және соларға ғана сүйеніп дәлелденетін теоремалар (олардан шығатын салдар мен қорытындылар) абсолюттік геометрия делінеді.

Сонда абсолюттік геометрия Евклидтік және евклидтік емес геометриялардың ортақ бөлігі болып табылады.

# 4.Вейль аксиомалар жүйесі

## 4.1 Үш өлшемдік Евклидтік кеңістіктің Вейль аксиомалар жүйесі

Көптеген физикалық шамалар үштен артық параметрлер арқылы анықталады. Бұл *n* өлшемді кеңістіктің шығуына алып келеді. Ол көп өлшемді кеңістіктің аксиомалар жүйесін немістің тамаша математигі Герман Вейль (1885-1955) өзінің 1928 жылы шыққан «Кеңістік, уақыт, материя » атты еңбегінде баяндады. Осыдан кейін әдіскерлер, элементар геометрияны Вейль аксиомалар жүйесі арқылы негіздеумен айналыса бастады. Кеңес математиктері П.К. Рашевский өзінің 1967 ж. шыққан «Риман геометриясы тензорлық талдау» атты еңбегінде, И. М. Яглом (1924-1988) «Математика в школе» журналында (1962 №2) оны іске асырды.

Вейль аксиомалар жүйесінің Гильберт аксиомалар жүйесіне қарағанда бірқатар артықшылығы бар. Ол ғылымның аса қажетті, даму үстіндегі салаларына вектор арқылы еніп отыр, қолдану ауқымы кең.

Біз Вейль аксиомалар жүйесін үш өлшемді евклидтік кеңістік $E_3$ үшін қазіргі кездегі тұжырымдалу тұрғысында баяндаймыз.

Вейль аксиомалар жүйесінің базасы үш жиыннан: R- нақты сандар жиыны, V – векторлар жиыны, E - нүктелер жиынынан тұрады. Сөйтіп Вейль аксиомалар – жүйесінің қарастыратын негізгі объектілері – нүкте мен вектор.

Бұл элементтер қандай болда, нені білдіреді, яғни табиғатты қандай екені біз үшін бәрібір.

Ол элементтер арасында мынадай қатыстар болады деп есептеледі.

***Бірінші қатыс***. Бұл V жиынның кез келген екі $\bar{a}$, $\bar{b}$ векторына сол жиынның бір векторын сәйкестендіретін $f_1 :V \text{ x } V \to V$ бейнелеуі. Бұл қатысты $f_1$ бейнелеуді «векторларды қосу амалы» дейді және $\bar{a} + \bar{в} = \bar{c}$ деп жазады.

***Екінші қатыс***. Бұл V жиынның кез келген $\bar{a}$ векторы мен R жиынының кез келген λ санына V жиынын бір векторын сәйкестендіретін $f_2 :R * V \to V$

бейнелеуі. Бұл қатысты - $f_2$ бейнелеуді «Векторды санға көбейту амалы» дейді және оны $\lambda\overline{a} = \overline{b}$ деп жазады.

***Үшінші қатыс***. Бұл V жиынның кез келген $\overline{a}, \overline{b}$ екі векторына R жиынының бір санын сәйкестендіретін $f_3$ :V x V →R бейнелеуі. Бұл қатысты - $f_3$ бейнелеуді «Векторларды скаляр көбейту амалы» дейді және оны $\overline{\text{ав}}$ =λ деп жазады.

***Төртінші қатыс.*** Бұл E жиынының кез келген A,B, екі нүктесіне V жиынның бір $\overline{\text{а}}$ векторын сәйкестендіретін $f_4$ :E x E→V бейнелеуі. Бұл қатысты - $f_4$ бейнелеуді «Нүктеден векторды өлшеп салу амалы» (немесе «нүкте мен вектордың тиістілік қатысы») дейді.

Бұл қатыстар (бейнелеулер) 5 топқа бөлінетін төмендегі аксиома талаптарын қанағаттандырулары керек.

## 4.2 Векторлық кеңістіктің аксиомалары

Бірінші қатыс $f_1$ - векторларды қосу амалы төмендегі 4 аксиома талабына бағынуы керек.

1-1 $\forall \grave{a}, \hat{a} \in V$ векторлар үшін $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ болуы керек

1-2 $\forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V$ векторлар үшін $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$ болуы керек.

1-3 $\forall \grave{a}$, вектор үшін $\overline{a} + \overline{o} = \overline{o} + \overline{a} = \overline{a}$ болатын вектор V жиында болу керек, $\overline{o}$ –нөлдік вектор делінеді.

1-4 $\forall \grave{a} \in V$ вектор үшін $\overline{a} + (-\overline{a}) = (-\overline{a}) + \overline{a} = \overline{0}$ болатын $-\overline{a}$ вектор V жиында болу керек.Бұл $-\overline{a}$ элемент $\overline{a}$ векторға қарама-қарсы вектор делінеді.

## II-топ Векторларды саға көбейту аксиомалары.

Екінші қатыс – $f_2$ векторды санға көбейту амалы төмендегі, 4 аксиома талабына бағынуы керек.

I-1 $\forall \grave{a} \in V$ вектор үшін $1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$ болуы керек

II-2 ∀α, $\beta \in R$ сандары мен $\overline{a} \in V$ векторы үшін $\alpha(\beta\overline{a}) = (\alpha\beta)\overline{a}$ болуы керек.

II-3 $\forall \alpha, \beta \in R$ сандары мен $\overline{a} \in V$ векторы үшін (α+β)$\overline{a} = \alpha\vec{a} + \beta\overline{a}$ болу керек

II-4 $\forall \alpha \in R$ саны мен $\overline{a}, \vec{b} \in V$ векторлар үшін $\alpha(\overline{a} + \overline{b}) = \alpha\overline{a} + \alpha\overline{b}$ болуы керек.

***Ескерту:*** I,II топ аксиомалар жүйесін элементтері қанғаттандыратын жиынды –векторлық кеңістік дейді, Векторлық кеңістік - V базистік жиынды, $f_1$,$f_2$ амалды $(V, f_1, f_2)$ математикалық стуктура болады.

Анықтама: Векторлар жүйесі $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ сызықтық тәуелді делінеді, егерде ең болмағанда біреуі 0 емес $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ нақты сандар табылып $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_n\overline{a}_n = \overline{0}$ болса, ал бұл теңдік $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ - лар тегіс 0 болғанда ғана орындалатын болса сызықтық тәуелсіз делінеді.

### III топ. Өлшемдік аксиомалары

III-I. $\alpha\overline{a}_0 + \beta\overline{b}_0 + \gamma\overline{c}_0 = \overline{0}$ теңдіктен $\alpha = \beta = \gamma = 0$ болатындығы шығаратын ең болмағанда бір векторлар үштігі $\overline{a}_0, \overline{b}_0, \overline{c}_0$ табылады (Басқаша: сызықтық тәуелсіз кемінде үш вектор болады).

III-2. Кезкелген $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \overline{a}_4$ төрт вектор үшін ең болмағанда біреуі нөл болмаса да $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \lambda_3\overline{a}_3 + \lambda_4\overline{a}_4 = 0$ болатын $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ сандары табылады (басқаша:4 вектор сызықтық тәуелді болады)

Ескерту: Элеметтері I-III топ аксиомаларын қанағаттандыратын V жиын үш өлшемді сызықтық векторлық кеңістік делінеді, оны $V_3$ деп белгілейтін боламыз. Кез келген сызықтық тәуелсіз үш вектор бұл кеңістіктің базисі болады.

### IV-топ *Скаляр көбейту аксиомалары*

Үшінші қатыс $f_3$ векторларды скаляр көбейту амалы төмендегі 4 аксиомалар талабын қанағаттандыруы керек.

IV-I. $\forall \overline{a}, \vec{b} \in V$ векторлар үшін $\overline{a}\overline{b} = \overline{b}\overline{a}$ болуы керек.

IV-2. $\forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V$ векторлар үшін $\overline{a}(\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a}\overline{b} + \overline{a}\overline{c}$ болуы керек.

IV-3. $\forall \alpha \in R$ санымен $\forall \overline{a}, \overline{b} \in V$ векторлар үшін $(\alpha\overline{a})\overline{b} = \alpha(\overline{a}\overline{b})$ болуы керек.

IV-4. $\forall \overline{a} \in V$ вектор үшін $\overline{a}\overline{a} \geq 0$ болуы керек, теңдік тек $\overline{a} = \overline{0}$ болғанда ғана орындалуы керек.

Ескерту. I-II-III-IV топ аксиомалары талаптарын қанағаттандыратын V жиын үш өлшемді евклидтік векторлық кеңістік делінеді. Оны $E_3$ деп белгілейді.

Үш өлшемді евклидтік векторлық кеңістік базисі $V, R$ болатын $f_1, f_2, f_3$ $(V, R, f_1, f_2, f_3)$ амалды математикалық құрылым болады.

**V топ. Өлшеп салу аксиомалары**

Төртінші қатыс $f_4$ нүктеден векторды өлшеп салу амалы төмендегі екі аскиома талаптарын қанағаттандыруы керек.

V-1. Кезкелген $O \in$ Е нүктемен кезкелген $\overline{a} \in V$ вектор үшін $\overrightarrow{OM} = \overline{a}$ болатын М нүкте жалғызақ болады.

V-2. (Үшбұрыш аксиомалы делінеді) Кезкелген A,B,C үш нүкте үшін $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ болуы керек.

Ескерту: I, II, III, V топ аксиомалары талаптарын қанағаттандыратын Е жиынын $V_3$ жиында анықталған үш өлшемді векторлық-нүктелік аффиндік кеңістік немесе жай ғана үш өлшемді аффиндік кеңістік дейді де, оны $A_3$ деп белгілейді.

Үш өлшемді аффиндік кеңістік-базисі $V, E, R$ болатын $f_1, f_2, f_4$ амалды $(V, E, R, f_1, f_2, f_4)$ математикалық стуктура болады.

Ал I-II-III-IV-V топ аксиомалары талаптарын қанағатандыратын $V, E$ жиын үш өлшемді векторлық –нүктелік евклидтік кеңістік немесе жай ғана үш өлшемді евкилендік кеңістік делінеді, оны $E_3$ арқылы белгілейді.

Сонымен 3 өлшемді евклидтік кеңістік базасы $V, E, R$ болатын, $f_1, f_2, f_3, f_4$ амалды математикалық құрылым болады.

Вейль аксиомалар жүйесі осы 16 аксиомадан тұрады.

Бұл аксиомалардан мына тұжырымдардың дұрыстығы тікелей шығады.

1. I-3 аксиомада айтылған нөлдік вектор жалғызақ болады. Шынындада, екеу $\overline{0}_1, \overline{0}_2$ болады десек, $\overline{0}_1$ нөлдік вектор болғандықтан $\overline{0}_2 + \overline{0}_1 = \overline{0}_2, 0_2$ нөлдік вектор болатындықтан $\overline{0}_1 + \overline{0}_2 = \overline{0}_1$ болады. I-1 бойынша бұл екі теңдіктің сол жағы тең. Сондықтан оң жағы да тең болады, яғни $\overline{0}_1 = \overline{0}_2$.

2.I-4 аксиомада айтылған $\overline{a}$ -ға қарама-қарсы вектор жалғыз-ақ болады. Шынында да $\overline{b}, \overline{c}$ екеу болады десек, $\overline{a} + \overline{b} = 0, \overline{a} + \overline{c} = 0$ болу керек. Сонда !-3,21 аксиомалар бойынша $\overline{b} = \overline{b} + \overline{0} = \overline{b} + (\overline{a} + \overline{c}) = (\overline{b} + \overline{a}) + \overline{c} = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{0} + \overline{c} = \overline{c} + \overline{0} = \overline{c}$ болып шығады.

3. $\overline{a} + \overline{x} = \overline{b}$ теңдеудің айқындалған бір ғана шешуі болады. Шынында да $(-\bar{a}) + \bar{a} + \bar{x} = (-\overline{a}) + \bar{b},\ (\overline{a} + (-\overline{a})) + \overline{x} + \overline{b} + (-\overline{a}); \overline{0} + \overline{x} = \overline{b} \cdot \overline{a}, \overline{x} = \overline{b} - \overline{a}$ бұл берілген екі вектордың айырымы делінеді.

### 4.3 Вейль аксиомалар жүйесінің қайшылықсыздығы.

Аксиомалар жүйесінің қайшылықсыздығын дәлелдеу үшін оның қандайда бір қайшылықсыз математикалық теория объектілері жиынындағы моделін жасау керек еді.

Осындай теория үшін арифметиканы алып, арифметикалық модель жасайық. Вейль аксиомалар жүйесінің негізгі ұғымдары мен қатыстарына сандар жиынында, нақты мәндер берейік яғни: былайша интерпретациялық сөздік жасайық. «Нүкте» деп реттелген $(\alpha, \beta, \gamma)$ түрдегі үш санды айталық, «Вектор» деп мына түрдегі $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ бағана матрицаны алайық, 1-қатыс векторларды қосу амалын былайша анықтайық.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & + & b_1 \\ a_2 & + & b_2 \\ a_3 & + & b_3 \end{pmatrix}.$$

2 қатынас векторы $\lambda$ санға көбейтуді былайша $\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$ анықтайық.

3 - қатыс векторлардың слаяр көбейтіндісі деп мына санды анықтайық

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1в_1 + a_2в_2 + a_3в_3$$

$(\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3)$ және $(\mu_1\ \mu_2\ \mu_3)$ нүктелері $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ векторды анықтайды дейік, егер де $\mu_1 - \lambda_1 = a_1$, $\mu_2 - \lambda_2 = a_2$, $\mu_3 - \lambda_3 = a_3$ болатын болса. Осылайша жасалған модельде Вейль аксиомалар жүйесінің барлық аксиомаларының орындалатындығына көз жеткізейік.

І-1аксиома орындалады.

$$\overline{a}+\overline{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&+&b_1\\a_2&+&b_2\\a_3&+&b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1&+&a_1\\b_2&+&a_2\\b_3&+&a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=$$

$\overline{b}+\overline{a}$.

I-2 аксиома орындалады

$$(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\left[\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&+&b_1\\a_2&+&b_2\\a_3&+&b_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+&b_1+&c_1\\a_2+&b_2+&c_2\\a_3+&b_3+&c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$$

$+\begin{pmatrix}b_1&+&c_1\\b_2&+&c_2\\b_3&+&c_3\end{pmatrix}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$ 1-3 аксиома орындалады $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&+&0\\a_2&+&0_2\\a_3&+&0_3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, яғни $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}.$

I-4 аксиома орындалады.

$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\-a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&+&(-a\ )\\a_2&+&(-a_2)\\a_3&+&(-a_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, яғни $\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{0}$

II-1 аксиома орындалады

II-2 аксиома орындалады λ $\begin{pmatrix}\mu a_1\\\mu a_2\\\mu a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu\lambda a_1\\\mu\lambda a_2\\\lambda\lambda a_3\end{pmatrix}=\mu\lambda\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=(\mu\lambda)\overline{a},$ *ÿºíè*

$\lambda(\mu\overline{a})=(\lambda\mu)\overline{a}$

II-3 аксиома орындалады .

(λ+μ) $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu a_1+\lambda a_1\\\mu a_2+\lambda a_2\\\lambda a_3+\lambda a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_1\\\lambda a_2\\\lambda a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mu a_1\\\mu a_2\\\mu a_3\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ яғни

$(\lambda+\mu)\overline{a}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}$

II-4 аксиома орындалады .

$$\lambda\left[\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right]=\lambda\begin{pmatrix}a_1 & + & b_1\\a_2 & + & b_2\\a_3 & + & b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_1+\lambda b_1\\\lambda a_2+\lambda b_2\\\lambda a_3+\lambda b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_1\\\lambda a_2\\\lambda a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda b_1\\\lambda b_2\\\lambda b_3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\lambda$$

$$\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$,яғни $\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}$

III топ аксиомаларындағы $a,\bar{b},\bar{c}$векторлар үшін $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ді алайық.

Сонда $\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ден $\begin{pmatrix}\lambda_1+ & 0+ & 0\\0+ & \lambda_2+ & 0\\0+ & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Бұдан $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. Демек III-I орындалды.

Демек $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ векторлар сызықтық тәуелсіз болады.

III- 2 аксиома орындалады. $x_1\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Бұдан $\begin{pmatrix}a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3+d_1x_4\\a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3+d_2x_4\\a_3x_1+b_3x_2+c_2x_3+d_3x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Бұдан $\begin{aligned}a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3+d_1x_4=0\\a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3+d_2x_4=0\\a_3x_1+b_3x_2+c_3x_3+d_1x_4=0\end{aligned}$

Бұл коэфиценттер $x_1,x_2,x_3,x_4$- ке қарағандағы сызықтық біртекті теңдеулер жүйесі және теңдеу саны белгісіз санынан аз. Сондықтан мұндай жүйенің нолден өзгеде шешімдері болады. Демек төрт вектор сызықтық тәуелді болады.

IV–I аксиома орындалады.

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\bar{b}\bar{a}$$

IV-2 аксиома орындалды.

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1+c_1\\b_2+c_2\\b_3+c_3\end{pmatrix}=a_1\cdot(b_1+c_1)+a_2\cdot(b_2+c_2)+a_3(b_3+c_3)=$$

$$=(a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3)+(a_1\cdot c_1+a_2\cdot c_2+a_3\cdot c_3)=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

ÿºíè $\overline{a}(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\overline{b}+\overline{a}\overline{c}$

IV-3. аксиома орындалды.

$$\begin{pmatrix}\lambda a_1\\\lambda a_2\\\lambda a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\lambda a_1b_1+\lambda a_2b_2+\lambda a_3b_3=\lambda(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)=\lambda\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},$$ яғни

$(\lambda\overline{a})\overline{b}=\lambda(\overline{a}\cdot\overline{b})$

IV-4. аксиома орындалды. $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=a_1^2+a_2^2+a_3^2$ болатындықтан бұл оң болады және о бөлу үшін $a_1=0_1$ $a_2=0_1$ $a_3=0_1$ болуы керек.

V-I орындалады. $A=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ нүкте $\bar{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ вектор берілсін. $\overline{AB}=\bar{a}$ болатын В нүкте үшін $(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$ сандарын алсақ $\mu_1-\lambda_1=a_1,\mu_2-\lambda_2=a_2$, $\mu_3-\lambda_3=a_3$ тең бір ғана $\mu_1=a_1+\lambda_1$, $\mu_2=a_2+\lambda_2$, $\mu_3=a_3+\lambda_3$ табылады, яғни $B=(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$ нүкте жалғыз ақ болады.

V-2 аксиома орындалады. $A=(a_1,a_2,a_3)$, $B=(b_1,b_2,b_3)$, $C=(c_1,c_2,c_3)$ нүктелер болса, оларға $\overline{AB}=\begin{pmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\b_3-a_3\end{pmatrix}$, $\overline{BC}=\begin{pmatrix}c_1-b_1\\c_2-b_2\\c_3-b_3\end{pmatrix}$, $\overline{AC}=\begin{pmatrix}c_1-a_1\\c_2-a_2\\c_3-a_3\end{pmatrix}$ сай келетіндіктен $\overline{AB}+\overline{BC}=\begin{pmatrix}c_1-a_1\\c_2-a_2\\c_3-a_3\end{pmatrix}$ болып, $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ болып шығады.

Сонымен жасалған моделде Вейлдің 16 аксиомасы түгелдей орындалатын болды. Демек Вейль аксиомалар жүйесі қайшылықсыз, егерде модель жасалынған сандар жиыны, яғни арифметика қайшылықсыз болса. Ал арифмитиканың қайшылықсыздығы арифметикада дәлелденеді.

### 4.4 Вейль аксиомалар жүйесінің тәуелсіздігі.

Өткен тақырыптарда аксиома жүйесіне енетін бір аксиоманың басқа аксиомаларға тәуелсіз екенін дәлелдеу үшін сол аксиома орындалмайтын, басқа аксиомалар орындалатын модель жасау керек, егер ондай модель табылса ол аксиома қалған аксиомаларға тәуелсіз болады деген едік.

Сонда бізге 16 модель жасап сол модельдің әрқайсысында 15 аксиоманың орындалатынын тексеру керек. Бұл қиын емес, бірақ уақытты алады. Сондықтан біз кейбір аксиомалардың қалған аксиомаларға тәуелсіз екенін дәлелдеу жолдарын қарастырамыз, басқаларда солай дәлелденеді.

А) Мысалға II-3 аксиоманың (ол $(\alpha+\beta)\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}$ болатын) қалған I-II тап аксиомаларына тәуелсіздігін дәлелдейік. Ол үшін мынадай модель жасайық.

Вектор деп кез келген квадрат матрицаны $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ айтайық, $\overline{a}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Векторларды қосуды былайша анықтайық:

$$\bar{a}+\bar{b}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

Векторларды λ санға көбейтуді былайша

$\lambda\overline{a}=\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ анықтайық.

Осы модельде II-3 аксиоманың орындалмайтындығын ал қалған I- II топ аксиомаларының орындалатындығын тексерейік.

I-1 аксиома орындалады.

$$\overline{a}+\overline{b}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\overline{b}+\overline{a}$$

I-2 аксиома орындалады.

$$\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11})+c_{11} & (a_{12}+b_{12})+c_{12} \\ (a_{21}+b_{21})+c_{21} & (a_{22}+b_{22})+c_{22} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}+(b_{11}+c_{11}) & a_{12}+(b_{12}+c_{12}) \\ a_{21}+(b_{21}+c_{21}) & a_{22}+(b_{22}+c_{22}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} \end{pmatrix}=$$

$$=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$$

I-3 аксиома орындалады:

$$\bar{a}+\bar{0}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+0 & a_{12}+0 \\ a_{21}+0 & a_{22}+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\bar{a}$$

I-4. аксиома орындалады:

$$\bar{a}+(-\bar{a})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}-a_{11} & a_{12}-a_{12} \\ a_{21}-a_{21} & a_{22}-a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\bar{0}$$

II-1 аксиома орындалады. Матрицаны 1- ге көбейткенде сол матрицаның өзі шығады.

II-2 аксиома орындалады $\lambda\ (\mu\bar{\mathrm{a}}) = \lambda\begin{pmatrix} \mu\mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} \\ \mu\mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\mu\mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} \\ \lambda\mu\mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} \end{pmatrix} =$ $(\lambda\mu)\ \begin{pmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} \end{pmatrix} = (\lambda\mu)\bar{\mathrm{a}}$

II-3 аксиома бұл модельде орындалмайды.

$$(\lambda_1\lambda_2)\bar{\mathrm{a}} = (\lambda_1 *\ \lambda_2)\begin{pmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda_1\lambda_2)\ \mathrm{a}_{11}\ \mathrm{a}_{12} \\ (\lambda_1\lambda_2)\ \mathrm{a}_{21}\ \mathrm{a}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1\ \mathrm{a}_{11} + \lambda_2\ \mathrm{a}_{12} & \mathrm{a}_{12} \\ \lambda_2\ \mathrm{a}_{12} + \lambda_2\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1\ \bar{\mathrm{a}} + \lambda_2\ \bar{\mathrm{a}} \quad = \begin{pmatrix} \lambda_1\mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} \\ \lambda_2\mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1\mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} \\ \lambda_2\mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1\ \mathrm{a}_{11} + \lambda_2\ \mathrm{a}_{12} & 2\mathrm{a}_{12} \\ \lambda_1\ \mathrm{a}_{21} + \lambda_2\ \mathrm{a}_{21} & 2\ \mathrm{a}_{22} \end{pmatrix}$$

Сөйтіп $(\lambda_1 + \lambda_2)\bar{\mathrm{a}} \ \neq \lambda_1\ \mathrm{a} + \lambda_1\bar{\mathrm{a}} + \lambda_2\bar{\mathrm{a}}$ болып шықты.
Демек бұл аксиома жасалған модельде орындалмайды.

II-4 аксиома орындалады.

$$\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right]=\lambda\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda a_{11}+\lambda b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ \lambda a_{21}+\lambda b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \lambda b_{11} & b_{12} \\ \lambda b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}$$

Сонымен I-II топ аскиомаларын тегіс тексеріп шықтық, II-3-тен басқа барлық аксиомалар жасалған модельде орындалды, ал II-3 аксиома орындалмады. Демек II-3 аксиома I-II топ аксиомаларының басқаларына тәуелді емес.

Б) Енді III- 1 (Ол $\alpha\bar{\mathrm{a}}_0 + \beta\overline{\mathrm{в}_0} + \gamma\bar{\mathrm{c}}_0$ дан $\bar{\mathrm{a}}_0$=$\overline{\mathrm{в}_0} = \bar{\mathrm{c}}_0$= 0 болады дейтін) аксиомаласының I- III топ аксиомаларына тәуелсіздігін дәлелдейік.

Ол үшін басқа модель жасау керек.

Вектор деп $\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix}$ матрицаны алайық. Векторды қосу санға көбейту, скаляр көбейту амалдарын сәйкесінше былайша анықтайық.

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix};\quad \lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{pmatrix};\qquad \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=x_1x_2+y_1y_2$$

Бұл моделде I-1 орындалады. $\bar{x}+\bar{y} = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix}x_2+x_1\\y_2+y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\bar{y}+\bar{x}$

I-2 орындалды $\left[\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}= \begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix}x_1+(x_2+x_3)\\y_1+(y_2+y_3)\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2+x_3\\y_2+y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}\right]$ яғни $(\bar{x}_1+\bar{x}_2)+\bar{x}_3=\bar{x}_1+(\bar{x}_2+\bar{x}_3)$ болды.

I-3. пен I-4 аксиомалар орындалады. Нолдік вектор үшін $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, ал $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ векторға қарама – қарсы вектор үшін $\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$ алынады.

Сондықтан $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ болады. Яғни $\bar{x}+\bar{0}=\bar{x}$, $\bar{x}+(-\bar{x})=\bar{0}$ болады.

II-1 мен II-2 аксиомалар орындалады.

1. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\lambda\begin{pmatrix}\mu x\\\mu y\end{pmatrix}=(\lambda\mu)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ болады, яғни $1\cdot\bar{x}=\bar{x}$ , $\lambda(\mu\bar{x})=(\lambda\mu)\bar{x}$ болады.

II- 3 аксиома орындалады. $(\lambda+\mu)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\lambda+\mu)x\\(\lambda+\mu)y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x+\mu x\\\lambda y+\mu y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, яғни $(\lambda+\mu)\bar{x}=\lambda\bar{x}+\mu\bar{x}$ болады.

II-4 аксиома орындалады. $\lambda\left[\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right]=\lambda\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x_1+\lambda x_2\\\lambda y_1+\lambda y_2\end{pmatrix}=$ $\lambda\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$, яғни $\lambda(\bar{x}_1+\bar{x}_2)=\lambda\bar{x}_1+\lambda\bar{x}_2$ болады.

II-1 аксиома орындалмайды. Өйткені $\alpha\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ден $\begin{pmatrix}\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_2\\\alpha y_1+\beta y_2+\gamma y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ден $\begin{cases}\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_2=0\\\alpha y_1+\beta y_2+\gamma y_2=0\end{cases}$ шығады. Бұл α,β,γ- қарағанда сызықтық біртекті теңдеулер жүйесі және мұнда теңдеу саны белгісіз санынан аз. Сондықтан бұл жүйенің 0- ден өзге шешулері болады. Демек үш вектор сызықтық тәуелді болады, ал III-1 де тәуелсіз 3 вектор болады дейтін.

Сөйтіп бұл моделде III-1 орындалмайды. III-2 аксиома орындалады, өйткені 4 емес 3 вектордың өзі бұл модельде тәуелді болады екен, сондықтан 4 векторда сызықтық тәуелді болады.

Егер вектор деп тәртіптелген $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ төрт санды алатын болсақ, ал элементтер арасындағы қатысты жоғарыда айтылғандай етіп алсақ онда бұл модельде III-2 аксиома орындалмайды, қалғандары орындалады.

Бұл кезде $\overline{a_0}, \overline{в_0}, \bar{c}_0\ \bar{d}_0$ векторлар үшін $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ векторларды алуға болады. Ал бұлар сызықтық тәуелсіз (ал III-2 де 4 вектор сызықтық тәуелді болады делінген).

В) Енді V- 1, V- 2аксиоманың басқа аксиомаларға тәуелсіздігін дәлелдейік.

Моделді былай етіп алайық.

Вектор деп тәртіптелген үш санды $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ал нүкте деп тәртіптелген $(\lambda_{1,}\lambda_{2,}\ \lambda_3\ \lambda_{4,})$ төрт санды алайық. Бұл моделде I-IY топ аксиомалары толығымен орындалады, ал Y-I аксиома орындалмайды. Бұл кезде Y-1 аксиомадағы $\overline{AB}$ =а болатын В нүкте үшін $(\lambda_1 + x, \lambda_2 + y, \lambda_3 + z, \lambda_4)$ төрт санын алуға болады.

Мұндағы $(\lambda_4)$ еркін алынған сан, оның әртүрлі мәніне әртүрлі В нүкте сай келеді. Сөйтіп $\overline{AB} = \bar{a}$ болатын В нүкте жалғыз болмайды, көп болады. Y-I де ол жалғыз болады делінген.

Егер вектор, нүкте және олар арасындағы қатысты бұрынғыша қалдырып, өлшеп салу амалын былайша өзгертсек: A($\lambda_{1,}\lambda_{2,}\ \lambda_3$ ), В ($\mu_{1,}\mu_{2,}\ \mu_3$) нүктелерге $\overline{AB}$ векторын былайша болатындай етіп, сәйкестендірсек $\overline{AB} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \mu_1 \\ \lambda_2 + \mu_2 \\ \lambda_3 + \mu_3 \end{pmatrix}$ онда барлық аксиомалар орындалады да Y-2 аксиома орындалмайды. Өйткені A ($\lambda_{1,}\lambda_{2,}\ \lambda_3$ ) , В ($\mu_{1,}\mu_{2,}\ \mu_3$ ) , $C(z_1, z_2, z_3)$ десек,

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \mu_1 \\ \lambda_2 + \mu_2 \\ \lambda_3 + \mu_3 \end{pmatrix}, \ \overline{AC} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + z_1 \\ \lambda_2 + z_2 \\ \lambda_3 + z_3 \end{pmatrix}$$

$\overline{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} \mu_1 + & z_{1,} \\ \mu_2 + & z_{2,} \\ \mu_3 + & z_{3,} \end{pmatrix}$ болатындықтан $\overline{\mathrm{AB}} + \overline{BC} \neq \overline{\mathrm{AC}}$ болып шығады.

Осылайша Вейльдің қалған аксиомаларының да тәуелсіздігін дәлелдеуге болады. Сондықтан Вейль аксиомалар жүйесі тәуелсіз жүйе болады.

### 4.5 Вейль аксиомалар жүйесінің толықтығы.

Аксиомалар жүйесі толық делінеді егерде ол аксиомалар жүйесінің кез келген екі интерпретациясы изоморфты болатын болса.

Ал екі интерпретация изоморфты делінеді, егерде ол интерпретациялардың объектілері арасында кеңістік құрылымы сақталатындай етіп өзара бір мәнді сәйкестік орнатуға болатын болса. (Ал бұл мысалы 1- интерпретацияның A,B,C, элементтеріне (нүктелеріне) 2- интерпретацияның $A^1$,$B^1$,$C^1$ элементтері (нүктелері) сәйкестенсе және $\overline{ABC}$ болса $\overline{A_1, B_1, C_1}$ болу керек деген сөзді, осы сияқты A € α жазықтықта жатса $A^1$ нүкте α- ге сәйкестенетін $\alpha^1$ жазықтығында жатуы керек деген сөзді білдіреді).

Аксиома жүйесінің толықтылық талабы оның әртүрлі интерпретациялары бір – бірінен негізгі ұғымдарға берілген нақты мәндер мазмұндары арқылы ғана өзгешеленуі керек дегенді білдіреді. Сондықтан Вейль аксиомалар жүйесінің толықтылығын дәлелдеу үшін оның екі интерпретациясын жасап, олардың изоморфтылығын дәлелдеу керек.

Біз Вейль аксиомалар жүйесіне арифмитикалық интерпретация (модель) жасадық. Онда нүктеге де, векторға да тәртіптелген үш санды сәйкес қойдық және аксиоманың негізгі ұғымдарын қолданылатын векторларды қосу, санға көбейту, скаляр көбейту, өлшеп салу амалдарын анықтадық. Ол интерпретацияны $\sum$ар дейік.

Енді Евклидтік $E_3$ кеңістікке тік бұрышты координата жүйесін ендірейік. Онда әр нүктемен, әр векторға оның координаталары деп аталатын тәртіптелген үш сан сәйкес келеді және A ($a_1$,$a_2$,$a_3$), B ($в_1$,$в_2$,$в_3$) болса $\overline{\mathrm{AB}} = \{в_1 - a_1, в_2 - a_2, в_3 - a_3\}$ болады.

Векторларды нүктелер арқылы анықтау, векторларды санға көбейту, векторларды қосу, оларды скаляр көбейту амалдарынан бұл Вейль аксиомалар жүйесіне жасалған аналитикалық интерпкретация болады. Оны

$\sum$ан дейік. $\sum$ар және $\sum$àí интерпретациялар изоморфты болады. Бұл изоморфтылық $\sum$ар дағы қатыстар мен $\sum$ан -дағы амалдардың, сайып келгенде бірдейлігінен шығады. Сөйтіп Вейль аксиомалар жүйесінің барлық интерпретациясы аналитикалық интерпретацияға изоморфты болады. Сондықтан Вейль аксиомалар жүйесі толық болады.

Сонымен Вейль аксиомалар жүйесі қайшылықсыз, тәуелсіз және толық жүйе екен. Сондықтан оған сүйеніп құрылған геометрияда қайшылықсыз болады.

## 4.6 Вейль аксиомалар жүйесінде негізгі геометриялық ұғымдарды анықтау.

Вейль аксиомалар жүйесі $V$ векторлар, Е нүктелер, R нақты сандар жиынында тұжырымдалды. Оның негізгі анықталмайтын ұғымдары вектор, нүкте, нақты сан. Енді осы ұғымдар жәрдемімен басқа геометриялық ұғымдарды анықтау мәселесімен айналысайық. Өткен тақырыпта I- II топ аксиомаларын қанағаттандыратын $V$ жиын векторлық кеңістік I- II –III топ аксиомаларын қанағаттандыратын $V$ жиын 3 өлшемді векторлық кеңістік делінетіні (оны $A_3$ деп жазады), I- II –III –IY-$V$ топ аксиомаларын қанағаттандыратын Е жиынын үш өлшемді векторлық нүктелік Евклидтік кеңістік немесе жай ғана үш өлшемді евклидтік кеңістік дейтіні (оны $E_3$ деп белгілейді) айтылады.

Егер $\bar{a}$ -вектор, λ- сан болса, онда $\lambda\bar{a}$ түрдегі векторлар жиынын үш өлшемді $V_3$ кеңістіктің $\bar{a}$ векторға керілген бір өлшемді ішкі векторлық кеңістігі дейді. Ал $\lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$ түрдегі векторлар жиынын $V_3$ кеңістіктің $\bar{a}$ және $\bar{в}$ векторларға керілген екі өлшемді ішкі векторлық кеңістігі дейді.

**$1^0$** Үш өлшемді $E_3$ евклидтік кеңістіктің А- бір нүктесі $Y_1$ бір өлшемді ішкі векторлық кеңістігі болсын.Онда $\overline{AX} \in V_1$ шартын қанағаттандыратын Х нүктелердің жиынын А нүктеден $V_1$ бағытта өтетін түзу дейді. Ал бір өлшемді кеңістік базасы бір вектордан (мысалы $\bar{a}$ вектордан) тұратындықтан $V_1$ -дің кез келген векторы $\bar{a}$ мен коллинеар болатындықтан $\overline{AX} = \lambda\bar{a}$ болады, яғни $l$ түзудің кез келген нүктесі осы шартты қанағаттандырады. А - түзудің бастапқы нүктесі, $\bar{a}$ - бағыттаушы векторы делінеді. Бұл $l$ түзуін (А, $\bar{a}$ ) деп жазатын боламыз. Түзудің кез келген нүктесін бастапқы нүкте үшін алуға, $V_1$- дің кез келген векторын бағыттаушы векторы ретінде алуға болады.

**$2^0$** Егер $E_3$ евклидтік кеңістіктің А нүктесі мен $\bar{a}$, $\bar{в}$ векторларға керілген $V_2$ ішкі кеңістігі берілсе онда $\overline{AX} \in V_2$ шартын қанағаттандыратын Х нүктелердің жиынын жазықтық дейді. Егер $V_2$ ішкі векторлық кеңістік А нүктеден шығатын ā,в̄ векторларға керілген болса $\overline{AX} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$ болатын Х нүктелердің жиынын жазықтық дейміз. Мұнда да А үшін жазықтықтың кез келген нүктесін алуға ā в̄ векторлар үшін $V_2$ кеңістіктің кез келген коллинеар емес екі векторын алуға болады. А жазықтықтың бастапқы нүктесі, $V_2$ - жазықтықтың бағыттаушы ішкі кеңістігі, ā мен в̄ жазықтық бағыттаушы векторлары делінеді.

**3⁰** Егер А мен В бір түзудің әртүрлі нүктелері болса, онда С нүкте бұл екі нүктенің арасында жатады делінеді, егерде $\overline{AC} = t\overline{AB}, 0 < t < 1$ (67-1) болса бұл кезде $\overline{ACB}$ деп жатады ($\overline{\mathrm{AC}} \uparrow\uparrow \overline{\mathrm{AB}}$ болады) деп $\overline{AC} = t\overline{AB} = t(\overline{AC} + \overline{CB}) = t\overline{AC} + t\overline{CB}, (1-t)\overline{AC} = t\overline{CB}$ бұдан $\overline{AC} = \frac{t}{1-t}$СВ және $\frac{t}{1-t}$ >о Егер $\frac{t}{1-t}$ =λ десек онда $\overline{ACB}$ дегенді (67-1) деп өзгеше $\overline{\mathrm{AC}} = \lambda * \overline{\mathrm{CB}}, \lambda > 0$ (67-2) деп те жазуға болады.

А, В нүктелерімен шектелген кесінді деп А,В, нүктелері мен олар арасында жататын нүктелердің жиынын айтады. Оны $[AB]$ немесе жай ғана АВ деп белгілейді. Сонда $[AB] = \{(A, B) \cup X / \overline{AXB}\}$ болады.

**4⁰** А нүкте бастапқы нүктесі болатын, В нүктеден өтетін сәуле деп [АВ] мен $\overline{ABX}$ болатын Х нүктелердің жиынын айтады. Оны [АВ) деп жазады сонда $[AB) = [AB] \cup \{X / \overline{ABX}\}$ немесе $[AB) = \{X / \overline{AX} = t\overline{AB}, t \geq 0\}$ (67,3). А үшін сәуленің кез келген нүктесін алуға болады.

**5⁰** П Жазықтықта жатқан *l* түзуі жазықтықтың *l* де жатпайтын нүктелерін, яғни $П_о$ =П/ *l* фигура нүктелерін $П_1$, $П_2$ екі бөлікке бөледі. Сонда $П_1$∪ *l*, $П_2$∪ *l* біріктірмені жарты жазықтықтар дейді. *l* түзуді ол жарты жазықтықтардың шекарасы дейді. Жарты жазықтықтар дөңес фигуралар болады.

**6⁰** П жазықтықта [ОА), [ОВ) сәулелер берілсін. Олардың бірігуін [ОА)∪[ОВ) =Г дейік. Онда Г фигура ПГ фигура нүктелерін $П_1$, $П_2$ екі бөлікке бөлінеді. Сонда $F_1 = \ddot{I}\ _1 \cup \tilde{A},\ F_2 = \ddot{I}\ _2 \cup \tilde{A}$ фигураның әрқайсысын бұрыш дейді. 0- бұрыштың төбесі [ОА), [ОВ) қабырғалары, П мен $П_2$ фигуралары $Ғ_1$, немесе $Ғ_2$ бұрыштың ішкі облысы делінеді.

Егер Г – түзу болса онда бұрыш жазық бұрыш делінеді, ал [ОА) мен [ОВ) беттессе толық бұрыш делінеді.

Негізгі геометриялық ұғымдар (түзу, кесінді, жазықтық, бұрыш, сәуле т.б.) Вейль аксиомалар жүйесінде осылайша анықталады.

## 4.7 Вейль аксиомалар жүйесінде кейбір теоремаларды дәлелдеу.

А) Вейль аксиомалар жүйесі жәрдемімен төмендегі теңдіктердің дұрыстығын дәлелдейік.

***1.*** $0\bar{a}=\bar{0}$ болады.

*Дәлелі:* $\lambda\bar{a} = (\lambda + 0)\bar{a} = \lambda\bar{a} + 0\bar{a}$ бұдан I- 3 аксиома бойынша $0\bar{a} = \bar{0}$

***2***. $\lambda\cdot\bar{0}=\bar{0}$ болады.

*Дәлелі* : $\lambda\bar{a}=\lambda(\bar{a}+\bar{0})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{0}$ бұдан I- 3 аксиома бойынша $\lambda\bar{0} = \bar{0}$

***3***. $(-\lambda)\cdot\bar{a}=-\lambda\bar{a}$ болады.

*Дәлелі*: $(-\lambda)\cdot\bar{a}=(-\lambda+0)\bar{a}=-\lambda\bar{a}+0\bar{a}=-\lambda\bar{a}+\bar{0}=-\lambda\bar{a}$. Сонымен $(-\lambda)\bar{a} = (-\lambda)\bar{a}$

***4***. $\overline{AA} = \bar{0}$ болады.

***Дәлелелі***: А,А,В нүктелерге V-2 аксиоманы қолдансақ $\overline{AA} + \overline{AB} = \overline{AB}$

Бұдан I-3 аксиома бойынша $\overline{AA} = \bar{0}$

**5**. $\overline{AB} = \overline{-BA}$ болады.

***Дәлелі:*** А,В,А нүктелерге V-2 аксиоманы қолдансақ $\overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA} = 0$ Сонда I-4 аксиомасы бойынша $\overline{AB} = \overline{-BA}$

***6.*** Егер $\overline{AB} = 0$ болса А мен В беттеседі, ал $\overline{AB} \neq 0$ болса олар әртүрлі нүкте болады.

Өйткені $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ болатындықтан және $\overline{AB} = \bar{0}$ болғандықтан $\bar{0} + \overline{BC} = \overline{AC}$, $\overline{BC} = \overline{AC}$ Бұдан V-1 аксиомасы бойынша А мен В нүктелер беттеседі. Демек $\overline{AB} \neq 0$ болса беттеспейді, яғни А мен В әртүрлі нүктелер болады.

***7***. $E_3$ кеңістікте шексіз көп нүкте болады.

***Дәлелі*** $E_3$ евклидтік кеңістік $V_3$ векторлық кеңістікте құрылатындықтан $E_3$ те шексіз көп векторлар болады. Егер 0 € $E_3$ тең нүктесі болса онда V-1 аксиома бойынша $E_3$- гі әрбір $\bar{x}$ векторға $\overline{ox} = \bar{x}$ болатын x нүкте сай келеді.

V-I аксиома бойынша әртүрлі векторға әртүрлі нүкте сай келеді.

Демек $E_3$ те вектор шексіз көп болатындықтан нүктелерде шексіз көп болады.

Б) Енді Гильберттің кейбір аксиомаларын Вейль аксиомалар жәрдемімен теорема ретінде дәлелдеуге болатынын қарастырайық.

***8.*** Екі нүкте арқылы бір тек бір түзу жүргізуге болады. (Бұл гильберттің I-1, 2 аксиомалары)

*Дәлелі.* А,В нүктелер берілген. Онда түзу анықтамасы бойынша бастапқы нүктесі А бағыттаушы векторы $\overline{AB}$ болатын $l=(A,\overline{AB})$ түзу болады. Егер X бұл түзуде жатса, онда $\overline{AX}=\lambda\overline{AB}$ болады. Егер λ=1 десек $\overline{AX}=\overline{AB}$. Демек В нүкте $l$ түзуінде жатады. Ал, А мен $\overline{AB}$ бір ғана түзуді анықтағандықтан $l$ түзуі жалғызақ болады.

***9.*** Әрбір түзуде кемінде екі нүкте болады Бір түзуде жатпайтын кемінде үш нүкте болады. (Бұл гильберттің I-3 аксиомасы)

***Дәлелі*** 8 теорема бойынша A,B екі нүктені басын бір $l=(A_1\overline{AB})$түзуі өтеді. Демек түзуде жататын кемінде екі нүкте бар. Бұл түзуде жатпайтын C нүктені $\alpha\overline{AC}+\beta\overline{AB}=\overline{0}, \alpha=0$шартын қанағаттандыратын нүкте ретінде алуға болады. Мұндай $\overline{AC}$ вектор болатындықтан C нүктесіде болады.

***10***. Бір түзуде жатпайтын A,B,C үш нүкте арқылы бір, тек бір жүргізуге түзуде болады. (Бұл Гильберттің I- 4.5 аксиомалары)

***Дәлелі*** A,B,C бір түзуде жатпайтындықтан A нүкте $\overline{\mathrm{AB}}$ , $\overline{\mathrm{AC}}$ векторлар, жазықтықтың анықтамасы бойынша, бір П=(A, $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{AC}}$) жазықтықты анықтайды және ол жалғыз болады.

***11***. Түзудің екі нүктесі бір жазықтықта жатса онда ол түзудің қалған нүктелері де сол жазықтықта жатады. (Бұл Гильберттің I-6 аксиомасы)

***Дәлелі:*** $l$ түзуі A,B екі нүктемен, П жазықтықтағы A,B,C үш нүктемен берілсін. X нүкте $l$ түзуі нүктесі болсын. Оның П жазықтығында жататынын дәлелдейік. X нүкте $\ell=(\mathrm{A}_1\,\overline{\mathrm{AB}})$ түзуінде жатқандықтан $\overline{\mathrm{AX}}=\lambda\overline{\mathrm{AB}}$ болады. $\overline{\mathrm{AX}}$,$\overline{\mathrm{AB}}$ ,$\overline{\mathrm{AC}}$ векторлар сызықтық тәуелді. Сондықтан $\overline{AX}=\lambda\overline{AB}+\mu\overline{AC}, \mu=0$. Ал бұл деген $\overline{\mathrm{AX}}$ , $\overline{\mathrm{AB}}$ , $\overline{\mathrm{AC}}$ векторлар бір жазықтықта жатыр деген сөз. Сондықтан C нүкте П жазықтығында жатады.

***12.*** Егер екі жазықтықтың бір ортақ нүктесі болса, онда олардың кемінде тағы бір ортақ нүктесі болады. (Гильберттің I- 7 аксиомасы)

***Дәлелі:*** бұл жазықтықтар бір нүктемен өздерінің бағыттаушы ішкі екі өлшемді кеңістіктермен анықталсын. $П_1 = (A, V_2)$, $П_2 = (A^1, V^1{}_2)$. $V_2$ мен $V_2'$ беттесбейді. Бірақ екеуі де $V_3$ векторлық кеңістіктің ішкі кеңістіктері болғандықтан олардың қимасы $V_2 \cap V^1{}_2 = V_1$ бір өлшемді ішкі кеңістік болады. $V_1 \subset V_2$, $V_1 \subset V^1{}_2$ болғандықтан $l=(A, V_1)$ түзудің барлық нүктелері $П_1$ – де де, $П_2$ -де де жатады. X бұл $П_1$,$П_2$ жазықтықтардың ортақ нүктесі болса, онда $\overline{\mathrm{AX}}$ € $V_2$, $\overline{\mathrm{AX}}$ € $V_2'$ болар еді. Сондықтан $V_2$ мен $V^1{}_2$ - тің қимасы $V_1$ –ге енер еді, яғни $\overline{\mathrm{AX}}$ € $V_1$. Демек x €$l$

***13.*** Бір жазыққтықта жатпайтын кемінде 4 нүкте болады (Бұл Гильберттің I-8 аксиомасы)

Дәлелі: Вейль аксиомалар жүйесіне сүйеніп жазықтыққа, кеңістікке декарт координаталар жүйесін ендіруге болады. Егер O$\bar{\mathrm{a}}$ $\bar{\mathrm{в}}\bar{\mathrm{c}}$ евклидтік E3 кеңістіктегі бір координата жүйесі болса, онда V -1 аксиома бойынша $\overline{\mathrm{OA}}=\bar{\mathrm{a}}$, $\overline{\mathrm{OB}}=\bar{\mathrm{в}}$, $\overline{\mathrm{OC}}=\bar{\mathrm{c}}$, болатын A,B,C нүктелер болады және координата жүйесінің анықтамасы бойынша O,A,B,C нүктелер бір жазықтықта жатпайды. О,А,В бір жазықтықты анықтаса С нүкте ол жазықтықта жатпайды.

Сөйтіп Вейль аксиомалары Гильберттің І – топ аксиомаларын дәлелдеуге жарайды екен.

В) Вейль аксиомалар жүйесі Гильберттің ІІ- топ аксиомаларын дәлелдеуге мүмкіндік береді.

***14.*** Егер $\overline{ACB}$ болса, онда $\overline{BCA}$ болады (Бұл Гильберттің ІІ-І аксиомасы) $\overline{\text{ACB}}$ болғандықтан (67-2) формула бойынша $\overline{AC}=\mu\overline{CB}$ $\mu$>0 болады. Бұдан $\overline{\text{CB}}=\frac{1}{\mu}\overline{\text{AC}}$ немесе $\overline{\text{BC}}=\frac{1}{\mu}\overline{\text{CA}}$, $\frac{1}{\mu}>0$ болады. Сондықтан (67-2) бойынша $\overline{\text{BCA}}$ болады.

***15***. Егер А,В нүктелер берілсе, онда АВ түзуінен $\overline{ABX}$ болатын Х нүкте табылады. (бұл Гильберттің ІІ-2 аксиомасы)

Дәлелі: (67-1) формуладан АВ кесіндінің $\overline{AC}=\lambda\overline{AB},\lambda>0$ болатын С нүкте оған сыртқы нүкте болатыны шығады. $\lambda=2$ десек $\overline{AC}=2\overline{AB},\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{AC},\frac{1}{2}>0$. Демек $\overline{\text{ABC}}$ болады.

***16.*** А,В,С, үш нүктенің тек біреуі қалған екеуінің арасында жатады. (Бұл Гильберттің ІІ-3 аксиомасы).

Дәлелі: $\overline{\text{ABC}}$ болсын. Бұл жағдайда $\overline{ACB}$, $\overline{\text{BAC}}$ болмайтынын дәлелдейік $\overline{\text{ABC}}$ дан $\overline{\text{AB}}$ =$\mu\overline{\text{BC}}$ , $\mu$>0 болады. Сонда $\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CB}=\mu\cdot\overline{BC}$ . Бұдан $\overline{\text{AC}}=-(\mu+1)\ \overline{\text{CB}}$ . Мұндағы - $(\mu+1)$<0 болғандықтан С нүкте А мен В –ның арасында жата алмайды. Осы сияқты $\overline{\text{BAC}}$ - да болуы мүмкін еместігін дәлелдеуге болады.

***17.*** Гильберттің ІY аксиомасы (Поли аксиомасы). Егер А,В,С әртүрлі нүктелер $d$ олар жатқан жазықтықтың бұл нүктелерді басып өтпейтін түзуі болса онда, егер d түзуі АС кесіндісін қиса онда ол түзу не АС, не ВС кесіндіні де қияды дейтін.

Осыны дәлеледеу үшін А,В,С, нүктелер анықтайтын жазықтыққа $O\bar{l}_1\bar{l}_2$ координата жүйесін ендірейік. О нүкте d түзуінде жатсын, $\overline{\ell_1}$//d болсын. Осы координаталар жүйесінде А ($x_1$,$y_1$) , В ($x_2$,$y_2$). С ($x_3$,$y_3$) болсын. d түзуі АВ- ны оның М (х,у) ішкі нүктесінде қиып өтсін. Онда $\lambda>0$ саны табылып $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$ (*) болады.

А,В,С нүктелер d түзуінде жатпайтындықтан $y_1 \neq 0$, $y_2 \neq 0$, $y_3 \neq 0$, болады, ал, М нүкте d – да жатқандықтан у= 0 болады. Бұдан $y_1 + \lambda y_2 = 0$ болады, Ал, бұл теңдік $y_1$ мен $y_2$ қарама – қарсы таңбада болған кезде ғана мүмкін;

Сонда мына жағдайдың бірі міндетті түрде болады.

а) $y_2\ y_3 < 0$ не б) $y_1\ y_3 < 0$

а) жағдайда d түзу АС кесінді қияды. Өйткені координаталары $x_0 = \frac{x_2 + \mu x_3}{1+\mu}$, $y_0 = \frac{y + \mu y_3}{1+\mu}$ $\mu = \frac{-y_2}{y_3}$ болатын N ($x_0$, $y_0$) нүкте үшін $y_0 = 0$ болады. Сондықтан $N_0$ € d жатады.

Екінші жағынан $y_2\ y_3 < 0$ болғандықтан $\mu = \frac{-y_2}{y_3} > 0$ болады. Сондықтан (*) формула бойынша $N$ нүкте В мен С нүктелердің арасында жатады, яғни d түзу ВС кесінді оның ішкі нүктесінде қияды. Ал б) жағдайда d түзуінің АС кесіндіні қиятындығын дәл осылай дәлелдеуге болады. Сонымен ІІ-2 аксиома дәледенді.

Г) Енді метрикалық теоремаларды дәлелдеуді қарастырайық.

АВ мен СД кесінділер өзара тең (АВ = СД) делінеді, егерде кез келген оң анықталған би сызықты форма g табылып

g $(\overline{AB}, \overline{AB}) = д\,(\overline{СД}, \overline{СД})$ (67-4) болатын болса. Демек (67-4) теңдік орындалатын ең болмағанда бір би сызықты форма g табылса, онда АВ = СД болады.

(67-4) теңдік кесінді ұштарының ретіне байланысты болмайды.

Осы анықтамаға сүйене отырып Гильберттің ІІІ – топ аксиоамларын Вейль аксиомалар жүйесінің жәрдемімен дәледеуге болады.

***18.*** АВ кесінді және $A^1$ нүктеден шығатын $h'$ сәуле берілсе, онда бұл сәуледе $AB = A^1B^1$ болатын бір ғана $B^1$ нүкте болады. ( Бұл Гильберттің ІІІ-1 аксиомасы)

***Дәлелі*** $h^1$ сәуле бағытын анықтайтын векторлардың бірі $\bar{a}$ болсын. Онда $h^1$ сәуленің кез келген $X^1$ нүктесі $\overline{A^1X^1} = \lambda \bar{a}$, $\lambda > 0$ теңдікпен анықталар еді ((67-3) бойынша). Анықтама бойынша $A^1X^1$ кесінді АВ кесіндіге g $\left(\overline{A^1X^1}\right), (\overline{A^1X^1}) =$ g $(\overline{AB}, \overline{AB})$ немесе g $(\lambda\bar{a}, \lambda\bar{a})$= g $(\overline{AB}, \overline{AB})$ болған жағдайда ғана тең болады. Бұдан бұл теңдік орындалатын λ- ны табуға арналған $\lambda^2$ g $\overline{(a, \bar{a})}$ =g$(\overline{AB}, \overline{AB})$ теңдеу шығады және g $\overline{(a, \bar{a})} > 0$, g$(\overline{AB}, \overline{AB}) > 0$ болғандықтан λ жалғыз ақ болады.

Сөйтіп $h^1$ сәуле бойынан $A^1B = A^1X^1$ болатын жалғыз λ табылады. Демек жалғыз $B^1$ нүкте табылады.

***19 .*** Егер АВ = СД, СД =ЕҒ болса, онда АВ = ЕҒ болады ( Гильберттің ІІІ-2 аксиомасы)

***Дәлелі***: АВ = СД, СД =ЕҒ болғандықтан g $(\overline{AB}, \overline{AB}) = g(\overline{C\ddot{A}}, \overline{\tilde{N}\ddot{A}})$, g $(\overline{\text{СД}}, \overline{\text{СД}})$= g $(\overline{\text{ЕҒ}}, \overline{\text{ЕҒ}})$ болады. Бұдан $g(\overline{AB}, \overline{AB}) = g(\overline{EF}, \overline{EF})$ болады.

Ал, бұл АВ= ЕҒ деген сөз.

20. $\overline{ABC}, \overline{A'B'C'}$ болған кезде АВ = $A^1B^1$ ВС= $B^1C^1$ болса онда АС = $A^1C^1$ болады. (Бұл Гильберттің ІІІ-3 аксиомасы)

***Дәлелі***: Шарт бойынша $\overline{AB} = \lambda\overline{BC}, \lambda > 0$ және $A'B' = \lambda'B'C', \lambda' > 0$ (*) және g табылып $g(\overline{AB}, \overline{AB}) = g(\lambda\overline{BC}, \overline{\lambda BC}) = \lambda^2 g(\overline{B}C, \overline{BC})$ (*) $g(\overline{A'B'}, \overline{A'B'}) = g(\lambda'b'c', \lambda'b'c') = \lambda^2 g(\overline{b'c'}, \overline{b'c'})$.

Бұдан АВ= $A^1B^1$ ВС= $B^1C^1$ екенін ескерсек $\lambda=\lambda^1$ болады.

***Ү-2*** аксиома бойынша $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, $\overline{A'B'} + \overline{B'C'} = \overline{A'C'}$ болатындықтан, $\lambda=\lambda^1$ және (*) ескерсек $\overline{AC} = (1+\lambda)\overline{BC}$ , $\overline{A'B'}$=$(1+\lambda)\overline{B'C'}$ болып шығады. Бұдан $g(\overline{AC}, \overline{AC}) = 1+\lambda^2)\cdot g(\overline{BC}, \overline{BC})$ және $g(\overline{A'C'}, \overline{A'C'}) = (1+\lambda^2)\ g(\overline{B'C'}, \overline{B'C'})$. Ал $BC = B'C'$ екенін ескерсек $g(\overline{AC}, \overline{AC}) = g(\overline{A'C'}(\overline{A'C'}))$ болады. Ал бұл АС= $A'C'$ деген сөз.

Д) Одан әрі перпендикуляр ұғымын ендіру керек. Ол ұғым Вейль аксиомалар жүйесінде былайша ендіріледі. Нол емес $\bar{a}, \bar{b}$ векторлар өзара ортагонал (перпендикуляр) делінеді, егерде олар кез келген бисызықты формаға қараганда түйіндес болатын болса яғни g $(\bar{a}, \bar{в})$ =0 (61-5) болса.

Демек $\bar{a}$ мен$\bar{в}$ түйіндес болатын ең болмағанда бір би сызықтық форма g табылса онда олар ортогонал болады. Векторлық Ү кеңістікте векторлары өзара ортагонал болатын ең болмағанда бір базис болатыны бұрын айтылған.

Евклидтік $E_3$ кеңістікте екі түзу перпендикуляр делінеді, егерде олардың бағыттаушы ішкі кеңістіктері ортоганал болса (яғни бірінші түзудің бағыттаушы ішкі кеңістігінің әрбір векторы екінші түзудің бағыттаушы ішкі кеңістігінің әрбір векторына ортоганал болатын болса ).

Түзу жазықтыққа перпендикуляр делінеді, егерде түзудің бағыттаушы ішкі кеңістігі жазықтықтың бағыттаушы ішкі кеңістігіне ортоганал болатын болса.

Осы анықтамаларға сүйеніп мектеп геометриясында кездесетін түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығына арналған барлық теоремаларды дәлелдеуге болады.

PQ кесінді алайық та оны бірлік кесінді дейік. Бұған тең болатын кесінділерде бірлік кесінді делінеді. Бірлік PQ кесінді үшін g $(\overline{PQ}, \overline{PQ})$ =1 болатын бір ғана сызықтық форма g болады. Егер $E_3$ кеңістікте бірлік кесінді сайлап алынса, онда векторлық кеңістік Евклидтік кеңістікке айналады. Сондықтан ол кеңістікте векторларды скаляр көбейту амалын анықтауға болады.

ā вектордың ұзындығы немесе нормасы деп $|\bar{a}| = \sqrt{g(\overline{a_1\bar{a}})}$ (67-6) санын айтады.

Енді E3 кеңістікке ортонормаланған базис, тікбұрышты координата жүйесін ендіруге болады.

AB кесіндінің ұзындығы деп $\overline{AB}$ вектордың ұзындығын айтады және былай жазады.

$$|AB| = \sqrt{g(\overline{AB}, \overline{AB})} \quad (67\text{-}7)$$

бұлардағы g бірлік кесіндіге сай келетін бисызықты форма. A мен B нүктелердің арақашықтығы деп AB кесіндінің ұзындығын айтады.

Екі фигура тең делінеді, егерде қозғалыс арқылы оның бірін екіншісіне беттестіруге мүмкін болса.

Екі бұрыш тең делінеді, егерде оның бірін екіншісіне қозғалыс арқылы беттестіруге болатын болса

*Кесінді ұзындығының мынадай қасиеттері бар:*

***1°*** Тең кесінділердің ұзындықтары да тең болады.

***Дәлелі***: AB = СД болса (67-4) бойынша $g(\overline{AB}, \overline{AB}) = g(\overline{C\ddot{A}}, \overline{\tilde{N}\ddot{A}})$ болады. Бұдан (67-7) бойынша /AB/= /СД/ болады.

***2°.*** $\overline{ABC}$ болса онда /AB/+ /BC/ = /AC/ болады.

Демек $\overline{ABC}$ дан $\overline{AB} = \lambda\overline{BC}, \lambda > 0$ болады, ал $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ болатындықтан $\overline{AC} = \lambda\overline{BC} + \overline{BC} = (1 + \lambda)$ $\overline{BC}$ болады. Сонда (67-4) бойынша

$$|AB| = \sqrt{g(\overline{AB}, \overline{AB})} = \sqrt{g(\overline{\lambda BC}, \overline{\lambda BC})} = \sqrt{\lambda^2 g(\overline{BC}, \overline{BC})} = \lambda\,|BC|$$

Осы сияқты

$$|AC| = \sqrt{g(\overline{AC}, \overline{AC})} = \sqrt{g\left[(1+\lambda)\overline{BC}, (1+\lambda)\overline{BC}\right]} = (1+\lambda)\sqrt{g(\overline{BC}, \overline{BC})} =$$
$$= (\lambda+1)|BC|$$

Сонымен $|AC| = \lambda|BC| + |BC| = |AB| + |BC|$

***3°*** Бірлік кесінді ұзындығы 1 ге тең болады.

*Дәлелі:* g бірлік PQ кесіндіге сай келетін бисызықтық форма болғандықтан $g(\overline{PQ}, \overline{PQ})$=1 болады. Бұдан / PQ /=1 шығады.

***4°*** Кез келген үш ABC нүктелер үшін /AC/≤ /AB/+/BC/ болады.

*Дәлелі:*$\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{BC}}$ квадраттасақ $\left[\overline{AC}\right]^2 = \left|\overline{AB}^2\right| + 2\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{BC}\right| + \left|\overline{BC}^2\right|$.

Ал, $\overline{AB} \cdot \overline{BC} \le \left|\overline{AB}\right|\left|\overline{BC}\right|$ болатындықтан $\left|\overline{AC}\right|^2 \le \left|\overline{AB}\right|^2 + 2\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{BC}\right| + \left|\overline{BC}\right|^2 = (\left|AB\right| + \left|\overline{BC}\right|)^2$ Бұдан $\overline{\mathrm{AC}} \le \overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{BC}}$ болады. Теңдік $\overline{\mathrm{ABC}}$ болғанда ғана орындалады.

***21***. Жазықтықтағы $0^1$ нүкте, ол нүктеден шығатын $h^1$ сәуле, $h^1$ түзуі шекарасы болатын $\alpha^1$ жазықтықтан жасалған $(0^1,h^1,\alpha^1)$ жалау дейді. Егер < (hк) бұрыш берілсе, онда $\alpha^1$ жарты жазықтықтан < (hк) =< $(h^1к^1)$ болатын бір ғана $k'$ сәуле табылады. (Бұл Гильберттің III-4 аксиомасы)

**Дәлелі:** < (hк) бұрыштың төбесі 0 болсын к сәуле шекарасы 0 нүктеден шығатын h сәуле болатын α жарты жазықтықта жатсын. Олар (o,h,к,) жалау жасасын.

Осы жалауды $(0^1,h^1,к^1)$ жалауға көшіретін f қозғалысты қарастырайық. Сонда $f(0) = 0^1$ $f(h) = h^1$, $f(к) = к^1$ болсын. Осы $к^1$ - тың жалғыз ақ болтанын дәлелдеу керек. Теорема шартын қанағаттандыратын тағы да бір $к^{11}$ сәуле бар десек онда < (hк) =< $(h^1к^{11})$ болар еді. Ал бұл $f^1$ қозғалысы табылып, $f^1(h) = h^1$, $f^1(к) = к^1$, $f^1(0) = 0^1$ болады деген сөз. Демек $f^1$ қозғалысы (0,h,α) жалауды $(0^1,h^1,\alpha^1)$ жалауға көшіреді екен. Олай болса f және $f^1$ қозғалыстары беттеседі. Сондықтан $к^{11}$ мен $к^1$ те беттеседі.

***22.*** Егер АВ = $A'B'$, АС = $A'C'$ $\angle A = \angle A'$ болса, онда Δ ABC = $A^1B^1C^1$ болады. (Бұл теорема Гильберттің III-5 аксиомасының дұрыстығы шығады)

***Дәлелі:*** $\angle A = \angle A'$ болғандықтан АВ ны $A'B'$, АС ны $A'C'$ сәулеге көшіретін $f$ қиылысы болады. $f(B) = B''$, $f(C) = C''$, $f(A) = A''$ көшсін. Онда қозғалыс ережесі бойынша $AB = A'B''$, $AC = A'C''$ болу керек. Ал, теорема шарты бойынша $AB = A'B'$, $AC = A'C'$. Сондықтан теңдіктің бірінші қасиеті бойынша $B'$ пен $B''$, $C'$ пен $C''$ беттеседі. Сөйтіп ΔABC мен $A^1B^1C^1$ беттеседі. Сондықтан $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ болады. Бұл үшбұрыштың теңдігінің 1 белгісі.

Сонымен Гильберттің III- топ аксиомалары теорема ретінде дәлелденді.

***23***. Гильберттің IY -1 аксиомасы-Архимед аксиомасын дәлелдейік. АВ мен СД кез келген кесінділер болсын. Кесінділер теңдігінің 1 – қасиеті бойнша АВ сәуледе $\overline{AA_1A_2}, \overline{A_1A_2A_3}...\overline{A_{n-2}A_{n-1}A_n}$ және $А\ А_1 = А_1А_2 = ... = А_{п-1}\ А_п$= СД болатын $А_1А_2,..., А_п$ нүктелер табылады. СД – ны бірлік кесінді үшін алсақ кесінділер теңдігінің 3 қасиеті бойынша $|АА_1| = |А_1\ А_2| = \cdots = |А_{п-1}А_п| = |СД| = 1$ болады. Демек $АА_п = п$ болады.

Егер $n -$ ді $n$>/AB/ етіп алсақ $|AB| < |AA_n|$ болады. Сондықтан теңдіктің 2- қасиеті бойынша $\overline{AB\,A_n}$ жатады. Сөйтіп Гильберттің IY-1 аксиомасы Вейль аксиомалар жүйесінде теорема ретінде дәлелденеді.

24. Гильберттің IY- 2 аксиомасы Кантор аксиомасын дәлелдейік. Бірінің ішінде бірі жатқан шексіз көп кесінділер орналасқан a түзуін бастыра жазықтық жүргізіп, сол жазықтыққа Ox өсі a түзуімен беттесетін Oxy координаталар жүйесін ендірейік. Сөйтіп a түзуі нүктелерінің Ox (абциса) өсіне бейнелеуін қарастырайық. Бұл бейнелеу биекция болады және $M_1$ ($x_1$, 0) , $M_2$ ($x_2$, 0). $M_3$ ($x_3$, 0) нүктелерде $M_2$ нүкте $M_1$ мен $M_2$ нүктелердің арасында жэатса онда не $x_1<x_2 < x_3$, не $x_1 >x_2 > x_3$, болар еді. Демек Контор аксиомасы сан үшін орындалады екен. Сондықтан ол геометриялық терминде a түзуінде орындалады.

Сөйтіп Гильберттің IY- 1,2 аксиомаларын да Вейль аксиомалары арқылы дәлелдеуге болады екен.

Е) Енді түзулердің паралелдігін қарастырайық. Екі түзу паралель делінеді, егерде олар бір жазықтықта жатса және ортақ нүктелері болмаса.

Мынадай Лемманы дәлелдейік.

25. Лемма. Егер екі түзу бір жазықтықта жатса және олардың бағыттаушы ішкі кеңістіктері беттесбесе, онда ол түзулер қиылысады.

**Дәлелі:** П жазықтығында жатқан $\left(A,\vec{a}\right),\left(B,\vec{b}\right)$ екі түзу берілсін. Шарт бойынша $a$ мен $b$ векторлар коллениар емес. Сондықтан П*да жатқан $AB$ вектор оларға бір мәнді жіктеледі:

$AB = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ $(*)$ болсын.

V-1аксиома бойынша $A\vec{x} = \alpha\vec{a}.B\vec{y} = -\beta\vec{b}$ болатын $x, y$ нүктелер болады: $x \in \left(A,\vec{a}\right), y \in \left(B,\vec{b}\right)$ орнына қойсақ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AX} - \overrightarrow{BY}$, бұдан $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BY} = \overrightarrow{AX}$ бұдан V-2 бойынша $\overline{AY} = \overline{AX}$. Сонда V-1 бойынша $y = x$ беттеседі. Яғни түзулердің ортақ

$\left(A,\vec{a}\right), B\left(B,\vec{b}\right)$ нүктесі болады.

1-теорема. Әр түрлі екі түзу олардың бағыттаушы ішкі кеңістіктері беттескен жағдайда ғана, тек сол жағдайда ғана паралель болады.

Дәлелі $L_1(A_1V_1), L_2(B_1V_1)$ екі түзу берілсін және олардың бағыттаушы ішкі кеңістіктері бірдей болсын (беттессін).

Бұл түзулер әртүрлі түзулер болғандықтан беттеспейді және бағыттаушы ішкі кеңістіктеріәртүрлі емес.Сондықтан ол түзулер Лемма бойынша қилыспайды (ортақ нүктесі болмайды).

Бұл түзулердің $A$ нүктеден өтетін, $\overline{AB}$ вектор мен $V_1-$дің кезкелген вектор $b-$ға паралель болатын жазықтықта жататыны түсінікті, яғни ол түзулер

$(A,\overline{AB},\ \vec{b})$ жазықтықта жатады.

Сондықтан бұл түзулер анықтама бойынша паралель болады. Бұл теорема түзулердің паралель болу белгісі болып табылады.

2- теорема. Берілген $l$ түзуде жатпайтын, берілген А нүктеден ол түзуіге паралель болатын бір тек бір түзу өтеді.

**Дәлелі:** $l$ түздің бағыттаушы ішкі кеңістігі $V_1$ болсын, $(A_1V_1)$ түзу $l$ түзуге паралель болад. (1-теорема бойынша).

Енді $l$-ге паралель болатын $A$ нүктеден өтетін басқа түзудің жоқтығын дәлелдейік. $A$-дан өтетін $l$-ге паралель болатын тағыда $(A_1b_1^{/})$ түзу бар дейік. Онда 1-теорема бойынша $V_1$ мен $V_1^{/}$ ішкі кеңістіктер беттеседі. Сондықтан $(A_1V_1),(A_1V_1^{/})$ түзулерде беттеседі.

Сөйтіп, Вейль аксиомалар жүйесінде Гильберттің паралельдік аксиомасы да орындалады екен. Сонымен Вейль аксиомалар жүйесіне негізделген теорияда Гильберттің барлық аксиомалары орындалады екен. Сондықтан, Вейль аксиомалар жүйесі қайшылықсыз, тәуелсіз және толық болғандықтан. Гильберт аксиомалар жүйесіде толық, қайшылықсыз және тәуелсіз болады.

## 5.Мектеп геометриясының аксиомалар жүйесі.

Көптеген жылдар бойы КСРО аймағында геометрия мектептерде толық емес аксиомалар жүйесінде құрылып, оқылып келді. Мысалы А .П.Киселевтың, Н.Н. Никитиннің тұрақты мектепке арналған оқулықтары, Н.А. Глаголевтің байқау оқулығы осындай оқулықтар болды. Оларда Гильберттің I топ аксиомалары, Архимед аксиоамасы мен паралелдік аксиома ғана өз дәрежесінде берілген деуге болады. Ал, реттек конгуренттік аксиомалар оларға мүлдем кірмей қалды.

Бұл геометриялық пайымдаулар, талдаулар, дәлелдеу мен баяндауларда интуицияға, көрнекілікке жүгінуге, оқулыққа айқын түрде анықталмаған ұғымдармен тұжырымдарды пайдалануға алып келді. Бұл әдістемелік жағынан мақұлдауға тұрғанымен ғылыми тұрғыда елеуі кемістік болды. Ол геометрияны алдын –ала таңдап алынған ұғымдар мен қатыстарға, тұжырымдарға ғана сүйене отырып қатаң логикалық жолмен баяндау талабына сай келмейді.

Сондықтан, геометрияны құрудың логика - аксиоматикалық теориясына сай келетін, әдістемелік жағынан өзін –өзі ақтайтын алғашқы ұғымдар, олар арасындағы қатыстар мен аксиомалар жиынын мектеп оқулығына арнап қайта тұжырымдау. Сөйтіп Гильберт –Вейль аксиомалар жүйесінің мектеп геометриясына лайық ішкі жүйесін жасау қажет болды.

Біздің елде мұндай жүйе төмендегі еңбектерде негізделінді.

А.В. Погорелов элементар геометрия.

I- бөлім. Планиметрия М «Наука» 1969

II- бөлім. Стереометрия «Наука» 1970

А.Н. Колмогоров «Мектеп математика курсының мазмұны жайлы» («Математика в школ» журналы 1965, № 4)

А.Н. Колмогоров, А.Ф. Семенович, Ф.Ф. Нагибин, Р.С. Черкасов

Геометрия 6 класс М «Просвешение» 1972 .

Геометрия 7 класс М «Просвешение» 1973

Бұлардың аксиомалар жүйесі Гильберттің де, Вейльдің де аксиомалар жүйесінен өзгеше.

### 5.1 Колмогоровтың геометриялық аксиомалар жүйесі.

Колмогоровтың басшылығымен жасалған жоғарыда келтірілген оқулықтар алғашқы кезде байқау оқулықтары болды. Кейіннен олар тұрақты мектеп оқулығына айналды.

Колмогоров Андрей Николаевичтың аксиомалар жүйесін ішінара өзгерістер енгізу арқылы төмендегі оқулықтарда келтірілген тұжырымдар күйінде бермекпіз.

А.Н. Калмагров, А.Ф. Семенович, Р.С. Черкасов

Геометрия 6-8. М . «Просвешение» 1980 (2 басылым)

В.М. Клопский, З.А. Скопец, М.И. Ягодовский Геометрия 9-10 М. «Просвешение» 1981. (7 басылым)

А.Н. Колмогоров аксиомалар жүйесінде евклидтік кеңістік құрылымының базасы 3 жиыннан тұрады.

Е- нүктелер жиыны

Ғ- түзулер жиыны

G – қашықтық деп аталатын белгілі бір теріс емес шамалар жиыны.

Сондықтан аксиомалар жүйесінде негізгі алғашқы ұғымдар үшін «нүкте», «түзу», «арақашықтық» алынған. Бұлар арасында болуы мүмкін негізгі қатыстарға «тиістілік қатыс» (нүктелердің түзуде, түзулердің жазықтықта жату қатысы) және $\delta$: Е x Е → $G$ бейнелеу мен анықталатын тернарлық қатыс алынған. А, В € Е хЕ элементтерде δ функцияның қабылдайтын мәні δ (АВ ) ны А дан В нүктеге дейінгі қашықтық дейді және оны /АВ/ деп белгілейді.

«Арасында жатады» қатысы былайша анықталған В нүкте А мен С нүктелер арасында жатады делінеді, егерде ол А мен С дан өзге болса және мына шартты /АВ/ +/ВС/ =/АС/ қанағаттандыратын болса, оны $\overline{\mathrm{ABC}}$ деп белгілейтін боламыз.

Колмогоровтың планиметриялық аксиомалар жүйесі 5 топқа бөлінетін 12 аксиомадан тұрады.

Планиметрияда бірғана жазықтық бар. Басқа геометриялық фигуралардың барлығы осы жазықтықта жатады деп есептеледі.

## I –топ. Тиістілік аксиомалары

Бұл топ аксиомалары нүктенің түзуге,тузудің жазықтыққа тиістілік қатыстарын сипаттайды.

I-1 Түзу нүктелер жиыны

I-2 Кез келген екі нүктені қамтитын бір, тек бір түзу болады.

I-3 Ең болмағанда бір түзу болады және әр түзуде кемінде бір нүкте болады.

## II топ. Қашықтық аксиомалары.

Бұл топ аксиомалары арақашықтықтың негізгі қасиеттерін сипаттайды.

II-1 Кез келген АВ екі нүктеге А-дан В-ға дейінгі қашықтық деп аталатын теріс емес саны /АВ/ сәйкес келеді. /АВ/ қашықтық А мен В нүктелер беттескен жағдайда ғана нолге тең болады.

II-2 A нүктесін B нүктеге дейінгі қашықтық B нүктеден A нүктеге дейінгі қашықтыққа тең болады: /AB/= /BA/

II-3. Кез келген A,B,C нүктелері үшін A мен C нүктелер арасы A мен B, B мен C нүктелер арасының қосындысынан артық болмайды: /AC/ ≤ /AB/ + /BC/

## III топ. Реттік аксиомалар.

Бұл топ аксиомалары түзу мен жазықтықтағы нүктелер арасындағы реттілікті сипаттайды.

III- 1. Үш нүкте олардың біреуі қалған екеуінің арасында жатқан жағдайда ғана, тек сол жағдайда ғана бір түзудің бойында жатады.

III-2. Түзудің кез келген O нүктесі, ол түзудің бұдан басқа барлық нүктелер жиынын о нүкте әртүрлі жиынға кіретін кез келген екі нүктенің арасында жататындай етіп, 2 ішкі жиынға бөледі.

Бұл аксиомадан кейін сәуле ұғымына анықтама беруге, сөйтіп оны қолдана бастауға болады.

III-3 Кез келген теріс емес а нақты санына, O нүктеден шығатын сәуле бойынан O нүктеден қашықтығы а –ға тең болатын бір ғана M нүкте болады.

Енді кесінді ұғымына анықтама беруге болады.

III- 4. Кез келген түзу жазықтықтың бұл түзуде жатпайтын барлық нүктелер жиынын бос емес екі дөңес облысқа бөледі.

Енді жарты жазықтық ұғымын ендіруге болады.

IV – топ. Жазықтықтың қозғалғыштық аксиомалары.

Бұл бір ғана аксиомадан тұрады, және жазықтықта түрлі орынауыстырулар мүмкіндіктерін сипаттайды.

IV.Егер /AB/ қашықтық, оң және /$A^1B^1$/ қашықтыққа тең болса, онда A нүктені $A^1$ нүктеге, B нүктені $B^1$ нүктеге көшіретін дәл екі орын ауыстыру болады және бұл ауыстыруларда AB түзуімен шектелген α жарты жазықтық $A^1B^1$ түзуімен шектелген β және $\beta^1$ екі жарты жазықтықтарға көшеді.

## V –топ. Паралелдік аксиома.

Бұл топ аксиомасы да бір ғана аксиомадан тұрады.

V. Жазықтықтың кез –келген нүктесінен берілген түзуге бірден көп емес паралель түзу өтеді.

Осы 12 аксиоманы басшылыққа ала отырып планиметрияға тиісті анықтамаларды беріп, теоремаларды тұжырымдап, оларды дәлелдеуге болады Вейль аксиомалар жүйесіне сүйене отырып Колмогоров аксиомаларында айтылған барлық тұжырымдарды теорема ретінде дәлелдеуге болады және керісінше Колмогорав аксиомалары жәрдемімен Вейль аксиомалар жүйесінде келтірілген тұжырымдардың дұрыстығын дәлелдеуге болады.

Демек Вейль және Колмогорав аксиомалар жүйесі өзара эквивалентті болады. Сондықтан Колмогоравтың аксиомалар жүйесіне негізделіп жасалған теория қайшылықсыз болады.

Колмогоравтың стереометриялық аксиомалар жүйесі.

Колмогоравтың стереометриялық аксиомалар жүйесінде алғашқы ұғымдарға «нүкте», «түзу», «жазықтық» және «қашықтық» алынған.

Барлығы 4 аксиома, ол 5 топқа бөлінген.

### I- топ Тиістілік аксиомалар

I-1 Ең болмағанда 1 түзу бір жазықтық болады. Әрбір түзу және әрбір жазықтық нүктелердің кеңістікпен беттеспейтін бос емес жиындары.

I-2 Әртүрлі екі нүктені басып бір, тек бір түзу етеді.

I-3. Жазықтықтың екі нүктесінен өтетін түзу сол жазықтықта жатады.

I-4. Бір түзуде жатпайтын үш нүктені басып бір тек бір жазықтық етеді.

I-5. Әртүрлі екі жазықтықтың ортақ нүктесі болса, онда олардың қимасы түзу болады.

### II топ Қашықтық аксиомалары.

II-1 Кез келген екі А,В нүктелер үшін А дан В ға дейінгі қашықтық делінетін теріс емес шама болады. Қашықтық /АВ/ ол А мен В нүктелері беттескен жағдайда ғана, тек сол жағдайда ғана 0 ге тең болады.

II-2. А нүктеден В нүктеге дейінгі қашықтық, В нүктеден А нүктеге дейінгі қашықтыққа тең болады. /АВ/ = /ВА/

II-3. Кез келген А,В,С нүктелері үшін А дан С –ға дейінгі қашықтық А дан В ға, В дан С ға дейінгі қашықтықтар қосындысынан артық емес /АС/≤ /АС/ +/СВ/.

Бұларға қосымша кез келген жазықтық үшін планиметрияға арналған III-1,2,3 реттілік аксиомалар IY жазықтықтың қозғалғыштық аксиомасы, V, паралелдік аксиома орындалады.

### 5.2 Погореловтың геометриялық аксиомалар жүйесі

А.В. Погореловтың аксиоамалар жүйесі оның геометрия 6-10 (А «Мектеп» 1983) оқулығы және жоғары оқу орындарына арналған геометрия оқулығына (М «Наука» 1988) редакциясында беріліп отыр.

А.В. Погореловтың аксиома жүйесінде евклидтік кеңістік құрылымының базасы үш жиыннан тұрады.

Е- нүктелер жиыны, элементтері нүкте деп аталады, Ғ- түзулер жиыны, элементтері түзу деп аталады.

R- нақты сандар жиыны

Е,Ғ- негізгі, R - қосымша жиын ретінде қарастырылады.

Аксиома жүйесінде негізгі ұғымдар үшін нүкте,түзу,жазықтық алнған. Бұл ұғымдар мен жиындар олардың элементтері арасында орнауы мүмкін қатыстар үшін 4 қатыс алынған.

а) нүкте, түзу, жазықтықтардың бір біріне тиістілік қатысы

б) түзу нүктелер арасындағы қатыс. Ол «арасында жатады» сөзімен белгіленеді.

в) кесінділер ұзындығы

г) бұрыштың градустық өлшемі

Погореловтың аксиомалар жүйесі 12 аксиоамадан тұрады. Оның ішінде планиметриялық аксиомалар - 9 (ол 6 топқа бөлінген), 3 аксиома стиреометриялық аксиомалар.

## I- топ Тиістілік аксиомалары.

Бұл топ аксиомалары нүктелер мен түзулердің «тиісті» («жатады») деген сөздермен өрнектелетін өзара орналасу қасиеттерін сипаттайды.

I-1 Кез келген екі нүкте арқылы түзу жүргізуге болады және ол тек біреу ақ болады

I-2. Әрбір түзуде кемінде екі нүкте жатады. Бір түзуде жатпайтын 3 нүкте болады.

## II – топ. Реттілік аксиомалары.

Бұл топ аксиомалары нүктелердің түзуде және жазықтықта өзара орналасу қасиеттерін сипаттайды. Ол қасиет «арасында жатады» сөзі арқылы белгіленеді.

II-1. Түзудегі 3 нүктенің біреуі, тек біреуі ғана қалған екеуінің арасында жатады. Осы аксиомаға сүйеніп кесінді ұғымын ендіруге болады.

II-2. Түзу жазықтықтың бұл түзуде жатпайтын нүктелерінің жиынын екі ішкі жиынға (Екі жарты жазықтыққа) былайша бөледі:

Бір жарты жазықтықтың нүктелерін қосатын кесінді түзумен қиылыспайды, ал әр жарты жазықтықта жатқан нүктелерді қосатын кесінді түзуді қияды.

Осы аксиомаларға сүйеніп сәуле, үшбұрыш ұғымдарын ендіруге Паш аксиомасын теорема ретінде дәлелдеуге болады.

## III топ. Кесінді мен бұрыш өлшемі аксиомалары.

III-1 Әрбір кесіндінің анықталған нолден үлкен ұзындығы болады. Егер В нүкте АС кесіндісінде жатса онда АС кесінді ұзындығы АВ мен ВС кесінділердің ұзындықтарының қосындысына тең болады.

Бұл аксиомадан түзуге координата жүйесін ендіруге болады. Сөйтіп әрбір нүктеге бір нақты санды сәйкестендіруге болады. Сол сияқты бұрыш ұғымын ендіруге болады.

III-2 Әрбір бұрыштың 0 ден үлкен белгілі бір градустық өлшеуіші болады. Жазық бұрыш 180° тең болады. Бұрыштың градустық өлшеуіші оның қабырғаларының арасынан өтетін кез келген сәулемен бөлінетін бөлік бұрыштардың градустық өлшеуіштерінің қосындысына тең болады.

Осыларға сүйеніп кесінділердің теңдігі, бұрыштардың теңдігі және үшбұрыштардың теңдігіне анықтама беруге болады.

### IY – топ. Берілген үшбұрышқа тең үшбұрыштың болатындығы туралы аксиома.

IY- АВС үшбұрыш және А, нүктеден шығатын h сәуле берілсін. Онда бір төбесі А, нүкте болатын, В, төбесі h сәуледе жататын, С, төбесі h түзуімен шектелетін 1 жарты жазықтықта жататын және АВС үшбұрышына тең болатын $A_1B_1C_1$ үшбұрыш болады.

Бұл аксиомадан кейін берілген нүктеден берілген бағытта берілген кесіндіге тең кесінді өлшеп салуға болатындығын, берілген сәуледен берілген жарты жазықтықта берілген бұрышқа тең бұрыш өлшеп салуға болатынын дәлелдеуге болады.

### V Берілген ұзындықты кесіндінің бар болатындық аксиомасы

V. Нақты сан $d>0$ қандай болса да ұзындығы d- ға тең болатын кесінді болады.

### YI. Паралелдік аксиомасы.

YI. Жазықтықта берілген нүктеден берілген түзуге бірден артық емес паралель түзу жүргізуге болады.

### 2. Погореловтың стереометриялық аксиомалары.

С-1. Жазықтықта жататын да, жатпайтын да нүктелер болады.

С-2. Егер әртүрлі екі жазықтықтың ортақ нүктесі болса, онда олар түзу бойымен қиылысады.

С-3. Егер әртүрлі екі түзудің ортақ нүктесі болса, онда олар арқылы жазықтық жүргізуге болады және ол біреу ақ болады.

Бұл аксиоамлар жүйесінің тұжырымдарын Вейль аксиомалар жүйесінде теорема ретінде дәлелдеуге және керісінше Вейль аксиомалар жүйесінің тұжырымдарын Погорелов аксиомалар жүйесі жәрдемімен дәледеуге болады.

Сондықтан Погорелов аксиомалар жүйесі және оған негізделген теория қайшылықсыз болады.

### 5.3 А.Д.Александровтың геометриясының аксиомалар жүйесі

Бұл аксиомалар жүйесі төмендегі кітаптардан алынды.

- А.Д. Александров Основания геометрий М«Наука» 1987
- А.Д. Александров, А.А. Вернер, В.И. Рыжик. Геометрия. Пробный учебник для 6 –го класса средней школы М «Просвешение» 1984
- А.Д. Александров, А.А. Вернер, В.И. Рыжик. Геометрия для IX-X классов М «Просвешение» 1984

Бұл аксиомалар жүйесінде евклидтік жазықтық құрылымының базисі екі жиыннан – нүктелер мен кесінділер жиынынан тұрады.

Негізгі ұғымдары нүкте және кесінді.

Бұлар арасындағы негізгі қатыстар мыналар.

1. Кесінді ұшы нүкте болады.
2. Нүкте кесіндіде жатады,
3. Екі кесінді бір біріне тең болады.

Бұл қатыстар мен алғашқы ұғымдар төмендегі аксиомалар арқылы сипатталады.

I- топ . Құрылымдық аксиома.

Бұл кесінділер мен жазықтықтардың құрылымдарын сипаттайтын аксиомалардан тұрады.

I-1. Бар болу аксиомасы. Ең болмағанда бір кесінді болады. Әрбір кесіндінің тек екі ұшы болады. Сонымен қатар кесіндінің басқа да нүктелері ішкі нүктелері болады.

I-2. Кесіндіні бөлу аксиомасы: Кесіндіде жатқан нүкте оны екі кесіндіге бөледі.Яғни егер С нүкте АВ кесіндіде жатса, онда АС, ВС кесінділер бірге АВ кесіндісін құрайды және С дан өзге ортақ нүктесі болмайды.

I-3. Кесінділерді жалғау аксиомасы: Егер С нүкте АВ кесіндіде В нүкте СД кесіндіде жатса онда АВ мен СД кесінділер АД кесіндісін құрайды.

I-4. Жазықтықты бөлу аксиомасы. Әрбір а кесіндісін қамтитын кесінділердің ешбірінде жатпайтын нүктелер а кесіндісіне қарағанда екі класқа бөлінеді:

бірінші класқа: а ның бір жағында жатқан нүктелер,

екінші класқа: екінші жағында жатқан нүктелер енеді және әр класта нүкте болады.

**II- топ. Салу аксиомалары.**

Бұларда негізгі салулардың мүмкіндігі айтылады.

II-1. Кесіндіні жүргізу аксиомасы. Кез келген екі нүктенің кесіндімен жалғауға болады және ол жалғыз болады.

Басқаша кез келген екі нүкте үшін ұштары осы нүктелер болатынын кесінді болады және ол жалғыз болады.

II-2. Кесіндіні өлшеп салу аксиомасы. Кез келген АВ, MN кесінділері үшін MN ге тең болатын АВ да жатып бір ғана АС кесінді болады.

Басқаша АВ мен MN қандай кесінділер болса да АВ бойына MN ге тең АС кесіндіні өлшеп салуға болады және ол біреу болады.

II-3. Бұрышты өлшеп салу аксиоамсы. Әрбір кесінді деп оның берілген бір жағына, берілген ұшынан бастап берілген бұрышты өлшеп салуға болады және ол жалғыз болады.

Бұл кезде бұрыштың әр қабырғасында жатқан нүктелерді қосатын әртүрлі кесіндіні пайдалануға болады (Қорытынды бұрыш қабырғаларын созу, не қысқартуға дейінгі дәлдікте, бірдей болып шығады)

**III- топ. Өлшеу аксиомалары.**

III-1 Салыстыру аксиоамсы Бір кесіндіге тең екі кесінді өзара тең болады.

III-2. Қосу аксиомасы. Егер С нүкте АВ, $С_1$ нүкте $А_1В_1$ кесіндіде жатса және АС =$А_1С_1$ , ВС =$В_1С_1$ болса, онда АВ =$А_1В_1$ болады.

III-3. Архимед аксиомасы. а,в =АВ кесінділер қандай болса да АВ ны қамтитын $АА_п$ кесінді болады. Ол кесіндіде $А_{1,}$ $А_{2....}А_{n.}$ нүктелер табылып, $АА_1$ =$А_1А_2$ .....=$А_{п\text{-}1}$ $А_п$ кесінділер а-ға тең болады.

Басқаша а,в кесінділер қандай болса да, в кесінді бойына *а* кесіндіні оны «жауып» қалғанға дейін өлшеп салуға болады.

**IY . Паралелдік аксиома.**

Бұл бір ғана паралелдік аксиомадан тұрады.

IY. Егер АС,ВД кесінділер тең болса және АВ мен тікбұрыш жасап оның біржағына қарай бағытталса онда СД =АВ болады.

Демек бұл аксиомалар жүйесінде «паралелдік аксиома», «тіктөртбұрыш аксиомамен» ауыстырылған. Сонда паралель түзулердің негізгі қасиеті олардың нүктелерінің арақашықтығының сақталуы болып табылады.

**V . Үздіксіз аксиома.**

Бұл бір ғана аксиоамадан тұрады және кесіндінің үзілісі жоқ, біртұтас екенін сипаттайды.

V. Егер бірінің ішінде бірі жататын шексіз кесінділер тізбегі $A_1B_1 \supset A_2B_2 \supset A_3B_3...$ берілсе, онда ол кесінділердің барлығына ортақ бір нүкте болады. Осымен Александровтың аксиомалар жүйесі бітті.

Барлық аксиомалар саны 12.

Оның шегінде I-1,2,3 ,II-1,2, III-1,2,3; Y аксиомалар –сызықтық аксиомалар, ал I-4, II-3, IY аксиомалар- жазықтық аксиомалар болып табылады.

**Стереометриялық аксиомалар мыналар:**

1.Қашықтық аксиомасы. Кеңістікте кез келген екі нүкте олардың арақашықтығы деп аталатын бір ғана шама сәйкес келеді.

2.Жазықтық аксиомасы. Кеңістікте жазықтық болады. Кез келген үш нүкте арқылы жазықтық өтеді.

3. Жазықтықтардың қиылысу аксиомасы. Егер жазықтықтың ортақ нүктесі болса, онда олардың қимасы олардың ортақ түзуі болады.

4. Түзудің жазықтыққа тиістілігі. Егер түзу берілген жазықтықтың екі нүктесі арқылы өтсе, онда ол сол жазықтықта жатады.

5. Жазықтықтың кеңістікті бөлу аксиомасы. Кез келген жазықтық кеңістікті екі жарты кеңістікке бөледі.

## 5.4 Л.С.Атанасянның геометриясының аксиомалар жүйесі9

Бұл аксиомалар жүйесі мына оқулықтан алынды.

- Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузова, С.В. Кодашева, Э.Г.Позяк
  Геометрия 7 (изд.4) М. «Просвешение» 1986.
- Геометрия 9-10 (изд.3) М. «Просвешение» 1987.

Бұлардың аксиомалар жүйесінде евклидтік жазықтық құырылымы екі жиыннан: Е (нүктелер жиыны), Ғ (түзулер жиыны) тұрады. Демек негізгі ұғымдары нүкте түзу.

Негізгі қатыстар үшеу –а) нүктелер мен тузулердің тиістілік қатысы, б) түзудегі нүктелердің «арасында жату» қатысы, в) f:E→E бейнелеумен анықталатын беттестіру қатысы алынған.

Барлығы 15 аксиомалардан тұрады.

### I топ Тиістілік аксиомалары

I-1 Екі нүкте қандай болса да, ол нүктелер арқылы өтетін түзу болады және ол жалғыз болады.

І-2 Әрбір түзуде кемінде 2 нүкте жатады. Бір түзуде жатпайтын кемінде үш нүкте болады.

**ІІ-топ Реттілік аксиомалары**

ІІ-1 Егер $\overline{\mathrm{AB}C}$ болса онда А,В,С бір түзудің әртүрлі нүктелер және $\overline{\mathrm{CBA}}$ болады.

ІІ-2 А,В қандай нүктелер болса да $\overline{\mathrm{ABC}}$ болатын кемінде бір С нүкте болады.

ІІ-3 Үш нүктенің біреуден артық емесі қалған екеуінің арасында жатады.

ІІ-4 Әрбір түзудің ол түзуде жатпайтын жазықтық нүктелеріне екі ішкі жиынға (екі жарты жазықтыққа) былайша бөледі: бір жиында жатқан екі нүкте түзудің бір жағында жатады, әр жиынға жататын екі нүкте түзудің екі жағында жатады.

**ІІІ-топ Беттестіру аксиомалары**

ІІІ-1. Жазықтықты өзіне-өзі бейнелеу инъекция болады

ІІІ-2 Егер беттестіруде А,В,С нүктелер А,$^1$В,$^1$С$^1$ нүктелерге көше және $\overline{\mathrm{ABC}}$ болса онда $\overline{\mathrm{A^1\,B^1\,C^1}}$ болады.

Фигура Ф фигура Ф$^1$-ке тең делінеді,егерде Ф-ты Ф$^1$-ке көшіретін беттестіру бар болса.

ІІІ-3. Егер $\{A',B'\}=\{A,B\},\{A'',B''\}=\{A,B\}$ болса, онда $\{A',B'\}=\{A'',B''\}$ болады.

Ескерту: А,В екі нүктеден тұратын фигураны $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$ деп белгілейміз.

ІІІ-4. Егер $\{A,B\}$ нүктелер жұбы және $A'$ нүктеден шығатын $B'$ сәуле берілсе, онда h сәуледе $\{A,B\}=\{A',B'\}$ болатын бір ғана $B'$ нүкте болады.

ІІІ-5. Егер жазық емес $\angle(hk)$ бұрыш және $(0', h', \lambda')$ жалау берілсе, онда $\lambda'$ жарты жазықтықта $0'$ нүктеден шығатын $\angle(hk)=\angle(h'k')$ болатын бірғана $k'$ сәуле болады.

## IV топ. Үздіксіздік аксиомалары

ІY 1 ***Архимед аксиомасы***. АВ, СД кесінділер болсын. Онда АВ түзуде $A_1, A_2, \ldots A_n$ - ақырлы санды нүктелер табылып мына шарттар орындалады.

а) $\overline{\overline{\mathrm{A\,A_1\,A_2}}}$, $\overline{A_1A_2A_3}$ ... $\overline{\mathrm{A}_{\text{п}-2}\,\mathrm{A}_{\text{п}-1}\mathrm{A}_{\text{п}}}$

б) $\mathrm{AA_1} = \overline{A}_1A_2 = \ldots A_{n-1}A_n$

в) АВ А***n***

ІY-2 Кез келген нақты оң а саны үшін ұзындығы сайлап алынған бірлік кесіндіде а-ға тең болатын кесінді болады.

### V топ. Параллельдік аксиома

Нүкте және одан өтпетін жазықтықта, осы нүкте арқылы өтетін, берілген түзуге паралель тек бір ғана түзу жүргізуге болады.

**Стереометриялық аксиомалары**

С-1 Бір түзуде жатпайтын үш нүкте арқылы бір тік бр жазықтық өтеді.

С-2 Егер түзудің екі нүктесі жазықтықта жатса, онда барлық нүктесі сол жазықтықта жатады.

С-3 Егер екі жазықтықың ортақ нүктесі болса, онда олардың барлық ортақ нүктелері жататын ортақ түзуі болады.

## 5.5 Мектеп курсы геометриясының логика-аксиоматикалық құрылымы

Геометрияның логикалық құрылымы екі негіздеме арқылы берілетіні белгілі. Біріншісі, Ф.Клейннің «Эрланген программасында» ұсынған группалық көзқарас. Бұл геометрияның негізінде, қандайда бір кеңістіктегі түрлендірулер группасы қарастырылады. Екіншісі, Д.Гильберттің ұсынған аксиомалар жүйесі арқылы анықталатын геометриялық кеңістіктері. Векторлық кеңістіктің анықтамасы негізінде, екі вектордың скаляр көбейтіндісін енгізу арқылы Вейль Евклид геометриясының құрылымен аксиомалар жүйесі арқылы анықталатынын көрсетті.

Қазіргі заманғы математиканың негізгі әдісі аксиоматикалық әдіс. Бұл әдістің негізін қалаушы әйгілі неміс математигі Д.Гильберт. Ол өзінің «Геометрия негіздері» деп аталатын еңбегінде Евклидтік геометрияның логикалық құрылымын аксиомалар жүйесі арқылы берген. Осыдан кейін аксиоматикалық әдіс математиканың басқа салаларында тарай бастады: арифметика, алгебра, ықтималдықтар теориясы, т.б..

Аксиоматикалық әдіс математикалық құрылым түсінігімен тығыз байланысқан. Математикалық құрылым қалай жасалатынына қысқаша тоқтап өтейік. Алдымен қандайда бір элементтерден тұратын бос емес бірнеше жиын беріледі (базалы жиындар). Екіншіден осы жиындарда анықталған қатынастар беріледі. Бұл қатынастар екі жиынның элементтері немесе бір жиынның ішіндегі элементтердің бейнелеулері болуы мүмкін. Нақты математикалық теория құру үшін, жиындар мен қатынастар саны шектеулі болуы қажет. Бірақ математика оңай қатынастарды іздемейді. Керісінше, белгілі бір қасиеттерге ие болатын және олар орындалатын жиындарды қарастырады. Ол қасиеттер алдын ала бізге таныс терминдерде анықталуы қажет. Осындай белгілі бір қасиеттерге ие болатын қатынастар орындалатын жиындарды, математикалық құрылымдар деп атаймыз. Ал алдын ала анықталған қасиеттерді аксиомалар деп атаймыз.

Анықталған математикалық құрылым негізінде біз математикалық теория құра аламыз, яғни берілген аксиомалардың логикалық салдары болатын анықтамалар, түсініктер, тұжырымдар (теоремалар) жиынын анықтаймыз. Аксиомалардың логикалық салдарын қарастырғанда біз қосымша анықтамалар мен түсініктер ендіруімізге болады.

Сонымен математика деп – математикалық құрылымдар негізінде логикалық салдар арқылы жасалған математикалық теорияларды айтсақ болады. Әлбетте анықталған базалық жиындар, қатынастар және аксиомалар жүйесіне белгілі бір талаптар қойылады. Мысалы, аксиомалар жүйесі қайшылықсыз, тәуелсіз және толық болуы қажет. Бұл талаптардың орындалуы, математикалық теорияның модельдерін құру және математкалық логика әдістерімен зерттеліп, дәлелденеді.

Математика мамандығының Мемлекеттік білім беру стандарттарында «Геометрия негіздері» пәні міндетті пән болып келген, бірақ соңғы жылдары бұл пән таңдау компонентіне өткізілді. Осы пәнді оқыту барысында, болашақ математика пәнінің мұғалімдері геометрияның ғана емес, жалпы математиканың, аксиоматикалық негіздегі логикалық құрылымымен таныса алады. «Геометрия негіздері» пәнінің мазмұнында, сондай-ақ Евклидтік емес геометриялардың бар екенін және оларды паралельдік аксиомасын өзгерту арқылы құруға болатыны көрсетіледі. Евклидтік емес геометриялардың арасындағы, Лобачевский геометриясының логикалық құрылымы және моделі жан-жақты, терең оқытылады. Ал Риманның эллиптикалық геометриясына шолу жасалады. Риманның геометриясының моделі ретінде сфералық геометрия қарастырылып оның геометрия және астрономиямен тығыз байланысы көрсетілген. Осыған байланысты сфералық геометрия элементтерін орта мектеп бағдарламасына енгізуге болатын сияқты, себебі бұл пәнаралық байланыстарды нығайтады.

Сонымен, мектеп курсы геометриясының логикалық құрылымы мен жоғары оқу орнында оқытылатын геометрия аксиомалар жүйесі арқылы берілген логикалық құүрылымдарының сыбайластығы шығады, және мектеп курсы геометриясының логикалық құрылымын оқулықтарға шолу жасау арқылы салыстырып көреміз.

Д.Гильберт өзінің «Геометрия негіздері» еңбегінде, евклид геометриясының теориясын осы негізде құрған. Гильберт бойынша евклидтік кеңістік құрылымының базасы ретінде үш жиын:

Е – нүктелер жиыны;

F – түзулер жиыны;

G – жазықтықтар жиыны алынады.

Бұл жиындарда үш қатынастар анықталған:

$\Delta_1$- «тиісті болады» (жатады, өтеді);

$\Delta_2$- «аралықта жатады» (түзудің бойындағы үш нүктенің біреуі қалған екеуінің арасында жатады);

$\Delta_3$- «теңдік» (конгурэнттілік).

Осы қатынастардың алдын ала берілген 20 қасиеті (аксиомалары) орындалады деп алады. Аксиомалар тізімі беріледі Осы математикалық құрылым негізінде евклидтік кеңістіктің теориясы құрылады. Бұл анықталған евклидтік кеңістік теориясы логикалық дәл, нақты анықталған болады.

Мектеп курсы геометриясының логикалық құрылымын, осындай аксиоматикалық негізде жазып, оқытуға ендірген алғашқы математиктердің бірі А.Н.Колмогоров. Ол құрылымның негізінде үш жиын қарастырады:

E – нүктелер жиыны;

F – түзулер жиыны;

G – теріс емес нақты сандар жиыны.

Бұл жиындарда келесідей қатынастар қарастырады. «тиістілік» және тенарлық қатынас $\delta : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \ell$. Осыдан кейін аксиомалар тізімін келтіреді.

Біз, мектеп курсы геометриясының 1975 жылдан бері негізгі оқулығы болып келген А.В.Погорелевтың геометриясына тоқтайық.

А.В.Погорелевтің геометриясында негізгі жиындар (геометриялық фигуралар), анықталмайтын түсініктер ретінде нүктелер және түзулер. Стреометрияда қосымша жазықтықтар қарастырылады. Негізгі қатынастар ретінде тиістілік, нүктелердің түзуде және жазықтықта орналасуы, кесінділерді және бұрыштарды өлшеу және үшбұрыштардың теңдігі. Осы қатынастардың қасиеттерін сипаттайтын 13 аксиома беріледі. Олардың үшеуі стреометрияның аксиомалары. Аксиомалар жүйесін беру барысында негізгі түсініктер: сәуле, кесінді, бұрыш т.с.с. енгізіледі. Осыдан кейін негізгі геометриялық теория дамытылады. Геометрияның осындай құрылымы түсінікті, оқып үйренуге қолайлы деп табылған. Бұл жағдайда нүкте, түзу және жазықтар жиындары интуитивтік түсініктер ретінде беріледі.

Соңғы жылдары Қазақстанда орта мектептер үшін геометриядан үш оқулық ендірілген. Соларға қысқаша шолу жасайық.

1. Букубаева К.О., Мирозова А.Г., Аганина К.Ж.

Геометрия, жалпы білім мектептерінің 7-сыныбына арналған оқулық, Алматы – «Атамұра» 2003ж.

Бұл оқулықта 9 аксиома берілген:

I. а,ә – нүктелер мен түзулердің өзара орналасуының қасиеттері;

II – параллель түзулердің қасиеттері;
III – нүктелердің түзу бойында орналасуы;
IV – кесіндіні өлшеудің қасиеттері;
V – жазықтықтағы нүктелердің түзуге қатысты орналасуының қасиеті;
VI – кесіндіні өлшеп салудың қасиеті;
VII. 1), 2), 3) – бұрышты өлшеудің қасеттері;
VIII – бұрышты өлшеп салудың қасиеті;
IX – үшбұрыштар теңдігінің қасиеті.

Оқулықтың логикалық құрылымы ешқандай сынды көтермейді. Себебі логикалық нақтылық, қатаңдық, реттілік сақталмаған. Аксиомалар (қасиеттер) берілгені мен олардың қолдануы, қажеттілігі кейінге қалдырылған. Мысалы бірінші тарауда параллельдіктің қасиеті анықталғанмен оны зерттеу V-тарауға көшірілген. Көптеген түсініктер мен анықтамалар нақты емес. Мысалы, аксиоманың анықтамасының өзі келесідей беріледі: «Қарапайым фигуралардың дәлелдеуді қажет етпейтін, ақиқаттығы күмәнсіз негізгі қасиеттерінің тұжырымдамалары аксиомалар деп аталады». Бұл анықтаманы оқушы түгілі мұғалімнің өзі жете түсіне алмайды. Оның орнына: «Дәлелдеусіз қабылданатын, қарапайым фигуралардың қасиеттерін сипаттайтын, тұжырымды аксиома деп айтамыз» десек нақты және түсінікті болар еді.

2. И.Бекбаев, А.Абдиев, Ж.Қайдасов, Г.Досмағанбетова.

Геометрия жалпы білім беретін мектептің 7-сыныбына арналған оқулық, Алматы:
«Мектеп», 2007ж.

Оқулықта анықталмайтын негізгі фигуралар түсініктері ендірілгеннен кейін, олардың
элементтері арасындағы қатынастарға байланысты аксиомалар, топтарға бөлінген.

Бірінші, «тиістілік» қатынасына байланысты - екі аксиома. Екінші, «реттілік»
қатысының қасиеттері болатын - үш аксиома. Үшінші, кесіндінің ұзындығы мен бұрыштық өлшемінің аксиомалары тобында төрт аксиома. Төртінші, кесінділер мен бұрыштарды өлшеп салу аксиомалар тобында екі аксиома берілген және ең соңында бесінші топта бір, парраллельдік аксиомасы. Сонымен планиметрияның логикалық құрылымы негізінде он екі аксиома алынған. Әрбір топтағы аксиомалардан кейін теориялық материалдар , түсініктер, анықтамалар, теоремалар, жаттығулар берілген. Бұл 7-сынып оқушыларының геометрияның негізін түсіндіруге әдістемелік жағынан өте тиімді болып саналады. Сондықтан оқулықтағы кейбір еленбейтін кемшіліктерді санамағанда, оқулық өз мақсатына жетеді деп санаса болады.

3. Біз А.В.Погореловтың планиметриядағы аксиомалардың енгізуімен шектелейік. Евклид жазықтығы құрылымының базалық жиындары ретінде үш жиын ендіріледі. E, F және R – E жиынының элементтері нүктелер деп аталады; F жиынының элементтері түзулер; R – нақты сандар жиыны. Мұндағы E және F жиындары негізгі жиындар, ал R – көмекші жиын. Осы жиындардың элементтеріне қатысты төрт қатынас беріледі: нүктелер мен түзудің тиістілігі; түзудің бойындағы үш нүктенің біреуі қалған екеуінің аралығында жатуы; кесіндінің ұзындығы туралы қатынас; бұрыштың градустық өлшемі туралы.

Қарастырылатын аксиомалар жүйесі 9 аксиомадан тұрады. Олар 6 топқа бөлінген: I. Тиістілік аксиомалары (екі касиома);
II. Реттілік аксиомалары(екі аксиома);
III. Кесінділер мен бұрыштардың өлшемі туралы аксиомалар (екі аксиома);
IV. Кесінділер мен бұрыштарды өлшеп салу туралы аксиомалар (екі аксиома);
V. Берілген үшбұрышқа тең үшбұрыштың бар болуы туралы аксиома;
VI. Параллельдік аксиомасы. Стреометрияда, қосымша, негізгі жиын ретінде жазықтықтар жиыны беріліп, үш аксиома ендіріледі.

4. 1986 жылдан Ресейдің кейбір мектептерінде жаңа оқулық ендіріліп, сынақтан өткізілді. Ол оқулық Л:с:Атанасян, В:Ф.Бутузова, С.Б.Кадомцева, Э.Г.Позняк «Геометрия, 7» М.: Просвещение, 1986г. Бұл оқулық әдістемелік жағынан қарапайым. Онда, аксиомалар жүйесі негізінен Д.Гилберттің аксиомалар жүйесі жақын етіп алынған.Базалық жиындар ретінде: E – нүктелер жиыны; F – түзулер жиыны; G – жазықтықтар жиыны алынған. Негізгі қатынастар:

а) нүктелер мен түзулер үшін «Тиістілік» қатынасы;

б) түзудің бойындағы үш нүкте үшін «Біреуі қалған екеуінің аралығында жатады»;

в) «Беттеседі» яғни $f : E \rightarrow E$ бейнеленуімен анықталған бинарлық қатынас. Л.С.Атанасянның аксиомалар жүйесі 15 аксиомадан тұрады. Олар бес топқа бөлінген. Үшінші топтағы «Бетесу» аксиомалар тобында алты аксиома беріліп, олардың біріншісі беттесуді жазықтықтың өзіне-өзін бейнелеу арқылы берілген. Ал теңдік (конгруэнттік) беттесу арқылы анықталады. Төртінші топтағы үзіліссіздік аксиомаларының біріншісі – Архимед аксиомасы болғанымен, екіншісі, берілген ұзындықтағы кесіндінің бар болуы туралы аксиома: «Бірлік кесінді таңдап алынған жағдайда кез келген оң нақты сан –ға сәйкес келетін кесінді бар болады».

Л.С.Атанасянның бұл ендірген оқулығы әдістемелік жағынан құнды болғанымен, жетінші сынып оқушыларының геометрия пәнін игеруде көптеген қиындықтар туғызады. Мысалы, жазықтықты өзіне-өзін бейнелеу деген түсініктің өзін игеру оңай емес.

5. Ә.Н.Шыныбеков Геометрия, Жалпы білім беретін мектептің 7-сыныбына арналған оқулық, Алматы – «Атамұра», 2007ж (екінші басылымы).

Бұл оқулықта нүктелер мен түзулер жазықтықтағы негізгі фигуралар (түсініктер) деп қабылданады. Ал нүктенің түзуде жататындығы негізгі қатынас деп беріліп, осыған байланысты бірінші аксиома беріледі. Түзудің нүктелерінің арасындағы қатынас ретінде «арасында жатады» қатынасы алынып, оның мағынасын екінші аксиомамен айқындайды. Кесіндінің ұзындығына қатысты аксиомадан алдын бірлік кесінді ұғымы енгізілген. Ал, кесіндінің ұзындығын өлшеуді негізгі ұғым қатынасы ретінде береді. Жазықтықтағы түзу мен нүктелердің өзара орналасуының негізгі қасиеті төртінші аксиома арқылы: «Түзу жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөледі» деп келтірген. Бұрышты өлшеудің аксиомасы жазыңқы бұрыштың өлшемі $180^0$ тең деп алып, бұрыштың градустық өлшемі енгізіледі. Алтыншы және жетінші аксиомалары. Сегізінші аксиома арқылы берілген үшбұрышқа тең үшбұрыш табылатыны туралы аксиома, үшбұрыштардың теңдігінің қасиеттерін зерттеуге мүмкіншілік береді. Параллельдік қатынасын (анықтамасын) енгізген соң, параллельдік аксиомасы әдеттегідей берілген.

Әрбір аксиомалар мен қатынастардан кейін жаңа анықтамалар, теоремалар келтірілген. Логикалық құрылымы жағынан бұл оқулық Қазақстан енгізілген алғашқы екі оқулықтан жоғары тұрады деп санаймыз және әдістемелік жағынан да қойылған талаптарды қанағаттандырады.

Сондықтан, келтірілген үшінші оқулық, алғашқы екеуіне қарағанда жетінші сынып оқушыларына геометрияның планиметрия курсын игеруіне қолайлы және логикалық жағынан біркелкі, қатаң деп санаса болады.

Математиканы оқытудағы негізгі мақсаттардың бірі – оқушылардың логикалық ойлау қабілетін арттыру және біркелкілікке, қатаңдыққа үйрету болып табылады. Сондықтан математика пәнінің оқулықтарын бірреттілік, логикалық қатаңдық, оны әдістемелік жағынан оңайлық жақтарын ескеріп, әлде де жетілдіре түсу қажет екені белгілі.

Орта мектеп математикасының ең қиын пәндерінің бірі болып саналатын геометрияны оқытуда, оның логикалық құрылымы, қатаңдығы және бірреттілігіне көңіл бөле отырып, әдістемелік жағынан қолайлы оқулықтар қажет деп санаймыз.

# 6. Лобачевский аксиомасы мен түзулердің паралельдігі.Лобачевский жазықтығындағы үшбұрыштар мен төртбұрыштар

## 6.1 Лобачевскийдің аксиомасы

Николай Иванович Лобачевский Евклидтен V постулаты жайлы проблеманы қарастырғанда, ол постулат Евклидтің басқа постулаттары аксиомаларынан тәуелсіз, олар арқылы теорема ретінде дәлелдеуге болмайды деп шешті. Сөйтіп V постулат орнына оны жоққа шығаратын қарама-қарсы сөйлем алып, Евклид геометриясынан бөлек жаңа геометрия жасайды. Лобачевский алған бұл қарама-қарсы сөйлемді Лобачевский аксиомасы дейді. (Оны қысқаша V-Л деп белгілейік). Ол аксиома былайша тұжырымдалады.

**V-Л Лобачевский аксиомасы.** А нүкте және ол нүктеден өтпейтін а түзу берілген. Онда А нүкте мен а түзу анықтайтын жазықтықта А нүктеден өтетін а түзумен қиылыспайтын кемінде $a_1$, $a_2$, екі түзу болады.

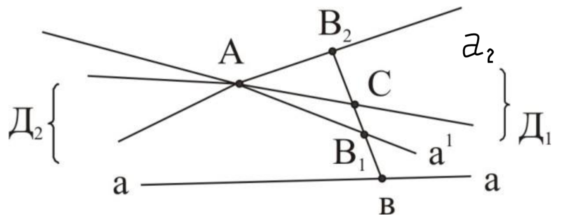
Лобачевский геометриясының аксиоматикасы Гильбертің I-IV-тан аксиомалары мен Лобачевский аксиомасы жиынынан тұрады. Сондықтан Евклид геометриясы мен Лобачевский геометриясының I-IV-тан аксиомаларына негізделген бөлігі екеуіне бірдей. Ол бөлек геометриясы абсолюттік геометриясы делінеді.

Лобачевский аксиомасы орындалатын жазықтықты кеңістіктегі Лобачевский жазықтығы, кеңістігі немесе гиперболалық жазықтық, кеңістік дейді. Лобачевский геометриясын гиперболалық геометрия депте атайды.

Лобачевский аксиомасына сүйеніп мына теореманы дәлелдейік.

**1-теорема.** Түзу және ол түзуде жатпайтын нүкте берілген. Олар арқылы анықталатын жазықтықта берілген шексіз көп түзу өтеді.

**Дәлелі:** Онда бұлармен анықталған (А, а жазықтықта V-Л аксиома бойынша) А нүктеден а түзумен қиылыспайтын кемінде екі түзу өтеді. Олар $a_1$, $a_2$ болсын (21-сурет). $a_2$ түзуден $B_2$ нүктені А нүктенің оң жағынан оны а-ның кез келген В нүктесіне қосайық. Ол $a_1$ мен міндетті түрде қиылысады.



21-сурет

Қиылысу нүктесі $B_1$ болсын. $B_1B_2$ кесіндіні С ішкі нүктесі болсын. АС түзулері а түзумен қиылыспайтын дәлелдейік. Ол үшін олар $Д_1 = AC \cap a$ нүктеде қиылысады деп айталық. Онда СВ$Д_1$ үшбұрышы шығады бұл үшбұрыштың

ВС қабырғасы мен $a_1$ түзу $B_1$ нүктеде қиылысып тұр. Сондықтан аксиомасы бойынша $a_1$ түзу $ВД_1$ қабырғаны қиып өтуі керек. бірақ оны қия алмайды (шарт бойынша $a_1$ мен а қиылыспайды. $ВД_1 \subset a$). Бұл қайшылық АС мен а-ның қиылысады деген ұйғарымының қате екенін, олардың қиылыспайтының көрсетеді. Демек, АС мен а түзулері А нүктенің оң жағында қиылыспайды. Ал $B_1B_2$ кесіндіде шексіз көп нүктелер бар. Оларды А-ға қосқанда шексіз көп түзулер шығады және олардың барлығы да а түзумен АС түзуі сияқты АС мен а түзуі А нүктенің сол жағындада қиылыспайды. Егер олар $AC \cap a = Д_2$ нүктеде қиылысады десек, онда Паш аксиомасын $a_1$ мен $СВД_2$ үшбұрышқа пайдалану арқылы бұл ұйғарымның дұрыс еместігін дәлелдеуге болады.

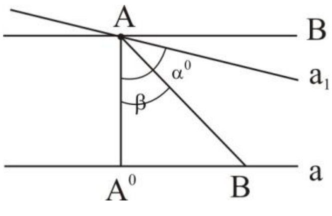
Сонымен Лобачевский аксиомасында айтылған екі түзуден өзара жасайтын вертикал бұрыштарының бір жұбын (дәлірек $B_2AB_1$ бұрыш) ішінде жататындай есеп А нүктеден жүргізілген түзулердің барлығы а түзумен қиылыспайды екен. Ондай түзулер шексіз көп болады.

## 6.2 Лобачевский бойынша түзулердің паралельдігі

Егер а түзуге ол түзуде жатпайтын А нүктеден $AA_0$ перпендикуляр түсірсек онда А нүктеден өтетін түзулердің $AA_0$ мен жасайтын $\alpha$ бұрышы 0 мен $\frac{\pi}{2}$ арасында өзгерер еді. Осылардың ішінде а түзуімен қиылыспайтын түзулердің $AA_0$-мен жасайтын бұрыштарының ең төмені дәл шекарасын $\alpha_0(\alpha_0 = \inf \alpha)$ десек, онда мына теорема дұрыс болады.

**2-терема.** $\alpha_0$ бұрыштың шамасы $0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$ аралықта болады.

**Дәлелі:** А нүкте, а – ол нүктеден өтпейтін түзу болсын. $AA_0 \perp a$ жүргізейік. $a_1$ түзу $AA_0$-мен жоғарыда айтылған $\alpha_0$ бұрыш жасасын (22-сурет). а түзуден В нүкте алып, оны А-ға қосайық оның $AA_0$ мен жасайтын бұрышы $B < \alpha_0$ болады. Демек, $\alpha > 0$. Себебі $0 < \beta < \alpha_0$ А нүктеден $AA_0$-ге в перпендикуляр түзу жүргізсек, ол $AA_0$ мен $\frac{\pi}{2}$ бұрыш жасар еді.

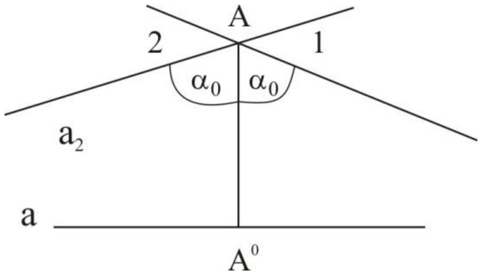


22-сурет

Ондай түзудің а-мен қиылыспайтындығын абсолют геометрияда дәлелдейді. А-дан өтіп а-мен қиылыспайтын түзу в ғана емес, одан басқа да түзулер бар. Сондықтан $\alpha_0 < \frac{\pi}{2}$ болады. Сонымен $0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$ дәлелденді. $\alpha_0$ бұрыш нүктеден өтетін а түзумен қиылыспайтын түзулердің $AA_0$ мен жасайтын бұрыштарының ең төменгі дәл шекарасы болғандықтан А нүктеден өтетін және $a_1$ түзуден төмен жатқан (яғни $a_1$ $AA_0$ бұрыш ішінен жүргізілген) түзулердің барлығы а түзумен қиылысады.

Сөйтіп, 1-2 теоремалар бойынша а түзуге одан тыс жатқан нүктеден ол түзумен қиылысатын да, қиылыспайтын да шексіз көп нүктелер өтеді.

А нүктеден $AA_0$-ден екінші жағынан онымен бұрыш жасайтын $a_2$ түзу жүргізейік. Онда $a_1a_2$ екі түзу жасайтын екі вертикаль бұрыштан (23-суретте 1 және 2 мен белгіленген бұрыштың) ішінде жататын А центрлі түзулер шоғы а түзумен қиылыспайды, ал онымен сыбайлас вертикаль бұрышта жататын А центрлі түзулер шоғы а түзуімен қиылысады.



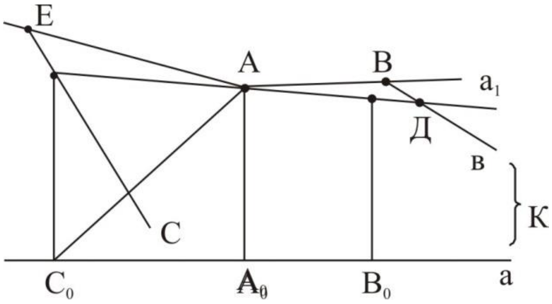
23-сурет

Сөйтіп $a_1$ мен $a_2$ түзулер А нүктеден өтіп а түзуімен қиылысатын және қиылыспайтын, түзулер жағының А нүктедегі шекаралық түзулері болады.

Шекаралық түзудің мынадай қасиеті бар.

**3-теорема.** Егер $a_1$ мен а түзу үшін өзінің бір нүктесінде шекаралық түзу болса, онда $a_1$ өзінің кез келген нүктесінде де а үшін шекаралық түзу болады.

**Дәлелі:** а түзуі үшін $a_1$ түзу өзінің А нүктесінде шекаралық түзу болсын. Онда $a_1$ түзудің А-ның оң жағында жатқан $B_1$ сол жағында жатқан С нүктелеріндеде а үшін шекаралық нүкте болатынын дәлелдейік (24-сурет) $BB_0 \perp a_1$ $AA_0 \perp a_1$ $CC_0 \perp a$ жүргізейік В нүктеден $\angle a_1BB_0 -$бұрыш ішінде жататын кез келген сәулесін жүргізіп, оның а мен қиылысатынын дәлелдейік.



24-сурет

Түзу в бойынан Д нүкте алып АД түзуін жүргізейік. Ол а-мен міндетті түрде қиылысады. $АД \cap a = К$ болсын. Сонда $\Delta AA_0K$ шығады. Оның АД қабырғасын $l$ қиып тұр, ал $AA_0$ қабырғаны қиалмайды, өйткені ол $BB_0$ деп сол жағында жатыр. Сондықтан в түзу Паш аксиомасы бойынша $A_0K$ қабырғаны, сондықтан а түзуді қиюы керек. сөйтіп $\angle a_1 BB_0$ бұрыш ішінен жүргізілген кез келген түзу (оның бірі в) а түзуімен қиылысады екен. Олай болса $a_1$ түзуі В нүктедеде а түзу үшін шекаралық түзу болады.

Енді А нүктенің сол жағынан алынған СЕ $a_1$ нүктеде $a_1$-ден а үшін шекаралас түзу болатын дәлелдейік.

Ол үшін $\angle a_1 CC_0$ бұрыштың ішінен С нүктеден жүргізілген кез келген С түзудің а мен қиылысатының дәлелдеу керек. С түзу $\angle a_1CC_0$ бұрыштың ішінен С нүктеден жүргізілген кез келген С түзудің а мен қиылысатының дәлелдеу керек. С түзу $\angle ACC_0$ бұрыштың ішінен жүргізілгендіктен ол $AC_0$-ды қияды.

с түзудің кері бағытынан (С нүктенің сол жағынан) Е нүкте алайық онда ЕА түзу а түзуін бір нүктеде (мысалы К нүктеде) қияр еді. Сөйтіп, $\Delta AC_0K$ үшбұрыш шығар еді. Оның $AC_0$ қабырғасын С түзуі қиып тұр, АК қабырға жатқан түзуді Е нүктеде қиып тұр. Сондықтан Паш аксиомасы бойынша С түзу $C_0K$ қабырғаны да (яғни а түзуді) қиюы керек.

Сөйтіп $ACC_0$ бұрыштың ішінен С нүктеден жүргізілген түзулерде (с – оның біреуі) а түзумен қиылысады екен.

Олай болса $a_1$ түзуі С нүктеде а түзу үшін шекаралық түзу болады екен. Дәл осы сияқты $a_2$ түзуіде өзінің кез келген нүктесінде а түзуі үшін шекаралық түзу болады.

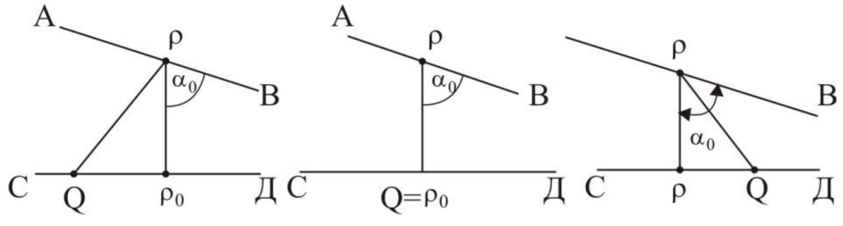
Лобачевскийше осы шекаралық түзулер ғана а түзуге параллель түзулер бөлінеді: $a_1$ түзуі а түзуге оң жақты параллель түзу (немесе а түзудің оң бағытындағы параллель түзу) $a_2$ түзуі а түзуге сол жақты параллель түзу (немесе а тү.зуінің сол жақ бағытындағы параллель түзу) делінеді.

Сөйтіп а түзуге А нүктеден оң жағына қарай дәл бір параллель түзу, сол жағына қарай дәл бір параллель түзу өтеді.

**Анықтама.** АВ түзуі СД түзуіне параллель делінеді. Егер де: 1-ден олардың ортақ нүктесі болмаса. 2-ден АВ-дағы $P_1$СД-дағы Q нүктелер қандай болсада BPQ бұрыштың ішінде жататын Р нүктеден жүргізілген сәулелердің барлығы СД түзумен қиылысатын болса.

**Ескерту:** А түзу өзінің Р нүктесінде СД түзуге шекаралық түзу болу үшін, $PP_0 \perp СД$ болса, ВРР₀ бұрыштың ішінен Р нүктеден жүргізілген түзулердің барлығы СД түзуді қиюы керек деп едік. Анықтама бойынша $PP_0$-дың СД-ға перпендикуляр болуы міндетті емес екені, $P_0$-дың орнына СД-ның кез келген а нүктесін алуға болатыны шығады.

Егер Q нүкте $P_0$-дың сол жағында жаста (395-сурет), онда BPQ жатады, не $PP_0$ мен беттеседі (25-сурет) не $BPP_0$ бұрыш ішінде жатады (25-сурет). бұл үш жағдайдың 1-2-де Р нүктеден шыққан түзу $QP_0$ кесіндіні қияды. Сондықтан ол жақтан СД түзуін қияды. 3 жағдайда да СД түзуін қияды. Ол 3-теоремада дәлелденді.



25-сурет

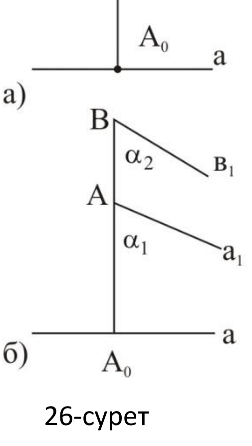
### 6.3 Паралельдік бұрышы

*a* түзуге ол түзуде жатпайтын *A* нүктеден а түзулер оң жақ бағытында оған параллель бір ғана $a_1$ түзу, сол бағытында оған параллель бірғана $a_2$ түзу жүретін болды. Сол түзулердің А нүктеден а түзуге түсірілген $AA_0$ перпендикуляр мен жасайтын $\angle a_1AA_0 = \angle a_2AA_2 = \alpha_0$ бұрыштың А нүктедегі параллельдік кесінді а түзуге қарағандағы параллельдік бұрыш дейді, ал $AA_0$ кесіндіні дейді.

Параллельдік бұрыштың мынадай қасиеттері бар:

1. Параллельдік бұрыш сүйі болады (25-а сурет). Мұның дұрыстығы 2-теоремада дәлелденді.

2. Параллельдік бұрыш нүктенің түзуден қашықтығына байланысты болады (26-б сурет).



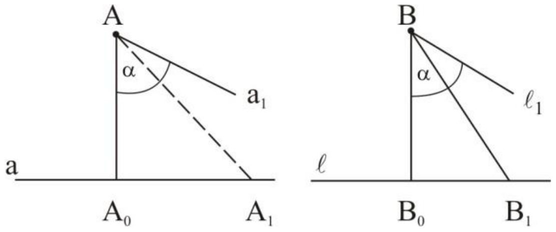
26-сурет

**Дәлелі:** а түзуден $A_0$ нүкте алып, ол нүктеден а түзуге жүргізілген перпендикуляр бойынан $A_1B$ нүктелер алайық. Ол нүктелерден а түзуге оң жағынан параллель болатын $a_1в$ түзулер жүргізейік. Бұл нүктедегі параллельдік бұрыштар $\alpha_1\alpha_2$ болсын. $\alpha_1$–ге сыбайлас бұрыш $\beta_1$ болсын. Сонда $\alpha_1 + \beta_1 = 2d_1$ $\beta_1 + \alpha_2 < 2d$ болатындықтан, бұлардан $\alpha_1 > \alpha_2$ болсын шығады.

Демек параллельдік кесінді ұзарған сайын $(A_0B > A_0A)$, яғни нүктеден түзуден қашықтығы артқан сайын ол нүктедегі параллельдік бұрыш кішірейе береді екен.

Егер a₁в екі түзу беріліп, олардан бірдей қашықтықта орналасқан A₁B екі нүкте алынса, яғни $A_0A = B_0B = h$ болса да, оларға қарағандағы A және B нүктедегі параллель бұрыштар $\alpha$ мен $\beta$ өзара тең болады.

**Дәлелі:** $AA_0 \perp a_1 \quad BB_0 \perp b_1 \quad AA_0 = BB \ = h, \angle a_1AA = \alpha, < в_1BB_0 = \beta$ болсын (27-сурет).



27-сурет

$\alpha \neq \beta$ деп кері жорның мыс: $\alpha < \beta$ екен дейік. Онда $BB_0$ $-$ға $< B_0BB_1 - \alpha$ болатын бұрыш пен өлшеп салуға болады. BB₁ сәуле $< a_1AA_0$ бұрыштың ішінде жатқандықтан ол в түзумен қиылысады.

а түзуге A₀A₁-ді B₀B₁-ге тең етіп өлшеп салайық. Сонда $AA_0 = BB_0,\ A_0A_1 = B_0B_1 \ \angle AA_0A_1 = \angle BB_0B_1$ болғандықтан $\Delta AA_0A_1 = \Delta BB_0B_1$ болады. Сөйтіп $\angle A_0AA_1 = \angle A_0Aa_1 = \alpha$ болып шықты бұл мүмкін емес. Сондықтан $\alpha < \beta$ дұрыс емес. Олар тең болады.

Егер нүкте мен түзу арасын, яғни параллельдік кесінді ұзындығын x десек, онда оның әрбір мәніне параллеьдік бұрыш $\alpha -$ні әр түрлі нақты бір мәні сай келеді екен. Олай болса параллеьдік бұрыш, параллельдік кесіндінің функциясы болады, яғни $\alpha = П(x)$ болады, мұның анықталу облысы $(0;\infty)$ интервалы болады. Мұны Лобачевский функциясы дейді. Ол x-тың барлық оң мәндерінде анықталған және $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ аралықтағы барлық мәндерді қабылдайтын қатаң кемімелі функция болады және $\lim\limits_{x \to 0} П(x) = \frac{\pi}{2}, \lim\limits_{x \to 0} П(x) = 0$ болады.

Лобачевский $tg\frac{\Pi(x)}{2} = e^{-\frac{x}{k}}$ *немесе* $П(x) = 2arctg\left(e - \frac{x}{k}\right), k > 0$ нақты сан болатынын дәлелденген.

## 6.4 Лобачевский жазықтығындағы үшбұрыштар мен төртбұрыштар

Абсолюттік геометрияда мына теоремалар дәлелденді:

- Тең бүйірлі үшбұрыш туралы теоремалар
- Үшбұрыштын теңдігінің үш белгісі.
- Үшбұрыштың сыртқы бұрышының қасиеті.
- Үшбұрыштың қабырғалары мен бұрыштары арасындағы қатынастар.
- Үшбұрыштың биссектрисасы, медианасы қасиеттері.

Біз осыларға сүйене отырып тек Лобачевский жазықтығында орындалатын кейбір теоремаларды қарастырамыз.

$1^0$ Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы 2d-дан кем болады.

**Дәлелі:** Саккери дәлелдеуі бойынша үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы 2d-дан артпайды $\delta_{АКС} \leq 2d$ $\delta_{АКС} < 2d$ деген V постулатпен барабар.

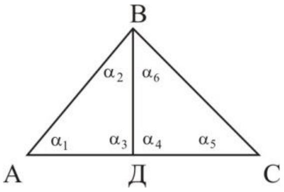
Ал, Лобачевский геометриясында V постулат және одан теоремалар орындалмайтындықтан $\delta_{АКС} < 2d$ болады.

Айырым $\delta_{АКС} - 2d = Д_{АКС} < 0$ үшбұрыш АВС-ның дефектісі делінеді.

Мынадай теорема бар. Егер $\Delta ABC -$да АДС болса $Д_{ABC} = Д_{АВД} + Д_{ДВС}$

**Дәлелі:** $Д_{ABC} = 2d - \delta_{ABC} = 2d - (\delta_{АВД} + \delta_{ДВС} - 2d) = 2d - \delta_{АВД} + 2d - \delta_{ДВС} = Д_{АВД} + Д_{ДВС}$

$2^0$ Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы тұрақты емес, әр үшбұрышта әртүрлі болады.



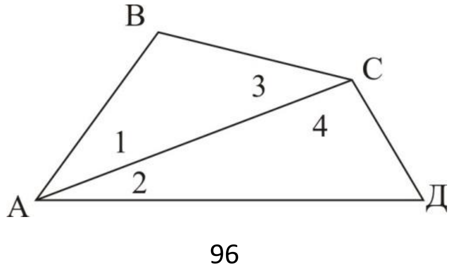
28-сурет

**Дәлелі:** $\Delta ABC_1 ДЕАС$ берілген. Оның бұрыштарын суреттегідей белгілейік сонда (28-суреттен) $\delta_{ABC} = \angle A + \angle B + \angle C = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_1) + \alpha_3 =$
$= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_6 + 2d - 2d = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_6 + (\alpha_3 + \alpha_4) - 2d = \delta_{АВД} + \delta_{ДВС} - 2d$

Ал, $1^0$ бойынша $\delta_{АДС} < 2d$. Сондықтан соңғы теңдіктен $\delta_{ABC} < \delta_{АВД}$, яғни $\delta_{ABC} \neq \delta_{АВД}$.

$3^0$ Дөңес төртбұрыштын ішкі бұрыштарының қосындысы $4d$ $-$дан кем болады.

**Дәлелі:** 29-суреттен $\delta_{АВСД} = \angle A + \angle B + \angle C + \angle B = \angle 1 + \angle B + \angle 3 +$
$+ \angle 4 + \angle Д + \angle 2 = \delta_{ABC} + \delta_{АВД} \angle 2d + 2d = 4d$ .

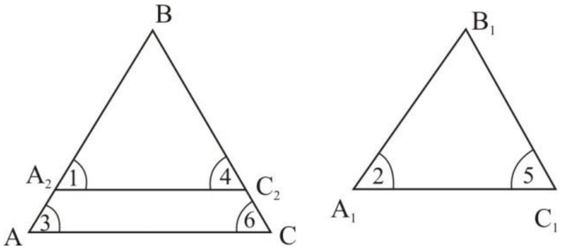


29-сурет

Салдар: а) Лобачевский жазықтығында параллель түзулерге ортақ перпендикуляр болмайды.

б) Кез келген екі түзудің екеуіне де перпендикуляр болатын екі түзу жүргізуге болмайды.

$4^0$ Бір үшбұрыштын үшбұрышы екінші үшбұрыштың сәйкес бұрыштарына тең болса ол үшбұрыштар өзара тең болады. (30-сурет).



30-сурет

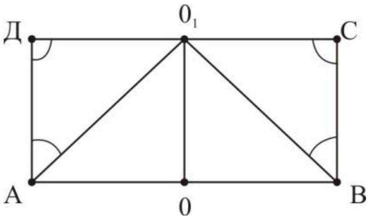
**Дәлелі:** $\Delta ABC, \Delta A_1B_1C_1$ үшбұрыштарды $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1$ болсын.

Бұл кезде $AB = A_1B_1$ болатынын дәлелдейік. Ол үшін $AB \neq A_1B_1$ дейік ВА мен ВС сәулелер бойында $A_2, C_2$ нүктелерді $BA_2 = B_1A_1, BC_2 = B_1C_1$ болатындай етіп алайық. Сонда үшбұрыштың теңдігінің 1-белгісі бойынша $\Delta A_2BC_2 = \Delta A_1B_1C_1$ болады. сондықтан $\angle 1 = \angle 2$ болады. теорема шарты бойынша $\angle 3 = \angle 2$. Сондықтан $\angle 1 = \angle 3$. Осы сияқты $\angle 4 = \angle 6$.

Ұйғарым бойынша $AB > A_1B_1$ сондықтан $AA_2B$ болады, яғни $A_2C_2$ АС түзуі АВ қабырғаны қияды. Ал, $\angle 1 = \angle 3$ болғандықтан $A_2C_2, AC$ түзулер қиылыспайды. Сондықтан $AA_2C_2C$ төртбұрышты дөңес болады. $\angle 1 = \angle 3$; $\angle 4 = \angle 6$ болғандықтан $\delta_{AA_2}C_2C = 4d$ $\left(\angle 1 + \alpha_1 = 2d; \angle 4 + \alpha_2 = 2d \Rightarrow \angle 3 + \alpha_1 + \right.$ $\left. + \angle 6 = \angle 4d \right)$. Мұндай болу Лобачевский жазықтығында мүмкін емес. Сондықтан $AB \neq A_1B_1$ деген дұрыс емес, яғни $AB = A_1B_1$ болады. Сөйтіп үшбұрыштың теңдігінен екінші белгісі бойынша $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

$5^0$ Лобачевский геометриясында Саккеридің сүйір бұрыш гипотезасы орындалады.

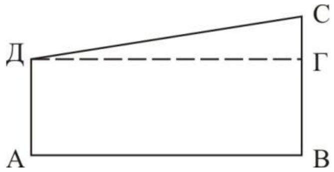
Табаны АВ-ға бүйір қабырғалары АД мен ВС перпендикуляр болатын және өзара АД=ВС тең болатын АВСД бұрышты Саккери төртбұрышы дейді. Бұл төртбұрыш үшін (31 а-сурет) 1-ден, $\angle ABC = \angle BCД$ 2-ден, $\angle ABC, BCД$ сүйір болды. 3-ден, $AД < BC$ болса, онда $\angle ДAC < \angle CДA$ болады.



31а-сурет

**Дәлелі.** а) АВ-ның О ортасы болсын, $OO_1 \perp AB$ жүргізейік. Онда $\Delta AOO_1 = \Delta BOO_1$ бұдан $AO_1 = BO_1$ болады және $\angle OAO_1 = \angle OBO$ болады. Сондықтан $\angle ДAO_1 = \angle O_1BC$. Сонымен $ДA = CB, AO_1 = BO_1$ $\angle ДAO_1 = \angle CBO_1$ болғандықтан $\Delta AДO_1 = \Delta BCO_1$ бұдан $\angle AДO_1 = \angle BCO_1$.

б) $3^0$ бойынша АВСД-ның 4 бұрышының қосындысы 4d дан кем болу керек, ал $\angle A = \angle B = d$. $\angle Д = \angle C$. $\angle A + \angle B + \angle C + \angle Д \angle 4d$ $d + d + 2\angle C \angle 4d$, $\angle C \angle d$ $\angle Д = \angle C$ болғандықтан $Д < d$.



31б-сурет

в) егер $BC > AД$ болса (31 б-сурет), $BT = AД$ салсақ $\angle ДTB \Delta ДTC$ үшін сыртқы бұрыш. Сондықтан $< ДTB >< ACT$ ал, $< AДC > < AДT >=$ $=< ДCT \Rightarrow \angle AДC > \angle ДCT$. Мұнын дұрсы: егер $\angle C < \angle Д$ болса $AД < BC$ болады.

# 7. Паралель және ажырасатын түзулер

## 7.1 Паралель түзулердің өзара орналасулары

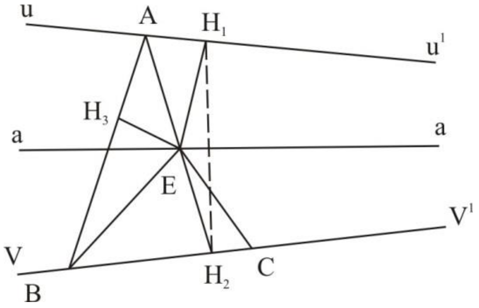
**1-теорема.** Екі түзу параллель болса, онда

а) ол түзулердің екеуінен бірдей қашықтықта жататын нүкте болады.

б) ол түзулердің симметрия осі болады.

в) ол түзулеріне тең көлбеулі қиюшысы болады.

**Дәлелі.** $UU'$ түзуі $VV'$ түзуіне оң жағынан параллель болсын. $UU'$-тең кез келген $A_1 VV'-$тең кез келген В нүкте алайық. (32-сурет). $UAB, V'BA$ бұрыштарының биссектрисаларын жүргізейік. Олар Е нүктеде қиылыссын. Онда Е нүкте $UU'$, $VV'$ түзулерімен және АВ-дан берілсе қашықтықта жатады. (биссектриса қасиеті бойынша). Егер $EH_2 \perp VV'$, $EH_1 \perp UU'$, $EH_3 \perp AB$ жүргізсек $EH_1 = EH_2 = EH_3$ болады.



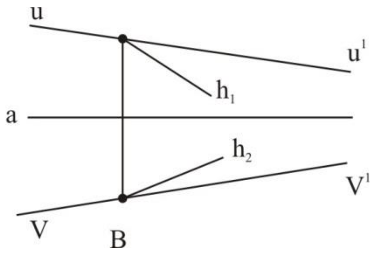
32-сурет

Енді $H_1EH_2$ бұрыштың биссектриссасын жүргізсек, ол жататын а түзу $UU'$, $VV'$ түзулеріне симметрия осі болады.

$H_1H_2$ түзу $UU'$, $VV'$ түзулерімен теңдей бұрыш жасайды.

Себебі $H_1H_2$ түзумен $UU'$, $VV'$ түзулерге көлбеу бұрышы бірдей болады.

**2-теорема.** Түзулердің параллельдігі симметриялы болады, яғни $UU' \| VV'$ болса, онда $VV' \| UU'$ болады. (33-сурет).

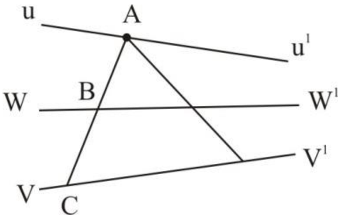


33-сурет

**Дәлелі.** $UU'$ түзуі $VV'$ түзуіне оң жағынан параллель болсын. А нүкте $UU'$ түзудегі кез келген нүктесі. а берілген түзулеріне симметрия осі болсын. Онда А нүктеде а түзуіне қарағандағы симметриясы нүкте В болса, ол $VV'$ түзуге жатар еді. $UU'$ түзу $VV'$ түзуге параллель болғандықтан, $U'AB$ бұрыш ішінен А нүктеден жүргізілген кез келген $h_1$ түзулер $UU'$ пен $VV'$ қиылыспайтындықтан $VV'$ түзуі $UU'$ түзуге параллель болуы үшін В нүктеден $\angle ABr'$ бұрыш ішінен жүргізейік. Кез келген түзудегі $UU'$ пен қиылыспайтындығын дәлелдедік, $UU' \| VV'$ болар еді $h_1$ түзуді жүргізейік, В нүктесі А түзуге қарағанда геометриялы $h_2$ түзуін жүргізейік. Сонда $U'AB$ бұрыш $V'BA$бұрышқа симметриялы болады. Олардың ішінен жүргізілген $h_1 h_2$ сәулелерде өзара симметриялы болады. Сондықтан $h_1$ түзуі $VV'$ пен қиылысатындықтан $h_2$ түзуі оған симметриялы $UU'$ пен қиылысады. Ал, бұл $VV' \| UU'$ деген сөз.

**3-теорема.** Түзулердің бір бағыттағы параллеьдігі транзитивті болады, яғни $UU' \| VV'$, $VV' \| WW'$ болса, $UU' \| WW'$ бір бағытта қиылыспайды. Өйткені олар қиылысса бір нүктесі $VV'$ түзуге екі параллель түзу жүрген болар еді. Ол мүмкін емес. Мына екі жағдайды қарастырайық.

а) $UU'$ пен $WW'$ түзулер $VV'$ түзудің бір жағында жатсын (34а-сурет).

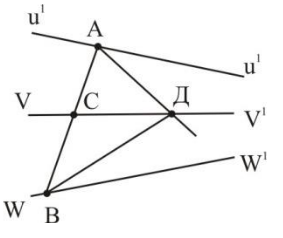


34а-сурет

$uu'$ −тен $A$, $VV'$−тең нүктелер алайық $AC \cap WW' = B$ болсын.

Сонда $A$ нүктеден $u'AC$ бұрыш ішінде жататын сәулелер жүргізсе, ол $VV'$−ті қияды. Себебі, $uu' \| VV'$. Қиылысу нүктесі $D$ болсын. Ал, $A$ мен $D$ нүктелер $WW'$ түзудегі екі жағында жатқандықтан $AD$ сәуле $WW'$ түзуді де қияды. Сөйтіп, $u'AB$ бұрыш ішінен жүргізілген кез-келген $WW'$-ті қияды. Демек $uu' \| WW'$.

б) Енді $uu'$ −мен $WW'$ түзулері $VV'$-тен екеуі екі жағында жатсын (34б-сурет). $uu'$ −тен $A$, $WW'$−тен $B$нүктелерін алайық $AB \cap VV' = C$ болсын.

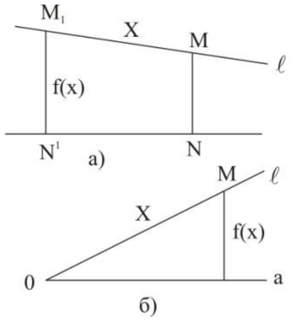


34б-сурет

Сонда $uu'\|VV'$ болғандықтан $u'AC$ (сондықтан $u'AB$) бұрыш ішінде жататын $A$нүктеден жүргізілген кез-келген сәуле $VV'$пен қиылысу керек. Соның бірі $AD$ болсын. $AD$ түзу $V'DB$бұрыш ішінен өтіп тұрғандықтан $VV'\|WW'$ болғандықтан, ол $AD$ түзу $WW'$-түзуді де қияды. Сөйтіп, $A$ нүктеден $u'AB$ бұрыш ішінде жататындай етіп жүргізілген кез-келген түзу $WW'$-ті қияды екен. Сондықтан параллельдік анықтамасы бойынша $uu'\|WW'$ болады. Сөйтіп, $uu'\|VV'$, $VV'\|WW'$ болса $uu'\|WW'$ болады екен.

Бізге алдағы аса қажетті кейбір теоремаларды дәлелдеу үшін абсолюттік геометрияның төмендегі екі тұжырымына сүйенуге тура келеді. Оларды дәлелсіз алайық, лемма үшін пайдаланайық.

**1-лемма.** Бір жазықтықта жататын кез-келген $a, в$ екі түзу берілсін. $M \in в$ нүктеден $a$ түзуге $MN \perp a$ түсірейік. $MN$-нен $в$-мен доғал бұрыш жасайтын жағынан $M_/ \in в$ нүкте алып, $M_/N_/ \perp a$ жүргізейік. $M_/$ нүктенің $M$ -нен қашықтығын $x-$қа тәуелді болар еді, оны $f(x)$ дейін (35-а сурет).



35-сурет

Сонда $f(x)$ функциясы $(0,\infty)$ аралықта үздіксіз қатаң үдемелі функция болады:

$$f(x) = +\infty$$
$$x \to \infty$$

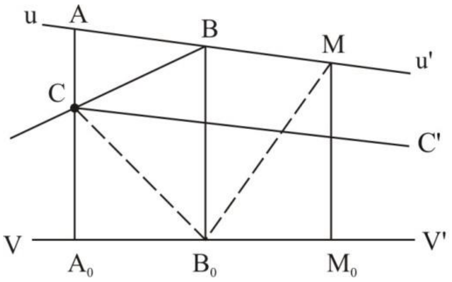
**2-лемма.** $O$ нүктеден $a$ және $в$ екі сәуле шықсын. Олар арасындағы бұрыш сүйір болсын. Түзу $в-$ның бойынан $M$ (35-б сурет). $O$ нүктеден ағымдағы $M$ нүктесінің қашықтығы $x-$қа тәуелді болады, оны $f(x)$ дейік. Осы жағдайда $f(x)$ функция $(0,\infty)$ аралықта үздіксіз қатаң үдемелі функция болады:

$$\ell \quad f(x) = \infty$$
$$x \to \infty$$

Осыны пайдаланып мына теореманы дәлелдейік.

**4-теорема.** Параллель екі түзудің біріндегі ағымдық нүктенің екіншісіне дейінгі қашықтығы ол нүкте түзулердің параллельдік жағына қарай қозғалғанда 0-ге ұмтылады, ал қарама-қарсы жағына қарай қозғалғанда шексіз ұлғаяды.

Теореманың дұрыстығы 1-леммадан шығады $uu'$ түзуі $VV'$ түзуіне он жағынан параллель болсын (36-сурет).



36-сурет

$A\in uu'$ нүктеден $VV'$ түзуге $AA_0$ перпендикуляр түсірейік. $AA_0$ кесіндіге $A_0cA$ болатындай етіп барынша кіші $A_0c=\varepsilon$ кесіндіні өлшеп салайық. $C$ нүктеден $VV'$ түзуге оң жағынан параллель болатын $C'$, сол жағынан параллель болатын $C''$ сәуле жүргізейік. Егер $C''C-$ны созсақ, $VV'\|CC'\|uu'$ болғандықтан ол $uu'-$ты бір $B$ нүкте қияды. $BB_0\perp VV'$ жүргізейік. Сонда $AA_0B_0B$ төртбұрыш шықты. Оның $A_0,B_0$ бұрыштары $\angle AA_0B_0$ сүйір (себебі $uu'\|VV'$) осы сияқты $BB_0u'$ бұрышта сүйір. Сондықтан $B_0BA$ бұрыш доғал. Сондықтан Саккери бойынша $AA_0>BB_0$ болады.

Енді $uu'$ түзуіне $BM=BC$ кесіндіні өлшеп салып, $MM_0\perp VV'$ жүргізейік. Сонда $\Delta CBB_0=\Delta MBB_0$ болады. Себебі, $BB_0$ екеуіне ортақ, $BC=BM$ салу бойынша $\angle CBB_0=\angle BBM$ өйткені $W'-$ке $BC$ сол жағынан $BM$ он жағынан параллель бұлардан $CB_0=B_0M$ және $\angle CB_0B=\angle BB_0M$. Сондықтан $\Delta CA_0B_0=\Delta MM_0B_0$ бұдан $MM_0=CA_0=\varepsilon$ алдын-ала берілген бойынша кіші кесінді. Сондықтан $M$ нүкте $A$ нүктеден алыстаған сайын $MM_0\to 0$.

Демек, кері бағытта қозғалса $M-$нің $VV'-$тен қашықтығы шексізге ұмтылады.

Сөйтіп, параллель түзулер параллельдік жағында бір-біріне шексіз жақындайды да екінші жағында бір-бірінен шексіз алыстай береді.

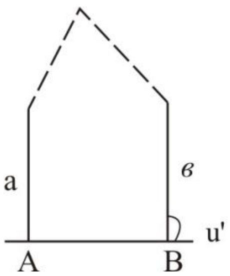
## 7.2 Ажырасатын түзулердің қасиеттері

Лобачевский жазықтығында өзара қиылыспайтын және параллельде болмайтын түзулерді ажырасатын немесе аса параллель түзулер дейді.

Жазықтықта кез келген түзуге одан тыс жатқан нүктеден екі параллель түзу (бірі берілген түзулердің он бағыты, екіншісі теріс бағыты бойынша) жүретіндігі айтылды. Сол түзулер жасайтын бір вертикаль бұрышта жатқан түзулердің барлығы берілген түзумен қиылыспайды және параллельде болмайды. Олар берілген түзумен ажырасатын түзулер болады.

Ажырасатын түзулердің болатындығы абсолют геометрияның төмендегі теоремаларынан да көруге болады.

**5-теорема.** Бір түзуге перпендикуляр екі түзу өзара ажырасатын түзулер болады.



37-сурет

Дәлелі $u \perp a,\ u \perp b$ түзулер жүргізілген. Бұл түзулер қиылыспайды. Егер $a \cap в = c$ нүктеде қиылысады десек $\Delta ABC -$ның ішкі бұрышы $\angle CAB$ мен онымен сыбайлас емес $\angle CBU'$ бұрыш тең болып қалар еді. Ол мүмкін емес. Сондықтан $a, в$ қиылыспайды. Сонымен, олар параллельде болмайды. Өйткені, паралель десек, параллельдік бұрыш сүйір болуы керек. Сөйтіп $a, в$ ажырасатын түзу болады.

Параллель түзулердің ортақ перпендикуляр болмайды.

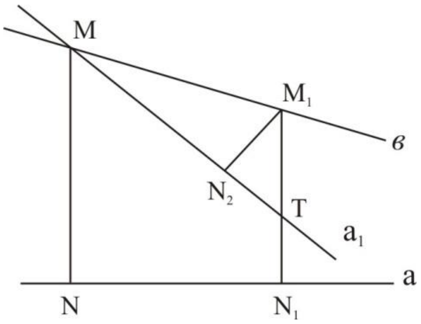
Параллель түзулердің ортақ перпендикуляры болады десек. Олар 5-теорема бойынша ажырасатын түзу болып кетеді.

**6-теорема.** $a, в$ түзулері үшінші бір с түзуі қиып өткенде шығатын ішкі айқыш бұрыштары немесе сәйкес бұрыштары тең болса, онда $a$ мен $\ell$ ажырасатын түзу болады (алғашындай дәлелденді).

**7-теорема.** Ажырасатын екі түзудің ортақ бір ғана перпендикуляр болады. Ол түзулер перпендикулярдың екі жағында да бір-бірінен шексіз алшақтай береді.

**Дәлелі.** Лобачевский жазықтығында екі түзудің екі ортақ перпендикуляры болмайды. Болады десек төртбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы $4d -$ға тең болып қалар еді. Төртбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы $4d -$дан кем болатынын дәлелдегенбіз. Ажырасатын түзулер үшін ортақ перпендикулярдың біреу-ақ болатынын дәлелдейік.

$a, в$ ажырасатын түзулер болсын. $в$-дан М нүкте алып $MN \perp a$ жүргізейік. Егер $MN$ әрі $в$-ға да перпендикуляр болатын болса теорема дәлелденді. (38-сурет).

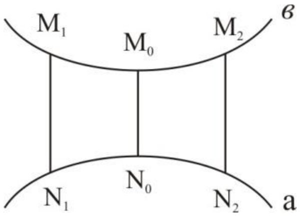


38-сурет

Біз $MN \perp a_1$ бірақ $в$-түзуге перпендикуляр емес дейік. Онда $MN$ түзуі $в$ түзумен бір жағында доғал, екінші жағында сүйір бұрыш жасайды. Сонда 1-лемма бойынша М нүкте $в$ бойымен солға қарай қозғалғанда шексіз өседі.

Егер М нүкте $в$ түзу бойымен оңға қарай қозғалса, онда $в$ мен а ажырасатын түзулер болғандықтан М нүктеден а-ға параллель а$_1$ түзуін жүргізуге болады. М-ның оң жағынан М$_1$ нүкте алып $M_1N_2 \perp a_1, M_1N_1 \perp a$ жүргізейік. Сонда $M_1T < M_1N_1; M_1N_2 < M_1T$ болатындықтан $M_1N_2 < M_1N_1$ болады. Сонда 2-лемма бойынша $M_1$ нүкте $в$ бойынша оңға қарай болатындықтан $M_1N_2$ шексіз өседі, сол әрбір нүкте үшін $M_1N_1 > M_1N_2$ болғандықтан $M_1N_1$ кесінді ұзындығында шексіз өседі.

Сөйтіп М оңға қозғалсада солға қозғалса да М мен N нүктелер арасы өседі екен. Егер М нүкте координатасын Х десек, ал МN кесінді ұзындығы $f(x)$ десек, онда $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ болады. Сондықтан $f(x)$ функцияның функцияның $(-\infty; +\infty)$ аралықта ең аз (минимум) мәні $f(x_0)$ болуы керек. Ол мәнге $M_0N_0$ болсын (39-сурет).



39-сурет

$f(x)$-рын $f(x_0)-$дан үлкен әрбір мәніне аргументтен өзара тең емес $x_1 \neq x_2$ екі мәнінде болды. Ол аргументтерге $M_1(x_1), M_2(x_2)$ нүктелер сай келсін. $M_1N_1 \perp a, M_2\,N_2 \perp a$ жүргізейік.

Сонда $M_1N_1N_2M_2$ төртбұрыш шығады. Ол Саккери төртбұрышы болады. ондай төртбұрыш табанының ортасынан жүргізілген перпендикулярға қарағанда симметриялы болады, бұдан кесіндінің ортасы М$_0$ дан а түзуіне жүргізілген перпендикуляр болады.

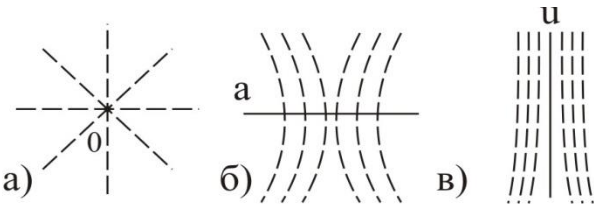
**Ескерту:** Екі ажырасатын түзудің біріншісінен екіншісіндегі проекциясы, ол түздің толық жатпайды. Ортақ перпендикулярдың барынша алыстаған нүктеден біреуіне перпендикуляр етіп жүргізілген түзу екіншісімен қиылыспай кетеді.

## 8. Лобачевский жазықтығындағы кейбір сызықтар

### 8.1 Түзулер шоғы

Лобачевский жазықтығында түзулер өзара үш түрлі орналасатын болды. Осыған сай жазықтықта түзулер шоғы да үш түрлі болады. жазықтықта түзулер шоғы да үш түрлі болады. олар мыналар.

1. Бір О нүктеден өтетін түзулер шоғы. Бұл шоқты О центрлі шоқ немесе эллипстік шоқ дейді. О нүкте шоқтың центрі делінеді (40-а сурет).



40-сурет

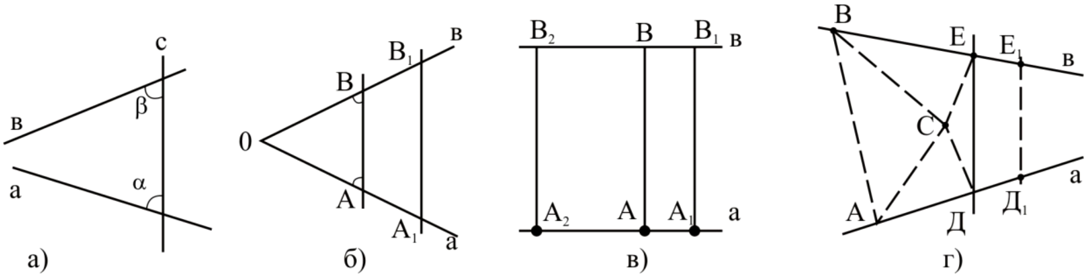
2. Бір $U$ түзуге перпендикуляр болатын. Сондықтан өзара ажырасатын түзулер шоғы. Бұл шоқты Гиперболалық шоқ дейді, $U$ түзуді шоқтың базасы дейді (40-б сурет).

3. Бір $V$ түзуге осы түзу бағытында параллель болатын түзулер шоғы. Бұл шоқты параболалық шоқ дейді, $V$ түзуді шоқтың өсі дейді (40-в сурет).

Егер де жазықтықта қандай да бір шоқ берілсе, онда жазықтықтың әрбір нүктесінен бұл шоқтың тек бір түзуі өтеді.

### 8.2 Тең көлбеулі қиюшылар

Кез келген шоқтың а, в екі түзуін бір с түзуімен қиғанда пайда болатын бір шоқты бұрыштары тең болса, онда а, в түзулер үшін С түзу тең көлбеулі қиюшы делінеді. 41-а суретте $\alpha = \beta$ болса с тең көлбеулі қиюшы болады.



41-сурет

Егер а мен в эллипстік шоқтын түзулері болса, яғни олар бір О нүктеде қиылысатын түзулер болса, онда $OA = OB\left(A \in a, B \in b\right)$ болатын А мен В нүктеден өтетін АВ түзу а мен в түзулерге тең көлбеулі қиюмен болады (411-б сурет). Себебі бұл кезде $\angle OBA = \angle OAB$ болады. (АВ түзуі а мен в түзулерге тең көлбейді). Егер $AA_1 = BB_1\left(A_1 \in a_1 \; B_1 \in b\right)$ болатын $AA_1BB_1$ кесінділерді а мен в түзулерге өлшеп салсақ, а, в түзулер үшін $A_1B_1$ түзуде тең көлбеулі қиюшы болады.

Енді а, в гиперболалық шоқтын түзулері болсын. Онда олар қандай да бір $U$ түзуіне перпендикуляр болады. Яғни өзара ажырасатын түзулер үшін бір ғана ортақ перпендикуляр болатын. Сол ортақ перпендикуляр а мен в түзулер үшін тең көлбеулі қиюшы болады. Ол АВ болсын (41-в сурет). Бұл кезде $AA_1 = BB_1;\ AB_2 = AB_2\ (A_1, A_2 \in a\ B_1, B_2 \in b)$ өлшеп салынса, онда қиюшылар болады, яғни $\angle BB_1A_1 = \angle AA_1B_1; \angle BB_2A_2 = \angle A_2AB_2$ болады.

Егер а мен в параболалық шоқтың кез келген екі түзуі болса, яғни $a \parallel b$ болса, онда бұл екі түзуге тең көлбеулі қиюмен былайша салынатын. $A \in a, B \in b$ нүктелер алынып (41-сурет) $BBA, aAB$ бұрыштардың биссектрисаларының қиылысу нүктесі С табылсын. С-дан а, в түзулерге СД, СЕ перпендикуляр жүргізіледі. Сонда $ДЕ$ түзу тең көлбеулі қиюшы болады. егер $AA_1 = BB_1(A_1 \in a, B \in b)$ кесінділер өлшеп салынса, онда $A_1B_1$ түзуде өзара параллель а, в түзулер үшін тең көлбеулі қиюшылар болады.

Тең көлбеулі қиюшылар тұрсын мына ұйғарымдардың дұрыстығын дәлелдеу қиын емес.

- егер АВ мен СД тең көлбеулі қиюшылар болса, онда $AC = ВД$ болады.

- егер шоқтың а, в, с түзулерінде жататын А, В, С нүктелер беріліп, а, в түзулер үшін $AB_1$, в, с түзулер үшін ВС тең көлбеулі қиюшы болса, онда а, с түзулер үшін АС тең көлбеулі қиюшы болады.

- егер а, в параллель түзулер үшін АВ $(A \in a, B \in b)$ тең көлбеулі қиюшы болса, онда АВ-ның ортасынан оған перпендикуляр етіп жүргізілген түзу а мен в-ға параллель болады, яғни а мен в жатқан жаққа енеді.

## 8.3 Жазықтықтағы сызықтар

Бір шоқтан а, в түзулер алайық. а түздің $A_1B$ түздің В нүктелерін басып өтетін АВ түзу бұл түзулерге тең көлбеулі қиюшы болса, онда А мен В нүктелерді осы жаққа қарағанда өзара сәйкес нүктелер осы жаққа қарағанда өзара сәйкес нүктелер дейді.

Шоқтың кез келген бір а түзуінің бойынан А нүкте алып, ол нүктеден шоқтың барлық түзулеріне а-мен тең көлбеулі болатын түзулер (қиюшылар) жүргізу арқылы шоқтың әрбір түзуінің бойынан, осы жаққа қарағанда А нүктемен өзара сәйкес болатын шексіз көп нүктелер шығарып алуға болады.

Шоқтың бір түзуінің бір нүктесіне осы шоққа қарағанда өзара сәйкес болатын жазықтықтың барлық нүктелерінің жиынын, егер ол шоқ

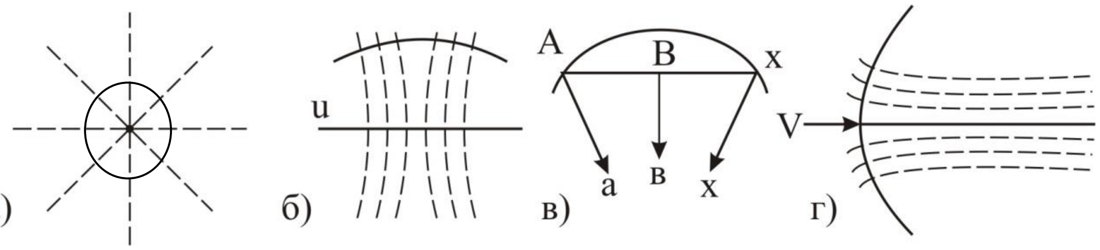
- эллипстік шоқ болса шеңбер дейді
- гиперболалық шоқ болса эквидистата дейді

- параболалық шоқ болса орицикл дейді.

Шоқ түзулеріне тең көлбеулі қиюшы салу жолынан.

Бұл айтылған анықтамадан шеңбер, эквидистанта және орицикл фигураларының формасы және оны салу жайлы мынадай тұжырымдамалардың дұрыстығы тікелей шығады.

- Шеңбер дегеніміз центрі деп аталатын бір нүктеден (шоқ центрі О нүктеден) теңдей қашықтықта жататын жазықтық нүктелерінің жиыны болады (42-а сурет).



42-сурет

(Шоқ түзулеріне тең көлбеуі қиюшы салу жолынан).

Шоқтың әрбір түзуін шеңбердің өсі дейді.

- Эквидистанта деген ішіміз шекарасы базистік $U$ түзуі болатын жарты жазықтықтың бір түзуден (базистік түзуден) теңдей қашықтықта жатқан нүктелердің жиыны болады (42-б сурет). Эквидистантаның кез келген нүктесінен түсірілген перпендикулярды эвидистантаның биіктігі дейді, ал шоқтың түзулерін эквидистантаның өсі дейді.

- Енді орициклді салу жолын қарастырайық (42-в сурет). Кез келген а түзуін және ол түзуден А нүктесін алып, бұл нүктеден а түзумен сүйір бұрыш жасайтын мүмкін болатын барлық түзулерді жүргіземіз. Ол түзулердің бойына А нүктеден бастап, бұл түздің а-мен жасайтын бұрышы $\alpha$ параллельдік бұрыш болатын кесіндіден 2 есе үлкен болатын АХ кесінділерді өлшеп саламыз, яғни $\alpha = \pi\left(\frac{AX}{2}\right)$ болатын АХ кесінділерді саламыз. Осылайша салынған Х нүктелердің жиыны орицикл болды (42- сурет). Мұнын дұрыстығын дәлелдеу үшін Х нүктеден а түзуге параллель етіп х түзуін жүргізейік. АХ кесіндінің қақ ортасы В нүктеден АХ-қа перпендикуляр етіп в түзуін жүргізейік. Сонда $\pi(AB) = \alpha$ болатындықтан $в \parallel a$ болады, $a \parallel x$ еді. Сондықтан $в \parallel x$ болады.

Сонымен $\angle xXA = \pi(XB) = \pi(AB) = \alpha.$ Демек, өзара параллель а және х түзулер үшін АХ тең көлбеулі қиюшы болады екен. Сондықтан Х нүкте а түзу мен А нүкте арқылы анықталатын орициклде жатады.

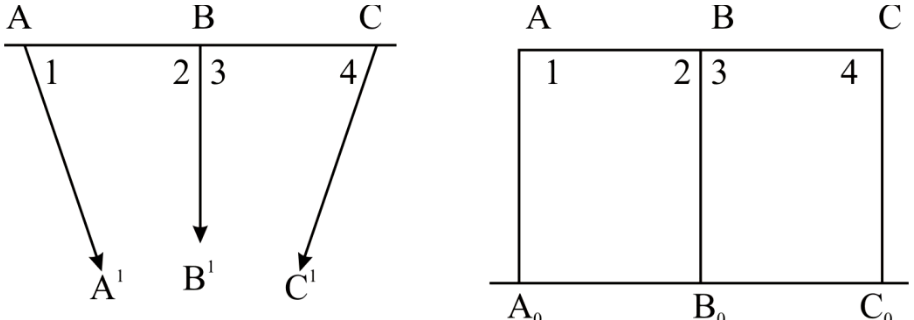
Бұл салу жолынан орицикл a түзуіне қарағанда симметриялы болатын фигура екені көрінеді.

Салдар: орициклдің кез келген х ордасынан қақ ортасынан ол хордаға перпендикуляр етіп жүргізілген түзу түзулерге сол хорда ұштарынан өтетін шоқ түзулеріне параллель болады, яғни сол шоққа енеді.

Енді бұл фигуралардың ортақ және жеке қасеттерін қарастырайық.

1-қасиет. Шеңбер эквидистанта және орицикл түзу емес қисық сызықтар болады.

**Дәлелі:** бұларда жатқан A,B,C үш нүктенің бір түзудің бойында жаталмайтынын дәлелдейік а) A,B,C үш нүкте шеңбердің немесе орициклдің нүктелері болсын және олар бір d түзуінде жатады дейік (43-а сурет) AB түзу $AA', BB'$ түзулердің, BC түзу BB, $CC'$ түзу көлбеулі қиюшылары болады. Сондықтан $\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4, \angle 1 = \angle 4.$ Сондықтан $\angle 2 = \angle 3,$ ал 2 мен 3 сыбайлас болғандықтан тең бұрыш болады. Сөйтіп $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = d$ болып шықты. Ал сызық шеңбер болса да, орицикл болса да, бұл бұрыштар сүйір болуы керек. Демек A,B,C бір түзуде жатады десек қайшылққа келеді екенбіз. Сондықтан, ол нүктелер бір түзудің бойында жатпайды.



а) б)

43-сурет

б) Енді $A, B, C$ эквидистантаның нүктелері болсын және бір түзуде жатсын. $U$ түзу эквидистантаның базасы болсын (43-сурет). $AA_0, BB_0, CC_0 -$ лар $U$ түзуге түсірілген бойынша $A_0A = B_0B = C_0C$ болу керек және $\angle A_0, \angle B_0, \angle C_0$ тік бұрыштар. Демек $AA_0B_0B, BB_0C_0C, AA_0C_0C$ төртбұрыштар Саккери төртбұрыштары болады. Сондықтан төбедегі бұрыштар өзара тік және сүйір болулары керек: $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 < \frac{\pi}{2}.$ Ал, бізде олар тік бұрыштар болып тұр. Сондықтан бұл қайшылықтан $A, B, C$ нүктелердің бір түзуде жатпайтындығы шығады.

Сөйтіп шеңбер, эквидистанта, орициклдің үш нүктесі бір түзуде жатпайды екен. Сондықтан олар түзу емес, қисық болады.

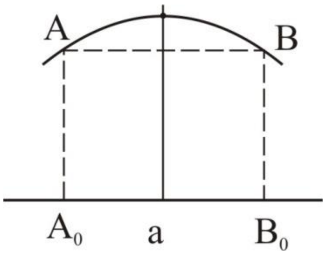
Салдар: Шеңбер, эквидистанта, орицикл өз жазықтығында жатқан түзумен екіден көп емес нүктеде қиылысады.

2-қасиет. Шеңбер, эквидистанта, орицикл өзінің кез келген өсіне қарағанда симметриялы фигура болады.

**Дәлелі.** Бұл фигуралардан анықтайтын шоқтардың әрбір түзуін сәйкесінше шеңбердің, эквидистантаның орициклдің остері дегенбіз.

а) Шеңбер үшін қасиет дұрыс. Өйткені шоқ шеңбер нүктелері диаметрге. (Сондықтан оны өзіне қамтитын шоқ түзуіне) яғни өске қарағанда симметриялы болады.

б) Орициклді салу әдсінен, орициклдің кез келген өсіне қарағанда симметриясы болатыны тікелей шығады. Ол туралы пункттің бас жағында айтылады.



44-сурет

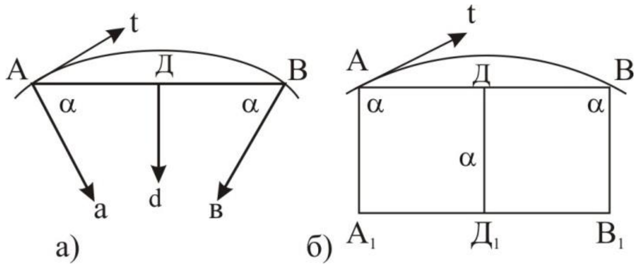
в) Енді осы қасиеттің эквидистанта үшін де дұрыстығын дәлелдейік 44-суреттен э-сызық эквидистанта болсын, оның кез келген А нүктесін алайық. В нүкте А-ға а түзуге қарағанда симметриялы нүкте болсын. Осы В нүктесінде э (эквидистантада)-де жататының дәлелдейік.

А-ның $U-$дағы проекциясы $A_0$ болсын. В-ның $U-$дағы проекциясы $B_0$ болса, онда $A_0$ мен $B_0$-ден а-ға қарағанда симметриялы болатыны айқын. Сондықтан $AA_0 = BB_0$ болады. Ал, бұл нүкте эквидистантада жатады деген сөз.

3-қасиет. Шеңбер, эквидистанта, орицикл өздері жасалған шоқ, түзулерінің ортогонал траекториясы болады, яғни бұл қисықтар шоқ түзулерін тікбұрышпен қияды, басқаша шоқ түзулері шеңберге, эквидистантаға, орициклге нормал болады.

**Дәлелі.** а) Шеңбердің кез келген нүктесінен жанама жүргізуге болады және ол жанама жанасу нүктесіне жүргізілген радиуске перпендикуляр болады. Ал, радиус эллипистік шоқтың түзуінің бойында жататындықтан жанама жанасу нүктесінен өтетін шоқ түзуіне (яғни шеңбердегі өсіне) перпендикуляр болады.

Демек шеңбердің осі шеңбердің нормалы болады. Шеңбер сол шеңберді жасайтын шоқ түзулерін тік бұрыш жасап қияды, яғни шоқ түзулерінің ортогонал траекториясы болады.



45-сурет

б) Енді А орициклдің (45-а сурет) немесе эквидистантаның (45-б сурет) нүктесі және ол а түзуде жатсын. А нүктеден а-ға t перпенди-кулярын жүргізейік. АВ түзуі а, в түзулердің тең көлбеуі қиюшысы болсын. АВ-ның қақ ортасы Д-дан АВ-ға перпендикуляр етіп d түзуін жүргізейік.

Сонда орицикл жағдайда $d \parallel a, d \parallel в$ болды. Сондықтан $\alpha$ параллель-дік бұрыш болады. демек ол сүйір болады: $\alpha = \pi(АД) = \pi\left(\frac{AB}{2}\right) < \frac{\pi}{2}.$

в) Ал, эквидистанта жағдайда төртбұрыштар Саккери төртбұрышының қасиеттерін қанағаттандыратын $\alpha$ бұрыш сүйір болуы керек. Бірақ бұл кезде АА$_1$, ДД$_1$, ВВ$_1$ ажырасатын түзулер болғандықтан $\alpha > \pi(АД) = \pi\left(\frac{AB}{2}\right)$ болады.

Сөйтіп орицикл кезде $\alpha < \frac{\pi}{2}$ (1), эквидистанта кезде $\pi\left(\frac{AB}{2}\right) < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (2) болсын, екі жағдайда да $\alpha$ сүйір болады.

Ал, бұл екі жағдай да В нүктелер t түзуінің бір жағында (астыңғы жағында) жататындығын көрсетеді. Егер В нүкте А нүктеге шексіз жақындаса (ұмтылса), онда АВ кесінді 0-ге ұмтылады да (1) мен (2)-ден $\lim\limits_{AB\to 0} \alpha = \lim\limits_{AB\to 0} \pi\left(\frac{AB}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ болып шығады.

Ал, бұл перпендикуляр t түзуі АВ қиюшының шекті жағдай болады деген сөз. Сөйтіп t түзуі қисыққа (орициклге, эквидистантаға) жанама болады. Ол қисықтың кез келген нүктесінен жүргізілген а түзуге перпендикуляр еді.

Сөйтіп орицикл мен эквидистантаның әрбір нүктесінен жанама жүргізуге болады екен, ол жанама шоқтың жанасу нүктесіне жүргізілген түзуіне (оске) перпендикуляр болады екен, яғни орицикл эквидистанта сызығы шоқ түзулеріне перпендикуляр болады екен (шоқ түзулерінің ортогонал траекториясы болады екен).

Бұл қасиеттен шеңбер, орицикл, эквидистанта сызықтары жанамадан төмен жататындықтан шеңбердің ойыстағы центріне қарай, орициклдің ойыстағы өстерінен параллельдік жағына қарай, эквидистантаның ойыстағы базисіне қарай бағытталатындығы шығады.

Сөйтіп шеңбердің барлық нормалы бір нүктеде қиылысып эллипстік шоқ жасайды, орициклдің барлық нормалы бір бағытта параллель болып параболаның шоқ жасайды, эквидистантаның барлық нормалары қандай да бір түзуге (базисына) перпендикуляр болып гиперболалық шоқ жасайды екен.

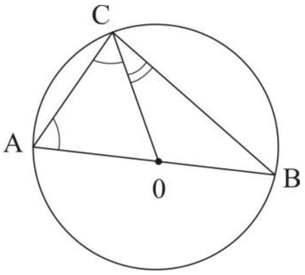
Бұл қисықтардың кез келген хордасы сол хорда ұштарынан өтетін нормалдар үшін тең көлбеулі қиюшы болады.

Хорданың ортасынан жүргізілген перпендикуляр шеңбердің, орициклдің, эквидистантаның өсі болады.

4-қасиет. Енді шеңбердің абсолюттік геометрияда дұрыс, Лобачевский геометриясында дұрыс, Лобачевский геометриясында дұрыс болмайтын мына қасиетін дәлелдейік.

Шеңберге іштей сызылған диаметрге сүйенетін бұрыш, тік бұрыш болады деген емес теореманың Лобачевский геометриясында дұрыс екенін дәлелдейік.

Шеңбер, AB диаметр O центр, ABC іштей сызылған (диаметрге тірелетін) бұрыш, $OA = OC = OB$ радиустер болсын (46-сурет).



46-сурет

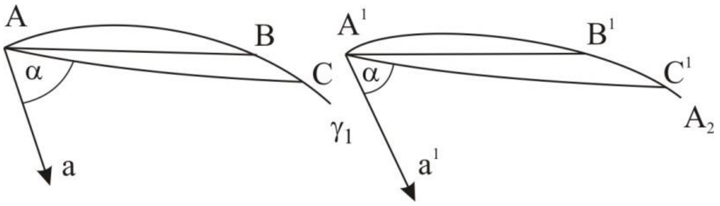
Мұнда $\angle A = \angle ACO, \angle B = \angle OCB.$ Сондықтан $\angle A + \angle B = \angle ACO + \angle OCB = \angle OCB$ болады. Ал, $\Delta ABC$-ның ішкі бұрыштарының қосындысы $\delta_{ABC} = \angle A + \angle B + \angle ACB = \angle ACB + \angle ACB = 2\angle ABC.$ Бұдан $\angle ACB = \frac{1}{2}\delta_{ABC}.$ Ал, Лобачевский геометриясында үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы 2d-дан кем болады.

Сондықтан соңғы теңдіктен $\angle ACB = \frac{1}{2}\delta_{ABC} < \frac{1}{2}2d = d.$ Сөйтіп $\angle ABC$ тең емес, сүйір болады екен.

**5-теорема.** Барлық орициклдер өзара конгруэнтті болады.

**Дәлелі.** Кез келген екі қисық тең делінеді, егер де олардың біреуінен алынатын әрбір хорда ұзындығына бұл хорда ұштарына екіншісінде сәйкес келген нүктелерді қосатын хорда ұзындығы тең болатындай етіп бұл екі сызық нүктелері арасында өзара бір мәнді сәйкестік орнатуға болатын болса.

Екі $\gamma_1$ және $\gamma_2$ орицил берілсін (47-сурет). Олардан кез келген $A_1A'$ нүктелер алып, орициклдің сол нүктеден өтетін нормалдары $a_1a'-$ті жүргізейік. Бұл орициклдің біріншісінен еркін алынған С нүктесіне, екіншісінің $C'$ нүктесін $\angle C'A'a' = \angle C'Aa = \alpha$ болатындай етіп сәйкестендірейік.



47-сурет

Онда $\alpha = \pi\left(\frac{AC}{2}\right)$ $\alpha = \pi\left(\frac{A'C'}{2}\right)$ болғандықтан $\pi\left(\frac{AC}{2}\right) = \pi\left(\frac{A'C'}{2}\right)$ болып $AC = A'C'$ болады. Енді осы орициклден өзара сәйкес $B_1B'$ нүктелерін алайық. Онда $AC = A'C'$ $AB = A'B'$ $\angle BAC = \angle B'A'C'$ болатындықтан, $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ болады да $BC = B'C'$ болып шығады. Сондықтан анықтама бойынша бұл екі орицикл конгруэнтті (тең) болады.

Бұл теоремадан мына тұжырымдардың дұрыстығы шығады:

- теңдей доғамен керілген хордалар тең болады;
- доғалар тең болса оны керетін хордалар да тең болады;
- үлкен доғаны керетін хорда кіші доғаны керетін хордадан ұзын болады кіші доғаны керетін хордадан ұзын болады және керісінше болады.

# 9. Лобачевский кеңістігіндегі түзулер,жазықтықтар мен беттер туралы

## 9.1 Түзулер мен жазықтықтар және олардың өзара орналасуы

Төмендегі стереометриялық тұжырымдар V постулатқа тәуелсіз. Сондықтан олар орындалады:

- Бір түзуде жатпайтын үш нүкте арқылы жазықтық жүргізуге болады және ол жалғыз-ақ болады.

- Жазықтықтардың қиылысу сызығы түзу болады.

- Егер түзу жазықтықта қиылысып жатқан екі түзуге перпендикуляр болса, онда ол жазықтықтың сол нүктеден өтетін кез келген түзуіне перпендикуляр болады.

- Берілген нүктеден берілген жазықтыққа тек бір перпендикуляр жүргізуге болады. Осы сияқты берілген нүктеден берілген түзуге тек бір перпендикуляр жазықтық жүргізуге болады.

- Егер жазықтық екінші жазықтыққа перпендикуляр түзу арқылы жүргізілсе, онда ол жазықтықтар перпендикуляр болады.

- Жазықтыққа көлбеу түзу арқылы ол жазықтыққа перпендикуляр болатын тек бір жазықтық жүргізуге болады.

- Өзара перпендикуляр екі жазықтықтың бірін де жататын және олардың қиылысу сызығына перпендикуляр болатын түзу екінші жазықтыққа перпендикуляр болады.

- Қиылысатын екі жазықтықтың екеуіне де перпендикуляр жазықтық олардың қиылысу сызығына да перпендикуляр болады.

Енді Лобачевский кеңістігіндегі түзу, жазықтық және олардың өзара орналасу ерекшеліктерін қарастырайық.

Анықтамалар

- Кеңістіктегі екі түзу параллель (ажырасатын) делінеді, егер де олар бір жазықтықта жатса және ол жазықтықта олар параллель (ажырасатын) түзулер болса.

- Түзу жазықтыққа параллель (ажырасады) делінеді, егер де ол сол жазықтықтағы проекциясы мен параллель (ажырасатын) болса.

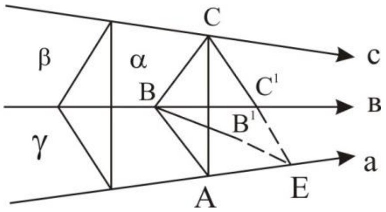
Бұл анықтамалардан төмендегідей қорытындылар шығады:

- Түзу жазықтыққа параллельдік жағында шексіз жақындайды.

- Ажырасатын түзу мен жазықтықтың тек бір ортақ перпендикуляры болады және ол перпендикулярдың екі жағында да жазықтықтан түзу шексіз алшақтай орналасады.

**1-теорема.** Егер өзара параллель а, в түзулерді бастыра жүргізілген $\alpha, \beta(a \subset \alpha, в \subset \beta)$ жазықтықтар өзара $\alpha \cap \beta = c$ түзуде қиылысса, онда с түзуі а, в түзулерге олар бағытында параллель болады.

**Дәлелі.** $a \parallel в$ түзулер, а-ны басып өтетін $\alpha, в -$ны басып өтетін $\beta$ жазықтықтар с түзуі бойымен қиылыссын в, а түзулер $\gamma$ жазықтығында жатсын (48-сурет). с түзудің а мен де, в мен де қиылыспайтының дәлелдейік.



48-сурет

Кері жорып с мен а түзулер Д нүктесінде қиылысады дейік, онда Д нүкте с түзуде жатқандықтан $Д \in \alpha, Д \in \beta$ және $Д \in a$ жазықтықтан $Д \in \gamma,$ Д нүкте $\beta$ мен $\gamma$ жазықтықтарға жатқандықтан олардың қиылысу сызығы в түзуінде жатады. Соны $Д \in a, Д \in в$. Бірақ бұл мүмкін емес. Себебі $a \parallel в$.

Сондықтан с түзуі а-мен қиылыспайды. Ол в-мен де қиылыспайды. Енді а, в, с түзулерден, сәйкесінше, А, В, С нүктелер алайық да, С-нүктеден $\alpha -$де жататын, $\angle CCA$ бұрыш ішінен түзу жүргізейік $BC_1C'$ нүктелер арқылы $\delta$ жазықтығын жүргізейік. Ол $\gamma$ жазықтығымен $BB'$ түзу бойында қиылыссын. $BB'$ түзу $\gamma$ жазықтығында $\angle BBA$ бұрыш ішінен өтеді. Сондықтан $BB'$ түзуі а түзуін бір Е нүктеде қияды. (Себебі $a \parallel в$) Е нүкте $BB'$ және а түзулердің ортақ нүктесі болғандықтан $\alpha$ мен $\delta$ жазықтықтардың да ортақ нүктесі болады.

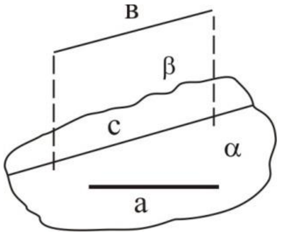
Сондықтан ол $CC'$ түзуінде жатады. Сөйтіп $CC'$ түзу а түзуін қияды екен. Сондықтан параллель түзулер анықтамасы бойынша $c \parallel a$ болады. Дәл осы сияқты $c \parallel в$ болатынын дәлелдеуге болады.

**2-теорема.** Екі түзу бір бағытта үшінші түзуге параллель болса, онда ол түзулердің өздері де сол бағытта параллель болады.

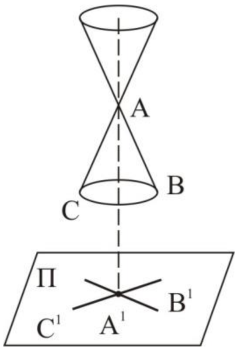
**Дәлелі:** $a \parallel c, в \parallel c$ болсын, $a \parallel в$ екенің дәлелдеу керек (418-сурет) а мен в, в мен с арқылы өтетін жазықтықтарды $\gamma, \beta$ дейік с түзуден С нүктесін алып, С мен а-дан өтетін $\alpha$ жазықтығын жүргізейік. $\alpha, \beta$ жазықтықтары өзара параллель $a \parallel c, в \parallel c$ түзулер арқылы жүргізілгендіктен, олар с нүктеден өтетін а, в-ға параллель болатын түзу бойымен қиылысады. Ал С нүкте арқылы в-ға тең бір параллель с түзу өтеді. Сондықтан $c \parallel в, c \parallel a$ болғандықтан $a \parallel в$ болады.

**3-теорема.** Түзу жазықтықта жатқан бір түзуге параллель болса, онда ол жазықтықтың өзіне де параллель болады.

**Дәлелі.** $\alpha$ жазықтықтағы мұнда жатқан а түзуді, $\alpha -$де жатпайтын в түзуі берілсін және $a \parallel в$ болсын (49-сурет) в түзуін $\alpha$ жазықтығына $\beta$ жазықтығы арқылы ортогонал проекциялайық, в-ның $\alpha$-дегі проекциясы с түзуі болсын. Сонда өзара параллель а, в түзулер арқылы $\alpha$ және $\beta$ жазықтары жүргізілді.



49-сурет



50-сурет

1-теорема бойынша олардың қиылысу сызығы $\alpha \cap \beta = c$ түзуі в-ға параллель болады. сөйтіп в-түзуі $\alpha$ -дегі проекциясына параллель болады. демек түзумен жазықтықтың параллельдік анықтамасы бойынша $в \parallel \alpha$ болады.

Енді П жазықтық және одан тыс жатқан А нүкте берілсін. $AA_1 \perp П$ түсірейік. АВ түзу П-ға параллель болсын, АВ-ның П-дағы проекциясы $A'B'$ болсын (50-сурет). Сонда $\angle BAA' = \alpha$ А нүктедегі $A'B'$ түзуге қарағандағы параллельдік бұрыш болар еді. АВ-ны $AA_1$ түзу айналасын айналдырайық. Төбесі А болатын дөңгелек шығар еді. Оны П жазықтығына қарағандағы А нүктедегі параллельдік конус дейді. А нүктеден конус ішінен жүргізілген барлық түзулер П мен қиылысады, ал А нүктеден конустан тыс жататындай А етіп жүргізілген барлық түзу П-мен қиылыспайды.

А нүктеден үш типті жазықтық өтеді:

1. Конусты екі жасаушысы бойымен қиатын жазықтықтар. Олар П мен қиылысады.

2. Конусқа бір жасаушысы бойымен жанасатын жазықтықтар. Олардың барлығы П-ға параллель болады.

3. Конуспен бір нүктеде оның төбесінде қиылысатын жазықтықтар. Олар П-мен ажырасатын жазықтықтар болады.

**4-теорема.** П жазықтықта параллель а түзу арқылы П-ға тек бір параллель жазықтық жүргізуге болады.

**Дәлелі.** $a \parallel П$ болғандықтан а түзу өзінің кез келген А нүктесінде П-ға параллельдік конустың жасаушысы болады.

Сол параллельдік конусқа оның жасаушысы а түзуі бойымен жанасатын жазықтық жүргізсек, ол жазықтық П-параллель болады, а-дан өтетін басқа жазықтықтың барлығы П-мен қиылысады.

## 9.2 Лобачевский кеңістігіндегі беттер

Кеңістікте әрбір екеуі бір жазықтықта жататын түзулер жиынын түзулер байламы дейді. Бұл жазықтықтарды байлам жазықтықтары дейді. Егер а, в екі түзу бір байламның кез келген түзулері болса, онда олар бір жазықтықта жатады. Ал, жазықтықта екі түзу өзара үш түрлі орналасуы мүмкін: қиылысады, параллель болады және ажырасады. Осыған сай кеңістікте түзулер байламыда үш түрлі болады:

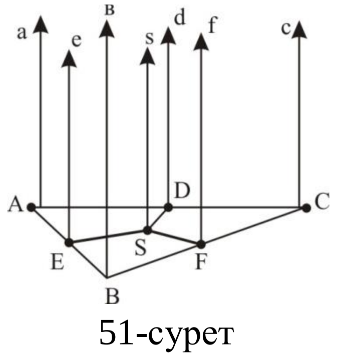
- Бір О нүктеде қиылысатын түзулер байламы. Оны эллипстік түзулер байламы дейді.
- Өзара параллель болатын түзулер байламы. Бұл байламды параболалық түзулер байламы дейді.
- Бір жазықтыққа перпендикуляр болатын түзулер байламы. Бұл гиперболалық түзулер байламы делінеді. Ал, жазықтық байламның базасы делінеді.

**5-теорема.** Егер а, в, с бір байламның түзулері болса және бір жазықтықта жатпаса, А нүкте а-да, В нүкте в-да, С нүкте с-да жатса және АВ түзу а мен в, ВС түзу в мен с түзулері үшін тең көлбеулі қиюшылар болса, онда АС түзуі а мен с түзулері үшін тең көлбеулі қиюшы болады.

**Дәлелі.** Егер түзулер байламы эллипстік, гиперболалық болса, оңай дәлелденеді. Теореманы параболалық түзулер байламы үшін дәлелдейік.

а, в, с бір бағытта параллель болсын және АВ түзу а, в түзулер, ВС түзу в, с түзулер үшін тең көлбеулі қиюшылар болсын.

АВ, ВС, АС кесінділердің ортасын Е, F, Д дейік. Бұл нүктелерден а, в, с түзулерге (олардың параллельдік бағытында) параллель етіп е, f, d түзулерін жүргізсек (51-сурет). Сонда бұл түзулер бір-біріменде параллель болады.



51-сурет

$e \parallel f$ болғандықтан мұның екеуі де бірдей (АВС) жазықтыққа перпендикуляр бола алмайды. Мысалы, f түзуі (АВС) жазықтықпен сүйір $\alpha$ бұрышын жасасын, f-тың (АВС)-дағы проекциясы FS кесіндіні өлшеп салайық. S нүктеден (АВС) жазықтыққа перпендикуляр етіп S түзуін жүргізейік. Сонда $\alpha = \Pi(FS)$ болғандықтан $S \parallel f$ болады, $e$ мен $d$ түзулер f-ке параллель болғандықтан $e \parallel S$, $d \parallel S$ болады. сондықтан $(e,S)$ және $(d,S)$

жазықтықтар (АВС) – жазықтыққа перпендикуляр болады. сол себепті $ES, ДS$ түзулер $e, d$ түзулердің (АВС)-дағы проекциялары болады.

Шарт бойынша АВ, ВС түзулер а мен в, в мен с түзулердің тең көлбеулі қиюшылары. $E, F$ нүктелері АВ мен ВС-ның қақ орталары болғандықтан $e \perp AB, f \perp BC$ болады. сонда үш перпендикуляр туралы теорема бойынша $AB \perp ES, BC \perp SF$ болады, ал $S$ нүкте $\Delta ABC -$ны сырттай сызылған шеңбердің центрі болады.

Сондықтан $SД \perp AC$ тағы да үш перпендикуляр туралы теорема бойынша $d \perp AC$ болады. Сондықтан АС түзуі а мен с түзулерінің тең көлбеулі қиюшысы болады.

Егер түзулер байламының а мен в кез келген екі түзуі болса, а-дағы А, в-дағы В нүктелерді қосатын АВ түзуі бұл а мен в түзулер үшін тең көлбеулі қиюшы болса, онда А мен В нүктелер бұл байламға қарағанда сәйкес нүктелер делінеді.

Байламның кез келген бір а түзуін және оның бойынан кез келген А нүктесін алып, А нүктеге бұл байламға қарағанда сәйкес болатын барлық нүктелерді тапсақ, онда ол нүктелердің жиыны берілген түзулер байламы эллипстік байлам болған жағдайда сфера параболалық байлам болған жағдайда эквидистанталық бет делінеді.

Бұл анықтамадан, байлам жазықтықтары сфераны шеңбер, орисфераны орицикл, эквидистанталық бетті эквидистанта сызығы бойымен қиятыны түсінікті.

Сфера, орисфера эквидистантаның мынадай ортақ қасиеттері бар.

$1^0$. байламның әрбір түзуі осы байлам арқылы анықталатын әрбір бетке (сфераға) орисфераға, эквидистанталық бетке нормал болады.

Шынында да беттің бір М нүктесін алып, ол нүктеден байламының бір m түзуін жүргізіп, осы түзу арқылы өтетін барлық мүмкін жазықтықтарды жүргізсек олар байламды не шеңбер, не орицикл, не эквидистанта бойымен қияр еді. М нүктеде бұл қисықтармен жанасатын барлық жанамалар осы нүктеден өтетін байлам түзулеріне перпендикуляр болады (өйткені шоқ түзуі шеңберге, орициклге, эквидистантаға нормал болатын). Сондықтан олардың барлығы бетке М нүктеде жанасатын жазықтықта жатады. Ал, байлам түзуі бұл жазықтыққа перпендикуляр болатындықтан беттің М нүктедегі нормалы болады.

Жазықтықта түзу қандай рөль атқарса орисферада орициклде сондай роль атқарады.

Өйткені абсолюттік геометрияның жазықтықтағы түзуге арналған барлық аксиомалары талаптарын орисферадағы орициклде қанағаттан-дырады.

Мысалы, орисфераның кез келген екі нүктесінен бір ғана орицикл өтеді, орициклді екі жағына да шексіз сызуға болады; орисфераның әрбір нүктесінен кез келген орицикл радиуспен шыңбер сызуға болады; орисферадағы орициклдер үшін Паш аксиомасы орындалады.

Орисферадағы орициклдер үшін Плейфердің аксиомасы орындалады: Орисфера нүктесінен сол орисферада жататын орициклмен қиылыспайтын бір тек бір орицикл өтеді.

Қысқасы орисфера орициклдер жүйесінде евклидтік планиметрия орындалады.

Сөйтіп жазықтықтағы евклид геометриясын жоққа шығарып, V постулатты Лобачевский аксиомасымен алмастыру арқылы жасалатын жаңа Лобачевский геометриясында евклидтік планиметрияға қайта келдік.

Эквидистанталық бетте түзу рөлін эквидистанталық сызыққа берген жағдайда Лобачевский планиметриясына қайта келеміз.

Сонымен Евклидтік кеңістікте жазықтықтағы евклидтік геометрия орындалса, ал сферада сфералық геометрия орындалса, Лобачевский кеңістігінде жазықтықтағы Лобачевский геометриясы, сферада (Үлкен дөңгелектер жүйесінде) сфералық геометрия, орисферада (орициклдер жүйесінде) евклидтік геометрия, ал эквидистанталық бетте (эквидистанталық сызықтар жүйесінде) Лобачевский геометриясы орындалады екен.

## 10. Лобачевский планиметриясының қайшылықсыздығы, паралельдік аксиомаларының тәуелсіздігі.Лобачевский жазықтығының кейбір интерипетациясы

Лобачевский планиметриясының аксиомалар жүйесі Гильберт аксиомалар жүйесінің І-1, 2, 3; ІІ-1, 2, 3, 4; ІІІ-1, 2, 3, 4, 5; ІV-2 топ аксиомалары мен Лобачевский аксиомасынан (Мұны $V_п$ деп белгілейік, ал Гильберттен V топ – параллельдік аксиомасының V-мен белгілейік) тұрады. V-параллельдік аксиоманың Гильберттің басқа аксиомаларына (абсолют геометрия аксиомаларына) тәуелсіз екенің дәлелдеу үшін 1-тан аксиомалары орындалатын, ал V параллельдік акксиома орындалмайтын (сондықтан оны жоққа шығаратын $V_л$ Лобачевский аксиомасы орындалатын) модель жасау керек.

Ондай модел жасалса, онда V аксиоманың қалған аксиомаларға тәуелсіз екен де, Лобачевский планиметриясының қайшылықсыз екеніне де дәлелденіп шығады.

Мұндай модельді қайшылықсыздығы дәлелденген (оны §67 де дәлелдегенбіз) евклид геометриясына сүйеніп, оның объектілерін пайдаланып жасауға болады. Біз Пуанкаренің және Кэли-Клейннің моделдеріне түсінік береміз.

### 10.1 Пуанкаре интерпретациясы

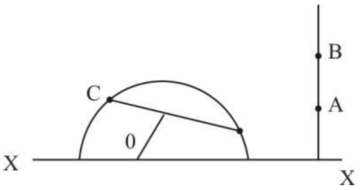
Лобачевский жазықтығына арналған А.Пуанкаре (1854-1912) интерпретациясы инверсияны пайдалануға сүйенеді. Евклид жазықтығынан кез келген бір жазықтық, ол жазықтықтан бір XX түзуін алады. Ол түзу жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөледі.

Аксиома жүйесінде берілген негізгі ұғымдарға нақты мәндерді төмендегідей интерпретациялық сөздікте көрсетілгендей етіп берейік.

- «Лобачевский жазықтығы» (қысқаша «Λ-жазықтық») – деп жазықтықтың XX түзуі бөлген екі жарты жазықтықтың жоғарғысын айтайық. Ол жазықтыққа XX түзуінің нүктелері енбейді (52-сурет).

- «Лобачевский нүктесі» («Л-нүкте») – деп XX түзуінің жоғары жағындағы жарты жазықтық нүктелерін айтайық, ол нүктелерге XX түзуінің нүктелері кірмейді.

- «Лобачевский түзуі» («Л-түзу») – деп центр XX түзуінде жататын жоғарғы жарты жазықтықтың кез келген жарты шеңберін және XX түзуге перпендикуляр етіп жоғары жазықтықтан жүргізілген түзуді айтайық (52-сурет).



52-сурет

- «Л-нүкте» «Л-түзуде» жатады дейік, егерде бұларға сай келетін евклидтік жарты шеңберде немесе ХХ түзуіне перпендикуляр болатын жарты түзуде жататын болса.

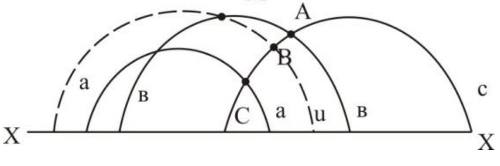
- Лобачевскийдің А, В, С нүктелері Лобачевскийдің а түзуінде жатсын. Онда В нүкте А мен С нүктелердің арасында жатыр делінеді, егерде А, В, С нүктелер бір жарты шеңберде немесе ХХ түзуіне перпендикуляр түзуде жатса және В нүкте А мен С-ның арасында жатса.

- АВ, СД Лобачевский кесінділері өзара тең делінеді, егерде центрі ХХ түзуінде жататын ақырлы санды инверсиялар тізбегі табылып, бір евклидтік жарты шеңберде жатқан АВ доғаны екіншісіндегі СД доғаға көшіретін болса,

- $\angle(h_1, k_1)$; $\angle(h_2, k_2)$ Лобачевский бұрыштары өзара тең делінеді, егер де центрі ХХ түзуінде жататын ақрылы санды инверсиялар тізбегі табылып, ол бұл түзулерді кескіндейтін жарты шеңбер доғаларының бірін екіншісіне көшірсе.

Осы моделде Гильберттің планиметриялық аксиомаларының орындалатынын, параллельдік аксиоманың орындалмайтынын Лобачевский аксиомасының орындалатынын тексеру қиын емес. Шынында да ХХ түзу жасайтын жоғары жарты жазықтықта екі нүкте қалай берілсе де (52-сурет А, В және С, Д нүктелер) оларды бастыра ХХ осіне перпендикуляр болатын бір түзу (А, В жағдайда) немесе центрі ХХ түзуде жататын бір ғана жарты шеңбер (С, Д жағдайда) жүретіні түсінікті (ол шеңбер центрі СД-ның қақ ортасынан оған жүргізілген перпендикуляр мен ХХ-тан қиылысу нүктесі болады). Ал, бұл Л-тілінде Лобачевскийдің екі нүктесін басып бір түзу өтеді (Гильберттің І-1 аксиомасы) және ол түзу жалғыз-ақ болады (Гильберттің І-2 аксиомасы) деген сөз.

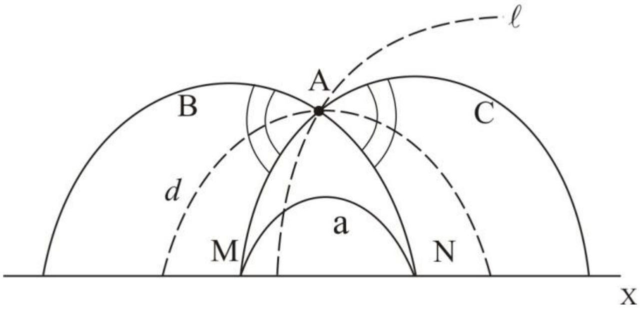
Гилберттің І-3 аксиомасы да орындалады. Өйткені жарты шеңберде жататын да, жатпайтын да шексіз көп нүктелер болады. ІІ-1 аксиома орындалады. Өйткені жарты шеңберде жататын А, В, С үш нүкте берілсін АВС болса, онда олар әртүрлі нүкте болады және СВА болады. Жарты шеңберде А, В екі нүкте берілсе онда АВС болатын С нүкте әр уақытта табылады. Демек ІІ-2 аксиома орындалады. Жарты шеңбердегі үш нүктенің тек біреуі қалған екеуінің арасында жатады. Сондықтан ІІІ-3 аксиомада орындалады.



53-сурет

Енді Паш аксиомасының орындалатынын тексерейік. (53-сурет) а, в, с Л-түзулердің А, В, С Л-нүктелер шықсын. Абсцисса осі ХХ түзуінде жататын тікбұрышты координат жүйесін ендірсек $u$ түзудің (жарты шеңбердің) теңдеуі $(x-a)^2+(y-0)^2=r^2$ болар еді. Бұдан $\gamma=(x-a)^2+y^2-r^2=0$.

Бұл $U$ түзуі А, В, С нүктелерден өтбейтін және А мен В нүктелердің арасынан өтетін түзу болсын. Сонда В нүкте $u$ шеңбердің ішкі, А сыртқы нүктесі болғандықтан $\gamma_B<0, \gamma_A>0$ болу керек және $\gamma_c \neq 0$ болады. Сонда егер $\gamma_c<0$ болса, онда С нүкте шеңбер ішінде жатады. Сондықтан $u$ шеңбер (түзу) А мен С арасынан өтеді, егер $\gamma_c>0$ болса, С сыртқы нүкте болады да $u$ шеңбер (түзу) В мен С арасынан өтеді. Демек II-4 орындалады.



54-сурет

Осы сияқты басқа аксиомаларды да тексеруге болады. Енді бұл V параллельдік аксиоманың орындалмайтынын V-Л аксиоманың орындалатынын тексерейік (54-сурет).

а түзуі (жарты шеңбері) және онда жатпайтын А нүктесі берілсін. Центрі ХХ түзуінде жататын а жарты шеңберге $N$ нүктеде жанасатын тек бір жарты (ол в жарты шеңбер) және М нүктеде жанасатын бір жарты шеңбер (ол с жарты шеңбер) болады. Ал, М мен N нүкте Л-жазықтыққа енбейді. Демек а мен в, с жарты шеңберлер қиылыспайды. Ал, центрі ХХ түзуде жататын а жарты шеңбермен қиылысатын да (мысалы $l$ жарты шеңбер), қиылыспайтын да (мысалы $\alpha$ жарты шеңбер) шексіз көп жарты шеңберлер жүргізуге болатыны түсінкті. Ол қиылысатын және қиылыспайтын жарты шеңберлер болады.

Сөйтіп бір моделде, жоғарыда айтылғандарды Л-тіліне көшірсек, а түзуге одан тыс жатқан А нүктеден қиылыспайтын екі түзу в мен с жүргізуге болады, демек V-параллельдік аксиома орындалмайды, ендеше V-Л Лобачевский аксиомасы орындалады. Демек Лобачевский планиметриясы қайшылықсыз, V параллельдік аксиомасы Гильберттің қалған аксиомаларына тәуелсіз.

## 10.2 Кэли-Клейн интерпретациясы

А.Кэли (1821-1895) ағылшын математигі, Петербург ғылым академиясының мүшесі (1870 жылдан) С.Р.Клейн (1849-1925) неміс математигі.

Бұлардың Лобачевский жазықтығына жасаған моделі евклидтік геометрияның объектілерінен тұрады. Сондықтан да оны Кэли-Клейннің евклидтік моделі дейді.

Евклидтік жазықтықта О центрлі радиусы 1-ге тең $\gamma$ шеңбер аламыз. Оны абсолют дейді. Бұл шеңбермен шектелген дөңгелкті $\gamma$ деп белгілейік.

Негізгі ұғымдарға нақты мәнді мына интерпретациялық сөздіктегідей етіп берейік.

- Алынған шеңбердің (абсолюттік) ішінде жатқан евклидтік нүктелерін « $\Lambda$-нүктелер» дейік (Сонда Л-нүктелер $\gamma'$ дөңгелектің нүктелері болады).

- Шеңбердің (абсолюттік) кез келген хордасын (оның ұштары енбейді) «Л-түзу» дейді.

- «Тиісті», «арасында жатады» қатыстарды бұрынғыша кәдімгідегі мағынада түсінейік.

Осы моделде Гильберттің I-1-3, II-1-4, III-1-5, IV-1, 2 және V-Л аксиомалардың орындалатынынын, V параллельдік аксиоманың орындалмайтынын тексеруге болады.

- Шеңбер ішінде жатқан кез келген екі нүктені басып тек бір хорда жүргізуге болатындықтан Гильберттің I-1, 2 аксиомалары бұл моделде орындалады.

- Шеңбердің әрбір хордасын да жататын да, жатпайтында шексіз көп шеңбер ішінде жататын нүктелер болатындықтан I-3 аксиомада орындалады.

Демек бұл моделде II-1 орындалады.

- Хорда да А, В, С үш нүкте жатса және В нүкте А мен С нүктелердің арасында жатса, онда шынында да олар әр түрлі нүктелер болады және $\overline{CBA}$ болады.

Демек, бұл модельде II-1 орындалады.

- Егер А, В бұл хорда нүктелері болса, онда ол хорда да АВС болатын С нүкте сол жақ табылады. демек II-2 орындалады.

- Хорда да әртүрлі үш нүкте берілсе тек оның біреуі ғана қалған екеуінің арасында жатады. демек II-3 орындалады.

- Паш аксиомасының орындалатынына ешқандай күдік тудырмайды I-II-тың аксиомалары орындалғандықтан бұлар арқылы дәлелденетін теоремаларда дұрыс болады. Енді көптеген ұғымдарға анықтама беруге болады:

А нүктеден шығатын Л-сәуле деп $AA_0$ жартылай хорданы айтады (мұндағы А шеңбердің кез келген ішкі нүктесі, $A_0$ шеңбердің нүктесі).

$\gamma'$ дөңгелектің кез келген сегментін $\lambda -$жарты жазықтық дейміз.

Бұл моделде кесінді мен бұрыштың теңдігін ендіру үшін евклидтік геометриядағы бір түзу бойындағы үш нүктенің жай қатынасын еске салайық.

Бір түзудің А, В, С үш нүктесінің жай қатынасы $\left(AB_1C\right)=\lambda$ деп мына санды $\lambda=\left(AB_1C\right)=\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}$ айтатынбыз.

Бұл түзудің $A, B, C, Д$ төрт нүктесінен күрделі қатынасы деп, мына санды

$$\left(AB, CД\right)=\left(\frac{AB, C}{AB, Д}\right)=\frac{\left(x_a-x_c\right)}{\left(x_c-x_в\right)}\frac{\left(x_d-x_B\right)}{\left(x_a-x_d\right)}=\frac{\left(y_a-y_c\right)}{\left(y_c-y_b\right)}\frac{\left(y_d-y_b\right)}{\left(y_a-y_d\right)}.$$

$\gamma$ дөңгелекті өзіне-өзін биіктінді бейнелеу $f:\gamma'\rightarrow\gamma'$-ді ол дөңгелекті $\Lambda$-түрлендіру дейміз, егер де бұл бейнелеуде:

а) Дөңгелектің ішкі нүктесі ішкі нүктесі ішкі нүктеге, шекаралас, нүктесі шекаралық нүктеде бейнеленген болса;

б) $\gamma'$ дөңгелектің кез келген хордасы сол дөңгелектің қандай да бір хордасына бейнелеген болса және сәйкес нүктелердің күрделі қатынасы сақталатын болса.

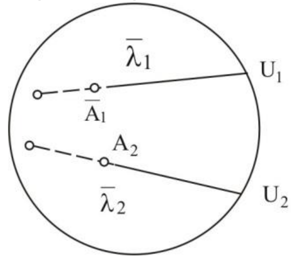
$\lambda-$түрлендірудің мынадай қасиеттерін дәлелдеуге болады.

$1^0$ Егер $f_1$ мен $f_2$ $\lambda-$түрлендіру болса, онда $f_1f_2, f_1^{-1}$ түрлендірулерді $\lambda-$түрлендіру болады.

$2^0$ $\lambda-$түрлендіруде нүктелердің арасында жату қатынасы сақталады.

$3^0$ Дөңгелектің кез келген А нүктесін центр О-ға О-ны А нүктеде көшіретін инволюциялық $\lambda-$түрлендіру болады.

$4^0$ $J_1=\left(A_1U_1\overline{\lambda}_1\right)J_2=\left(A_2U_2,\overline{\lambda}_2\right)$ жанаулар (55-сурет) қандай болса да $J_1-$ді $J_2-$ге көшіретін $\lambda-$түрлендіру болады. Мұндағы $U_1, U_2$ хордалар, $A_1, A_2$ олардың қандай да бір ішкі нүктелері $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2$ дөңгелектен сегменттері солардың жиынын жалау дейді.



55-сурет

$5^0$ $A_1U_1, A_2U_2$ жартылай хордалар қандай да болса да, олардың бірін екіншісіне көшіретін $\lambda$ түрлендіру болады.

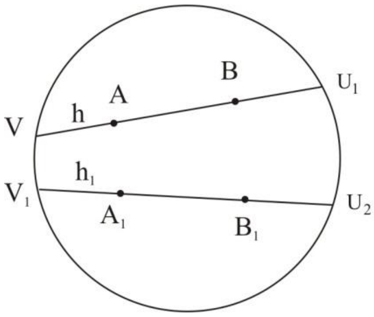
$6^0$ Егер бір $\lambda-$түрлендіру де жалау өзіне-өзі көшсе онда ол $\lambda-$түрлендірудің теңбе-тең түрлендіру болады.

АВ кесінді ($hk$ бұрыш) $A_1B_1$ кесіндіге ($h_1k_1$ бұрышқа) тең делінеді, егер де олардың бірін екіншісіне көшіретін $\lambda-$түрлендіру болатын болса, яғни $f\left(AB\right)=A_1B_1$($f\left(h\right)=h_1$ $f\left(k\right)=k_1$ болса).

Енді III-топ аксиомаларының бұл моделде орындалатынын тексеруге болады.

III-I AB кесіндіні $A_1$ нүктеден кез келген бағытта бір мәнді өлшеп салуға болады, яғни $AB = A_1B_1$ болатын бір ғана $B_1$ нүкте болады.

Осы аксиоманың моделде орындалатындығын тексерейік. $h$ сәуледе AB кесінді берілген. $A_1$ нүктеден $h_1$ сәуле шыққан. Сонда $h_1$ сәуледе $AB = A_1B_1$ болатын жалғыз бір $B_1$ нүктенің табылатының дәлелдеу керек.

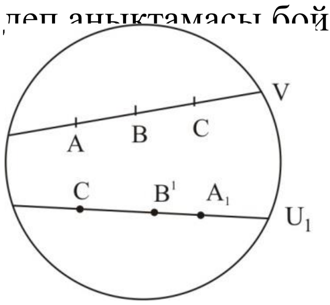


56-сурет

Осы $h, h_1$ сәулелер жатқан жартылай хордаларды $AU, A_1U_1$ дейік, ал олар жатқан хордаларды $VU, V_1U_1$ дейік (56-сурет). Сонда $\lambda -$ түрлендірудің $5^0$ қасиеті бойынша $AU$ жартылай хорданы $A_1U_1$ жартылай хордаға көшіретін $\lambda -$ түрлендіру болады. Оны $f$ дейік. Онда $h_1 = f(h)$ болады. Егер $B_1 = f(B)$ болса $B_1 \in h_1$ жатады. Сонда анықтама бойынша $AB = A_1B_1$ болады. $U_1 = f(U), V_1 = f(V)$ болғандықтан $(UV_1AB) = (U_1U_1, A_1B_1)$ болуы керек. Сондықтан $AB = A_1B_1$ болатын тағы бір $B_2$ нүкте болады десек $(UV_1AB) = (U_1V_1, A_1B_2)$ болатындықтан $(U_1V_1A_1B_1) = (U_1V_1; A_1B_2)$ болар еді. Бұдан $B_1 = B_2$ болып, олар беттеседі.

III-2 $A_1B_1 = AB_1$ $A_2B_2 = AB$ болса $A_1B_1 = A_2B_2$ болады. Бұл аксиоманың орындалатыны $1^0$ қасиеттерін шығады. $A_1B_1 = AB$ болғандықтан $f(AB) = AB$ болатын $\varphi$ $\lambda -$түрлендіру болады.

Сонда $\varphi f(A_1B_1) = A_2B_2$ болады. Сонда $1^0$ қасиет бойынша $f\varphi$ $\lambda -$ түрлендіру болғандықтан, $\lambda -$түрлендіру анықтамасы бойынша кесінділердің тең деп анықтамасы бойынша $A_1B_1 = A_2B_2$ болады.



57-сурет

III-3 Тең кесінділердің қосындысы да тең болады. $ABC, A_1B_1C_1$ және $AB = A_1B_1$ $BC = B_1C_1$ болсын $AC = A_1C_1$ болатынын дәлелдеу керек.

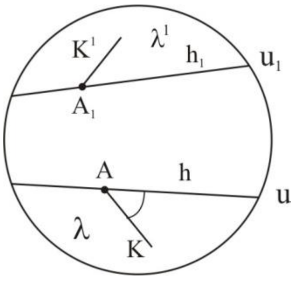
Бұл нүктелер (57-сурет) $UV, U_1V_1$ $A$ түзулерді (хордаларды) жатсын. $5^0$ қасиет бойынша $f$ $\lambda -$түрлендіру табылып $BU$ жартылай хорданы $B_1U_1$ жартылай хордаға көшіріледі. Сонда $f(BV) = B_1V_1$ болады. $A_2 = f(A), C_2 = f(C)$ болсын.

Шарт бойынша $BA = B_1A_1$ салу бойынша $BA = B_1A_2$ болғандықтан $A_1 = A_2$ болады, яғни $A_1 = f(A)$ болады. Осы сияқты $C_1$ мен $C_2$ беттеседі. Сондықтан

$C_1 = f(c)$ болады. Сөйтіп $f$ $\lambda -$түрлендіруі АС-ны $A_1C_1 -$ге көшіреді. Сондықтан анықтама бойынша $AC = A_1C_1$ болады.

III-4 Бұрышқа тең бұрыш тек бір жолмен өлшеп салынады. $L(h,k)$ бұрыш және $(A,h,\lambda)$ жалау берілсін. $\lambda$, де $\angle(h,k) = \angle(h_1,k_1)$ болатын бір ғана $k_1$ сәуле болатынын дәлелдеу керек (58-сурет).

Ол үшін $J = (AU, \lambda)$ және $J = (A_1U_1\lambda)$ $\lambda$-жалауларын қарастырамыз. Мұнда $h \subset AU_1 h \subset A_1U_1\, k < \lambda_1 \;\; k_1 < \lambda.$



58-сурет

$4^0$ қасиет бойынша $f$ $\lambda -$түрлендіру табылып болады. Өйткені $k < \lambda_1$ және бұрыштардың теңдік анықтамасы бойынша $\angle(h,k) = \angle(h_1,k_1)$.

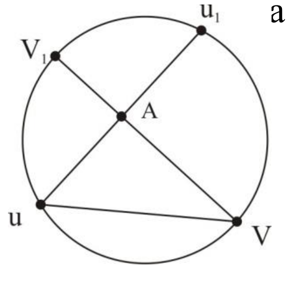
Бұл шартты $k_1 -$ден басқа $k_2 -$де қанағаттандырады десек $\angle(h,k) = \angle(h_1,k_1)$ және $\angle(h,k) = \angle(h_1,k_2)$ болар еді. Сондықтан $f$ $\lambda -$ түрлендіру табылып $h_1 = f(h_1)\, k_2 = f(k_1)$ болады. Сондықтан $f$ $\lambda -$ түрлендіруді, ал бұл $6^0$ қасиет бойынша $f$ түрлендіруі $\gamma'$ дөңгелекті теңбе-тең түрлендіру болады деген сөз. Сондықтан $k_1$ мен $k_2$ беттеседі.

III-5 $ABC, A'B'C'$ үшбұрыштарды $AB = A'B', AC = A'C'$ $\angle BAC = \angle B'A'C'$ болса, онда бұл үшбұрыштар қалған үшбұрыштарда тең болады.

Тексерейік $\angle BAC = \angle B'A'C'$ болғандықтан $f$ $\lambda -$түрлендіруі табылып $f(FAB) = A'B'$. $f(AC) = A'C'$ $f(A) \neq A'$ болады. Бұл түрлендіруде $f(C) = C_1$, $f(B) = B_1$ болсын, онда $f(A) = A'$ болатындықтан $AB = A'B,$ ал шарт бойынша $AB = AB'$. Сондықтан $B_1 = B'$ яғни $B' = f(B)$ болады. Осы сияқты $C' = f(C)$.

Сөйтіп $f$ $\lambda -$түрлендіруі А, В, С нүктелерді $A', B', C'$ нүктелерге көшіреді екен. Сондықтан бұрыштың анықтамасы бойынша: $\angle ABC = \angle A'B'C'$. Осы сияқты $\angle ACB = \angle A'C'B'$ болады. IV-1, 2 бұл моделде IV-1, 2 аксиомалармен мәндес дедекинд аксиомасы а көз жеткізуге болады.

Сөйтіп Кэли Клейн моделінде параллельдік аксиомадан басқа барлық планиметриялық аксиомалары орындалады екен.



Енді параллельдік аксиоманың орындалмайтынын, Лобачевский аксиомасының бұл моделде орындалатының тексерейік.

59-сурет

Кез келген $UV$ түзудің (хордалық) және одан тыс А нүктесі берілсін. А нүктені бастыра $UU_1 VV_1$ түзулерін жүргізейік (59-сурет).

А нүктесінен өтетін бұл екі түзуде $UV$ түзумен қиылыспайды. Өйткені бұл хорданың үшін $U$ мен $V$ $\Lambda$-нүктелер емес. Сөйтіп бұл моделде түзуден тыс жататын нүктеден ол түзумен қиылыспайтын екі түзу жүргізуге болады екен.

Демек $V$-параллельдік аксиома бұл моделде орындалмайды, ал V-Л аксиома орындалады екен.

Сөйтіп параллельдік аксиома Гильберттің басқа аксиомаларына тәуелді емес екен және Лобачевский планиметриясы қайшылықсыз болады екен.

## 11. Евклидтік емес геометрияларға қысқаша шолу

Евклидтік емес геометрия деп сфералық геометрия, Риманның эллипстік геометриясы мен Лобачевскийдің гиперболалық геометриясын түсінеміз. Осыларға қысқаша түсінік берейік.

### 11.1 Сфералық геометрияның негізгі ұғымдары

Геометрия жер өлшеуден шыққаны мәлім, ол жер бетін кіші аймақта жазықтық, үлкен аймақта сфера ретінде қарастыруға болады. Осыдан жазықтықтағы геометрия, сферадағы геометриялар шыққан. Сфералық геометриялық сфера бетінде жатқан фигуралар зерттеледі. Бұл геометрияның негізгі мәселелерімен біздің дәуірімізге дейінгі І-ІІ ғасырлардың өзінде Греция, Египет, Вавилон елдеріне айналысқан.

Сфералық геометрияның жазықтық геометриясымен ортақ, бір-біріне ұқсас мәселелері көп. Оның негізгі себебі сфера да, жазықтықта қозғалыс кезінде өзіне-өзі көшеді. Мысалы жазықтықта (немесе сферада) екі нүкте беріліп олардан әртүрлі екі бағыт жүргізілсе, онда жақытықты (сфераны) қозғау, бұру арқылы ол нүктелерді де, ол нүктеден шығатын бағыттарды да беттестіруге болады.

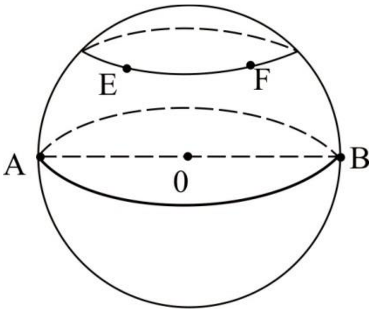
Жазықтық геометриясының негізгі ұғымдары – нүкте, түзу жазықтықты қозғау болса, сфералық геометрияның негізгі ұғымдары сфералық нүкте, үлкен шеңбер, сфераны қозғау болып табылады.

Жазықтықтағы түзу ролін сфера да оны үлкен шеңберлері атқарады.

О центрі r радиусты сфера (оны қысқаша $S(o,r)$ арқылы белгілейміз) берілсін. Егер Р жазықтықтың О центрден қашықтығы радиус r-ден кем болса, жазықтық сферамен қиылысар еді. Қимада әр уақытта шеңбер шығады. Ол шеңберді егер жазықтық центрден өтсе, сфераның үлкен шеңбері, ал центрден өтбесе кіші шеңбері дейміз. Сфераның диаметрінің ұштарын сфераның диаметрінің ұштарын сфераның диаметрлі қарама-қарсы нүктелері дейді. (60 а-сурет). Диаметрлі қарама-қарсы нүктелері мен сфера центрі бір түзудің бойында жататындықтан диаметрлі қарама-қарсы нүктелерді бастыра шексіз көп жазықтықтар жүргізуге болады, сондықтан диаметрлі қарама-қарсы нүктелерді баса шексіз көп үлкен шеңберлер өтеді, яғни кез келген екі үлкен шеңбер қиылысады (өзара қарама-қарсы екі нүкте қиылысады), қиылыспайтын үлкен шеңберлер болмайды. Евклидтік геометрияда да Лобачевский геометриясында да қиылыспайтын түзулер болатын.

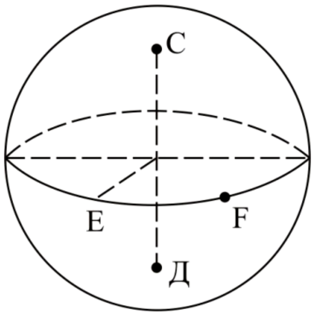
Егерде сферада диаметрлі қарама-қарсы емес $O,F$ нүктелер берілсе (60-б сурет) онда $O,E,F$ нүктелерді басып бір ғана жазықтық өтеді.

Ол сферада қиылысып, бір ғана үлкен шеңбер жасайды. Ол шеңберді екі әріппен «EF үлкен шеңбері» деп жазатын боламыз. Бұл үлкен шеңбер E,F нүктелерін жалғайды делінеді.



60а-сурет

Үлкен шеңбер сфераны екі жарты сфераға бөледі. Олар жазықтықтағы жарты жазықтық ролін атқарады. $O, E, F$ нүктелерден өтетін жазықтыққа центр O дан перпендикуляр тұрғызсақ, ол сфераны диаметрлі қарама-қарсы Д, С нүктелерде қияды.



60б-сурет

Бұл нүктелердегі EF шеңбердің полюстері дейді. Керісінше EF үлкен шеңберді Д, С нүктелердегі поляры дейді. ЕГ үлкен шеңбердегі нүктелерін Д,С нүктелерге полярлы түйіндес нүктелер дейді. Суреттен көріп тұрғанындай С мен F сфералық нүктелер өзара полярлы түйіндес болу үшін $EO \perp CO$ радиустер өзара перпендикуляр болуы керек.

E,F нүктелер үлкен EF шеңберді екі доғаға бөледі. Сол доғалардың кішісін E,F нүктелердің сфералық ара қашықтығы дейді. Оны $d(E, F)$ деп белгілейік.

Сонда, анықтама бойынша

$$d(E, F) \leq \pi r \text{ болады.}(11.1)$$

Сфераны өзіне-өзі изоморфикалы түрлендіру (яғни сферада жататын нүктелер арасын өзгертпей түрлендіру) ол сфераны қозғау делінеді.

Мысалы, сфераны бір диаметрі айналасынан қандай да бір бұрышқа бұру немесе сфера центрінен өтетін жазықтыққа қарағандағы симметриялық түрлендіру сфераны қозғауға мысал болады. Сфераны қозғағанда диаметрлі қарама-қарсы нүктелер қарама-қарсы нүктелерге, үлкен шеңберлер үлкен шеңберлерге көшеді.

Сфералық геометрияда, сферада жатқан фигуралардың, сфераны түрлендіргенде өзгермей қалатын қасиеттерін ғана қарастырады, зерттейді. Сол қасиеттер ғана сфералық геометрияның объектілері болады.

Сферада жатқан екі фигура конгруэнтті (тең) делінеді, егерде оларды сфераны қозғау арқылы бір-біріне беттестіруге болатын болса, тең фигуралардың қасиеттері бірдей болады.

Сфералық геометрияда екі жақтылық принцип (немесе қос жақтылық принцип, ауыстырымдылық принцип) деп аталатын төмендегі теорема орындалады.

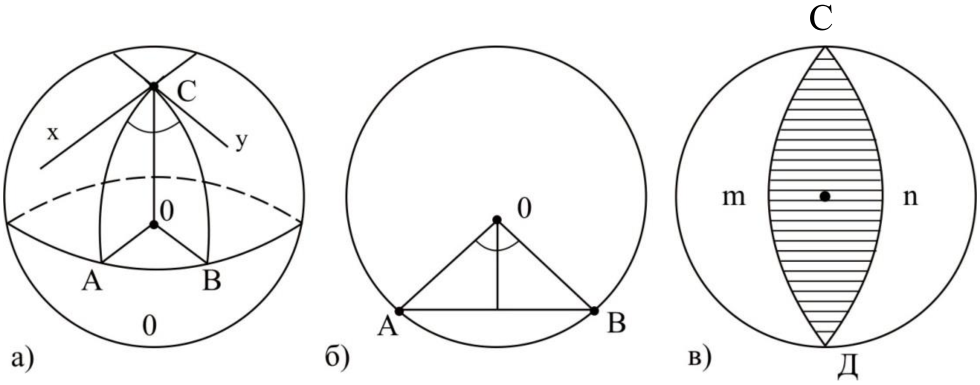
Сфералық геометрияда бір сөйлем дұрыс болса, онда ол сөйлемдегі «диаметрлі қарама-қарсы нүкте» деген сөз тіркесін «үлкен шеңбер» деген сөз тіркесінен «жатады» деген сөзді «өтеді» деген сөзбен, «қосады» деген сөзді «қиылысады» деген сөзбен алмастырғанда шығатын сөйлемде дұрыс болады. Мысалы, мына тұжырымдар бір-біріне екі жақты (қос жақты) тұжырымдар болады:

- Сфераның кез келген екі диаметрлі қарама-қарсы нүктелері үлкен шеңбермен қосылады.

- Сфераның кез келген екі үлкен шеңберлерінің қиылысу нүктелері екі диаметрлі қарама қарсы нүктелері болады.

2. Сфералық бұрыштар. Сфераның бір нүктесі мен ол нүкте ортақ шеткі нүктесі болатын екі үлкен жарты шеңбердің жиынын сферадағы бұрыш дейді. Нүкте бұрыштың төбесі, үлкен жарты шеңберлер –қабырғасы делінеді (61-а сурет).

Төбесі С нүкте, қабырғалары CA, CB үлкен жарты шеңбердер болатын бұрышты $\angle ACB$ деп белгілейді. Сфералық $\angle ACB$ бұрыштың шамасы үшін С нүктеден CA, CB жарты үлкен шеңберлерге жүргізілген x, y жанама түзулер арасындағы бұрыш алынады. Егер AB үлкен шеңбер үшін



61-сурет

С полюс болса, яғни $AO \perp OC$, $BO \perp OC$ болса, жанама радиуске перпендикуляр болатындықтан $x \| OA, y \| OB$ болады да $\angle xoy = \angle AOB$ болады. Сөйтіп АСВ сфералық бұрыштың шамасы АОВ центрлік бұрышқа тең болады.

Сондықтан $\angle ACB = \angle xCy = \angle AOB = \frac{\cup AB}{r}$ радиан (11-2) алымындағы $\cup AB$ доғаның ұзындығы (Ескерту: Бұрыштың радиандық өлшеуіші деп сәйкес доға ұзындығының шеңбер радиусына қатынасын айтады/ радиуске бұрыш радиандық өлшеуіші $2\pi$, тік бұрыштың радиандық өлшеуіші $\frac{\pi}{2}$ болады).

61 –б суретте 61 – а суреттегі АВ үлкен шеңбер болып алынып жеке көрсетілген.

АВ доғаға тірелетін центрлік бұрыш шамасын $\angle AOB = \alpha, AB$ доға ұзындығын - $\alpha(A,B), AB$ хорда ұзындығын - $\rho(A,B)$ дейік (61-б сурет). Сонда

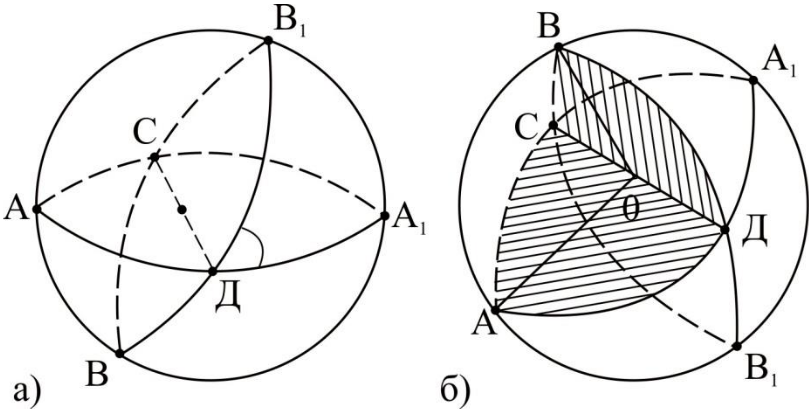
$$\alpha(A,B) = \frac{2\pi r}{2\pi} = \alpha r, d(A,B) = d r, d = \frac{d(A,B)}{r} \quad (11.3)$$

А,В нүктелердің сфералық қашықтығының радиуске қатынасын ол нүктелердің келтірілген арақашықтығы дейді.

ВОАВ дан АВ Хорданың ұзындығы $\frac{\rho(A,B)}{2} = r\sin\frac{\alpha}{2}, \rho(A,B) = 2r\sin\frac{\alpha}{2}$ немесе $\rho(A,B) = 2r\sin\frac{d(A,B)}{2r}$ (11.4)

Диаметрлі қарама-қарсы екі нүкте және ол нүктелер ортақ үшін болатын екі үлкен жарты шеңберлер жиынын сфералық екі бұрыш дейді. (61-в сурет). С мен Д нүктелерді ол сфералық екі бұрыштың төбелері, ал ол нүктелерді жалғайтын $CmD, CnD$ екі үлкен жарты шеңберлерді қабырғалары дейді. Сонымен $CmDnC$ сфералық екі бұрыш болады.

Екі үлкен шеңбер қиылысқанда сфера 4-ке бөлінеді (62-сурет). Олардың қиылысуынан екі пар вертикаль бұрыш шығады. Олар АСД, СВД жазықтықтардың қиылысуынан шыққан екі жақты бұрыш болады.



62-сурет

Вертикаль бұрыштар тең, ал сыбайлас бұрыштардың қосындысы $\pi$ болады.

Вертикаль бұрыштардың бірі тік болса, қалғандары да тік болады. Бұл кезде сфералық екі бұрыш тік бұрышты делінеді.

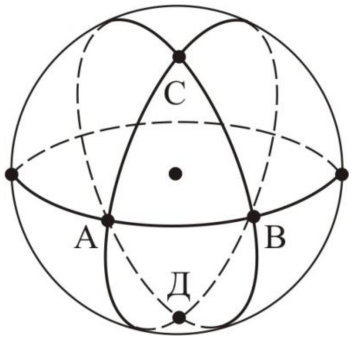
Егер ДА шеңбердің полюсі $M_1$ДВ шеңбердің полюсі N нүктесі болса, онда $\cup AB = \cup MN$ болады. Сондықтан екі үлкен шеңбер арасындағы бұрыш ол шеңбердің полюстерін жалғайтын доға ұзындығының радиусы қатынасына тең болады:

$$\angle ACB = \frac{\cup MN}{r} \quad (11.5)$$

Екі үлкен шеңбердің бірі екіншісінің полюсі арқылы өтсе олар өзара перпендикуляр болады. 63-суретте СА, СВ үлкен шеңберлер АВ шеңбердің полюстері С мен В арқылы өтіп жүр. Сондықтан СА, СВ үлкен шеңберлері АВ үлкен шеңберге перпендикуляр болады. Екі үлкен шеңбердің қиылысу нүктелеріне поляр болатын үлкен шеңбер ол екі шеңбердің екеуіне де перпендикуляр болады. Мұндай шеңбер жалғыз-ақ болады. АС мен ВС үлкен шеңберлердің қиылысу нүктелері Д мен С үлкені АВ шеңбердің нүктелерімен полярлы түйіндес. Сондықтан АВ шеңбер АС мен ВС шеңберлерге ортақ перпендикуляр болады.

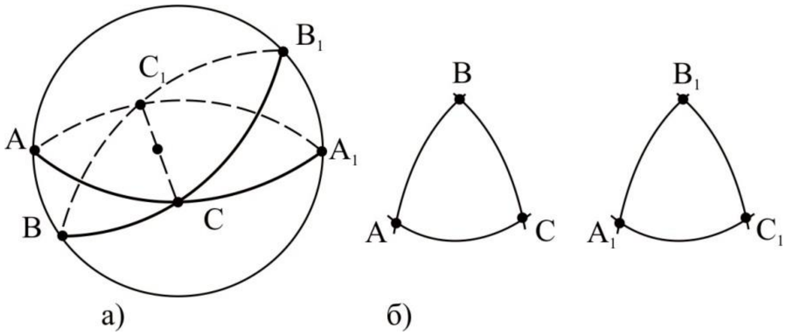
## 3. Сфералық үшбұрыштар

Сфераның үш үлкен шеңбері қиылысса сфера олар арқылы 8 бөлікке бөлінеді. Ол бөліктер сфералық үш бұрыштар болады.



63-сурет

Үш үлкен шеңбер доғаларымен шектелген. Сфера бөлігін сфералық үшбұрыш дейді. 64 –а суретте АВ, АС, ВС үш үлкен шеңбер салынған. Олардың қиылысуынан АВС, $АВС_1$, $АВ_1С$, $АВ_1С_1$, $В_1А_1С$, $В_1А_1С_1$, $А_1ВС$, $А_1ВС_1$ сегіз сфералық үшбұрыштар шыққан бұл үшбұрыштардың қабырғалары, үлкен шеңбердің доғалары болатындықтан, жарты үлкен шеңбер доғасынан кем болады, яғни үшбұрыш қабырғалары $\pi$-ден кем болады. Екі сфералық үшбұрыштың бірігуінен сфералық екі бұрыш



64-сурет

шығады. Мысалы САВ мен $С_1АВ$ екі үшбұрыш біріксе САС1, $С_1ВС$ сфералық екі бұрышы шығады (64-а сурет).

Сфералық АВС, $А_1В_1С_1$ екі үшбұрыш берілген (олар 64-б суретт сферадан бөлек алынып, жеке кескінделген).

Екі сфералық үшбұрыш конгруэнтті (тең) делінеді, егерде олардың сәйкес қабырғалары мен сәйкес бұрыш тең болса, яғни $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1 \Leftrightarrow AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ болатын болса

Екі үшбұрыштың өзара тең болуының 6 белгісі бар.

Олар мыналар:

Сфералық АВС, $А_1В_1С_1$ үшбұрыштардың сәйкес

$1^0$ екі қабырғасы мен арасындағы бұрышы тең болса

$2^0$ бір қабырғасы мен оған іргелес екі бұрышы тең болса

$3^0$ үш қабырғасы тең болса

$4^0$ үш бұрышы тең болса

$5^0$ екі бұрышы тең және ол бұрыштарға қарсы жатқан қабырғалардың бірі тең, ал екіншісі қабырғалары қатарынан $\frac{\pi r}{2}$ ден не үлкен, не кіші болса

$6^0$ екі қабырғасы тең және сол қабырғаларға қарсы жатқан бұрыштардың бірі тең, ал екінші бұрыштары қатарынан не доғал, не сүйір болатын болса.

Сфералық үшбұрыштың қабырғалары бұрыштары арасындағы қатыстар үш жақты бұрыштың жазық бұрыштарының және оның үш қыры бойынша қиылысатын екі жақты бұрыштарының қасиеттеріне негізделген.

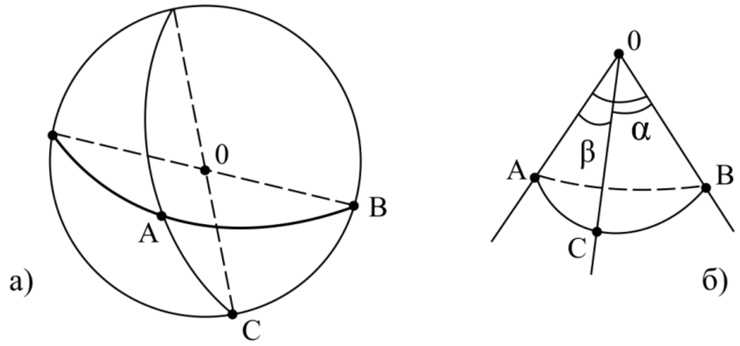
Ол қасиеттер мынадай болады:

$1_0$ үш жақты бұрыштың кез келген бір жазық бұрышы қалған екі жазық бұрыштарының қосындысынан кіші, айырымынан үлкен болады.

$2_0$ үш жақты бұрытың жазық бұрыштарының қосындысы $360^0$ тан кем болады.

$3_0$ үш жақты бұрыштың екі жақты бұрыштарының қосындысы $180^0$ тан көп, $540^0$тан аз болады.

65 – а суретте О нүктеде қиылысатын ОАВ, ОВС, ОАС үш жазықтық жүргізілген. Сонда төбесі – 0, қырлары – ОА, ОВ, ОС болатын үш жақты бұрыш шыққан. Сфералық АВС үшбұрыш қабырғалары осы үш жақты бұрыштың жазық бұрыштарына қарсы жатқан доғалар болады және ОА=ОВ=ОС=r (65 а, б-суреттер).



65-сурет

Сфералық АВС үш бұрыш қабырғалары а, в, с дейтін (АВ=С, ВС=а, АС=в), бұрыштарын $\alpha, \beta, \gamma$ дейін ($\angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$).

Сонда мына теоремалар дұрыс болады.

1-теорема. Сфералық үшбұрыштың кез келген қабырғасы қалған қабырғаларының қосындысынан кем, айырымынан артық болады.

Дәлелі. Үш жақты бұрыштың $1_0$ қасиетінен шығады. Мұндағы жазық бұрыштар (435-б суретте) $\angle AOC, \angle COB, \angle BOA$. Бұлар АВ, СВ, ВА доғалар үшін центрлік бұрыш, яғни $\alpha = \frac{\cup Bc}{r} = \frac{a}{r}$ $\beta = \frac{\cup AC}{r} = \frac{b}{r}$, $\gamma = \frac{\cup AB}{r} = \frac{c}{r}$

Сонда $\alpha + \beta > \gamma > \alpha - \beta$ болатындықтан $a + b > c > a - b$ болады.

2 – теорема._Сфералық үшбұрыштың периметрінің жартысы кез келген қабырғасынан артық болады. Өйткені $a + b > c$ болатындықтан $a + b + c > 2c$ бұған $\frac{a+b+c}{2} > c$ болады. Осы сияқты $\frac{a+b+c}{2} > a$, $\frac{a+b+c}{2} > b$ болады.

3 – теорема._ Сфералық үшбұрыштың қабырғаларында қосындысы $0^0$-тан көп, $360^0$-тан аз болады.

Дәлелі: Үш жақты бұрыштың $2_0$ қасиетінен шығады $0 < \alpha + \beta + \gamma < 360^0$ ден $0 < a + b + c < 360^0$

4 – теорема._Сфералық үшбұрыштың бұрыштарының қосындысы $180^0$-тан көп, $540^0$-тан аз болады.

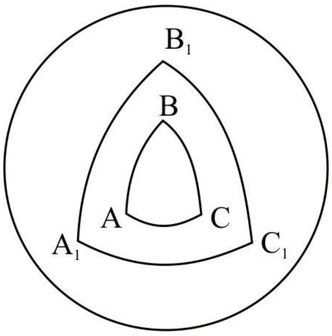
Дәлелі үш жақты үшбұрыштың екі жақты бұрышынан қасиетін (30-дан) шығады. Егер 65-б сурет А нүктеден АС, АВ доғаларға жанама жүргізсек ол жанамалар арасындағы бұрыш сфералық А бұрышқа тең болады және жанама радиуске перпендикуляр болатындықтан ол жанамалар арасыедағы бұрыш ОАС және ОАВ жақтардың арасындағы сызықтық бұрыш (екі жақты бұрыш) болып шығады. Сондықтан $3_0$ бойынша 4 – теорема дұрыс болады, яғни $180^0 < \angle A + \angle B + \angle C \angle 540^0$.

Мына айырым $\varepsilon' = \angle A + \angle B + \angle C - 180$. Сфералық үшбұрыштың эксцессі немесе сфералық үшбұрыштың артықтығы делінеді.

Бір бұрышы ғана тік болатын сфералық үшбұрышты тік бұрышты үшбұрыш дейді.

Сфералық үшбұрыштың биіктігі, медианасы, биссектрисасы, қабырға мен бұрыштар арасындағы сызықтық қатыстары жазықтықтағы геометриядағыдай анықталады.

АВС сфералық үшбұрыштың қабырғаларын а, в, с дейін А, В, С нүктелер басқа $\Delta A_1, B_1, C_1$ сфералық үшбұрыштың (мұндай қабырғаларын $a_1$, $\text{в}_1$, $c_1$ дейік) қабырғаларының полюсі болса, онда бұл екі үшбұрышты бір-біріне полярлы үшбұрыштар дейді (66 сурет).



66-сурет

Сфералық үшбұрыштың бір бұрышы мен бұл үшбұрышқа полярлы үшбұрыштық сәйкес келтірілген қабырғасы бірін-бірі $\pi$-ге толықтырады, яғни

$$A+\frac{a_1}{r}=A_1+\frac{a}{r}=B+\frac{в_1}{r}=B_1+\frac{в}{r}=C+\frac{c_1}{r}=C_1+\frac{c}{r} \quad (11.6)$$

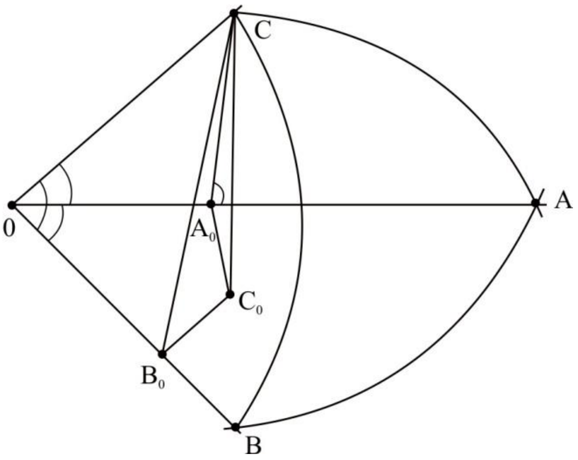
Осыларға сүйене отырып сфералық үшбұрыштар үшін синус, косинус теоремаларын дәлелдеуге болады.

Сфералық ABC үшбұрыш берілсін (67-сурет). Ол үшбұрыштың бұрыштары $\angle A=\alpha, \angle B=\beta, \angle C=\lambda$, қабырғалары $d(A.B)=c, d(AC)=a$ болсын. Онда ABC сфералық үшбұрыш үшін мына теңдіктер орындалады.

а) $\dfrac{\sin A}{\sin\frac{a}{r}}=\dfrac{\sin B}{\sin\frac{b}{r}}=\dfrac{\sin C}{\sin\frac{c}{r}}$ (11.8)

б) $\cos\frac{c}{r}=\cos\frac{a}{r}\,\cos\frac{b}{r}+\sin\frac{a}{r}\sin\frac{b}{r}\cos C$ (11.9)

в) $cos\ C = cos\ A\,, cos\ B + sin\ A\ sin\ B\ cos\,\frac{c}{r}$ (11.10) болады.



67-сурет

(11.8) – синус теоремасы, (11.9) – косинустың – теоремасы, (11.10) – Косинустын 2 теоремасы делінеді.

Синустар теоремасын дәлелдейік

67 суретте $\Delta ABC$ сфералық үш бұрыш, О-сфера центрі $OC = OB = OA = r$ сфера радиусы, $\angle BOC = \alpha, \angle AOC = \beta$, $\angle AOB = \gamma$ болады. $CB_0 \perp OB$, $CA_0 \perp OA$ және AOB жазықтыққа $d_0$ перпендикуляр жүргізейік. Сонда тік бұрышты $\Delta OB_0C$ дан $CB_0 = r\sin\alpha$ $\Delta CB_0$-дан $CC_0 = CB_0 \sin CB_0\ C = CB_0 \sin B = r\sin\alpha\sin B$, ол ${}^0d(B, C) = dr$ немесе $a = d\,r$ болатындықтан соңғы теңдіктен

$CC_0 = r\sin\frac{a}{r}\sin B$ (1)

Осы жолмен $O\angle A_0$, $CA_0C_0$ тікбұрышты үшбұрыштардан

$CC_0 = r\sin\frac{b}{r}\sin A(2)$ табуға болады.

(1) мен (2) ден $r\sin\frac{a}{r}\sin B = r\sin\frac{b}{r}\sin A$. Бұдан $\frac{\sin A}{\sin\frac{a}{r}} = \frac{\sin B}{\sin\frac{b}{r}}$

Осы сияқты А нүктенің ВОС жазықтықтағы проекциясын қарастыру арқылы $\frac{\sin B}{\sin\frac{b}{r}} = \frac{\sin C}{\sin\frac{c}{r}}$ болатыны көз жеткізуге болады. Соңғы екі теңдіктен (11.8) шығады. Векторды пайдалану арқылы косинус теоремасын пайдлану дәлелдеуге болады.

Егер бұрыш С тік болатын болса, онда (11.8) ден $\mathrm{sib}\frac{b}{r} = \sin\frac{c}{r} = \sin B$, $\sin\frac{a}{r} = \sin\frac{c}{r}\cdot\sin A$ (11.9) дан $\cos\frac{c}{r} = \cos\frac{a}{r}\cos\frac{b}{r}$.(11.10)

Сонда Пифагор теоремасы сфералық тік бұрышты үшбұрыш үшін былайша тұжырымдалады.

Сфералығы тікбұрышты үшбұрыштың келтірілген гипотенузасының косинусы келтірілген катеттерінің косинустарының көбейтіндісіне тең болады.

Келтірілген катеттің синусы оған қарсы жатқан бұрыштың синусы мен келтірілген гипотенузаның синусының көбейтіндісіне тең болады.

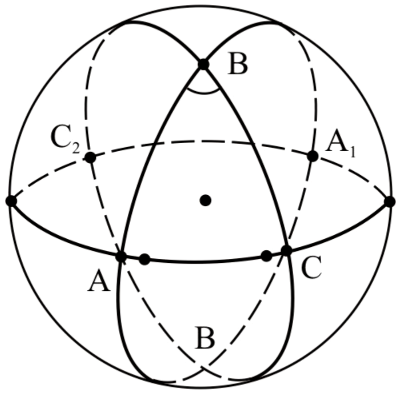
4. Сфералық екі бұрыш пен үшбұрыштың аудандары.

а) Сфераның бетінің ауданы $4\pi r^2$ болатын. Сол сфераны теңдей етіп $\pi$ - ге бөлсек, n сфералық екі бұрыш шығарады және оның бұрышы $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ болар еді.

Сонда бұл сфералық екі бұрыштың ауданы $S=\frac{4\pi r^2}{n}=2\frac{2\pi}{n}r^2$. Сонымен бұрышы $\alpha$ болатын сфералық екі бұрыш ауданы.

$S=2\alpha r^2$ (11.11).

б) Енді сфералық үшбұрышты қарастырайық. Сферада ABC үшбұрышы берілсін. Оның қабырғаларын басып 6 сфералық екі бұрыш өтеді. (68-сурет). Олар $ABA_1CA$, $AB_1A_1C_1A$, $BAB_1CB$, $BA_1B_1C_1B$, $CAC_1BC$, $CA_1C_1B_1C$. Бұл 6 сфералық екі бұрыштың аудандарының қосындысы сфераның ауданынан көп, өйткені ABC және оған диаметрлі қарама-қарсы $A_1B_1C_1$ үшбұрыштар бқларға 3 реттен, қалған үшбұрыштар 1 реттен енген. Сондықтан $\Delta ABC$ мен $\Delta A_1B_1C_1$ әрқайсысы 2 реттен артық енген. Бұл екі үшбұрыштың аудандары тік (бұрыштары вертикал болғандықтан олар тік болады). Ал жоғарыда айтылған 6 сфералық екі жақты бұрыштың екеуінің бұрышы с бұрышқа тең. Ол сфералық екі бұрыш аудандарын $S(A)$, $S(B)$, $S(C)$, ал $\Delta ABC$ ауданын $S(ABC)$ десек, Сфера ауданы S



68-сурет

$S=2S(A)+2S(B)+2S(C)-4S(ABC)$ тең болады.

Ал сфера ауданы $4\pi r^2$ болатындықтаг сфераның екі бұрыш ауданы (74-11) формуламен анықталатындықтан

$4\pi r^2=2\cdot 2Ar^2+2\cdot Br^2+2\cdot 2Cr^2-4S(ABC)$

Бұдан $S(ABC)=r^2(A+B+C-\pi)$ (11.12).

Сфералық үшбұрыш ауданы осыған тең болады.

Аудан $S>0, r^2>0$ болатындықтан бұдан сфералық үшбұрыштың бұрыштарының қосындысының $\pi$-ден артық болтындығы тағы да расталып тұр $A+B+C-\pi>0$, $A+B+C>\pi$.

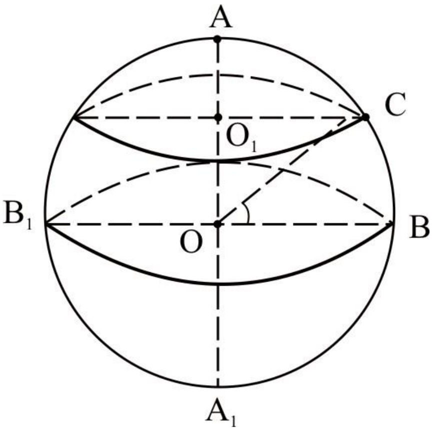
Сферада үлкен шеңбер бойында жатпайтын 3 нүкте берілсе, оларды басып бір ғана жазықтық өтеді. Ол сфераны центрі сфера центрінен басқа нүкте болатын шеңбер бойымен қияды. Ол шеңберді сфераның кіші шеңбері дейді.

Осы кіші шеңбер арқылы сфера екі сфералық сегментке бөлінеді. Оның кішісін <u>сфералық дөңгелек</u> дейді (69-сурет). Ол кіші шеңберге параллель болатын бір ғана үлкен шеңбер болады, оны кіші шеңбердің базасы дейді. Кіші шеңбердің A және $A_1$ нүктелерден сфералық қашықтығының кішісін, яғни AC доғаны (ол $\frac{\pi r}{2}$ ден аз болу керек). Сфералық дөңгелектің радиусы, A-ны центрі дейді. Кіші және үлкен дөңгелектің сфералық арасын, яғни BC доғаны кіші шеңбердің параметрі дейді.

Егер $\cup AC = l$, $\cup CB = P$ болса, онда $l + P = \frac{\pi r}{2}$ болады.

AC доға ұзындығы $= 2\pi r \sin\frac{1}{r}$

CB доға ұзындығы $= 2\pi r \cos\frac{p}{r} = 2r\sin\frac{l}{2r}$ биіктігі h болатын кез келген



69-сурет

сфералық қабаттан дербес жағдайда сфералық ауданы $2\pi r h$ болатындықтан радиусы $\ell$ болатын сфералық дөңгелектің ауданы

$$S = 4\pi r^2 \sin\frac{2e}{2r} \text{ болады.}$$

### 11.2 Риманның эллипстік геометриясы

Риман Георг Фридрих Бернхард (1829-1866) неміс математигі, евклидтік емес геометрияның бір түрін жасаушы. Оның геометриясы эллипстік геометрия делінеді.

Сфералық геометрия, жазықтықтағы Евклид геометриясында ортақ, ұқсас қағидалар баршылық. Дегенмен сфералық геометрияда жазықтықтағы евклид геометриясынан да, Лобачевский геометриясынан да аса қажетті қағидаларының бірі болып табылатын «Екі түзу бір нүктеде қиылысады». «Екі нүктелі болып бір ғана түзу өтеді» тұжырымдарына қайшы келетін тұжырым бар. Сфералық геометрияда оның кез келген екі үлкен шеңбері (яғни екі түзуі) екі нүктеде (сфераның диаметрлі қарама-қарсы екі нүктесінде) қиылысады және кез келген диаметрлі қарама-қарсы нүктелерін басып шексіз көп үлкен шеңбер (түзу) жүргізуге болады.

Көп жағынан сфералық геометрияға ұқсас және Евклид, Лобачевский геометрияларымен жоғарыда айтылған қайшылықтардан арылған, яғни кез келген екі түзу бір нүктеде қиылысатын, екі нүктесін басып бір ғана түзу өтетін жаңа геометриялық жүйе жасауға болады екен. Ол геометрияны «Риманның Эллипстік геометриясы» дейді.

1. Вейль схемасындағы Риманның эллипстік геометриясы

R нақты сандар жиынында $n+1$ өлшемді евклидтік векторлық кеңістік V берілсін. Бос емес E жиынын Риманның n - өлшемді эллипстік кеңістігі дейді және осы $S_n$ деп белгілейді, егерде бұл кеңістіктер арасында төмендегі екі талапты қанағаттандыратындай етіп $X : V \setminus \{\vec{O}\} \to E$ бейнелеуін орнатуға болатын болса:

1-талап. X – сюрьективтік бейнелеу болу керек, яғни E жиынның әрбір элементті V жиынның кемінде бір элементінің түр бейнесі болуы керек.

2-талап. $X(\vec{x}) = X(\vec{y})$ теңдік, $\vec{x}, \vec{y}$ векторлар коллинеар болғанда ғана орындалатын болсын.

Анықтамадағы V евклидтік векторлық кеңістік болғандықтан, бұл кеңістікте векторларды скаляр көбейту амалы орындалуы керек. Осы амалға сүйене отырып $S_n$ эллипстік кеңістікте нүктелердің арақашықтығы ұғымын анықтауға болады. Оң жақты сан r берілсін $M_1$, $M_2$ нүктелерді $\vec{m}_1, \vec{m}_2$ векторлар тудырсын, яғни $X(\vec{m}_1) = X_1$, $x(\vec{m}_2) = M_2$ болсын. Сонда $M_1$ мен $M_2$ нүктелерінің арақашықтығы деп мына шартты

$$\cos\frac{\delta(\text{м}_1\text{м}_2)}{r} = \frac{|\vec{m}_1, \vec{m}_2|}{|\vec{m}_1||\vec{m}_2|} \quad (11.13)$$

Қанағаттандыратын түрге $\delta(\text{м}_1, \text{м}_2)$ соны айтады. Мұндағы n –санын $S_n$ кеңістіктің қисықтық радиусы дейді.

Келтірілген анықтамадан эллипстік $S_n$ кеңістігі проективтік $P_n$ кеңістігі сияқты құрылатыны шығады, бірақ, проективтік кеңістікті құрғанда V векторлық кеңістік болатын, енді эллипстік кеңістікті құрғанда V-евклидтік векторлық кеңістік болып тұр. Сондықтан бұл кезде $S_n$ кеңістікте (11.13) формула бойынша екі нүкте арасын табуға болады.

Бұл (73.13) формуладан нүкте арасы, ол нүктелерді тудыратын векторлардың нормасына (ұзындығына) байланысты болмайтынын байқау қиын емес. Шынында да $M_1$, $M_2$ нүктелерді $k_1\vec{m}_1$, $k_2\vec{m}_2$ векторлар тудырған болса, онда (74-13) бойынша

$$\cos\frac{\delta(M_1,M_2)}{r} = \frac{\left|k_1\vec{m}_1\cdot k_2\vec{m}_2\right|}{\left|k_1\vec{m}_1\right|\cdot\left|k_2\vec{m}_2\right|} = \frac{k_1k_2\left|\vec{m}_1\vec{m}_2\right|}{k_1k_2\left|\vec{m}_1\right|\left|\vec{m}_2\right|} = \frac{\left|\vec{m}_1\vec{m}_2\right|}{\left|\vec{m}_1\right|\left|\vec{m}_2\right|} \quad \text{болып,} \qquad (11.13)$$

формула шығады.

V евклидтік векторлық кеңістік болғандықтан, бұл кеңістікті түрлендіру кез келген сызықтық түрлендіру емес, орташа түрлендіру (яғни векторлардың скаляр көбейтіндісін сақтап түрлендіретін сызықтық түрлендіру) болуы керек.

Векторлық V кеңістікті кез келген ортогональ түрлендіру $\varphi$ эллипстік $S_n$ кеңістікте мына заңмен орындалатын:

Егер $\varphi(\vec{m}) = \vec{m}_1$ болса, онда $f(\text{м}) = \text{м}'$ болу керек. Қандай да бір f түрлендіруін тудырады. (74-13) бойынша ол түрлендіру кеңістік нүктелерінің арақашықтығын өзгертпейді. Ондай түрлендіру $S_n$ кеңістікті қозғау делінеді. Сөйтіп V векторлық кеңістікті әрбір ортогональ түрлендіру $S_n$ кеңістікте қозғалыс түрлендіруін тудырады. $S_n$ кеңістік анықтамасынан өлшемдері теңдей эллипстік кеңістіктердің изомерлерін болатыны шығады.

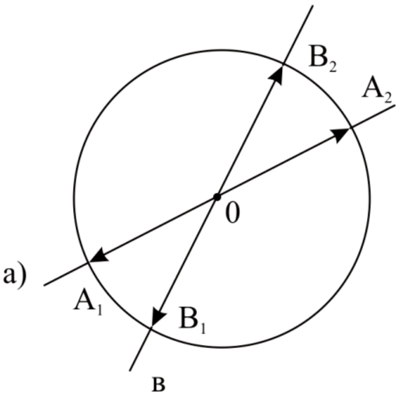
## Эллипстік жазықтықтың моделі

Эллипстік n өлшемді $S_n$ кеңістіктен $n = 2$ болған жағдайын қарастырайық. $S_2$ кеңістікті Риманның эллипстік жазықтығы дейді. Бұл $S_2$ жазықтыққа проективтік $P_2$ жазықтыққа жасалған модел сияқты, үш өлшемді $E_3$ евклидтік кеңістіктен бір 0 нүктесінен өтетін түзулерінің жиынынан (оны О центрлі түзулер байланысы дейді. Оны қысқаша $\{O\}$ арқылы белгілейік) тұратын модель жасайық.

О центрлі r радиусты S сфера алайық.

Біз жасамақ $\{O\}$ түзулер байланысынан әрбір түзуін $S_2$ жазықтықтың бір нүктесі дейік. Сонда $A \in S_2$ нүкте $\{O\}$ байланысы бұл а түзуі болады. $\{O\}$-нан барлық түзулері S сфераның центрінен шығып жатқандықтан байланысы кез келген а түзуі сфераны диаметрлі қарама-қарсы. $A_1, A_2$ екі нүктеде қияды (яғни $A \in S_2$ нүктеге сфераны диаметрлі қарама-қарсы $A_1, A_2$ нүктелері сәйкестеледі). Керісінше S сфераның әрбір диаметрлі қарама-қарсы $A_1, A_3$ екі нүктесіне $\{O\}$ түзулер байланысынан осы нүктелер арқылы өтетін бұл а түзуі (сондықтан $S_2$ жазықтықтың бір А нүктесі) сәйкестенеді. Сөйтіп $S_2$-нің әрбір нүктесі S сфераның диаметрлі қарама-қарсы екі нүктесін, ал S сфераның кез келген диаметрлі қарама-қарсы екі нүктесі $S_2$ жазықтықтан бір нүктесін анықтайды. Сондықтан сфераның диаметрлі қарама-қарсы $A_1$, $A_2$ екі нүктесін $S_2$ эллипстік жазықтықтың бір А нүктесі деп есептейміз, яғни $A_1$-де, $A_2$-де $S_2$-ні А нүктесі делінеді.

А мен В нүктелер $S_2$ жазықтықтан әртүрлі нүктелері болсын, онда олар $\{O\}$ түзулер байланысын әртүрлі а, в түзулерімен кескінделер еді, ал бұл түзулер S сфераны диаметрлі қарама-қарсы $A_1$, $A_2$ және $B_1$, $B_2$ нүктелерді қияр еді және бұл нүктелер сфераның бұл үлкен шеңберінде жатыр еді, $\vec{OA}_2$ $\vec{OA}_1$ векторды тудырар еді. Осы сияқты В нүктені $\overrightarrow{OB_1}$ векторыда, $\overrightarrow{OB_2} = -\overrightarrow{OB_1}$ векторлардың екеуі де тудырады. Сондықтан (11.13) формуладағы $\frac{\delta(A,B)}{r}$ бұрыш а мен в түзулер жасайтын вертикаль бұрыштардың кішісінің шамасына тең болады. Сондықтан А,В нүктелер арасы $\delta(A,B)$ мына $d(A_1,B_1)$ мен $d(A_1,B_2)$ сфералық аралықтың қысқасына тең болады.



70-сурет

Егер U эллипстік $S_2$ жазықтықтан түзу болса, онда ол түзуді V векторлық кеңістіктен екі өлшемді $V_2$ ішкі кеңістігі тудыратындықтан $V_2$-ті векторлары $\{O\}$ түзулер байланысының бір $\pi$ жазықтықта жатқан О центрлі түзулер шоғымен кескінділер еді. Ал, бұл $\pi$ жазықтық S сфераны оның қандайда бір үлкен шеңбері бойымен қияды. Демек $S_2$ жазықтықтан U түзуі сфераның диаметрлі қарама-қарсы нүктелері жұбының диаметрлі тұратын үлкен шеңбермен кескінделеді екен.

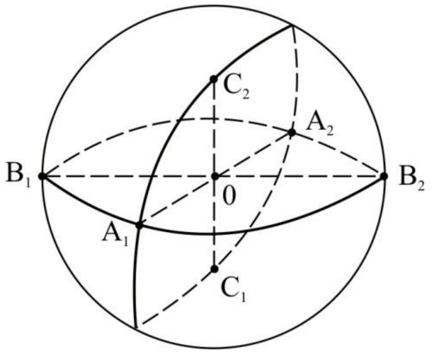
$S_2$ жазықтықтың кез келген екі түзуінің ортақ нүктесі болатындықтан (өйткені $\rho$-де сондай болатын) эллипстік жазықтықта қиылыспайтын түзу болмайды, барлық түзу қиылысады. Сөйтіп $S_2$-де параллель түзулер болмайды.

Сонымен Риманның Эллипстік геометриясын былайша жасауға болады екен.

Кәдімгі үш өлшемді евклидтік кеңістікте О центрлі, r радиусты S(o, r) сфера алады. Бұл сфераның диаметрлі қарама-қарсы нүктелерін бір объекті деп қарастырылады. Сонда S сфера диаметрлі қарама-қарсы нүктелер жұбының жиыннан тұрады. Осы диаметрлі қарама-қарсы нүктелер жұбын бұл нүкте деп алынатын геометриялық құрылымды сфералық Риманның эллипстік жазықтығы дейді де, $S_2$ арқылы белгілейді. Бұл сфералық диаметрлі қарама-қарсы $A_1$ мен $A_2$, $B_1$ мен $B_2$, $C_1$ мен $C_2$ ... нүктелерін $S_2$ жазықтықтың $A_1B_1C_1$... нүктелері дейді. Сонда $A_1$ нүктеде А нүктені $A_2$ нүктеде А нүктені анықтайды. (71 сурет).

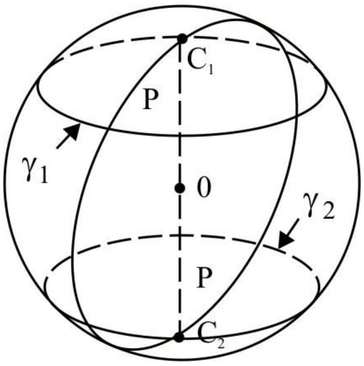
Сфераның кез келген үлкен шеңберін (мысал 441 суреттегі $A_1B_1A_2B_2A_1$, $A_1C_1A_2C_2A_1$, $B_1B_2$ диаметрлі болатын шеңберлерді) $S_2$ жазықтықтың түзулері дейді. Сонда $S_2$ эллипс жазықтығының түзулері S сфераны диаметрлі қарама-қарсы нүктелер жұбының жиыны болатын үлкен шеңберлер болады.

$A \in S_2$ нүкте $a \in S_2$ түзуде жатады немесе $S_2$ жазықтықтың а түзу А нүктесін басып өтеді делінеді, егерде А нүктені анықтайтын сфераның диаметрлі қарама-қарсы $A_1$, $A_2$ нүктелері сфераның а түзуді кескіндейтін



72-сурет

үлкен шеңбері бойында жатса $S_2$ эллипстік жазықтықтан А,В екі нүктесінің ара қашықтығы деп S сфераның ол нүктелерді анықтайтын диаметрлі қарам-қарсы $A_1$, $A_2$ мен $B_1$, $B_2$ нүктелер жасайтын $A_1$ $B_1$, $A_2B_2$ доғалардың кез келгенінің ұзындығын айтады (73-сурет) сфераның бұл екі доғалы $S_2$-нің бір АВ доғасын анықтайды. $S_2$-дегі нүктелер арасын былайша анықтау себепті Риман түзуінің толық ұзындығы сфераның үлкен шеңберінің ұзындығындай $2\pi$r - емес $\pi$r болады. Өйткені $A_1$ де $A_1A_2$ – де А нүктені



73-сурет

анықтайды, ал $A_1A_2$ доға ұзындығы $\pi r$-ге тең $S_2$-ні A, B нүктелері бірін-бірі түзуге дейін толықтыратын екі доғадан тұрады, бұл екі нүкте арасы үшін ол екі доғаның қысқасы алынады. Сондықтан екі нүкте арасы $\frac{1}{2}\pi r$-ден аспайды. A,B нүктелер жасайтын $S_2$-дегі екі доғалық әр қайсысын $S_2$ жазықтықта кесінді дейді.

$S_2$ жазықтықтан C центрлі $\rho$ радиусты шеңбері деп C нүктеден $\rho$ сфералық қашықтықта жатқан сфера қашықтықта жатқан сфера нүктелерінің жиынын айтады. 72-суретте ол шеңбер $\gamma_1, \gamma_2$ шеңберлер. Олар центр O-ға қарағанда симметриялық болады (71-сурет).

$S_2$ жазықтықтағы екі түзу арасындағы бұрыш деп ол түзулерді кескіндейтін үлкен шеңберлер арасындағы бұрышты айтады. $S_2$-де екі кесінді, екі бұрыш, жалпы екі фигура тең делінеді, егерде сфераны өзіне-өзін түрлердіру (бұру, қозғалту) арқылы ол фигураларды бір-бірімен беттестіруге болатын болса.

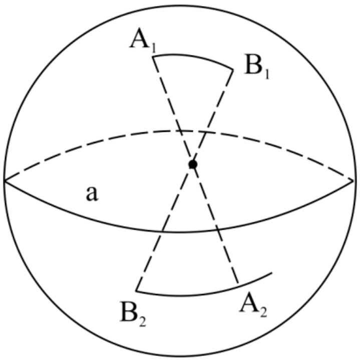
Риманның эллипстік геометриясының кейбір ерекшеліктері.

1. Риман геометриясында екі нүктені басып бір ғана түзу өтеді. $A_1 B \in S_2$ нүктелерді сфереда диаметрлі қарама-қарсы $A_1$ мен $A_2$, $B_1$ мен $B_2$ нүктелер анықтайтын болса, онда $A_1B_1A_2B_2$ центрі O болатын тік төртбұрыш болады, бірақ ол төрт бұрыш төбелері бұл үлкен шеңберде жатады. Демек A мен B бұл түзуге жатады. Ол шеңбер біреу-ақ болатындықтан түзуде біреу-ақ болады.

2. Екі түзу бір нүктеде қиылысады. Өйткені екі үлкен шеңбер диаметрлі қарама-қарсы екі нүктеде қиылысады. Ал, ол екі нүкте $S_2$-де бір нүктені білдіреді.

3. Риман жазықтығын Риман түзуі екіге бөлмейді. Ал, бұл Риман жазықтығында a түзуі және A,B нүктелер берілсе, ол нүктелерді a түзуін қимайтындай кесіндімен (доғалмен) жалғауға болмайды деген сөз. $A_1$-де, $A_2$ – де A нүктені, $B_1$-де $B_2$-де B нүктені білдіретіндіктен оларды жалғайтын доға a үшін шеңберді қимайды. (74-сурет)

4. Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы 2 тікбұрыштан артық болады, өйткені сфералық үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы 2 тікбұрыштан көп болатын.



74-сурет

5. Риман геометриясында әрбір түзудің бір ғана полюсі болады. Себебі үлкен шеңберден диаметрлі қарама-қарсы екі полюсі болады. Ол екеуі $S_2$ де бір нүктені анықтайды.

6. Риман геометриясында бір түзуге перпендикуляр болатын барлық түзулер бір нүктеде қиылысады. Өйткені бұл үлкен шеңберге перпендикуляр болатын шеңберлер бірінші шеңбердің полюстерінен өтеді. Ол полюстер $S_2$-де бір нүктені (полюсті) анықтайды.

7. Риман геометриясындағы әрбір F фигура сфераны центрге қарағанда симметриялы орналасатын. $F_1$, $F_2$ фигураны білдіретіндіктен A дегі метрикалық қатыстар $F_1$ немесе $F_2$ фигураның метрикалық қатыстарындай болады. Сондықтан, үшбұрыш үшін синус, косинус геометриялары дұрыс болады.

Мысалы, Риман геометриясындағы үшбұрыштың a қабырғасы басқа в, с қабырғалары мен өзіне қарсы $\alpha$ бұрышы арқылы былай өрнектеледі $\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r} + \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos\alpha$.

8. r артқан сайын $S_2$-де жатқан фигураның жазықтықта жатқан фигурадан өзгешелігі келіп түседі.

Сондықтан, r-ды Риман жазықтығының евклидтік еместік өлшемі ретінде қарастыруға болады. Сондықтанда, r-ді $S_2$ жазықтықтың қисықтық радиусы дейді.

9. $S_2$ жазықтықта екі үшбұрыштың сәйкес бұрыштары тең болса, онда оларға қарсы қабырғаларда тең болады.

Косинус теоремасы бойынша қабырғаларды табу арқылы тұжырымның дұрыстығына көз жеткізуге болады.

Үшбұрыш ауданы ABC ауданы $=\varepsilon \mathrm{r}^2$, мұндағы $\varepsilon = \mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{c}+\mathrm{n}$ формуласымен табылады.

10. Риман геометриясында мынадай қос жақтылық принципі орындалады: «Нүкте», «жатыр», «арақашықтық» деген сөздер орналасқан тұжырым дұрыс болса, онда бұл сөздерді сәйкесінше «түзу», «өтеді», «бұрыш» сөздерімен алмастырған тұжырымда дұрыс болады.

11. Евклид геометриясындағы үшбұрыштың қабырғалары туралы, тең бүйірлі үшбұрыш қасиеті туралы, үшбұрыштың тамаша нүктелері туралы теоремалар Риман теоремасы үшін де дұрыс.

## 12. Вейль схемасындағы Лобачевскийдің гиперболалық геометриясы

### 12.1 Псевдоевклидттік кеңістіктер

Лобачевский геометриясының Вейль схемасындағы аксиомалар жүйесін анықтау үшін алдымен псевдоевклидтік кеңістік туралы мағлұмат керек.

1. Псевдоевклидтік векторлық кеңістік. Нақты сандар өрісі R-де n өлшемді (n=2,3 болған жағдайларды қарастырамыз) Vn – векторлық кеңістік берілген. Бұл кеңістіктегі векторлардың скаляр көбейтіндісін сәйкес квадраттың формасы $\varphi\left(\vec{x}\right)=g\left(\vec{x},\vec{x}\right)$ тозғындамаған индексі қандайда бір $k>0$ санға тең болатын $g\left(\vec{x},\vec{y}\right)$ бисызықты форма көмегімен анықтаймыз (квалраттық Форма нормал түрге келтірілгендегі ондағы теріс таңбалы мүше санын сол квадраттық форманың индексі дейді). Мына $g\left(\vec{x},\vec{y}\right)\in R$ санды $\vec{x},\vec{y}\in V_n$ векторлардың скаляр көбейтіндісі дейді және оны $g\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\vec{x},\vec{y}$ деп белгілейді. $\vec{x},\vec{y}$ векторлар ортагонал делінеді, егерде олардың скаляр көбейтіндісі о-ге тең болатын болса ( $\vec{x},\vec{y}=0$ болса)

Мына $\sqrt{\varphi\left(\vec{x}\right)}=\sqrt{\vec{x}^2}$ санды $\vec{x}$ вектордың ұзындығы немесе нормасы дейді.

Векторлардың скаляр көбейтіндісін (векторлардың ұзындығы) жоғарыда айтылған қасиеттерге ие болатын бисызықты форма көмегімен анықтағандықтан, егер $\vec{x}^2\geq 0$ болса, онда $\sqrt{\vec{x}^2}\geq 0$ болады да, вектор ұзындығы нақты санға тең болады, ал $\vec{x}^2<0$ болса, онда $\sqrt{\vec{x}^2}=bc$(в –нақты сан $i^2=-1$ жорымал бірлік) болады да, вектор ұзындығы жорымал сан болады.

Векторларының скаляр көбейтіндісі жоғарыда айтылған квадраттың форма көмегімен табылатын $V_n$– векторлық кеңістік – индексі к-ға тек псевдоевклидтік векторлық кеңістік делінеді, қысқаша $V_n^k$ деп белгілейтін боламыз.

Алгебрада n өлшемді $V_n$ кеңістікте берілген квадраттық форма $\varphi\left(\vec{x}\right)$ нормал түрге келетін базис болатыны және ол базистің векторлары өзара қос-қостан ортогонал болатыны дәлелденген.

$B=\left(\vec{\ell}_1,\vec{\ell}_2,...\vec{\ell}_n\right)$ базисте квадраттық форма нормал түрге келсін (теріс мүшелер саны К).

$\varphi\left(\vec{x}\right)_2\, x_1^2+x_2^2+...+x_{n-k}^2-x_n^2=k+1-x_{n-k+2-}^2...-x_n^2$ (11.14). Бұл кезде базистік векторлар үшін $\varphi\left(\vec{\ell}_1\right)=1,\varphi\left(\vec{\ell}_2\right)=1,...\varphi\left(\vec{\ell}_{n-k}\right)=1,\varphi\left(\vec{\ell}_{n-k+1}\right)=-1,$

$\varphi\left(\vec{\ell}_{n-k+1}\right)=-1,\ldots,\varphi\left(\ell_{n}\right)=-1$ болады. Ұзындығы 1-ге тең $\vec{\ell}_1,\vec{\ell}_2\ldots,\ell_{n-k}$ базистік векторларды бірлік векторлар, ал ұзындығы жорымал *i* болатын $\ell_{n-k+1},\ell_{n\text{-}k+2},\ldots\ell_n$ базистік векторларды жорымал бірлік векторлар дейді.

Өзі нөлдік вектор болмаса да $\vec{x}\neq 0$ квадраты $\overrightarrow{x^2}=0$ болатын векторды изотропты вектор дейді. Мұндай векторлардың ұзындығы 0-ге тең болады.

Мысалы базистік векторлардан жасалған мына түрдегі $\vec{\ell}_p+\vec{\ell}_q$ (мұндағы $P<n-k, q>n-k$) кез келген вектор, изотропты вектор болады. Өйткені $\varphi\left(\vec{\ell}_p+\vec{\ell}_q\right)=1-1=0$ болады.

Сөйтіп квадраттық форма нормал түрге келетін базис векторлары өзара қос-қостан ортогонал болатын бірлік векторлар мен жорымал бірлік векторлардан тұрады екен.

Мұндай базисті ортонормаланған базис дейді.

Квадраттық форманың индексі ол форманы нормал түрге келтіру жолына байланысты болмайтындықтан псевдоевклидтік $V_n$ кеңістіктің барлық базистердегі жорымал бірлік векторлар саны бірдей болады. Ол квадраттық форманың индексіне тең болады.

Сонымен псевдоевклидтік кеңістік ұзындықтары нақты сандар болатын да, жорымал сандар болатын да, нөл болатын да векторлар болады.

$B=\left(\vec{\ell}_1,\vec{\ell}_2,\ldots\vec{\ell}_n\right)$ ортонормаланған базисте $\vec{x},\vec{y}$ векторлардың координаталары $x_i=\left(x_1,x_{21-1}x_n\right)$, $y_i=\left(y_1,y_2,\ldots y_n\right)$ болсын, онда олардың, скаляр көбейтіндісі мынадай болады.

$$\vec{x}\,\vec{y}=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_{n-k}y_{n-k}-x_{n-k+1}y_{n-k+1}+x_{n-k+2}y_{n-k+2} \text{ (11.15).}$$

**Теорема.** Индексі болатын кез келген ұзындықты $\vec{x},\vec{y}$ векторлар үшін

$$\left(\vec{x},\vec{y}\right)^2\geq\overrightarrow{x^2}\,\overrightarrow{y^2} \quad (11.16)$$

болады және теңдік векторлар коллинеар болған жағдайда ғана орындалады.

Дәлелі $\overrightarrow{x^2}=-r$ болсын. $B=\left(\vec{\ell}_1\,\vec{\ell}_2\ldots,\vec{\ell}_n\right)$ базисті $\vec{\ell}_n=\dfrac{\vec{x}}{r}$ болатындай етіп таңдап алайық. Онда $\vec{x}=r\,\ell_n$ болады да, оның B базистегі координаталары $x=\{0,0_1\ldots,r\}$ болар еді. Осы базистегі $\vec{y}$-тің координаталары $y=\{y,y_2,\ldots.,y_n\}$ болсын. Сонда (74-14) бойынша $\vec{x}\,\vec{y}=-r\,y_n$ болады. Бұдан $(x,y)^2=r^2y_n^2$. Ал, $\overrightarrow{x^2}=-r^2$, $\overrightarrow{y^2}=y_1^2+y_1^2+\ldots+y_{n+1}^2-y_n^2$ болғандықтан $\overrightarrow{x^2}\,\overrightarrow{y^2}=-r^2y_1^2-r^2y_2^2-\ldots-r^2y_{n-1}^2+r^2y_n^2$.

Соңғы теңдіктерден, егер $\vec{x}$ пен $\vec{y}$ коллинеар болса $y_1 = y_2 = ... y_{n-1} = 0$ болатындықтан, $\left(\vec{x}\,\vec{y}\right)^2 = \overrightarrow{x^2}\overrightarrow{y^2}$ болады, ал векторлар коллинеар болмаса $y_1 y_2, ... y_n$ -дің ең болмағанда біреуі О болмайтындықтан $\left(\vec{x}\,\vec{y}\right)^2 > \overrightarrow{x^2}\overrightarrow{y^2}$ болады.

<u>Салдар</u> Индексі болатын псевдоевклидтік векторлық кеңістікте жорымал ұзындықты $\vec{x}, \vec{y}$ екі вектор үшін

$$\left|\frac{\vec{x}\,\vec{y}}{\left|\vec{x}\right|\left|\vec{y}\right|}\right| \geq 1 \text{ (11.17) болады.}$$

### 12.2 Гиперболалық кеңістіктер

V – нақты сандар өрісі R-дегі n өлшемді $(n = 2; 3)$ жағдайларды қарастырамыз. Индексі 1 болатын псевдоевклидтік векторлық кеңістік болсын (оны $V_{n+1}$ ден белгілейік), $g\left(\vec{x}, \vec{y}\right)$ бұл кеңістікте оның көмегімен скаляр көбейтуді анықтайтын бисызықты форма болсын. $V_1$ кеңістіктің тек автоморфизмдерін ғана /яғни кеңіктіктегі векторлардың скаляр көбейтіндісін сақтайтын, сондықтан вектор ұзындығын өзгертпейтін сызықтың түрлендіруді қарастырамыз. $V'_{n+1}$ кеңістіктің ұзындығы жорамал сан болатын векторларының жиынын $\{V'_{n+1}\}$ деп белгілейік. Сонда $\varphi$ бұл кеңістіктің, автоморфизмдері болса, онда $6(\{V_{n+1}\}') = \{V'_{n+1}\}^{-}$ болар еді.

Егер $\pi : \{V_{n+1}\}^{-} \rightarrow E$ бейнеле беріліп, ол мына екі шартты қанағаттандырса

1. $\pi$ - сюрьективті бейнелеу болса.

2. $\pi - \left(\vec{x}\right) = \pi(y)$ теңдік $\bar{x}, \vec{y}$ векторлар өзара коллинеар болғанда ғана орындалатын болса онда $E \neq \phi$ жиынын Лобачевскидің n өлшемді гиперболалық кеңістігі дейді. Оны $\Lambda_n$ деп белгілейік.

Лобачевскийдің Гиперболалық кеңістігі сол кеңістіктегі аксиомалары дейді.

Бұл аксиомалар жүйесін $\Sigma_\Lambda$ деп белгілейік.

Егерде $\varphi = \left(\vec{x}\right) = x$ болса, онда $\Lambda_n$-нен X нүктесін $\{V'_{n+1}\}^{-}$ кеңістіктен $\vec{x}$ векторы тудырды дейтін боламыз.

$\Lambda_n$ кеңістік үшін тұрақты $r > 0$ сан кеңістік $\Lambda_n$-нің x, y нүктелерін $\{V'_{n+1}\}$ кеңістіктің $\vec{x}, \vec{y}$ векторлары тудырсын. Осындай жағдайда Лобачевскийдің

Гиперболалық кеңістігінің $x, y$ екі нүктесінің арасы деп мына теңдікті қанағаттандыратын

$$\mathrm{Ch}\frac{\delta|x-y|}{r}=\left|\frac{\vec{x}\ \vec{y}}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}\right| \quad (11.18)$$

Теріс емес $\delta(x, y)$ санын айтады. Мұндағы $\mathrm{Ch}t=\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}$ жақты 1 айнымалы гипербалалық косинус делінеді. Бұл $\mathrm{Ch}t$- жұп функция, бүкіл сандар өсінде анықталған мәндер жиыны $[1, \infty)$ аралықты толтырады. Сондықтан (11.17) бойынша екі нүкте арасы әр уақытта болады және ол оң болады деген қорытынды жасауға болады.

Ал (11.18) деп нүкте арасы ол нүктелерді тудыратын векторлардың нормасына байланысты болмайтыны көрінеді.

r-саны $\Lambda_n$ кеңістіктің қисықтық радиусы делінеді.

$\Lambda_n$ кеңістігін кез келген $\varphi$ автоморфизмі $\Lambda_n$ кеңістікте мына заңмен орындалатын егер $\varphi(\vec{x})=\vec{x}'$ болса, онда $f(x)=x'$ болады. Қандай да бір $f$ түрлендіруін тудырады. Ол түрлендіру (11.18) бойынша нүктелер арасын өзгертпейді. Сондықтан $f$ түрлендіруі $\Lambda_n$ кеңістіктегі қозғалыс болады.

$\Lambda_n$ кеңістік анықтамасынан бірдей өлшемді. Екі гиперболаның кеңістіктердің өзара изоморфты болатыны шығады. Сондықтан ол кеңістіктің аксиомалар жүйесі. $\Sigma_{\Lambda}$ толық жүйе болады, оған сүйеніп құрылған теория бір мәнді болады. Демек оның кез келген интерпретациясын жасап, ол интерпретация бойынша оның қасиеттерін анықтауға болады.

## 12.3 Аксиомалар жүйесінің қайшылықсыздығы

Лобачевскийдің гиперболалық жазықтығы $\Lambda_2$-нің аксиомалар жүйесі $\Sigma_{\Lambda}$ -тің қайшылықсыздығын дәлелдеу үшін оған нақты сандар жиынында модель жасайық. Негізгі ұғымдарды сипаттайтын интерпретациялық сөздік жасайық.

- үш өлшемді 1 индексті $V_3^1$ псевдоевклидтік кеңістіктің векторы деп кез келген нақты үш саннан жасалған $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ түрдегі бағананы айтайық.

- векторларды қосу және векторларды санға көбейту амалдарын былайша анықтайық:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}, \ k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$$

Демек, жорымал ұзындықты векторлар жиыны $\{V_3^1\}^-$ элементтері $a_1^2 + a_2^2 - a_2^2 < 0$ теңсіздікті қанағаттандыратын векторлардан тұрады.

Векторлардың скаляр көбейтіндісін былайша анықтайық $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Мына түрдегі $km, km_2, km_3$ үш саннан тұратын (мұндағы кез келген нақты сан: $m_1, m_2, m_3$ - қатарынан о болмайтын сайлап алынған сандар) жиынды $< m_1, m_2, m_3 >$ деп жазайық.

- нүкте деп /яғни Л2 жазықтық элементтері деп $m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 < 0$ шартына бағынатын кез келген $< m_1, m_2, m_3 >$ жиынды айтайық.

- $\pi: \ \{V'_3\} \to Л_2$ бейнелеу $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ векторға $(a_1, a_2, a_3) \in (m_1, m_2, m_3)$ болатын $< m_1, m_2, m_3 >$ нүктені сәйкестендіретін болсын.

Осы жасалған интерпретациялар $\Sigma_Л$ аксиомалар жүйесініғ 2 аксиомасыеда орындалады.

Өйткені Л2-нің кез келген $< m_1, m_2, m_3 >$ нүктесі $\{V'_3\}$ кеңістіктің қандайда бір векторының түп бейнесі болады. Сондықтан $\pi$ сюръективті бейнелеу болады. Ал коллинеар $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$ векторлар бір ғана нүктені анықтайды.

Демек Лобачевскийдің гиперболалық жазықтығының аксиомалар жүйесі $\Sigma_Л$ қайшылықсыз болады.

Осыларға сүйеніп Гильберттің N-параллельдік аксиомасының оның қалған аксиомаларына тәуелді еместігін дәлелдеуге болады.

$\Sigma_Г$ - Гильберттік аксиомалар жүйесі, v-оның параллельдік аксиомасы, v-Лобачевскийдің аксиомасы болсын. $\Sigma * (\Sigma_Г \setminus V) \cup V_л$ аксиомалар жүйесін қарастырайық. Бұл аксиома жүйесінің қайшылықсыздығы §73-те дәлелденген. $\Sigma_Л$ аксиомалар жүйесінің толық жүйе екендігін дәлелденді. Ұзақ талқылаулар арқылы $\Sigma_Л$ және $\Sigma^*$ аксиомалар жүйесінің эквивалентті болатынын дәлелдеуге болады. Сондықтан $\Sigma_Л$-дің моделі $\Sigma^*$ үшін де модель болады. Демек $\Sigma^*$ аксиомалар жүйесі қайшылықтар және толық жүйе болады. $\Sigma^*$ -нің жасалуы бойынша бұл айтқанның v-параллельдік аксиоманың қалған аксиомаларға тәуелсіз екені, сондықтан $V_л$ Лобачевский аксиомасының орындалатыны шығады.

## 12.4 Кэли-Клейннің проективтік моделі

Лобачевскийдің гиперболалық $Л_2$ жазықтығын 3 өлшемді / индексті псевдоевклидтік кеңістіктің жорымал ұзындықты $\{V'_3\}^-$ векторлар жиынын тудырады. Осы $Л_2$ жазықтықтың проективтік моделін жасайық.

$V_3$ векторлық кеңістік тудыратын $P_2$ проективтік жазықтықта $g(\vec{x}, \vec{y})$ квадраттық форма. Қандай да бір екінші реті $F(x) = 0$ теңдеулі Q сызықты анықтайды. Мұндағы $F(x) = g(\vec{x}_1 \vec{x})$ x вектор $x \in P_2$ нүктені тудырады. $P_2$ жазықтығында кез келген проективтік түрлендіруді емес, тек $V'_3$ псевдоевклидтік векторлық кеңістіктің автоморфизмдері тудыратын түрлендірулерді ғана қарастырайық. Мұндай проективтік түрлендірулер екінші рет: Q қисықтың $M_Q$ стационар ішкі группасын құрады (яғни Q сызықты өзіне өзін көшіреді).

$V_3$ кеңістіктің $B = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ бұл ортонормаланған базисі болсын және $\vec{a}_3$ оның жорымал бірлік векторы болсын. Бұл базисте $\vec{x}$ вектор координаталары $(x_1, x_2, x_3)$ болса онда $g(\vec{x}, \vec{x}_1) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ болар еді. B базис $P_2$ проективтік жазықтықта тудырады. Проективтік $R = (A_1, A_2, E)$ ретін мұндағы $a_i$ векторлар $A_i$ нүктелерді, $\vec{e} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$ векторлары E нүктені тудырады. Бұл реактордегі Q сызықтық теңдеу.

$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ (74-19). Демек Q екінші ретті овал сызығы болды екен.

M $(m_1, m_2, m_3)$ нүкте овал сызықтың ішкі нүктесі болса (74-19) дан $m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 < 0$ болады. Демек M $(m_1, m_2, m_3)$ нүктені жорымал ұзындықты $\vec{m}$ вектор тудырады екен. Сондықтан $m \in (V_3^1)^-$.

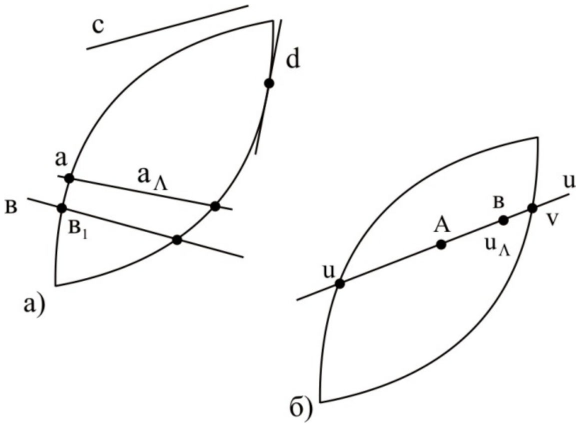
Сонымен $P_2$ проективтік жазықтықты анықтайтын $\pi : (V_3 \setminus \vec{O}) \to P_2$ бейнелеуде $\pi\left(\{V_3^1\}^-\right)$ жиын Q екінші ретті сызықтың ішкі нүктелері болады екен. Ал, $\pi$ бейнелеуде $\Sigma_л$ аксиомалар жүйесі орындалатындықтан

$\pi\left(\left\{V_3^1\right\}^-\right) = Л_2$ нүктелер жиыны (яғни Q екінші ретті сызықтың ішкі нүктелерінің жиыны) Лобачевский жазықтығының моделі болады. Q екінші ретті сызық $Л_2$ Лобачевский жазықтығының абсолюті делінеді. Осылайша құрылған бұл модель Лобачевский жазықтығының Кэли – Клейн моделі делінеді.

Енді осы модельде Лобачевскийдің гиперболалық геометриясының негізгі ұғымдарының қалай анықталатынын қарастырайық.

V векторлық кеңістік 2 өлшемді ішкі кеңістіктігін $V_2$ дейік, оның V кеңістігі жорымал ұзындықты векторларының $V^-$ жиынымен қимасы $V_2 \cap V^- = V^* \neq \phi$ бос жиын болмасын.

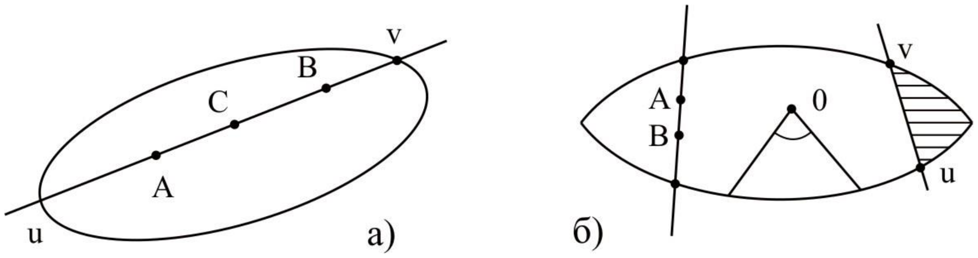
Сонда $\pi(V^*)$ фигура $Л_2$ жазықтықтағы түзу делінеді. Ал, $\pi\left(V_2 \setminus \{O\}\right) = a$ проективтік $P_2$ жазықтықтағы түзу болатындықтан $\pi(V^*)$ түзу a түзуімен Q абсолюттік ішкі облысынан қимасы болады. Сөйтіп проективтік a, в түзулер Лобачевскийдің $Л_2$ жазықтығында $a_Л$, $в_Л$ түзулерді анықтайды. Олар абсолюттік хордалары болады. Бірақ хорданың ұшы Л – түзулерге енбейді.



75-сурет

75 а-суретте a, в c, d проективтік түзулер. a мен в проективтік түзулердің Q мен қиылысуынан шыққан хордалар $a_Л$, $в_Л$ түзулерді анықтайды, ал c мен d түзулері бойында Q-дың ішкі нүктелері болмағандықтан олар $Л_2$ жазықтықта Л түзулерін анықтамайды. Проективтік түзу Лобачевский жазықтықты қандай да бір түзуді анықтау үшін, ал абсолютпен әртүрлі екі нүктеде қиылысуы керек. 75 б-сурет U проективтік түзу абсолют Q мен екі $u, v$ нүктелерінің қиылысып, $U_л$ түзуін анықтап тұр. Ол түзуді $u, v$ белгілейік. Бұл түзуде жатқан A,B екі нүкте $U, V$ екі нүкте жұбын бөлмейді, яғни $(AB, UV) > 0$ болады.

Л₂ жазықтықтағы $U, V$ түзуде жатқан А,В,С кез келген үш нүкте болса және $(AB, CU) < 0$ онда $(AB, CV) < 0$ болады. (76-а суреті).



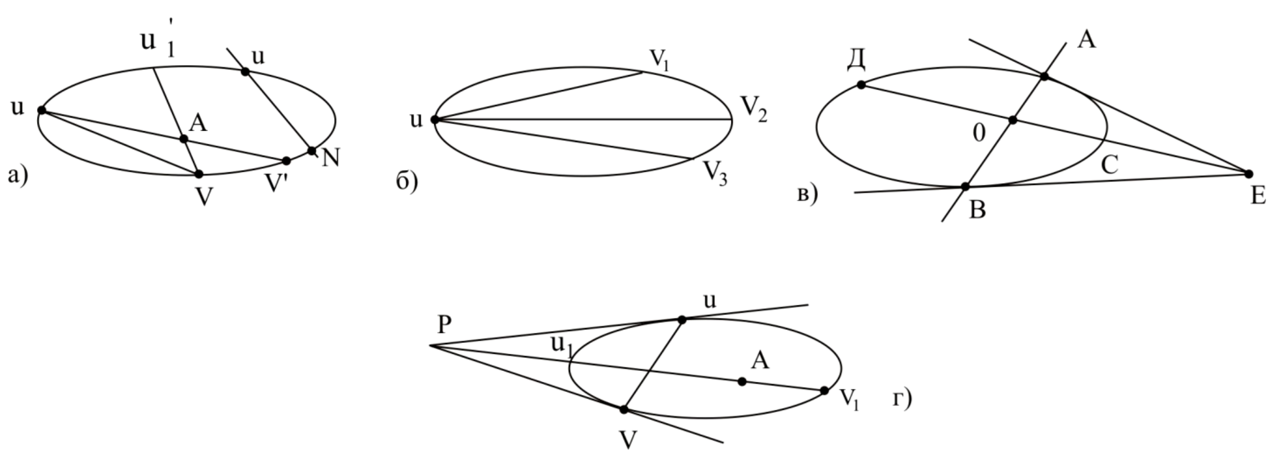
76-сурет

$U, V$ теңдеуде А, В, С нүктелер жатсын С нүкте А мен В нүктелерінің арасында жатыр делінеді, егерде А, В нүктелер жұбы $C, U$ нүктелер жұбын бөлетін болса, яғни $(AB, CU) < 0$ болса (445 а-сурет). Бұл кезде бұрыңғыша $\overline{ABC}$ деп жазатын боламыз.

$(AB, CU) = (BA, CU)$ болатындықтан $\overline{ACB}$ болса $\overline{BCA}$ болады. Гильберттің 2-ші аксиомаларының, бұдан басқаларының да Кэли-Клейн моделінде орындалатынын тексеруге болады. 445-суретте АВ кемиді, О бұрыш кескінделген, ал штрихталған бөлік $UV$ түзуімен шектелген жарты жазықтықты білдіреді. Л₂ жазықтықтың $UV$ түзуінің бойында жатқан А мен В нүктелерін арасы мына формуламен табылады.

$$\delta(A, B) = \frac{r}{2} / \ell n (AB, UV) \text{ /(74-19)}$$

Л₂ жазықтықта $UV$ түзу және онда жатпайтын А нүкте берілген (77 а-сурет) А нүктені бастыра $UV', VU'$ түзулерін жүргізейік. Хорда ұшы Л түзуге кірмейтіндіктен $UV$ түзумен $V'U$ түзуі де, $U'V$ түзуіде қиылыспайды. Ал, $UAV$ бұрышы ішінен жүргізілген түзулер $UV$ түзуімен қиылысады, ал $UAU'$ бұрыш ішінен жүргізілген түзулер $UV$ мен



77-сурет

қиылыспайды. Демек $VU', U'V$ шекаралық түзулер болады. Ол түзулерді $UV$ түзуге параллель дейді. Сөйтіп абсолюттік ортақ төбелі екі хордасы өзара параллель түзулерді кескіндейді.

Абсолюттің сыртқы бөлігінде қиылысатын екі проективтік түзу Л2-де ажырасатын түзулерді кескіндейді, мысалы, $UV, UV$ түзулер (446 а-сурет) өзара ажырасатын түзулер болады.

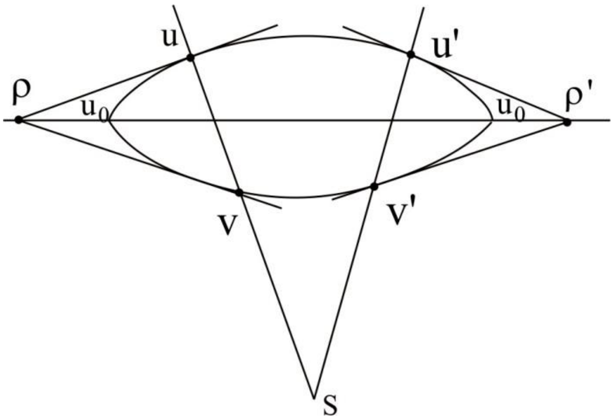
Л2 жазықтықты түзулердің бір бағыттағы параллельдігі транзитивті болады. Мысалы 75 б-суретте $UV_1 // UV_2, UV_2 // UV_3$ сондықтан $UV_1 // UV_3$ болады. (үшеуі де Q-дың бір нүктесінен шығып тұр және олар $V_1U$ бағытта параллель)

Л2 жазықтықта екі түзу өзара перпендикуляр болу үшін олардың әрқайсысын екіншісінің полюсі арқылы өтетін проективтік түзулердің Q-дағы хордалары болуы керек.

Мысалы 446 в-суретте АВ мен СД түзулер өзара перпендикуляр: себебі СД түзуі АВ түзудің полюсі Е арқылы өтеді, ал АВ түзуі СД-ның полюсі арқылы өтеді.

75 г-суретте Л2 жазықтықта $UV$ түзуі және онда жатпайтын А нүкте берілген. А нүктеден $UV$-ға перпендикуляр етіп жүргізілген түзуді салу үшін $UV$-ның полюсі Д нүктені табады (ол $U_1V$ нүктелерден Q-ға жүргізілген жанамалардың қиылысу нүктесі болады). Сонда РА түзуі $UV$ түзуіне. Егер перпендикуляр болады. 78-суретте Л2 жазықтықта $UV_1U'V'$ екі түзу берілген. Ол түзулер Q дан тыс жерде қиылысатындықтан өзара ажырасатын түзулер болады. Осы екі түзуге ортақ бір перпендикуляр жүргізуге болады. Ол ортақ перпендикуляр салу үшін $UV_1U'V'$ проективтік түзулердің қиылысу нүктесі S-ті табамыз (447-сурет). $U_1V_1U'V'$ нүктелердің Q-ға жанамалар жүргіземіз. Олар $\rho_1\rho'$ нүктелерде қиылыссын. Сонда $\rho\rho''$ түзуі $UV, U'V'$ түзулердің полюстері $\rho$ мен $\rho'$ арқылы өтетіндіктен, $UV, U'V'$ түзулер $\rho\rho'$ түзудің полюсін айту керек. Ал, $UVnU'V' = S$ болатындықтан S нүкте $\rho\rho'$ түзудің полюсі болады.

Шарт бойынша S абсолюттің сыртқы облысының нүктесі. Сондықтан оның поляры Q-ды екі нүктеде $U_0, V_0$ қиады. $U_0V_0$ түзу $UV_1$ $U'V'$ түзулердің полюстері $\rho, \rho'$ нүктелерінен өтетіндіктен $U_0V_0 \perp UV, U_0V_0 \perp U'V'$ болады. Сөйтіп $U_0K_0$ түзуі $UV, U'V'$ түзулерге ортақ перпендикуляр болады.



78-сурет

Өйткені іздеген хорда $\rho, \rho'$ нүктелерден өтетін проективтік түзуде жату керек. Ал, екі нүктені басып тек бір проективтік түзу өтетіні белгілі.

### Қайталауға арналған сұрақтар

1. Лобачевский аксиомасы қалай тұжырымдалады?
2. Лобачевский жазықтығындағы түзуге одан тыс жататын нүктеден қиылысатында, қиылыспайтында шексіз көп түзулер жүргізуге болатынын дәлелдеу. Шекаралық түзу?
3. Лобачевскийдік параллель түзу деген не?
4. Параллельдік бұрыш, оның $0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$ болатындығы
5. $a_1$ түзу а түзуге өзінің бір нүктесінде шекаралық түзу болса, онда ол өзінің кез келген нүктесінде де шекаралық нүкте болатынын дәлелдеу
6. Параллельдік бұрыштың шамасы нүктенің түзуден қашықтығына байланыстылығын дәлелдеу
7. Лобачевский планиметриясында мына тұжырымдарға дәлелдеу

- Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы 2d-дан кіші болады
- АВС үшбұрыштың АС қабырғасының Е ішкі нүктесі болса, онда $ДАВС = ДАВЕ + ДЕВС$ болады. СД –үшбұрыштың дефектісі. Үшбұрыштың дефектісі деп нені айтады?
- Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы тұрақты болмайды.
- Дөнес көпбұрыштардың бұрыштарынан қосындысы 2d-дан кем болады.
- Үшбұрышы тік үшбұрыштардан тік болатындығы
- Екі түзуге ортақ екі перпендикуляр болмайды.

8. Саккери төртбұрышы қандай болады? Оның сүйір бұрыш проблемасының орындалатындығы
9. Параллель түзулердің өзара орналасуы туралы теорема параллельдіктің симметриялылығы туралы теорема, транзитивтігі туралы теорема, транзитивтігі туралы теорема
10. Параллель түзулердің біріндегі ағымдағы нүктенің екінші түзуден қашықтығы туралы теорема.
11. Ажырасатын түзу деген не? Ондай түзудің болатындығы туралы теоремалар.

12. Параллель түзулердің ортақ перпендикулярының болмайтындығы, ажырасатын түзулерде ортақ перпендикулярдың біреу-ақ болмайтындығы.
13. Түзулер шогы қандай жағдайда эллипстік, гиперболалық, параболалық делінеді.
14. Тең көлбеулі қиюшы деген не және әртүрлі шақта тең көлбеулі қиюшыны салу жолы.
15. Лобачевский жазықтығындағы сызықтар: шеңбер, эквидистанта, орицикл. Оларды салу. Олардың түзу болмайтындығын дәлелдеу. Олардың өздерінің кез келген өсіне қарағанда симметриялы фигура болатындығы, оларды жасаған жоқ түзулерінің ортогонал траекториясы болатындығы.
16. Шеңберге іштей сызылған диаметрге тірелетін бұрыштың тік болмайтындығын дәлелдеу.
17. Барлық орициклдердің тең болатынлығы
18. Лобачевский кеңістігіндегі мына теоремалардың дәлелі

- өзара параллель түзулерді басып өтетін жазықтықтардың қиылысу сызығы да ол түзулерге параллель болады.
- Бұл түзуге параллель екі түзу өзара параллель болады.
- Түзу жазықтықтағы түзуге параллель болса, онда жазықтықтың өзіне де параллель болады.

19. Параллельдік конус деген не? Оның төбесінен үш типті жазықтықтың өтетіндігі
20. Жазықтыққа параллель түзу арқылы оған тек бір параллель түзу өтеді деген теорема.
21. Лобачевский кеңістігіндегі түзулер байламы, беттер, сфера, арисфера, эквидистанталық бет. Олардың қасиеттері.
22. Лобачевский геометриясы және оның қыйшылықсыздығы Пуанкоре және Кэли-Клейннің евклидтік интерпретациялары.
23. Сфералық геометрия, оның негізгі ұғымдары: үлкен, кіші шеңбердер, диаметрлі қарама-қарсы нүктелер полюс поляр, полярлы түйіндес нүктелер, сфералық қашықтық, сфера қозғалысы.
24. Сфералық бұрыш, сфералық екі бұрыш, сфералық үшбұрыш. Үшбұрыштардың теңдік белгілері
25. Сфералық үшбұрыштардың қабырғалары, бұрыштары мен ұабырғалары арасындағы байланыстар
26. Сфералық үшбұрыштың қабырғаларының қосындысы туралы, бұрыштарының қосындысы туралы теоремалар. Сфералық үшбұрыштың эксйессі.
27. Полярлы үшбұрыштар. Сфералық дөңгелек
28. Сфералық үшбұрыштар үшін синус, косинус теоремалары
29. Сфералық екі бұрыш, сфералық үшбұрыш аудандары
30. Сфералық геометриядағы екі жақтылық принцип және оған мысал.
31. Риманның эллипстік геометриясы. Риманның эллипстік жазықтығының моделі
32. Риман геометриясында

- екі нүктені бастыра қанша түзу жүргізуге болады
- екі түзу қанша нүктеге қиылысады.
- Риман жазықтығын Риман түзуі 2-ге бөледі ме жоқ па?
- Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы неге тең болады.
- Әрбір түзудің қанша полюсі болады.
- Бір түзуге перпендикуляр түзулердің қасиеті қандай
- $S_2$ жазықтықпен жазықтықта жатқан фигуралар қасиеттерінің сфера радиусына қандай қатысы бар
- $S_2$ жазықтықта екі үшбұрыштың сәйкес қабырғалары тең болса, сәйкес үшбұрыштары қандай болады.

33. Риман геометриясындағы екі жақтылық принцип қандай?
34. Псевдоевклидтік кеңістік деген не, онда қандай векторлар болуы мүмкін. Скаляр көбейту, вектор ұзындығы қалай анықталады? Изотропты вектор деген не. Ортонормаланған базис деген қандай болады?
35. Псевдоевклидтік кеңістікте $\left(\vec{x}, \vec{y}\right)^2 \geq \vec{x}^2 \vec{y}^2$ екенін дәлелдеу.
36. Лобачевскийдің гиперболалық геометриясы гиперболалық $Л_2$ кеңістікте нүкте арасы қалай анықталады, $Л_n$ кеңістіктен қисықтық радиусы деп нені айтады.
37. $\Sigma_л$ аксиомалар жүйесі. Оның қайшылықсыздығы $\Sigma^* = (\Sigma r \setminus v) nUY_л$ аксиомалар жүйесінің қайшылықсыздығы, толықтылығы. V-аксиоманың тәуелсіздігі
38. $Л_2$ үшін Кэли-Клейн моделі. Ол моделге негізгі ұғымдардың (Л-жазықтық, Л-жарты жазықтық, Л-түзу, Л-нүкте, Л-кесінді, Л-бұрыш. Параллель, ажырасатын, перпендикуляр түзулер қалай анықталады).
39. Л түзуге L нүктеден перпендикуляр түзу жүргізу, екі ажырасатын түзуге ортақ перпендикудяр жүргізу.

## 13. Геометриялық шамаларды өлшеу

Геометриялық шамаларды (кесінді, доға ұзындықтарын, бұрыш шамасын, фигура ауданы мен көлемін) өлшеу практикалық мәні күшті, жиі кездесетін таныс мәселелер. Сонымен, қатар олардың (фигуралардың, ұзындықтарының, аудандарының, көлемдерінің) болатындығын және жалғыздығын дәлелдеу, ғылыми негіздеу оңай мәселе емес. Біз оларды аксиоматикалық жолмен анықтаймыз.

### 13.1 Кесінділерді өлшеу.Кесінді ұзындығы,оның бар болуымен жалғыздығы

Кесінді ұзындығының болатындығын және оның жалғыздығын абсолюттік геометрияның Гильберт ұсынған аксиомалар жүйесіне (II, III топ аксиомалары мен Архимед аксиомасы) сүйене отырып, дәлелдейміз.

1. L-барлық кесінділер жиыны, $R^+$ барлық оң нақты сандар жиыны болсын.

Кесінділер жиыны L-де кесіндіні өлшеу процессі анықталған делінеді, егер бұл жиындар арасында $\rho:L\rightarrow R^+$ бейнеленуі анықталып, ол мына үш аксиома талабын қанағаттандырса:

$1^0$-талап. AB=СД тең кесінділері үшін $\rho(AB)=\rho(CD)$ болсын,

$2^0$-талап. Түзудің $\overline{ABC}$ нүктелері үшін $\rho(AB)+\rho(BC)=\rho(AC)$болсын,

$3^0$-талап. $\rho(PQ)=1$ болатын PQ кесінді бар болсын.

Мұндағы $3^0$-талапты қанағаттандыратын PQ кесіндіні және оған тең болатын кезкелген кесіндіні бірлік кесінді немесе сызықтық бірлік (бірлік өлшем) дейді, ал бірлік өлшемі көрсетілген $\rho(AB)$ нақты оң санды AB кесіндінің ұзындығы немесе өлшемі дейді. Көп жағдайда кесіндінің сызықтық өлшемін айтбай-ақ AB кесіндінің ұзындығы $\rho(AB)$ саны делінеді.

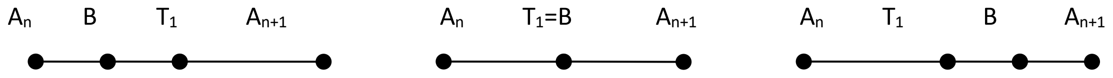
Ендігі мақсат абсолюттік геометрияда, сол сияқты абсолюттік геометрия аксиомаларын қанағаттандыратын кез келген теорияда $1^0$-$3^0$ аксиомалар жиыны кез келген кесінді ұзындығын бір мәнді анықтайтынын көрсету. Басқаша айтқанда $1^0$-$3^0$ аксиомаларды қанағаттандыратын $\rho:L\rightarrow R^+$ бейнелеудің әруақытта болатынын және PQ сызықтық бірлік берілген жағдайда бұл бейнелеудің бірмәнді болатынын дәлелдеу.

AB кез келген кесінді. PQ-сызықтық бірлік кесінді болсын.

а) Алдымен бірлік кесінді берілген жағдайда $\rho:L\rightarrow R^+$ бейнелеудің болатындығын дәлелдейік. Ол үшін кесінді ұзындығын табудың үйреншікті қарапайым әдісін пайдаланамыз.

$AB$ кесіндіге ұзындығы делінетін $A$ оң жақты санды анықтау процессін (жолын) қарастырайық. Ол процесс кесіндіні өлшеу деп аталады. Бұл мақсатта $a=n,n_1,n_2,n_3...$ түрдегі екілік бөлшекті пайдаланайық, мұндағы $n$- кез келген натурал сан, ал $n_i$ -лер не-0, не-1 болатын сандар.

$AB$ кесіндіге $A$ нүктеден бастап бірлік кесінді $PQ$-ді өлшеп саламыз. Сонда $AA_1=A_1A_2=A_2A_3=\ldots=A_{n-1}A_n=\ldots=PQ$ кесінділер шығады. Бұл бөлуші нүктелердің бірі (мысалы $A_n$ нүкте ) $B$ нүктесімен беттессе, яғни бірлік $PQ$ кесінді $AB$ кесіндіге дәл $n$ рет түссе, онда $a=n$ сызықтық бірлікке тең болғаны. Егер $A_i$ нүктелердің ешқайсысы $B$ нүктесімен беттеспесе, онда Архимед аксиомасы бойынша $A_nA_{n+1}$ нүктелері табылып $B$ нүктесі бұл екі нүктенің арасында жатады (яғни $A_nBA_{n+1}$ болады) $A_nA_{n+1}$ кесіндінің қақ ортасын $T_1$ дейік. Сонда $B$ нүкте не $A_nT_1$ кесіндіде жатады, не $T_1$ нүктесімен беттеседі, не $T_1A_{n+1}$ кесіндісінде жатады (79-сурет)



79-сурет

а) жағдайда, яғни $A_nBT_1$ болған кезде $a=n,0\ldots$дейік

б) жағдайда, яғни $B\equiv T_1$ беттескен кезде $a=n,1$ $(a=n+\frac{1}{2})$ дейік

в) жағдайда, яғни $T_1BA_{n+1}$ болған кезде $a=n,1\ldots$ дейік

Егер $B$ нүкте мен $T_1$ нүкте дәл беттессе онда өлшеу процессін тоқтатамыз, $a=n,1$ $(a=n+\frac{1}{2})$ деп есептейміз. Ал, $B$ нүкте $T_1$ беттеспеген жағдайда (яғни а,в жағдайларда) өлшеу процессін одан ары созамыз.

$B$ жатқан кесіндінің (олар $A_nT_1$ мен $T_1A_{n+1}$ бірі) ортасын $T_2$ дейік. $B$ нүктесі $A_nT_1$ кесіндісінде жатса тағы мынадай үш жағдай болады. $\overline{A_nBT_2}$, $B\equiv T_2, \overline{T_2BT_1}$ бұл жағдайда сәйкесінше, $a=n,00\ldots$,$a=n,01$ $(a=n+\frac{1}{2})$; $a=n,11\ldots$болады. Ал $B$ нүкте $T_1A_{n+1}$ кесіндіде жатса, онда мына үш жағдай болады: $\overline{A_nBT_2}$ , $B\equiv T_2$, $\overline{T_2BT_1}$ бұл жағдайларда сәйкесінше $a=n,00\ldots$; $a=n,01$ $(a=n-1/4)$ ; $a=b,11\ldots$ болады. Ал, $B$ нүкте $T_1A_{n+1}$ кесіндіде жатса, онда мына үш жағдай болады. $\overline{T_1BT_2}$, $B\equiv T_2$, $\overline{T_2BA_{n+1}}$ . Бұл кезде, сәйкесінше $a=n,10\ldots$; $a=n,11$; $a=11\ldots$ болады. Бұл кездерде де $B\equiv T_2$ мен беттессе 1-жағдайда $a=n,01$, 2-жағдайда $a=n,11$ деп есептейміз. Қалған жағдайларда өлшеу процессін одан ары саламыз.

Осы процесті соза отырып белгілі бір Q санын анықтаймыз. Сөйтіп кез келген AB кесіндіге оны өлшеу нәтижесінде оң нақты ρ(AB) санын сәйкестендіретін $\rho:L\rightarrow R^+$ бейнелеуін құрдық.

б)Енді бұл бейнелеулік $1^0$-$3^0$ аксиома талаптарын қанағаттандыратынын дәлелдейік.

$3^0$ аксиоманың орындалатыны айқын. Өйткені жоғарыда баяндалған өлшеу процесін бірлік кесінді PQ-дын өзіне қолдансақ ρ(PQ)=1 болып шығады (PQ кесіндіге PQ кесіндісін бірақ рет өлшеп салуға болады).

$1^0$ аксиомада орындалады. AB=CD тең кесінділерді қарастырайық. Бұлар тең болғандықтан AB,CD сәулелері бірлік кесінді PQ-ды өлшеп салғанда шығатын нүктелердей орналасу тәртібі бірдей болады және ұшы осы нүктелер болатын кесінділермен барлығы өзара тең болады.

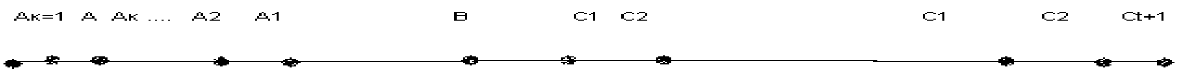
Сондықтан, егер $\rho(AB)= n,n_1,n_2,n_3\ldots$, $\rho(CD)=m,m_1,m_2,m_3\ldots$ болса, $n=m$, $n_1=m_1$, $n_2=m_2$, $n_3=m_3\ldots$болып шығады, яғни ρ(AB)=ρ(CD) болады. Сөйтіп AB=CD болса, p(AB) =p(CD) болады.

$2^0$ аксиоманың орындалатындығын дәлелдеу абсолюттік геометрияның төмендегі екі тұжырымына сүйенеді.

**1-тұжырым**. Егер кесінділер CD<AB болса, онда p(CD)<p(AB) болады.

Дәлелі: AB-ға CD-ны өлшеп салсақ $CD=AB_1$ шығады және $AB_1B$ болады. Сондықтан өлшеу процессінің орындалу тәртібі, бойынша $p(AB_1)<p(AB)$ болады. Сондықтан $AB_1=CD$ болғандықтан p(CD)<p(AB) болады.

**2-тұжырым**. Егер PQ бірлік кесінді болса және $T_1$ деп PQ-дың $T_2$ деп $PT_1$-дің, $T_3$-деп $PT_2$-нің,…, $T_n$ деп $PT_{n-1}$ дің қақ орталарын белгілесек, онда $PT_n$ кесінді PQ кесіндінің $\frac{1}{2^n}$ бөлігі делінеді және бұл бөлік EF кесіндіге дәл k-рет түссе (өлшеп салынса), онда p(EF) = $\frac{k}{2^n}$ болады. (Дәлелі ұзақтау, шындығы айқын. Сондықтан дәлелімізді алайық). Енді осы тұжырымдарды пайдалана отырып $2^0$ аксиоманы $p=L\rightarrow R^+$ бейнелеуді қанағаттандыратынын дәлелдейік. A,B,C бір түзудегі әр түрлі нүктелер болсын және $\overline{ABC}$ болсын. p(AB)=a, p(BC)=b, p(AC)=c дейік. a+b=c болатынын дәлелдеу керек. Ол үшін кері жорып a+b≠c дейік. Онда |а+в-с|>0 деуге болады. N натурал санын |а+в-с|> $\frac{1}{2^n}$ (*1) болатындай етіп алайық. PQ-дың $\frac{1}{2^n}$ бөлігі $PP_n$ болсын. Оны $BA_1BC$ сәулелеріне өлшеп салайық. Сонда $PP_n$-ге тең $BA_1$, $A_1A_2$,... және $BC_1$, $C_1$ $C_2$,...кесінділер шығады (80-сурет)



80-сурет

Архимед аксиомасы бойынша $A_k$, $A_{к+1}$, $C_t$, $C_{t+1}$ нүктелері табылып $BA_k \leq AB < BA_{к+1}$ (*2), $BC_t \leq BC < BC_{t+1}$ (*3) болуы керек. Онда мынадай $A_kC_t \leq AC < A_{k+1}C_{t+1}$ (*4) болатыны айқын.

Сонда бірінші тұжырым бойынша (*2,*3)-тен $p(BA_k) \leq a < p(BA_{k+1})$, $p(BC_t) \leq b < p(BC_{t+1})$ болар еді. Ал 2-тұжырым бойынша соңғы теңсіздіктен $\frac{k}{2^n} \leq a < \frac{k+1}{2^n}$, $\frac{t}{2^n} \leq b < \frac{t+1}{2^n}$ болады, бұлардан $\frac{k+t}{2^n} \leq a+b < \frac{k+t+2}{2^n}$ (*5).

(*4)-тен 1-2-тұжырымды ескерсек $\frac{k+t}{2^n} \leq c \prec \frac{k+t+2}{2^n}$ (*6)болады. Соңғы екеуінен $|\ а+в-с\ | < \frac{1}{2^{n-1}}$. Ал бұл (*1)-ге қайшы. Сондықтан а+в=с болады.

Сонымен абсолюттік геометрияда кесінді ұзындығы <u>болатындығы туралы **мына теорема** дәлелденді.</u>

Бірлік кесінді PQ қандай болса да $1^0$-$3^0$ аксиомаларды қанағаттандыратын $P:L \to R^+$ бейнеленуі болады және p(AB) ол кесінді өлшеу нәтижесінде шығатын сан болады.

в) <u>Енді $P:L \to R^+$ бейнеленуі **жалғыз-ақ болатынын дәлелдеу керек.**</u> Ол үшін мына леммаларды пайдаланамыз.

<u>1-лемма.</u> Бірлік кесінді PQ арқылы кесіндіні өлшеу іске асырылған болсын. Сонда шыққан $A_0, A_1, A_2 ... A_n$ нүктелер былайша орналассын: $\overline{A_0A_1A_2}$, $\overline{A_1A_2A_3}$ ,..., $\overline{A_{n-2}A_{n-1}A_n}$ және $A_0A_1 = A_1A_2 = \ldots = A_{n-1}A_n = PQ$ болсын, онда $|A_0,A_n| = n$ болады (мұндағы $|A_0,A_n|$ деген $A_0,A_n$ кесінді ұзындығы дегенді білдіреді). Дәлелі.

$\overline{A_1A_2A_3}$ болғандықтан $2^0$-аксиома бойынша $|A_0,A_2| = |A_0,A_1| + |A_1,A_2|$, ал $A_0A_1 = A_1A_2 = PQ$ және $|PQ| = 1$ болатындықтан $|A_0,A_2| = 1+1 = 2$. Осы сияқты $|A_0,A_3| = |A_0A_2| + |A_2A_3| = 2+1 = 3$, $|A_0A_4| = |A_0A_3| + |A_3A_4| = 3+1 = 4$ , ..., $|A_0A_n| = |A_0A_{n-1}| + |A_{n-1}A_n| = n-1+n = n$ болып шығады.

<u>2-лемма.</u> Кесіндіні өлшеу анықталған болса, онда AB<CD-дан $|AB| < |CD|$ болатыны шығады.

<u>Дәлелі.</u> AB сәулеге CD=AE кесінді өлшеп саламыз. Сонда $\overline{ABE}$ болады. $2^0$ аксиома бойынша $|AB| + |BE| = |AE|$ болады. Ал, $|BE| > 0$, AE=CD

болғандықтан $1^0$-аксиома бойынша $|AE|=|CD|$ болады. Бұлардан $|AB|<|AC|=|CD|$ болады. Сөйтіп, $|AB|<|CD|$ болады екен.

3-лемма. Кесіндіні өлшеу анықталған болса, О нүкте АВ-ның ортасы болса, онда $|AO|=|OB|=\frac{1}{2}|AB|$ болады.

**Дәлелі.** $\overline{AOB}$ болғандықтан $2^0$ аксиома бойынша $|AO|+|OB|=|AB|$. Ал, ОА=ОВ болғандықтан $1^0$-аксиома бойынша $|OA|=|OB|$. Сонда соңғыдан $2|AO|=|AB|$, $|AO|=\frac{1}{2}|AB|$.

Енді кесінді ұзындығының жалғандығын дәлелдеуге болады.

**Теорема.** Егер бірлік кесінді PQ сайлап алынған болса, онда кесінді өлшеудің $1^0$-$3^0$ аксиомаларын қанағаттандыратын бірден көп емес $p:L\rightarrow R^+$ бейнелеуі болады.

**Дәлелі:** $1^0$-$3^0$ аксиомаларды қанағаттандыратын $p:L\rightarrow R^+$ бейнелеуден басқа тағы да $g:L\rightarrow R^+$ бейнелеу бар дейік. Онда p(PQ)=g(PQ)=1 (1) болу керек. Ал, p мен g әртүрлі бейнелеу болғандықтан олар АВ кесіндіге әртүрлі санды сәйкестендірулері керек. p(AB)=a, g(AB)=b және $a\neq b$ дейік. Мысалы a<b (2) болсын.

АВ сәулеге PQ-ға тең $AA_1, A_1A_2, .., A_{n-1}A_n$ кесінділерді өлшеп салайық және n-ді $\overline{ABA_n}$ болатындай етіп алайық. Онда $A_{n-1}\in AB$ болады (Архимед аксиомасы бойынша мұндай болатын n табылады).

1-лемма бойынша (1) ескерсек $p(AA_{n-1})=g(AA_{n-1})=n-1$ (3), $p(AA_n)=g(AA_n)=n$ (4) болады. (3) бойынша В мен $A_{n-1}$ нүктелер беттеспейді. Өйткені беттессе p(AB)= g(AB) болып шығар еді, ал олар (2) бойынша тең емес. Сондықтан $\overline{A_{n-1}BA_n}$ болады. Демек $AA_{n-1}<AB<AA_n$.

2-лемма бойынша $p(AA_{n-1})<p(AB)<(AA_n)$ болады. (3), (4) бойынша $n-1<a<n$. Осы сияқты g бейнелеу үшін $n-1<b<n$. Сөйтіп, $b-a<1$. $P_1$ нүкте $A_{n-1}A_n$ кесіндінің ортасы болсын. Онда $2^0$-аксиома бойынша $p(AP_1)=p(AA_{n-1})+$ $+p(A_{n-1}P_1)$. Сонда (3)-ті ескерсек 3-лемма бойынша $p(AP_1)=n-1+(1/2)=n-1/2$. Осы сияқты $g(AP_1)=n-1/2$ болады. Сондықтан $P_1$ нүкте В мен беттеспейді де не $\overline{A_{n-1}BP_1}$, не $\overline{P_1BA_n}$ болады. Бірінші жағдайда $AA_{n-1}<AB<AP_1$ болады да 2-лемма бойынша $n-1<a<n-1/2$ болады. Осы сияқты $n-1<b<n-1/2$. Сондықтан $b-a<1/2$ болады. Екінші жағдайда да дәл осындай болады.

В нүктеге енетін $A_{n-1}P_1$ (не $\overline{P_1A_n}$) кесіндінің ортасын $P_2$ дейік. Алғашқыдай талдаулар арқылы бұл кезде $b-a<1/2^k$ болатынын дәлелдеуге болады. Осылайша соза берсек k-қадамнан кейін $b-a<1/2^k$ болып шығады. Демек p мен g әртүрлі бейнелеу деген дұрыс емес, олар беттеседі.

2. Енді мына теореманы дәлелдейік.

**Теорема.** $a>0$ қандай нақты сан болмасын, таңдап алынған бірлік кесіндіге сай ұзындығы а-ға тең болатын кесінді болады.

**Дәлелі:** а-ны екілік бөлшек түрінде жазайық $a=n,n_1,n_2,n_3\ldots$ жазайық.

а) а-саны шекті екілік бөлшек арқылы өрнектелмесін. Бұл бір нөмірден бастап екілік бөлшек ылғи 1-санынан тұрмайды деген сөз. А нүктен шығатын сәуле алып, А нүктеден бастап бірлік кесінді (бірлік өлшемге) PQ-ға тең $AA_1$, $A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1}\ldots$ кесінділерді өлшеп салайық. Соңғы $A_nA_{n+1}$ кесіндінің қақ ортасы $T_1$ болсын. $a=n,n_1,n_2\ldots$ санындағы $n_1=0$ болса $T_1$-ден сол жағындағы $A_nT_1$ кесіндіні, $n_1=1$ болса $T_1$-ден оң жағындағы $T_1A_{n+1}$ кесіндіні $\ell_1$ дейік. Одан кейін $\ell_1$-дің қақ ортасы $T_2$ нүктені тауып $n_2=0$ болса $T_2$-нің сол жағындағы $\ell_1$-дің бөлігін, $n_2=1$ болса, $T_2$-нің оң жағындағы $\ell_1$-дің бөлігін $\ell_2$ дейік. Егер осы процессті шексіз соза берсек бірінің ішіне бірі орналасқан $\ell_1, \ell_2 \ldots$ кесінділер тізбегі шығар еді. Сондықтан Кантор аксиомасы бойынша бұл кесінділердің барлығына ортақ бір В нүкте болады. Осылайша шыққан АВ кесіндінің ұзындығы бірліктен $a=n_1n_2n_3\ldots$ саны болады. Егер а-саны шекті екілік бөлшек арқылы өрнектелген болса, онда ұзындығы а-ға тең болатын кесіндінің соңғы нүктесі (екінші ұшы) В нүкте жоғарыда айтылған $A_n,T_1T_2\ldots$ нүктелердің бірі болады.

Сөйтіп а-санының ұзындығы болатын АВ кесінді әруақытта болады.

Абсолюттік геометрия аксиомалары Гильберт, Вейль, Лобачевский, Погорелов, Атанасян аксиомалары негізінде жасалған теореманың барлығы орындалатындықтан Гильберт, Лобачевский, Атанасян теоремаларында бірлік кесінді еркін алынған сол арқылы кесіндіні өлшеуге, Вейль теориясында АВ кесінді ұзындығы үшін $\overrightarrow{AB}$ векторлар нормасы алынады, Погорелов теоремасында таңдап алынған бірлік кесінді арқылы кесіндіні өлшеу, өлшеу аксиомалары негізінде жүргізіледі.

## 13.2 Көпбұрыштың ауданы

П жазықтығын алайық. Осы жазықтықта жатқан n-1 қабырғасы $A_1A_2\ldots A_n$ сынық сызықты қарастырайық.

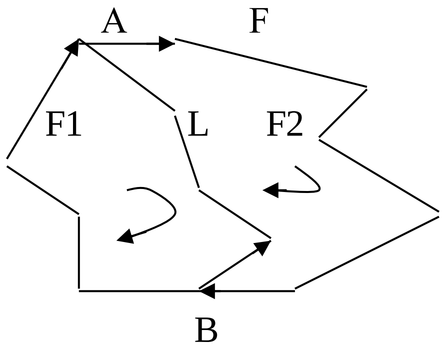
Егер бұл сынық сызықтың сыбайлас екі қабырғасы бір түзуде жатпаса, ал сыбайлас емес қабырғалары өзара қиылыспаса, онда оны жай сынық сызық дейді. Сынық сызықтың ұштары өзара беттессе ол жай тұйық сынық сызық делінеді. Жай тұйық сынық сызық жазықтықтағы бұл сызық басында жатпайтын барлық нүктелер жиынын осы сызыққа қарағанда екі жиынға- ішкі және сыртқы жиынға бөледі.

Жай тұйық сынық сызық пен оның ішкі облысының бірігуін жай көпбұрыш дейді. Жай көпбұрышты қоршап тұрған сынық сызық оның шекарасы делінеді.

81-суретте F жай тұйық көпбұрыштың шекарасында жатқан A,B нүктелер жай L сынық сызықпен қосылған. Сонда $Ғ_1$,$Ғ_2$ көпбұрыш шыққан. Бұл кезде Ғ екі көпбұрышқа жіктелген және Ғ ол екі көпбұрыштың қосындысы делінеді де $Ғ=Ғ_1+Ғ_2$ деп жазылады.

Егер көпбұрыштың төбелері реттелген болса онда ол бағдарланған көпбұрыш делінеді. Оның үстіне сызықша қою арқылы $\overline{F}=\overline{A_1A_2...A_n}$ белгілейді.

Егер $Ғ_1$ мен $Ғ_2$ көпбұрыштар шекаралары және оның сыртқы бөлігі (яғни Ғ-тің шекаралары) бір бағытта болатындай етіп бағдарланса, онда олардың бағдары келісілген делінеді. Ол үшін L сынық сызық $Ғ_1$ мен $Ғ_2$ де қарама-қарсы бағытталуы керек (81-суретте бағдар стрелка арқылы көрсетілген).



81-сурет

П Евклид жазықтығын алайық, $\vec{a}$, $\vec{b}$ оған параллель векторлар болсын, ал $\vec{k}$ бұл жазықтыққа нормал бірлік вектор болсын, бұл үш вектордың аралас көбейтіндісін былайша $\vec{a}\vec{b}=\vec{a}\vec{b}\vec{k}$ белгілейік және П жазықтығына $\vec{i}$, $\vec{j}$ координата жүйесін $\vec{i}\vec{j}\vec{k}=1$ болатындай етіп ендірейік.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ вектор координаталары ($\vec{i}$, $\vec{j}$) базисте $\vec{a}$={$a_1$,$a_2$}, $\vec{b}$={$b_1$,$b_2$} болса, онда ($\vec{i}\vec{j}\vec{k}$) базисте $\vec{a}$={$a_1$,$a_2$,0}, $\vec{b}$={$b_1$,$b_2$,0}, $\vec{k}$={0,0,1} болар еді.

$$\vec{a}\vec{b}=\vec{a}\vec{b}\vec{k}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ болатындықтан}$$

$$\vec{a}\vec{b}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad (76\text{-}1)$$

Бұл формуладан мына формулалардың дұрыстығы шығады:

$\vec{a} \circ \vec{b} = -\vec{b} \circ \vec{a}$ (76-2)

$\vec{a} \circ \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$; $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \circ \vec{c} = \vec{a} \circ \vec{c} + \vec{b} \circ \vec{c}$ (76-3)

Себебі $\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ жəне

$$\vec{a} \circ \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & (b_1 + c_1) \\ a_2 & (b_2 + c_2) \end{vmatrix} = a_1 b_2 + a_1 c_2 - a_2 b_1 + a_2 c_1 = a \circ b + a \circ c$$

П жазықтығында О нүктесі жəне $\overline{F} = \overline{A_1 A_2 ... A_n}$ бағдарланған n-бұрышы берілген. О мен $\overline{F}$ қосатын векторларды $\overrightarrow{OA_i} = \vec{\tau_i}$ дейік. Мына санды

$\left[\overline{F}\right] = \vec{\tau_1} \circ \vec{\tau_2} + \vec{\tau_2} \circ \vec{\tau_3} + ... + \overrightarrow{\tau_{n-1}} \circ \vec{\tau_n} + \vec{\tau_n} \circ \vec{\tau_1}$ (76-4)

$\overline{F}$ көпбұрыштың харектеристикасы дейді.

$\overrightarrow{O}\vec{i}\vec{j}$ тікбұрышты координата жүйесінің төбелер координаталары $A_i(x_i y_i)$ десек, онда (76-4)-ті былайша жазуға болар еді, (76-1) бойынша

$\left[\overline{F}\right] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + ... + \begin{vmatrix} x_{n-1} & x_n \\ y_{n-1} & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{vmatrix}$ (76-5)

### Көпбұрыш характеристикасының қасиеттері

$1_0$. Көпбұрыштың характеристикасы-[$\overline{F}$] О нүктені жазықтықтың қай жерінен алуына байланысты болмайды.

Дəлелі. П жазықтықтан О нүктесінен басқа $O'$ нүкте алайық жəне $\overrightarrow{O'A_i} = \vec{\tau_i}$ деп белгілейік. $O'$ нүктеге қарағандағы $\overline{F}$ көпбұрыштың характеристикасы $\left[\overline{F}\right]'$ болсын, онда ол $\left[\overline{F}\right]' = \vec{\tau_1'} \circ \vec{\tau_2'} + \vec{\tau_2'} \circ \vec{\tau_3'} + ... + \vec{\tau_n'} \circ \vec{\tau_1'}$ болар еді.

(76-2),(76-3) формулаларды ескерсек жəне $\overrightarrow{O'O} = \vec{p}$ десек

$$\vec{\tau_1'} \circ \vec{\tau_2'} = \left(\vec{\tau_1} + \vec{p}\right) \circ \left(\vec{\tau_2} + \vec{p}\right) = \vec{\tau_1} \circ \vec{\tau_2} + \vec{p} \circ \vec{\tau_2} + \vec{\tau_1} \circ \vec{p} + \vec{p} \circ \vec{p} = \vec{\tau_1} \circ \vec{\tau_2} + \vec{p} \circ \vec{\tau_2} + \vec{\tau_1} \circ \vec{p}$$

$$\vec{\tau_2'} \circ \vec{\tau_3'} = \left(\vec{\tau_2} + \vec{p}\right) \circ \left(\vec{\tau_3} + \vec{p}\right) = \vec{\tau_2} \circ \vec{\tau_3} + \vec{p} \circ \vec{\tau_3} + \vec{\tau_3} \circ \vec{p}$$

……………………………………………………………

$$\vec{\tau_n'} \circ \vec{\tau_1'} = \left(\vec{\tau_n} + \vec{p}\right) \circ \left(\vec{\tau_1} + \vec{p}\right) = \vec{\tau_n} \circ \vec{\tau_1} + \vec{p} \circ \vec{\tau_1} + \vec{\tau_n} \circ \vec{p}$$

Бұларды қоссақ (76-2)-ні ескерсек $\left[\overline{F}\right]' = \left[\overline{F}\right]$ болып шығады.

$2_0$. Егер $\overline{F'} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$ болса, онда $\left|\left[\overline{F}\right]\right| > \left|\left[\overline{F_1}\right]\right|$, $\left|\left[\overline{F}\right]\right| > \left|\left[\overline{F_2}\right]\right|$ болады.

$3_0$. Егер $\overline{F}$ еркін алынған бағдарланған көпбұрыш болса $\left[\overline{F}\right]\neq 0$ болады, сондықтан │ [F] │ >0 болады.

Мысалы $\vec{F}=\Delta\overline{A_1A_2A_3}$ үшбұрыш болса, $A_1$-ді O үшін алсақ $\left[\overline{F}\right]=\overrightarrow{\tau_2}\circ\overrightarrow{\tau_3}$ болар еді. Ал $\overrightarrow{\tau_2}$ мен $\overrightarrow{\tau_3}$ коллинеар болмағандықтан $\left[\overline{F}\right]=\overrightarrow{\tau_2}\circ\overrightarrow{\tau_3}\neq 0$ болады. Сондықтан $\left[\overline{F}\right]\succ 0$ болады.

Егер Ғ бағдарланған көпбұрыш болса $\overline{F}=\overline{F_1}+\overline{F_2}$ деп жіктеуге (мұндағы $Ғ_1$ үшбұрыш, $Ғ_2$ көпбұрыш) болады. $2_0$-қасиет бойынша $\left|\left[\overline{F}\right]\right|\succ\left|\left[\overline{F_2}\right]\right|$, ал дәлелдеу бойынша $\left|\left[\overline{F_1}\right]\right|>0$. Сондықтан $\left|\left[\overline{F}\right]\right|$>0 болады.

Көпбұрыш бағдарын ауыстырғаннан оның характеристикасының шамасы өзгермейді, таңбасы кері ауысады.

Дәлелі. (76-4)-тен шығады.

Сондықтан, кез келген көпбұрыш пен оның характеристикасы оң болатындай етіп бағдарлауға болады.

**Ауданның болатындығы.** П жазықтығы берілсін, ондағы барлық көрбұрыштар жиынын К дейік, ал барлық оң нақты сандар жиынын $R^+$ дейік. Егер бұл жиындар арасында S:K→$R^+$ бейнелеуін төмендегі үш талап орындалатындай етіп жасасақ:

$1^0$. Көпбұрыштарға $Ғ_1$= $Ғ_2$ болса, онда $S(F_1)=S(F_2)$ болсын;

$2^0$. Көпбұрыш $F=F_1+F_2$ болса, онда $S(F)=S(F_1)+S(F_2)$ болсын;

$3^0$. Қабырғалары бірлік кесіндіге тең болатын $Ғ_0$ квадрат үшін $S(F_0)=1$ болсын, онда **К көпбұрыштар жиынында ауданды өлшеу анықталған делінеді.**

$Ғ_0$-бірлік квадрат (бірлік өлшем) делінеді, ал S(F) оң нақты саны Ғ көпбұрыштың $Ғ_0$ бірлік өлшемдегі ауданы немесе өлшемі делінеді. $1^0$-$3^0$ ауданды өлшеудің аксиомалары делінеді.

Енді көпбұрыштың ауданының болатындығы мен оның жалғыздығын дәлелдеуіміз керек, яғни $1^0$-$3^0$ аксиоманы қанағаттандыратын S:K→$R^+$ бейнелеудің болатындығын және мұндай бейнелеудің біреу-ақ болатынын дәлелдеу керек.

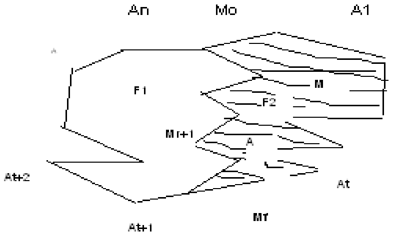
**2-Теорема**. Мына заңмен S(F)=$\frac{1}{2}$[F] анықталатын S:K→$R^+$ бейнелеу ауданды өлшеудің $1^0$-$3^0$ аксиомаларын қанағаттандырады.

**Дәлелі**: а) көпбұрыш $Ғ_1$=$Ғ_2$ тең болса, $S(F_1)=S(F_2)$ болатынын дәлелдейік. $F_1=F_2$ болғандықтан $Ғ_1$ ді $Ғ_2$-ге көшіретін қозғалыс болады. Ол қозғалыс орта нормаланған R және $R^/$ реперлермен берілуі мүмкін. (Өйткені

R-ді R$^{/}$ реперге көшіруге бір ғана қозғалыс болатын және ол қозғалыс M(x,y)$_R$ нүктені; M$^{/}$ (x,y)$_{R'}$ нүктеге көшіретін). Сонда егер Ғ$_1$ -ден төбелерінің R-дегі координаталары A$_i$(x$_i$,y$_i$) болуы керек. F$_2$-нің төбелерінен R$^{/}$ дегі координаталары A$_i$(x$_i$,y$_i$) болуы керек. Сондықтан (76-5) бойынша [F$_1$]=[F$_2$] болады да S(F$_1$)=S(F$_2$) болып шығады.

б) F=F$_1$+F$_2$ болсын, S(F)=S(F$_1$)+S(F$_2$) болатынын дәлелдейік. Ғ көпбұрышты [F]>0 болатындай етіп бағдарлайық, ал Ғ$_1$ мен Ғ$_2$ бағдарлар Ғ пен келісілген болсын. Онда Ғ=F$_1$+F$_2$ болады. Бұл кезде [F]=[F$_1$]+[F$_2$] болатынын дәлелдейік. Ғ көпбұрышты Ғ$_2$, Ғ$_2$ көпбұрыштарға бөлетін L сынық сызық м$_0$,м$_1$,м$_2$...м$_k$ болсын, бұл нүктелердің радиус вектроларын м$_0$,м$_1$...м$_k$ дейік, ал Ғ=A$_1$A$_2$A$_3$...A$_n$ көпбұрыш төбелерінің радиус-векторларын бұрынғыша ч$_1$,ч$_2$...ч$_n$ дейік .

Мо нүкте A$_1$ мен A$_n$, M$_k$ нүкте A$_t$ мен A$_{t+1}$ нүктелер арасында жатсын



(82-сурет).

сонда анықтама бойынша

$$\left[\overline{F_1}\right]=\vec{m}_0\circ\vec{r}_1+\vec{r}_1\circ\vec{r}_2+\vec{r}_2\circ\vec{r}_3+...+\vec{r}_t\circ\vec{m}_k+\vec{m}_k\circ\vec{m}_{k-1}+...+\vec{m}_1\circ\vec{m}_0$$

$$\left[\overline{F_2}\right]=\vec{m}_k\circ\vec{r}_{t+1}+\vec{r}_{t+1}\circ\vec{r}_{t+2}+...+\vec{r}_n\circ\vec{m}_0+\vec{m}_0\circ\vec{m}_1+...+\vec{m}_{k-1}\circ\vec{m}_k$$

(76-2) ні ескере отырып, бұларды қоссақ

$$\left[\overline{F_1}\right]+\left[\overline{F_2}\right]=(\vec{m}_0\circ\vec{r}_1+\vec{r}_n\circ\vec{m}_0)+(\vec{r}_t\circ\vec{m}_k+\vec{m}_k\circ\vec{r}_{t+1})+\vec{r}_1\circ\vec{r}_2+\vec{r}_2\circ\vec{r}_3+...$$
$$+\vec{r}_{t-1}\circ\vec{r}_t+\vec{r}_{t+1}\circ\vec{r}_{t+2}+...+\vec{r}_{n-1}\circ\vec{r}_n$$

M$_0$ нүкте A$_1$A$_n$ кесіндіде жатқандықтан $\vec{m}_0=\dfrac{\vec{r}_1+\lambda\vec{r}_n}{1+\lambda}$ болады. Осыны ескерсек $\vec{m}_0\circ\vec{r}_1+\vec{r}_n\circ\vec{m}_0=\dfrac{\vec{r}_1+\lambda\vec{r}_n}{1+\lambda}\circ\vec{r}_1+\vec{r}_n\circ\dfrac{\vec{r}_1+\lambda\vec{r}_n}{1+\lambda}=\dfrac{(\lambda+1)\vec{r}_n\circ\vec{r}_1}{(\lambda+1)}=\vec{r}_n\circ\vec{r}_1$

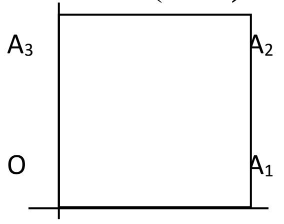
Осы сияқты $\vec{r}_t\circ\vec{m}_k+\vec{m}_k\circ\vec{r}_{t+1}=\vec{r}_t\circ\vec{r}_{t+1}$

бұларды орнына қойсақ

$$\left[\overline{F_1}\right]+\left[\overline{F_2}\right]=\vec{r}_1\circ\vec{r}_2+\vec{r}_2\circ\vec{r}_3+...+\vec{r}_{t-1}\circ\vec{r}_t+\vec{r}_t\circ\vec{r}_{t+1}+...+\vec{r}_{n-1}\circ\vec{r}_n+\vec{r}_n\circ\vec{r}_1=\left[\overline{F}\right]$$

болып шығады. Сөйтіп $\left[\overline{F_1}\right]+\left[\underline{F_2}\right]=\left[\overline{F}\right]$ дұрыс екен.

$2_0$ қасиет аксиома бойынша соңғы теңдіктен $[F_1]>0,[F_2]>0$ болады. Сондықтан (76-7)-ден $S(F)=S(F_1)+S(F_2)$ болып 2-аксиома орындалады.



83-сурет

в) $Ғ_0=OA_1A_2A_3$ квадрат болсын (қабырғалары 1-ге тең) $(O,OA_1,OA_2)$ координата жүйесінде $O(0,0)$, $A_1(1,0)$, $A_2(1,1)$, $A_3(0,1)$ болар еді (83-сурет). Сонда (76-4),(76-5) бойынша квадраттың характеристикасы

$$\left[\overline{F_0}\right]=\left[OA_1A_2A_3\right]=\overrightarrow{OO}\circ\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_1}\circ\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_2}\circ\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_3}\circ\overrightarrow{OO}=\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}=$$

$$0+1+1+0=2$$

Сонда (76-7) бойынша $S(F_0)=\frac{1}{2}\cdot 2=1$болып, $3^0$-аксиома да орындалады.

Сөйтіп $1^0$-$3^0$ аксиомаларды қанағаттандыратын $S:K\rightarrow R^+$ бейнелеу болады екен, яғни кезкелген Ғ көпбұрышқа S(F) оң нақты сан сәйкестенеді екен. Демек көпбұрыш ауданы болады екен.

**Ауданның жалғыздығы**. Кезкелген көпбұрыштың ауданы болады екен. Енді ауданы қанша болады екен деген мәселемен айналысайық. Мақсат: $1^0$-$3^0$ аксиомаларды қанағаттандыратын $S:K\rightarrow R^+$ бейнелеудің жалғыз болатынын дәлелдеу. Ол үшін алдымен мына теоремаларды дәлелдейміз.

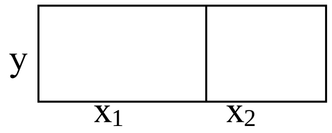
**1-Теорема**. Егер $S:K\rightarrow R^+$ ауданды өлшеудегі $1^0$-$3^0$ аксиомаларын қанағаттандыратын бейнелеу болса, онда қабырғалары x,y болатын тік төртбұрыш Ғ үшін S(F)=xy болады.

**Дәлелі**. Барлық тік төртбұрыштар жиыны Т-да S бейнелеуді қарастырайық. Қабырғаларының ұзындықтары x,y өзара тең болатын кезкелген екі тік төртбұрыш өзара тең болады. Сондықтан S(F) тек оң мәндер қабылдайтын бүкіл $x,y\in R^+$ де анықталған x,y функциясы. Оны f деп белгілейік: S(F)=f(x,y).

Бұл функцияның мынадай қасиеттері болады.

а) f (x,y)= f(y,x)

б) $f(x_1+x_2,y)=f(x_1,y)+f(x_2,y)$



84-сурет

Мұның бірінші дәлелі $1^0$-аксиомадан, 2-дәлелі $2^0$-аксиомадан тікелей шығады (84-сурет)

в) f(x,y)=f(1,y)x (76-9) болады.

Мұны дәлелдеу үшін $f(x,y_0)=g(x)$ ($y_0\in R^+$ - тұрақты сан) дейік. б)-қасиет бойынша $x_1,x_2$ оң сандар болса $g(x_1+x_2)=g(x_1)+g(x_2)$ болады. Осындай қасиетке ие болатын $R^+$-де анықталған, тек оң мәндер қабылдайтын g(x) функцияны математикалық талдау курсында тура пропорционалдықты өрнектейді дейді $g(x)= к(x)$, $x=const$. Сөйтіп $f(x,y_0)= кx$.

у-тің басқа тұрақты мәндерінде коэффициент к өзгереді. Сондықтан жалпы жағдайда $к=к(y)$ деп алу керек. Сонда $f(x,y_0)= к(y)x$. Егер $x=1$ болса $f(1,y)=к(y)$ болады. Сондықтан (76-9) дұрыс болады. (76-8)-ден 1-мен (76-9) дан $f(1,y)= f(y,1)=f(1,1)y$.

$3^0$ аксиома бойынша $f(1,1)=1$. Сондықтан $f(1,y)=y$. Сонда (76-9)-ды былай жазуға болады $f(x,y)=xy$. Сондықтан $S(Ғ)=xy$.

**2-Теорема.** Егер $S:K\to R^+$ауданды өлшеуіш $1^0$-$3^0$ аксиомаларын қанағаттандыратын бейнелеу болса, онда бір қабырғасы $x_1$ оған түсірілген биіктік у болатын $T_0$ үшбұрыш үшін $S(T_0)=\frac{1}{2}xy$ болады.

**Дәлелі.** $T_0$= ABC үшбұрыш болсын, табаны AB=x, биіктігі CH=y болсын. Сонда мынадай үш жағдай болады (454-а,б,в суреттер)

а) H нүкте не A не B нүктемен беттеседі (A мен беттессін 454-а сурет): Онда $T_0$ тік бұрышты үшбұрыш. Оны тік төртбұрышқа дейін толықтырайық. Сонда 1-теорема бойынша $S(ABCD)=AB*AC=\frac{1}{2}xy$

$2^0$ аксиома бойынша $S(ABDC)=S(ABC)+S(DCB)$, ал $\Delta ABC=\Delta DCB$

Сондықтан $S(DCB)=S(ABC)$ . Сонымен $xy=2S(T_0)$, $S(T_0)=\frac{1}{2}xy$.

б) H нүкте A мен B арасында жатады (454-сурет) 2-аксиома бойынша $S(T_0)=S(AHC)+S(CHB)$

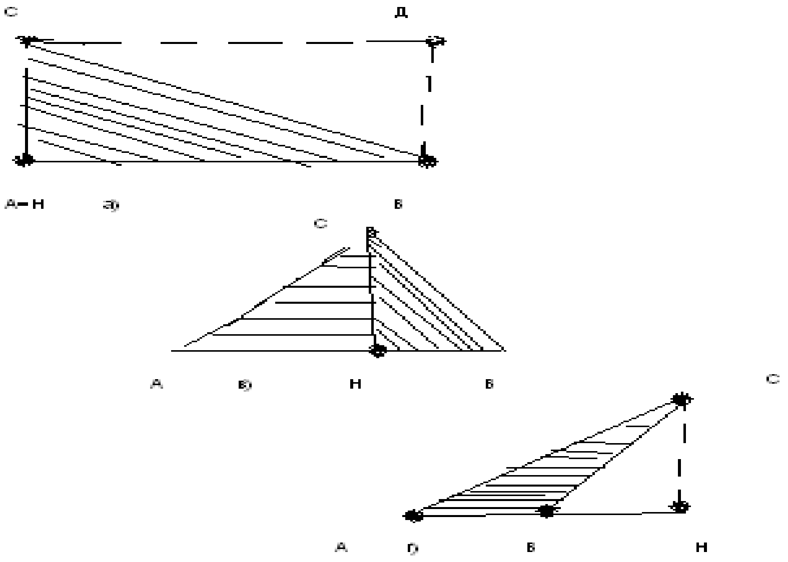
Дәлелденген а) бойынша $S(AHC)=\frac{1}{2}AH\cdot CH=\frac{1}{2}AH\cdot y$

$S(CHB)=\frac{1}{2}HB\cdot CH=\frac{1}{2}HB$. Сонда $S(To)=\frac{1}{2}(AH+HB)y=\frac{1}{2}AB\cdot y=\frac{1}{2}xy$.

в) H нүкте AB-ның созындысында жатыр (85-в сурет) $2^0$-аксиома бойынша $S(ACH)=S(ACB)+S(CBH)$

а) жағдай бойынша

$\frac{1}{2}AH\cdot y=S(ACB)+\frac{1}{2}BH\cdot y$, Бұдан $S(ACB)=\frac{1}{2}(AH-BH)y=\frac{1}{2}AB\cdot y=\frac{1}{2}xy$



85-сурет

Сөйтіп үш жағдайда да теорема дұрыс екен.

Дәлелденген 2-теореманы пайдаланып ауданның жалғыздығы туралы мына теореманы дәлелдеуге болады.

**3-теорема**. Егер бірлік кесінді таңдап алынған болса, онда ауданды өлшеудің $1^0$-$3^0$ аксиомаларын қанағаттандыратын тек бір ғана $S:K \rightarrow R^+$ бейнелеу болады.

Дәлелдеуі. Кері жору арқылы дәлейдейміз. Алынған бірлік кесінді де $1^0$-$3^0$ аксиомаларды қанағаттандыратын $S:K \rightarrow R^+$ бейнелеуден басқа тағы да $S:K \rightarrow$ R бейнелеу бар дейік.

Кез келген F көпбұрыш алып, оны санаулы үшбұрыштарға жіктейік $2^0$-аксиома бойынша $F=F_1+F_2+...+F_n$ 2-аксиома бойынша $S(F)=\sum_{i=1}^{n} S(F_i)$, $S^/(F)=\sum_{i=1}^{n} S^/(F_i)$ (*)

2-теорема бойынша $S(F_i)= S^/(F_i)$, i=1,2…n. Сондықтан (*) теңдікті ескерсек $S(F)=S^/(F)$. Бұл кез келген көпбұрыш үшін дұрыс. Сондықтан бейнелеу екеу деген дұрыс емес. S пен $S^/$ бейнелеулер беттеседі.

*1-салдар.* Көпбұрышты үшбұрыштарға қалай өрнектелсе де, ол үшбұрыштар аудандарының қосындысы бірдей болады.

Өйткені $2^0$-аксиома бойынша бұл үшбұрыш аудандарының қосындысы S(F)–ке тең (F көпбұрыш). Ал, F көпбұрыш ауданы 3-теорема бойынша оны үшбұрышқа бөлу тәртібіне байланысты болмайды.

*2-салдар.* Егер Ғ көпбұрыштың төбелері тік бұрыш пен координаталар жүйесінде $A_i(x_i,y_i)$ $i=1,2\ldots n$ координатты болса, онда $S(A_1A_2\ldots A_n)=$

$$\frac{1}{2}\mathrm{mod}\left(\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix}x_{n-1} & x_n\\ y_{n-1} & y_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_n & x_1\\ y_n & y_1\end{vmatrix}\right)$$

### 13.3 Тең шамалы және тең құрамды көпбұрыштар

Аудандары теңдей көпбұрыштарды тең шамалы көпбұрыш дейді. Егер көпбұрыштар тең болса, онда олардың тең шамалы болатыны түсінікті. Бірақ тең шамалары фигуралар өзара тең бола бермейді. Мысалы қабырғалары 6 және 4, 3 және 8, 12 және 2 болатын тік төртбұрыштар өзара тең шамалы, бірақ тең емес.

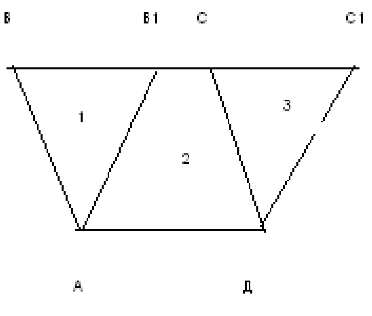
$Ғ_1$,$Ғ_2$ екі көпбұрыш **тең құрамды** делінеді, егерде олардың саны бірдей өзара қос-қостан тең болатын көпбұрыштарға жіктеуге болатын болса: $F_1=\sum_{i=1}^{n} f_1 i$, $F_2=\sum_{i=1}^{n} f_2 i$, $f_1 i=f_2 i, i=1,2,\ldots,n.$ Өзара тең құрамды көпбұрыштарды $Ғ_1$=$Ғ_2$ деп жазайық.

**1-теорема**. Егер екі P, Q көпбұрыш тең құрамды болса, онда олар тең шамалы болады.

Өйткені P=Q болғандықтан оларды өзара қос-қостан тең болатын бірдей санды көпбұрыштарға жіктеуге болады. Сондықтан олардың қосындысы да тең болады $\sum P_i=\sum G_i$. Демек олардың аудандары да тең болады.

Бұған *кері теореманы*, яғни тең шамалы көпбұрыштардың тең құрамды болатынын венгер математигі Ф.Боци (1832ж), неміс математигі офицер Гервин (1833ж) дәлелдеген. Ол теорема мынадай тұжырымдарға сүйеніп дәлелденді.

*1-тұжырым.*Үшінші көпбұрышпен тең құрамды болатын екі көпбұрыш өзара да тең болады.



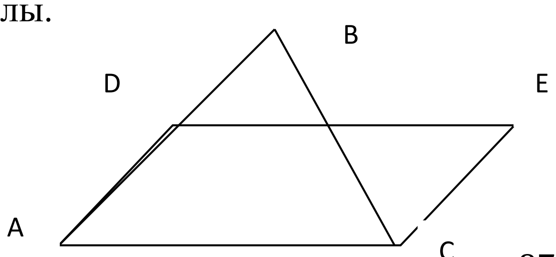
86-сурет

*2-тұжырым.* Екі тең шамалы параллелограм өзара тең құрамды болады.(86-сурет)

АВСД, АВ$_1$С$_1$Д параллелограм тең шамалы және олар тең құрамды . Бірінші 1,2-ден тұрса, екіншісі 2,3-тен тұрады.

*3-тұжырым.* Кез келген үшбұрыш мұнымен ортақ табанды биіктігі 2-есе кіші параллелограм тең шамалы және тең құрамды болады.(87-сурет)

$\Delta$АВС мен АДЕС параллелограм тең құрамды. Сондықтан тең шамалы.



87-сурет

*4-тұжырым.* Кез келген екі тең шамалы үшбұрыш тең құрамды болады.

*5-тұжырым.* Кез келген көпбұрыш оған тең шамалы болатын қандай да бір үшбұрыш пен тең құрамды болады.

*Бояц-Гервин теоремасы.* Кез келген екі тең шамалы көпбұрыш тең құрамды болады.

Дәлелі P, Q тең шамалы көпбұрыштар болсын. 5-тұжырым бойынша бұлармен тең құрамдас екі $\Delta_P$ $\Delta_G$ үшбұрыштар болады. $P=\Delta_P$, $G=\Delta_G$.

4-тұжырым бойынша бұл үшбұрыштар тең шамалы болғандықтан тең құрамды болады: $\Delta_P=\Delta_G$ 1-тұжырым бойынша P мен Q тең құрамды болады.

Осы теоремаға сүйеніп, яғни тең құрамдылыққа сүйене отырып, трапецияның, үшбұрыштың, параллелограмның аудандарын табуға болады. Екі көпбұрыштың тең шамалылығын дәлелдеуде оларда өзара қос-қостан тең көпбұрыштарға жіктеудің орнына оларды толықтыру жиегін пайдалануға болады.

Екі көпбұрыш тең толықтырылымды делінеді, егерде оларға қос-қостан тең құрамды көпбұрыштарды жалғағанда шығатан көпбұрыш тең құрамды болатын болса

Тең құрамды көпбұрыштар тең толықтырылымды болады

Тең шамалы көпбұрыштар тең толықтырылымды болады.

Тең толықтырылымды көпбұрыштар тең шамалы да, тең толықтырылымды да болады.

Квадратталған фигуралар. $Ғ_1$,$Ғ_2$ екі көпбұрыш және $F_1 \subset Ф \subset F_2$ болатын Ф жазықтық фигура берілген. Бұдан $S(F_1) \leq S(F_2)$ болатыны түсінікті. Ф фигураға іштей сызылған көпбұрыштар жиынын $\{F_1\}$, ал сырттай сызылған көпбұрыштар жиынын $\{F_2\}$ дейік.

$S\{F_1\}$ сандар жиынына трапеция бойынша жоғарыдан шектелген, сондықтан ол сандардың дәл жоғарғы шекарасы $S=\mathrm{Sup}S(\{F_1\})$ болады (supremum-ең жоғарғы деген сөзді білдіреді.)

Осы сияқты $S\{F_2\}$ сандар жиыны төменнен шектелген. Сондықтан бұл сандардың дәл төменгі шекарасы $S=\inf S(\{F_2\})$болады. ( infimum-ең төменгі дегенді білдіреді). Ф фигураның $S_*$-ді ішкі, $S^*$-ді сыртқы *жордандық өлшемі* дейді.

Ф фигура *квадратталатын фигура* делінеді, егер оның ішкі және сыртқы жордандық өлшемдері теңдей болса, ол сан Ф фигураның ауданы делінеді.

Ф фигура квадратталған фигура болу үшін $x_n \subset Ф \subset y_n$ болатын $x_n, y_n$ көпбұрыштар тізбегі табылып олардың аудандарының шегі $\lim S(x_n)=\lim S(y_n)$ теңдей болулары қажетті және жеткілікті. Ол шек фигураның ауданы болады.

Квадратталған жазық фигуралар ауданы интегралдау тәсілімен табылады. Кез келген жазық фигура квадратталған бола бермейді.

## 13.4 Көлемдер теориясы

Жай көпжақтың анықтамасы жай көпбұрыштың анықтамасы сияқты ендіріледі. Жай көпжақтың көлемін табуда жай көпбұрыштың ауданын табу сияқты жүргізіледі. Ғ көпжақты $\text{Ғ}_1,\text{Ғ}_2$ екі көпжақты жіктеу қандай да бір көпжақты бет арқылы іске асады. Егер $\text{Ғ}_0$ көпжақты бет арқылы Ғ екі $\text{Ғ}_1,\text{Ғ}_2$ көпжаққа жіктелсе, онда $\text{Ғ}_1 \cap F_2=F_0$, $F_1 \cup F_2=F$ болуы керек. Бұл кезде $\text{Ғ}=\text{Ғ}_1+\text{Ғ}_2$ деп жазылады.

Евклид кеңістігіндегі барлық көпжақтардың жиынын Ф дейік $R^+$-деп бұрынғыша оң нақты сандар жиынын белгілейік.

Бұл жиындар арасында $V:Ф \rightarrow R^+$ бейнелеуін мына үш аксиома орындалатындай етіп орнатуға болса

$1^0$. $F_1=F_2$ көпжақтар тең болса, онда $V(F_1)=V(F_2)$ тең болу керек.

$2^0$. $F=F_1+F_2$ болса $V(F)=V(F_1)+V(F_2)$ болу керек.

$3^0$. Қырлары бірлік кесіндіге тең болатын $\text{Ғ}_0$ куб үшін $V(\text{Ғ}_0)=1$ болу керек.

Онда көпжақтар жиыны Ф-да көпжақтар көлемін табу анықталған дейді. Фигура ауданын тапқандағыдай, мына теоремаларды дәлелдеу керек.

1-теорема. Евклид кеңістігінде $1^0$-$3^0$ аксиомаларды қанағаттандыратын кемінде бір $V:Ф \rightarrow R^+$ бейнелеу болады.

2-теорема. Егер бірлік өлшем таңдап алынса, онда көпжақтар көлемін өлшеудегі $1^0$-$3^0$ аксиомаларын қанағаттандыратын $V:\Phi\rightarrow R^+$ бейнелеу жалғыз-ақ болады.

3-теорема. Егер $V:\Phi\rightarrow R^+$ бейнелеу көпжақтар көлемін өлшеуде 1-3 аксиомаларын қанағаттандыратын болса, онда қырларын x,y,z болатын P тікбұрышты параллелепипед үшін V(P)=xyz болады.

Осы теоремаға сүйене отырып мектеп геометрия курсындағыдай тік және көлбеу призманың, параллелопипедтің, пирамиданың т.б көпжақты фигуралардың көлемін табуға болады.

Екі жақ тең шамалы делінеді, егерде олардың көлемдері теңдей болса.

Екі көпжақ тең құрамды делінеді, егер де оларды қос-қостан тең болатын бірдей санды көпжақтарға жіктеуге болатын болса.

Екі тең құрамды көпжақ тең шамалы болады.

Кері теорема жалпы жағдайда дұрыс болмайды, яғни тең шамалы көпжақ тең құрамды бола бермейді.

Неміс математигі М.Ден 1900 жылы мынадай теореманы дәлелдеді.

Теорема. Егер P көпжағының екі жақты бұрыштары $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$, ал Q көпжақты бұрыштары $\beta_1,\beta_2,...,\beta_k$ болса және P мен Q тең құрамды болса, онда $a_1,a_2,...,a_m$ мен $b_1,b_2,\ldots,b_k$ натурал сандары және t бүтін (оң, теріс, нөл) саны табылып, мынадай $a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+...+a_m\alpha_m-(b_1\beta_1+b_2\beta_2+...+b_k\beta_k=2dt$ (77-1) болады ($d$ – тік бұрыш).

Бұл екі тең шамалы көпжақтың тең құрамды болуының қажетті шарты болып табылады. 1965 жылы француз математигі Сидлер Ден теоремасындағы бұл шарт әрі жеткілікті шарт болатынын дәлелдеді.

Тең шамалы болатын бірақ өзара тең құрамды болмайтын көпжақтар болады. Мысалы Ден 1901 жылы өзара тең шамалы куб пен дұрыс тетраэдр үшін (77-1) шарттың орындалмайтынын дәлелдеді. Сондықтан олар тең құрамды болмайды. Тіпті дұрыс тетраэдрлердегі тең құрамды болмайтынын дәлелдеуге болады. Сондықтан көлем табуға интегралды пайдалану сөз жоқ қажет болады.

Неміс математигі Зюсс кез келген тең шамалы көпжақты тең шамалы тетраэдрлерге жіктеуге болатынын дәлелдеді.

Φ кеңістік фигура Ғ$_1$,Ғ$_2$ көпжақтар болатын болса және $F_1\subset\Phi\subset F_2$ болса, онда $V(F_1)\leq V(F_2)$ болады (Ғ$_1$ іштегі, Ғ$_2$ сырттағы Φ-қа салынған көпжақтар).

Сөйтіп $\{V(F_1)\}$ жиын жоғарыдан, $\{V(F_2)\}$ жиын төменнен шектелген. Сондықтан бұл жиындардың дәл жоғарғы $V^*=\sup\{V(F_1)\}$, дәл төменгі

$V_*=\inf\{V(F_2)\}$ шекаралары болады (оларды Ф фигураның ішкі және сыртқы Жордандық өлшемдері дейді).

Фигура кубталатын фигура делінеді, егер де оның ішкі және сыртқы Жордан өлшемдері тең болса.

Фигура кубталатын болу үшін оны іштей және сырттай сызылған көпжақтар көлемінің шектері тең болуы керек.

$\lim V(x_n)=\lim(V(y_n)$ бұл шек Ф фигураның көлемі болады. Кубталатын фигуралар көлемі интегралдық тәсілмен табылады.

## Қайталауға арналған сұрақтар.

1. Кесінді ұзындығын өлшеу, Гильберт аксиомалар жүйесінде оның қандай аксиомаларына негізделген?

2. Кесінділер жиынында қандай шарттарда кезде кесіндіні өлшеу анықталған делінеді?

3. Кесіндіні өлшеу процессі қалай іске асады?

4. Бірлік кесінді анықталған жағдайда $P:L\to R^+$ болатындығын қалай дәлелдейді?

5. $P:L\to R^+$ бейнелеудегі кесіндіні өлшеудің $1^0$-$3^0$ аксиомалары талаптарын қанағаттандыратыны қалай дәлелденеді?

6. Егер кесінділер $CD<AB$ болса олардың ұзындығы $P(СД)<P(AB)$ болатыны қалай дәлəлденеді?

7. $P:L\to R^+$ бейнелеудің жалғыздығын дәлелдеу қандай леммаларға негізделген?

8. Кесіндіні өлшеудің үш аксиомасында қанағаттандыратын $P:L\to R^+$ бейнелеудегі жалғыз-ақ болатыны қалай дәлелденеді?

9. Таңлап алынған бірлік өлшемде ұзындығы берілген санға тең болатын кесіндінің болатындығы қалай дәлелденеді. Ол қай аксиома арқылы дәлелденеді?

10. П жазықтыққа а,в параллель векторлар, К бірлік нормал вектор болса, онда а мен в векторлардың аралас қасиеті теңдес деп нені айтады?

11. Көпбұрыштың характеристикасы деген не?

12. Көпбұрыш характеристикасының О нүктенің орнына тәуелді еместігі.

13. Көпбұрыш характеристикасының қасиеттері қандай?

14.Ауданның болатындығын дәлелдеу.

15.$S(F)=\frac{1}{2}[F]$ формуламен анықталатын $S:K\to R^+$ бейнелеудегі ауданды өлшеудегі 1-3 аксиомаларын қанағаттандыратынын дәлелдеу.

16. Фигура ауданының жалғыздығын дәлелдеу

а) тік төртбұрыш үшін S(F)=f(x,y)=xy болатындығын

б) үшбұрыш үшін S(F)= $\frac{1}{2}$xy болатындығын дәлелдеу.

17. Ғ көпбұрыш төбелері $A(x_i<y_i)$ болса мына формуламен

$S(A_1A_2\ldots A_n)=\frac{1}{2}\mathrm{mod}\left(\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix}x_{n-1} & x_n\\ y_{n-1} & y_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_n & x_1\\ y_n & y_1\end{vmatrix}\right)$ нені білдіреді?

18. Тең шамалы көпбұрыш деген не?

19. Тең құрамды көпбұрыш деген не?

20.Тең толықтырылымды көпбұрыш деген не?

21. Тең шамалы, тең құрамды, тең толықтырылымды көпбұрыштар арасындағы қатыс.

22. Бояц-Гервин теоремасы.

23. Квадартталатын фигура, фигураның квадратталатын фигура болу шарты.

24. Мектеп оқулығындағы үшбұрыш, тік төртбұрыш, параллелограм, трапеция аудандарын табу жолы.

25. Көлем теориясына шолу.

26. Кеңістік фигуралардың тік параллелепипед. куб, призма, пирамида, конус, цилиндр, шар көлемдері оны мектеп геометриясында табу жолы.

27.Ауданды, көлемді, доға ұзындығын интеграл жәрдемімен табу жолдары.

## Пайдаланылған әдебиеттер

1. Атанасян Л.С. Геометрия, часть 1 М.:Просвешение» 1973

2. Атанасян Л.С, Гуревич Г.Б. Геометрия, часть 2 М.: «Просвешение» 1976

3.Атанасян Л.С, Базылев В.Т. Геометрия, часть 1,2 М.:«Просвещение» 1986,1987

4. Габушкин Л.И Геометрия М.: «Высшая школа» 1966

5. Базылев В.Т, Дуничев К.И.

а)геометрия часть 2, М.:«Просвешение» 1975

б)геометрия 2-бөлім Алматы. «Мектеп» 1981

(аудармашылар Ысқақов М, Құлқашева М, Бидосов А, Байжанов А)

6. Бакельман И.Я Высшая геометрия М.: «Просвешение» 1967

7. Берже М. Геометрия, Т1,2. М .: «Мир» 1984

8. Дубтобин Б.А, Новиков С.П, Фоменка А.Т

Современная геометрия М.:«Наука» 1978

9. Егоров И.П  Геометрия  М.:«Просвешение»1979

10. Ефремов Н.В Высшая геометрия М.: «Наука» 1978

11. Погорелов А.В Геометрия М.:«Наука»1983

12. Федин Н.Г  Геометрия «Высшая школа» М.: 1978

13. Гусева Н.И., Даниева Н.С.,Тесля О.Ю. Сборник задач по геометрии,часть II, М. 2012