Қ. Абдрахманов

Дифференциалдық геометрия және топология элементтері

(Оқу құралы)

Шымкент-2024ж.

УДК 514.18(0758)
ББК 22.151.3я73
А-12

Оқу құралын басуға Оңтүстік Қазақстан мемелекеттік педагогикалық университетінің оқу әдістемелік кеңесі ұсынған, хаттама №5, 25.04.2019 ж.

Пікір жазғандар:

Қаратаев Ж.Қ. –ф.м.ғ.к., доцент, М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті

Қырғызбаев Ж.Қ. - ф.м.ғ.к., доцент, Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік педагогикалық университеті

Абдрахманов Қ.
Дифференциалдық геометрия және топология элементтері: оқу құралы.
- Шымкент, 2024.- 120 б.

ISBN-

Оқу құралында дифференциалдық геометрия, топология және көпжақтар теориясынан қысқаша лекциялар және есептер шығаруға мысалдар мен жаттығулар жинағы берілген.

Ұсынылған оқу құралы 5B010900 -“Математика”, 5B02600 – “Математика-физика”, 5B012700 -“Математика-информатика” мамандықтарының студенттері мен осы пәннен сабақ беретін оқытушыларға арналған

Мазмұны

Алғы сөз.

Дифференциялдық геометрия және топология элементтері пәні 5В010900- математика мамандығы бойынша болашақ математика пәнінің мұғалімдерін даярлаудағы ең негізгі, міндетті пәндердің бірі болып саналады. Себебі, болашақ мамандар осы пәнді біліп шыққанда ғана, геометрия курсын терең меңгеріп, өз мамандықтарын толық игерген болып саналады.

Қазіргі кезде дифференциалдық геометрия және топология элементтері бойынша педагогикалық университеттер үшін жазылған, талаптарға сай келетін қазақ тіліндегі оқулық немесе оқу құралы жоқтың қасы. Сондықтан, бұл оқу құралы математика мамандығы бойынша оқитын студенттермен қатар жоғары математика курсын оқитын студенттер үшін де тигізетін пайдасы мол болатынына сенеміз.

Бұл оқу құралында әрбір тақырып бойынша қысқаша лекция мәтінімен практикалық есептер шығарудың үлгілері көрсетілген. Сондай-ақ, әрбір сабақтың соңында студенттердің өздігінше орындау үшін жаттығулар берілген. Оқу құралы, пайдаланылған әдебиеттер тізімінде көрсетілген орыс тілінде жарияланған оқулықтармен оқу құралдары негізінде, қазақ тіліне аударылып құрастырылды.

Оқу құралы бес бөлімнен тұрады: 1.Топология элементтері; 2. Евклид кеңістігіндегі сызықтар; 3. Евклид кеңістігіндегі беттер; 4. Беттердің Ішкі геометриясы; 5. Евклид кеңістігіндегі көпжақтар.

1.ТОПОЛОГИЯ ЭЛЕМЕНТТЕРІ

1.1. Метрикалық кеңістік

Анықтама: E – бос емес жиыны берілсін. E жиыныда ρ метрикасы анықталған деп айтамыз, егер ретімен алынған E жиынының қос элементтері x және y үшін теріс емес ρ(x,y) – нақты саны сәйкес келтіріліп, бұл сәйкестік келесі үш шартты (метрикалық кеңістіктің аксиомалары) қанағаттандырса.

1. ρ(x,y)=0 сонда ғана , егер x=y болса ғана.
2. Кез келген x, y∈E үшін ρ(x,y) = ρ(y,x).
3. ρ(x,y)+ ρ(y,z)> ρ(x,z) кез келген x,y, z ∈E үшін (үшбұрыштар ережесі).

Метрика анықталған E жиыны метрикалық кеңістік деп атаймыз және (E, ρ)- деп белгіленеді.

Центрі x_0 нүктесінде, радиусы r(r>0) болатын ашық шар деп B(x_0, r), ρ(x_0, x) < r теңсіздігін қанағаттандыратын E жиынында жататын барлық x нүктелер жиынын айтамыз. Егер ρ(x_0, x)≤ r болса x ∈E нүктелерін жиынын тұйық шар деп атаймыз $\overline{B}$(x_0, r) . Мұнда x_0- шардың центрі, r-радиусы деп аталады. ρ(x_0, x) = r болатын барлық x ∈E нүктелер жиынын сфера деп атаймыз. S(x_0, r)

Егер r=ε өте кіші мәндерді қабылдаса, онда B(x_0,ε), x_0 нүктесінің ε-маңайы деп аталады.

A⊂(E, ρ) метрикалық кеңістіктің бос емес ішкі жиыны болсын. a∈A жиынының ішкі нүктесі деп аталады, егер ε >0 саны бар болып, B(a,ε)⊂A, яғни a нүктесінің маңайы толық A жиынында жатса A жиынынң барлық ішкі нүктелер жиыны оның іші деп аталады infA=Å. Егер A жиынының барлық нүктелері оның ішкі нүктелері болса, онда A жиынынын ашық жиын деп атаймыз. a∈A нүктесі A жиының сыртқы нүктесі деп атаймыз, егер оның кез келген ε-маңайында A жиынынң нүктелері жоқ болса. Бұл жағдайда a нүктесі A жиынын толықтаушы жиынға ішкі нүкте болады. CA=E\A.

a∈A нүктесі A жиынының шекаралық нүктесі деп аталады, егер ол нүктенің кез келген ε-маңайында A жиынымен қатар CA жиынымен қиылысулары бос болмаса, яғни осы нүктенің кез келген ε-маңайында A жиынынада, толықтаушы CA жиынына жататын нүктелер бар болса .Барлық шекаралық нүктелер жиынын A жиынының шекарасы деп атаймыз, [A] деп белгіленеді.

A⊂(E, ρ) жиыны шектелген жиын деп аталады, егер ол жиынды қамтитын шар бар болса A⊂ B(x_0, r) (E, ρ) метрикалық кеңістігіндегі барлық ашық жиындар жиынын Г деп белгілейміз, (E, ρ) үшін E жиыны мен бос жиын Ø ашық жиындар болады.

Теорема: Метрикалық кеңістікте: 1) Кез келген ашық жиындар топтамының бірігуі ашық жиын болады; 2) Кез келген ақырлы санды ашық жиында, топтамының қиылысуы ашық жиын болады.

Мысалдар:

1. 1-мысал. R^n кеңістігіне метрика келесідей анықталған кез келген x,y∈R^n үшін ρ(x,y) = $\max\limits_{k\in 1,\mathrm{n}} \mid \mathrm{x}_k - \mathrm{y}_k \mid$.

(R^n, ρ)- метрикалық кеңістік болатынын дәлелдеңдер.

Шешуі: 1.x=y болса ρ(x,y) =0 және керісінше болатыны анық.

2. $\mid x_k - y_k \mid = \mid y_k - x_k \mid$ болғандықтан, екінші аксиомада орындалады.

3. Үшінші аксиомада орындалатыны дәлелдейік $\max\limits_{R\in 1,\mathrm{n}} \mid x_k - y_k \mid + \max\limits_{k\in 1,\mathrm{n}} \mid y_k - x_k \mid > \max\limits_{k\in 1,\mathrm{n}} \mid x_k - z_k \mid$ **(1)**

Модульдің қасиеттері бойынша.

$\mid x_к - z_к \mid \le \mid x_к - y_к \mid + \mid y_к - z_к \mid$

Бұл жағдайда $\max\limits_{k\in 1,\mathrm{n}} \mid x_к - y_к \mid + \max\limits_{k\in 1,\mathrm{n}} \mid y_к - z_к \mid \ge \mid x_к - z_к \mid$ осыдан **(1)** теңсіздікте орындалады.

2. E- бос емес жиын. Кез келген x,y∈E үшін метрика ρ(x,y) $=\begin{cases} 1, егер\ x \neq y \\ 0, егер\, x = \mathrm{y} \end{cases}$ болып анықталған.

(E, ρ)- метрикалық кеңістік болатынын дәлелдеңіз.

Шешуі: 1 және екінші аксиомалар орындалатыны анық ρ(x,y)+ ρ(y,z)> Z(x,y) болатыныда белгілі. Себебі $x \neq y, x \neq z$ болса 1+1>1 орындалады.

Осылай анықталған (E, ρ) метрикалық кеңістіктегі айқын метрика болады.

3. Сандар жазықтығы R^2 метрика келесідей анықталған.

ρ(x,y) = $\sqrt{\sum_{k=1} |x_k - y_k|^2}$ к= $1, 2 \ldots$

(R^2, ρ)- метрикалық кеңістік болатынын дәлелдеңдер.

Шешуі: Бірінші және екінші аксиомалар орындалады.

1. x=y болса ρ(x,y) = 0

2. ρ(x,y) = ρ(y,x) Себебі $\mid x_к - y_к \mid = \mid y_к - x_к \mid$

3.ρ(x,y)+ρ(x,z)= $\sqrt{\sum_{к=1} \mid x_к - y_к \mid^2} + \sqrt{\sum_{к=1} \mid y_к - \mathrm{z}_к \mid^2} > \sqrt{\sum_{к=1} \mid x_к - \mathrm{z}_к \mid^2}$

Үшбұрыштар ережесі бойынша. Демек осылай анықталған R^2 жиыны метрикалық кеңістік болады.

4. R- нақты сандар жиында ρ(x,y) = tg|x-y| - метрикасы берілсе, (R, ρ)-метрикалық кеңістік болады ма?

Шешуі: Болмайды, себебі $\frac{\pi}{2} < \mid \mathrm{x} - \mathrm{y} \mid < \pi$ болғанда ρ(x,y)<0 теріс мәндерді қабылдайды.

5. [a,в] интервалында үзіліссіз функциялар жиыны берілсін F={f}, егер метрика ρ(f,φ) $=\int_a^в \mid \mathrm{f}(x) - \varphi(\mathrm{x}) \mid dx$ анықталса (F, ρ) – метрикалық кеңістік болады ма?

Шешуі: 1-ші және 2-ші аксиомалар орындалады.

3. $\rho(f,\varphi)+\ \rho(f,\psi)\ =\ \int_a^в \mid f-\varphi \mid dx+\int_a^в \mid \varphi-\psi \mid dx=\ \int_a^в(\mid f-\varphi \mid + \mid \varphi-\psi \mid)dx > \int_a^в \mid f-\psi \mid dx$

Себебі: $\mid f-\varphi \mid + \mid \varphi-\psi \mid > \mid f-\psi \mid$

6. (E, ρ) – метрикалық кеңістік берілсін.

E жиынында $d(x,y) = \frac{\rho(x,y)+2}{\rho(x,y)+1}$ формыла арқылы жаңа метрика анықталсын.

(E, d)- метрикалық кеңістік болады ма?

Шешуі:

1. $d(x,x) = \frac{\rho(x,x)+2}{\rho(x,x)+1} = \frac{0+2}{0+1} = 2 \neq 0$. Демек (E,d) метрикалық кеңістік болмайды.

Жаттығулар:

1. R нақты сандар жиынында келесідей метрикалар анықталса (R, ρ) – метрикалық кеңістік болатынын көрсетіңдер.
   а) $\rho(x,y) = |x-y|$
   б) $\rho(x,y) = \sqrt[3]{\mid x-y \mid}$
   в) $\rho(x,y) = |arctgx-arctgy|$

2. E_3 - үш өлшемді евклид кеңістігінің кез келген екі нүктесі A, B үшін метрика келесідей анықталған $\rho(A, B) = |\overline{AB}|$
$\overline{AB}$ - вектор. Осы жағдайда (E_3, ρ) метрикалық кеңістік болатынын көрсетіңіз.

3. (E, ρ) метрикалық кеңістік берілсін,егер:

   а) $d(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{\rho(x,y)+1}$

   (E, d)- метрикалық кеңістік болады ма?

   б) $d(x,y) = \frac{\rho(x,y)-1}{\rho(x,y)+1}$

   (E, d)- метрикалық кеңістік болады ма?

4. (R^2, ρ) метрикалық кеңістік берілсін

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{к=1}^{2} \mid x_к - y_к \mid^2}$$

Осы метрикалық кеңістікте ашық жиындар, тұйық жиындар, шекаралық жиындарға мысалдар келтіріңдер.

1.2. Топологиялық кеңістіктер, олардың қасиеттері

Анықтама: Бос емес X жиынында қандайда ішкі жиындар жүйесі $\mathcal{T}$ анықталып , олар келесідей қасиеттерге ие болсын:

1. Бос жиын Ø және X жиыны осы жүйеде жатады Ø,X∈ $\mathcal{T}$
2. $\mathcal{T}$ жиынының кез келген ішкі жиындар топтамының бірігуі осы $\mathcal{T}$ жиынында жатады.
3. $\mathcal{T}$ жиынының кез келген ақырлы санды ішкі жиындардың қиылысуының топтамы, осы $\mathcal{T}$ жиынында жатады. Бұл жағдайда біз X жиынында топология анықталған деп айтамыз . Мұндағы 1-3 қасиеттерді топологиялық кеңістіктің аксиомалары дейміз. $\mathcal{T}$ жүйесінің элементтерін ашық жиындар деп айтамыз. x∈X нүктесінің маңайы деп осы нүкте енетін кез келген ашық жиынды айтамыз. (X, $\mathcal{T}$) топологиялық кеңістігінің кез келген B -ашық жиындар топтамын $\mathcal{T}$ - топологиясының базасы деп айтамыз, егер кез келген x∈X нүктесі үшін және оның кез келген U_x маңайы үшін B_x∈B ашық жиыны бар болып x∈B_x∈B шарты орындалса.

Теорема: (X, $\mathcal{T}$) топологиылық кеңістігінің B ашық жиындар топтамы $\mathcal{T}$ топологиясының сонда ғана базасы бола алады, егер $\mathcal{T}$ -ның кез келген бос емес элементі B топтамының жиындарының бірігуі болса ғана.

(X, $\mathcal{T}$) санаулы базасы бар кеңістік деп аталады, егер $\mathcal{T}$ топологиясының ең болмағанда бір ақырлы немесе санақты X-тің ішкі ашық жиындар топтамасынан тұратын базасы бар болса.

A⊂(X, $\mathcal{T}$) ішкі жиыны болса, a ∈ A жиынының ішкі нүктесі деп аталады., егер a нүктесі қандай да бір маңаймен A жиынында толық жататын болса.

a ∈ X A жиынының сыртқы нүктесі деп аталады, егер a нүктесінің қандайда бір маңайында A жиынының бірде бір нүктесі жатпаса . A-ның сыртқы нүктелер жиынының оның толықтырушы жиыны деп аталады. CA=X/A

A жиынының ішкі нүктелер жиыны, оның іші деп атаймыз. intA=|A| -деп белгіленеді.

A⊂(X, $\mathcal{T}$) жиыны сонда ғана ашық болады егер, ол өзінің ішімен беттессе ғана A= intA.

a ∈A шекаралық нүкте деп аталады, егер бұл нүктенің кез келген маңайында A-ға тиісті және оны толықтаушы жиынның нүктелері жататын болса.

Шекаралық нүктелер жиынын A-ның шекарасы деп атаймыз B|A|=[$\overline{A}$]

A жыиының шекаралық және ішкі нүктелер жиындарының бірігуін оның тұйықтаушы жиыны деп атаймыз $\overline{A}$= B(A) ∪ intA.

A жиынын тұйық жиын деп атаймыз,егер оның толықтаушы жиыны CA ашық болса.

A⊂(X, $\mathcal{T}$) жиыны сонда ғана тұйық болады, егер ол өзінің ішімен беттессе ғана. A= intA.

A⊂ X (X, $\mathcal{T}$) топлогиясының ішкі жиыны болсын. А жиынымен $\mathcal{T}$ жиындар жүйесінің қиылысуы болатын жиынды Т деп белгілейміз. Т- жиындар топтамы топологиялық кеңістік болады, себебі 1-3 аксиомаларын қанағаттандырады. Сондықтан (А,Т) – топологиялық кеңістік болады, оны (X, $\mathcal{T}$) топологиялық кеңістігінің ішкі кеңістігі деп атаймыз.Бұл жағдайда Т топологиясын А жиынында жаратылған топология дейміз.

(X, $\mathcal{T}$) топологиясының кеңістігін ажыратылатын немесе Хаусдорфтық деп атаймыз,егер оның кез келген екі нүктесінің қиылыспайтын аймақтары бар болса.

Х жиынының жабушысы де{ X_λ} ішкі жиындар топтамын айтамыз, егер Х жиыны $X_{\square}$жиындарының бірігуі болса . (Х, $\mathcal{T}$) топологиялық кеңістігінің жабушысын ашық дйміз, егер ондағы X_λ - әр біреуі ашық жиын болса.

(Х, $\mathcal{T}$) топологиялық кеңістігін компактылы деп атаймыз, егер оның әрбір ашық жабуларының, ақырлы ішкі жабушылары бар болса.

R^n *к*еңістігінің ішкі кеңістігі сонда ғана компактылы болады, егер ол шектелген және тұйық болса ғана. Х жиынын жабушысын бөлектенген дейміз, егер жабушы жиындардың элементтері бос емес және әр бір екеуі қиылыспаса . (Х, $\mathcal{T}$) топологиялық кеңістігін байланысты дейміз, егер оны екі ашық жиындарға бөлектеуге болмаса.

Мысалдар:

1. E_2- евклид кеңістігінде (0,$\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$) кординаттар жүйесі ендірілсін. x∈E_2 нүктесінің маңайы деп қабырғалары $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$ векторларына параллель болатын x ішкі нүктесі болатын кез келген параллелограмды айтамыз. Ø және E_2-нің әрбір нүктесінің маңайы болатын жиындар жүйесін ашық жиындар деп атаймыз. Осы аталған ашық жиындар жүйесі E_2-де топологияны анықтайтынын дәлелдейміз.

Шешуі: Дәлелдеу үшін топологиялық кеңістікті анықтайтын 1-3 аксиомалардың орындалатынын көрсетуіміз керек.

1. Бірінші аксиома есептің берілуінен орындалатыны көрініп тұр.
2. Кез келген ашық жиындар топтаманың бірігуі ашық жиын болатынын көрсетейік U=$\underset{\alpha}{\cup}U_\alpha$ U_α∈E_2 α- кез келген натурал мәндерді (шексіз болуыда мүмкін) қабылдайды.

   Кез келген x_0∈ U нүктесін алса x_0∈U_β табылып $U_\beta\subset\underset{\alpha}{\cup}U_\alpha$ ашық жиын болады. Онда U_β - ашық параллелограмм.Демек екінші аксиома орындалады.
3. Үшінші аксиоманы екі ашық жиын үшін дәлелдесек жеткілікті. Егер U_1, U_2 ашық жиындары үшін U_1 ∪ U_2 =Ø орындалады. Егер U_1 ∩ U_2≠Ø болса, онда x_0∈U_1 ∩ U_2 үшін x_0 нүктесінің ашық

маңайы ретінде $U_1 \cap U_2$ алсақ болады екен . Демек 3-ші аксиома орындалады.

2. X- кез келген бос емес ашық жиын болсын , онда $\mathcal{T}=\{X,\emptyset\}$ топология бола алады. Себебі 1-3 аксиомалар орындалатыны анық (тексеріп көріңіз). Демек (X, $\mathcal{T}$) топологиялық кеңістік. Осындай топологияны антидискретті топологоия дейміз.

3. X≠ Ø жиында P(X) барлық ішкі жиындар жиыны болсын. $\mathcal{T}$= P(X) деп алсақ (X,$\mathcal{T}$) топологиялық кеңістік болады. 1-3 аксиомалардың орындалатынын тексеріп көріңіз.Мұндай топология $\mathcal{T}$- дискретті топология деп аталады.

4. **Теорема**: X кеңістігіндегі топология сонда ғана дискретті болады, егер оның бір нүктесінен тұратын жиын, ашық жиын болса ғана.

Дәлелдеуі:_Қажеттілігі_. Егер бір нүктеден тұратын кез келген ішкі жиыны ашық болса, онда біреуден артық нүктелердің бірігуіде ашық жиын , ал қиылысуы бос жиын олда ашық жиын. Демек дискретті топология болады.

Жеткіліктігі: Егер (X,$\mathcal{T}$) дискретті топология болса онда X жиынының кез келген ішкі жиындары ашық жиындар, сонымен қатар нүктеден тұратын жиында ашық болады.

5. Кез келген метрикалық кеңістікте (E, ρ)топология анықтауымызға болатынын дәлелдейміз. Мұндай топологияны метрика арқылы жаратылған топология деп атаймыз.

Дәлелдеуі: Метрикалық кеңістіктің анықтамасы бойынша ашық аймақтардан тұратын жиындарды $\mathcal{T}$- топология деп алып, метрикалық кеңістіктің негізгі теоремасына сүйенеміз. Яғни әрбір нүктенің x_0 ε-аймағын ашық шар деп қарастырсақ B(x_0,ε) , онда E және Ø ашық жиын деп алынса, онда $\mathcal{T}$=({B(x_0,ε)},(X,Ø)}) болады.

6. Q∈R рационал сандар жиыны берілсін.

а) Q жиынының ішін intQ;

б) Тұйық $\overline{Q}$ жиынын табыңыз;

в)шекарасын B(Q) табыңыздар. Q ⊂ R рационалдар жиыны тұйық боладыма немесе ашық болады ма?

Шешуі: а) Нақты сандар жиынында ашық жиындар болып (а,в) ашық аралықтар және (а,∞) түріндегі сәулелер болады. R және Ø ашық жиын бола алады. Сондықтан Q жиынында бірде бір бос емес ашық жиын жоқ, себебі ешбір нүкте өзінің ε-маңайымен Q жиынына енбейд, яғни ешбір ішкі нүктесі жоқ сондықтан intQ=Ø.

б) R жиынында тұйық жиындар ретінде кез келген тұйық [а,в] түріндегі интервалдар, [а, ∞) сәулесі, R және Ø қарастыруға болады. Q⊂R болғандықтан Q жиынының тұйықтаушы жиыны R өзі болады, яғни $\overline{Q}$= R в) Q жиыны толықтаушысы оның ішкі нүктелері мен шекаралары болады. Сондықтан в(Q) = R.

Q жиыны ашық жиын емес , себебі ашық жиын өзінің ішімен беттесуі керек , Q -тұйықта бола алмайды, себебі тұйық жиын өзінің толықтаушысымен беттеседі. Сондықтан Q тұйық та, ашық та емес жиын.

7. Кез келген метрикалық кеңістікте (X, ρ) анықталған топология ажыратылатын (Хаусдорфтық) топология болатынын дәлелдеңіздер.

<u>*Дәлелдеуі:*</u> Кез келген әртүрлі екі нүктені қарастырайық $x_0,y_0 \in X$, олардың $\rho(x_0,y_0)$ =d болсын. d > 0. Бұл нүктелердің ε-маңайлары $B_2(x_0)$ $B_2(y_0)$ болсын

$B_2(x_0) = \{x \in X, \rho(x, x_0) < Z, \}$ $B_2(y_0) = \{x \in X, \rho(x, y_0) < Z, \}$

Егер $r=\frac{d}{3}$ болса онда $B_2(x_0) \cap B_2(y_0) = \emptyset$

Демек кез келген x_0,y_0 нүктелерінің қиылыспайтын маңайлары бар екен. Анықтама бойынша (X, ρ) ажыратылатын топологиялық кеңістік болады.

8. Төрт элементтен тұратын X={a,в,c, d} жиыны берілсін . Топологиясы келесі түрде берілген топологиялық кеңістік $(X,\mathcal{T})$ бола ала ма? Тексеріңіз

а) $\mathcal{T}_1=\{\emptyset,X,\{a,c\}\{в, d\}\}$

б) $\mathcal{T}_2= \{\emptyset,X, \{a\}, \{c\}, \{a,в\}, \{a,c\}\}$

<u>*Шешуі:*</u> Анықтама бойынша егер X байламсыз болса, онда екі бос емес ашық жиында A,B табылып A∩B=∅ және олардың бірігуі A∩B=X болуы керек, онда A жинының толықтаушы жиыны CA=B болады.

A- ашық және тұйықта жиын болады. Сол сияқты CB=A

B-бір уақытта ашық және тұйық жиын.

а) {a,c},{в, d} жиындары X кеңістігіне ашық жиындар және {a,c} ,{в, d} =∅, ал {a,c} ∪{в, d}=X демек $(X, \mathcal{T}_1)$байламды емес кеңістік.

б) Егер $\mathcal{T}_2$= ∅,X, {a}, {c}, {a,в}, {a,c} болса онда кез келген екі ашық жиындардың қиылысуы бос емес.

{a,в}∩{a,c} =a және олардың барлығының бірігуі $\mathcal{T}_2$-топологиясын береді, демек $(X, \mathcal{T}_2)$ – байламды топологиялық кеңістік.

<u>*Жаттығулар:*</u> $\mathcal{T}_1=\{\emptyset,X\}, \mathcal{T}_2= \{\emptyset,X, \{a\}\}$ $\mathcal{T}_3= \{\emptyset,X,\{в\}\}$ $\mathcal{T}_2$= ∅,X

1.X жиыны екі элементтен тұрады X={a,в}. Осы жиындағы барлық топологияларды көрсетіңіз.

Жауабы: $\mathcal{T}_1=\{\emptyset,X\}, \mathcal{T}_2= \{\emptyset,X, \{a\}\}$ $\mathcal{T}_3= \{\emptyset,X,\{в\}\}$ $\mathcal{T}_4$= P{X}

2. Үш өлшемді евклидтік кеңістікте $(0,\bar{\imath},\bar{\jmath},\bar{k})$ тік бұрышты координаталаржүйесі ендірілсін.Ашық жиындар деп келесі жиындарды айтамыз: ∅, E_3, $E_3\backslash\{0\}$, және центрі 0 нүктесінде орналасқан, қабырғалары координаттар осьтеріне параллель кез

келген кубтарды алайық. Осы ашық жиындар жүйесі E_3- те топология құратынын көрсетіңіз.

3. R^2 жиынындағы метрикалар келесі формулалар арқылы жаратылған.

а) ρ_1(x,y) = $\sum_{\kappa=1}^{2} |x_\kappa$-$y_\kappa|$, б) ρ_2(x,y) = $\sum_{\kappa=1}^{2} |x_\kappa - y_{\kappa|}^{\;2}$

Осы метрикалар арқылы анықталған ашық жиындар жүйесі R^2 топологиялық кеңістік жарататының көрсетіңіздер. (ρ метрикасы арқылы R^2 кеңістігіндегі жаратылған топология табиғи топология деп аталады):

4. Сандар осінде анықталған келесі жиындардың ашық немесе тұйық болатынын көрсетіңіз.

а) [а,в], б) [а,∞) в) R г) (а,в) d) [а,в)

Жауабы:

а) тұйық, б)тұйық, в) ашық және тұйық г) ашық d) ашықта тұйықта емес

5. R^2 координаттар жазықтығындағы келесі жиындардың қайсыбір ашық немесе тұйық екенін көрсетіңіз.

а) A= {(x,y) : x^2+y^2>1}; б) B={ (x,y) : x^2+y^2 ≥1
в) D = {(x,y) : x^2+y^2=1}; г) C = {(x,y) : x^2+y^2=-1};
d) E= {(x,y) : x^2+y^2 ≥ 0};

Жауабы:

А-ашық, В-тұйық, С- тұйық, Д-ашықта-тұйықта, Е-ашық тұйықта болады.

6. R^2 координаттар жазықтығында координаттары районал сан болып келетін нүктелер жиыны ашықта тұйықта жиын болатынын көрсетіңіз.

X= {(x,y) : x = $\frac{p}{q}$, y = $\frac{n}{m}$, n, m, p, q ∈ z

7. Кез келген топологияның базасы бар екенін көрсетіңіз. Дискретті топологиялық P(X) базасы қандай болады ?
8. №5 есепте көрсетілген А, В, С, Д және В жиындарының қайсысы компактылы болады.
9. Q ⊂ R - рационал сандар жиыны компактылы емес екенін көрсетіңіз.
10. Екі компактылы жиынның қиылысуы компактылы болатынын көрсеңіз.

11. Z ⊂ R бүтін сандар жиыны байланысты болмайтынын көрсетіңіз.
12. Антидискретті топология анықталған кеңістік байламды болатынын көрсетіңіз.

1.3. Үзіліссіздік және гомеоморфизм

Анықтама: (X, $\mathcal{T}$) және (У, Т)топологиялық кеңістіктер берілсін. x∈ X нүктесінде f : X →У бейнелеуі үзіліссіз деп аталады, егер f(x) нүктесінің кез келген V маңайында x нүктесінің U маңайы табылып f(U)⊂ V орындалатын болса. Егер X жиынның кез келген нүктесінде үзіліссіз болса , онда f бейнелеуі үзіліссіз деп аталады .

Теорема: (X, $\mathcal{T}$) топологиялық кеңістігінің (У, Т) кеңістігіне бейнеленуі f сонда ғана үзілліссіз болады, егер У ашық жиынның жиынының кері бейнесі X жиынында ашық болса ғана.

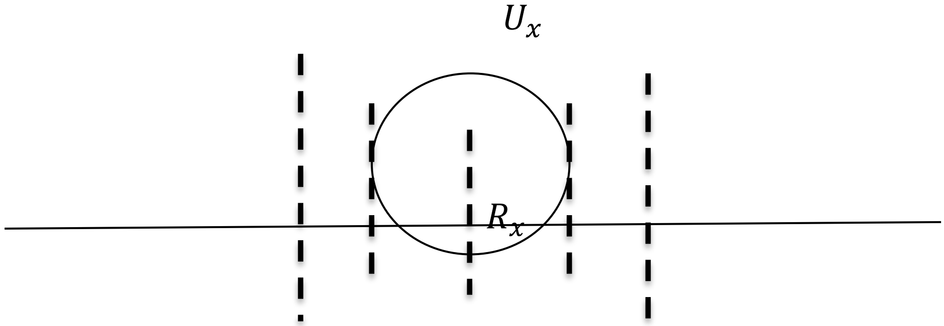
f : X→У бейнелеуі гомеоморфизм деп аталады (немесе топологиялық бейнелеу), егер ол өз-ара бір мәнді және өзара үзіліссіз бейнелеу болса. Бұл жағдайда X және У кеңістіктері гомеоморфты деп аталады, белгілеуі X∼У. Гомеоморфты бейнелеулерді бір топологиялық типіне жатады деп айтамыз.

Егер f : X→X бейнелеуі гомеоморфизм болса, онда X-ті өзіне өзі гомеоморфты дейміз.

<u>*Мысалдар:*</u>

№1 Топологиясы метрика арқылы жаратылған евклидтік жазықтықтық E_2 , осы жазықтықтағы метрикалық топология берілген a түзуіне ортогональ проекциясы үзіліссіз болатынын дәлелдеңіз.

<u>*Шешуі:*</u> f : E_2 →a берілсе, жазықтықтың кез келген ортогональ проекциялау арқылы түзудің бір нүктесіне бейнеленеді. x∈ E_2 f(x)∈a кез келген x нүктесінің ашық маңайын ашық дөңгелек ретінде U_x алсақ, оның бейнесі $V_{\mathrm{f(x)}}$ ⊂ a ашық интервал болатыны анық.



Яғни, теорема бойынша әрбір нүктенің ашық аймағы ашық жиынға бейнеленеді. Демек f : E_2 →a үзіліссіз бейнелеу болады.

Бірақ бұл бейнелеу гомеоморфизм болмайды. Неге?

№2. R^2 жазықтығында табиғи топология берілсін. R^2 жазықтығының өзіне-өзі бейнеленуі келесі формулалар арқылы берілсе , онда үзіліссіз бейнелеу болатынын көрсетіңіз.

R: $R^2 \rightarrow R^2$: x' =ax^3+ в; y=cx+d
Мұндағы a, в, c, d- тұрақты шамалар.

Шешуі: $x' = f_1$(x) және $y' = f_2$(x) функциялары үзіліссіз екені анық. Онда R^2 кез келген V ашық жиынының кері бейнесі U= f^{-1}(V) R^2 де ашық жиын болатынын дәлелдеу жеткілікті. $(x'_0, y'_0) \in$ V онда (x'_0, y'_0) нүктесінің кез келген маңайында ашық жиын болады. Ол аймақ келесідей V (x'_0, y'_0) = $\{x', y': |x'-x'_0| < \varepsilon_1, |y'-y'_0| < \varepsilon_2\}$ оның кері бейнесі $(x_0, y_0) \subset U$ сондықтан үзіліссіз функциялардың анықтамасы бойынша $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ табылып $|x-x_0| < \delta_1$, $|y-y_0| < \delta_2$ үшін $|x' - f_1(x_0, y_0)| < \varepsilon_1$, $|y' - f_1(x_0, y_0)| < \varepsilon_2$ кез келген δ_1 және δ_2 үшін орындалады. Сонда V (x'_0, y'_0) кері бейнелері (x_0, y_0) нүктесінің δ_1, δ_2 маңайында орналасады. Демек U ашық жиын. Топологиялық кеңістіктердің бейнеленуінің үзіліссіздігі бойынша теоремаға сәйкес f бейнелеуі үзілліссіз болады.

№3 Жарты интервал сәулеге гомеоморфты болатынын дәлелдеңіз.

Шешуі: Геометрикалық дәлелдеуі: [O,a] жарты интервалы $[\overline{AB})$ шеңбердің ширек доғасына гомеоморфты екені анық [a,x) сәулесі А нүктесінен басталсын. Шеңбердің О нүктесінен жүргізілген [AB] ширек доғаны қиятын әрбір сәуле [AX) осімен қиылысады, яғни өзара бірмәнді өзара үзіліссіз сәйкестікті береді, демек бұл бейнелеу гомеоморфизм екен.

Аналитикалық дәлелдеуі.

$[0;\frac{\pi}{2})$ жарты инетервалында y=tgx функциясын қарастырамыз. Бұл функция осы аралықта бір мәнді $[0, \infty)$ сәулесінде үзіліссіз бірмәнді функция , демек $[0;\frac{\pi}{2})$ жарты интервал $[0, +\infty)$ сәулесіне гомеоморфты.

Жаттығулар:

1. Табиғи топология анықталған жазықтықтағы E_2 келесі бейнелеулер үзіліссіз бейнелеулер болатынын дәлелдеңіздер.

а) Жазықтықты параллель көшіру: б) Жазықтықты бұру в) гомотетия

Нұсқау: Осы бейнелеулерді анықтайтын функцияларды анықтап олардың үзіліссіз екенін көрсетсек жеткілікті.

2. R – нақты сандар өсіндегі келесі жиындардың гомеоморфты болатынын дәлелдеңіз.

а) екі ашық интервал
б) екі тұйық интервал
в) ашық интервалмен түзу

3. Евклидттік кеңістіктегі келесі фигуралар гомеоморфты болатынын дәлелдеңіздер.

а)Жарты сфера мен дөңгелек

б)Бір нүктесі алынып тастаған сфера мен жазықтық

в)Сфера мен тетраэдр

г)Екі қуысты гиперболоидпен екі паралель жазықтық

Геометриялық және аналитикалық дәлелдеуін келтіріңіз.

4. Эллипспен гиперболла және гиперболламен параболла гомеоморфты емес болатынын дәлелдеңіз.

5. Шеңбер кесіндіге гомеоморфты емес екенін дәлелдеңіз.

Нұсқау: Кесіндінің шекаралық нүктелері бар, ал шеңберде жоқ. Егер шеңбердің бір нүктесін алып тастанылса ол кесіндіге гомеоморфты болады.

1.4. Көпбейнеліктер. Эйлердің характеристикасы

Анықтама: $\{X, \Gamma\}$ топологиялық кеңістігінде k өлшемді координаттар жүйесі анықталған дейміз, егер $U \subset X$ жиынының R^k кеңістігіндегі ашық жиынға бейнелейтін Ψ гомеоморфизмы бар болса $\{U, \Psi\}$ жұптығын U жиынында анықталған k - өлшемді карта деп атаймыз, ал U жиынын осы картаның координаттық аймағы дейміз.

k өлшемді көпбейнелік немесе {k өлшемді топологиялық қеңістік} деп біз ажыратылатын $\{X, \Gamma\}$ топологиялық кеңістігін айтамыз, егер осы кеңістікті k өлшемді координаттық аймақтардан тұратын карталармен жабылатын болса.

Көпбейнеліктің өлшемі k инвариант {өзгермейтін шама} болады

Егер $\{X, \Gamma\}$ топологиялық кеңістігі ажыратылатын болса санаулы базасы бар болып оның нүктелерін екі бос емес классқа болгенде, біріншісінде жатқан ішкі нүктелер жиыны R^k кеңістігіне гомеоморфты аймақтары бар нүктелер болса, ал екінші классқа жататын шекаралық нүктелердің жиыны R^k классына гомеоморфты бірақ аймақтарынан алынған нүктелер R^k гомеоморфты емес болса, онда k - өлшемді шеті бар көпбейнелік деп атаймыз. Екінші классқа жататын нүктелер жиынын көпбейнеліктің шеті деп айтамыз.

Дөңес көпбұрышқа гомеоморфты үшөлшемдік евклидтік кеңістіктегі шеті бар екі өлшемді көпбейнеліктерді клетка деп атаймыз.Көпбұрыштың төбелерінің бейнелері болатын нүктелерді клетканың төбесі, ал көпбұрыштың қабырғаларының бейнелерін клетканың қабырғасы деп атаймыз.

Екі өлшемді F көпбейнелігін клеткаларға жіктелген дейміз егер ақырлы санды $F_1, F_2 \ldots . F_n$ клеткалары табылып келесі екі шарт орындалса :

1) бұл клеткалар F көпбейнелігін толық жабатын болса ;

2) кез келген екі клетканың $F_i \cap F_j (i \neq j)$ қиылысуы бос жиын болады немесе ортақ төбесі болады немесе ортақ қабырғасы болады

F көпбейнелігінің k клеткалық жіктелуі берілсін.

F жиыны компактылы немесе шеті бар компактылы болсын x- K -клеткалық жіктелуінің төбесі деп аталады егер ол ең болмағанда бір клетканың төбесі болса , $\mathfrak{X} \in F$ сызығы K клеткалық жіктелудің қабырғасы , егер ол ең болмағанда бір клетканың қабырғасы болса. Келесідей белгілеулер ендіреміз :

α_0 – төбелерінің саны; α_1 – қабырғаларының саны; α_2 - K жіктелуіндегі клеткалар саны .

$X(F)= \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ саны F копбейнелігі үшін Эйлер характеристикасы деп аталады. Эйлер характеристикасы копбейнеліктің клеткаларға қалай жіктелуіне тәуелді емес екен , яғни топологиялық инварианты болады (өзгермейтін шама) Клетканың төбелерін реті бойынша айналып өтуді клетканың бағыты деп атаймыз. Айналып өту сағат стрелкасының айналуы бойынша немесе кері болуы мүмкін. Сағат стрелкасының айналу бағытына қарсы бағытты оң бағыт деп аламыз.

Ортақ қабырғасы бар екі клетканы бағыттас дейміз . Егер олардың төбелерін айналып өткенде ортақ қабырғаларын өту қарама қарсы бағытта жүргізілсе.

Егер F көпбейнелігін K- клеткалық жіктелуінде кез келген ортақ қабырғасы бар екі клетка бағыттас болса онда F көпбейнелігін бағытталатын деп атаймыз Егер F көпбейнелігін осылай K-клеткалық жіктелуі болмаса онда F бағытталмайтын көпбейнелік делінеді . Көпбейнеліктің бағытталуы оның топологиялық инварианты болады .

Мысалдар:

№1 E_3 – үш өлшемді евклидттік кеңістіктегі сфера $S \in E_3$екі өлшемді көпбейнелік болатынын көрсетіңіздер .

<u>*Шешуі:*</u> $S \in E_3$ берілсін E_3- те $(O , \bar{i} , \bar{j} , \bar{k})$координаттар жүйесін ендіреміз O сфераның центрінде орналасқан болсын . Сфераның OZ осімен қиылысқан нүктелерін A және B деп белгілейік . Сфера E_3 кеңістігіндегі ендірілген топологияға сәйкес топологиялық кеңістік болады . Ол байламды ажыратылатын және санаулы базасы бар топологиялық кеңістік . Келесі жиындарды қарастырамыз :

$U_1 = S \setminus \{ A \}$ A нүктесінде тесілген сфера , және $U_2 = S \setminus \{ B \}$ B нүктесі алынып тасталған сфера.

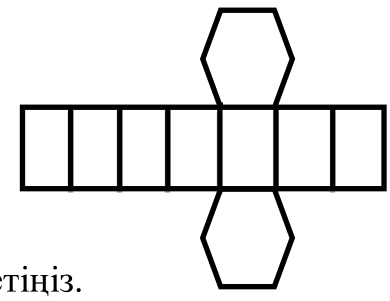
Келесідей бейнелеулерді қарастырамыз:

$\varphi_1 U_1$ XOY жазықтығына гомеоморфты бейнелеуі .

$M \in U_1$ және $M_1 \subset (XOY)$ A нүктесінен басталатын сәуленің сәйкесінше сферамен және жазықтықпен қиылысу нүктелері . Сол сиақты φ_2 : $U_2 \rightarrow$(XOУ) бейнелеуі болсын .U_1 және U_2R^2 координаттық жазықтықтарына гомеоморфты . Сонда ($U_1\,\varphi_1$)- екі өлшемді карта, ал ($U_2\varphi_2$)- де екі өлшемді карталар болады . Олай болса бұл карталар S сферасына гомеоморфты болғандықтан, олар сферада екі өлшемді карталарды анықтайды. Сонымен S – сфера екі өлшемді көпбейнелік болады .

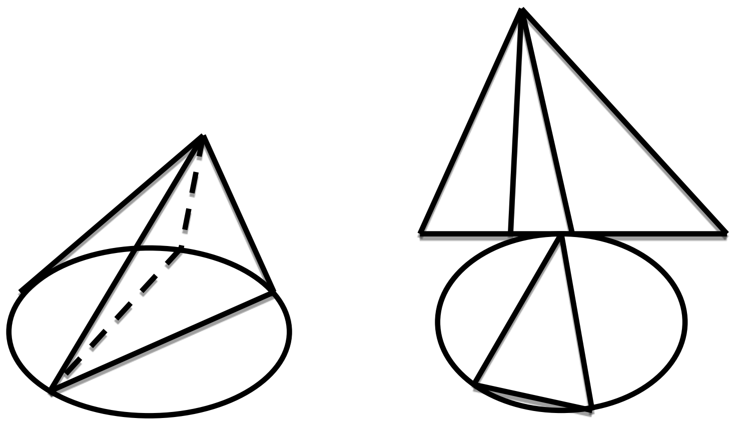
№2. n бұрышты призма n+2 клеткалы көпбейнелік болатынын көрсетіңіз .

__Шешуі:__ Призманы жақтары бойынша алынған жайылмасын қарастырамыз . Онда әрбір бүйір жақтары мен табандары клеткалар болады .



№3. Конустың клеткалық жіктелуін көрсетіңіз.

__Шешуі :__ Конусқа іштей тетраэдр сызамыз . Конус тетраэдрге , сонда конустың бүйір беті тетраэдрдің бүйір жақтарына гомеоморфты болады, ал табанындағы дөңгелекті клеткаларға жіктеуге болады.



№ 4. Тұйық дөңгелектің Эйлерлік характеристикасын табыңыздар.

__Шешуі :__ Шеңберге іштей дұрыс үшбұрыш сызайық . Тұйық дөңгелек шекарасымен берілген үшбұрышқа гомеоморфты болады. Сондықтан олардың Эйлерлік характеристикалары бірдей . Үшбұрыштың Эйлерлік характеристикасы

Х(F)= α_0 - α_1 + α_2 = 3- 3+ 1= 1

Демек тұйық дөңгелектің Эйлерлік характеристикасы Х (F) = 1

№ 5. Сфераның Эйлерлік характеристикасын табыңыз .

__Шешуі :__ Сфераға іштей тэтраэдр сызамыз сонда сфераның тетраэдрге гомеоморфты екенін көреміз . Тетраэдрдің Эйлерлік характеристикасын табу үшін оны клеткаларға жіктелуін аламыз . Сонда $\alpha_0 = 4$; $\alpha_1 = 6$; $\alpha_2 = 4$

Демек X(F) = 4- 6+ 4= 2

Жаттығулар:

1. R жиынындағы кесінді және сәуле бір өлшемдік көпбейнелік болатынын көрсетіңіз.
   Нұсқау: Сандар осінде қарастырамыз.
2. Бір қуысты гиперболоид және цилиндрді бірлік карталармен жабуға болатынын қөрсетіңіз.
   Нұсқау: Оське ортогональ проекцияларын қарастырамыз.
3. Элипсоид және екі қуысты гиперболоидты екілік карталармен жабуға болатынын көрсетіңіз.
   Нұсқау: Жанама жазықтықтар жүргіземіз.
4. Эллипстік парабаллоид және параболалық цилиндр E_3

анықталған топологиялар бойынша алғанда екі өлшемді көпбейнеліктер болатынын көрсетіңіз.

Нұсқау: Жазықтыққа гомеоморфты екенін пайдаланыңыз.

5. Келесі топологиялық кеңістіктер көпбейнелік болмайтынын көрсетіңіздер:
   а) дискреттік топологиямен анықталған шексіз топологиялық кеңістік ;
   б) евклид кеңістігіндегі қиылысатын екі жазықтық;
   Нұсқау: а) санаулы базасы болмайды ;
   б) Екі жазықтықтың қиылысуы R^2 гомеоморфты емес.
6. Келесі көпбейнеліктердің клеткаларға жіктелуін көрсетіңіз:
   а) шеңберлермен шектелген айналу цилиндрі;
   б) тор;
   в) Мебиус жапырағы (АВСД тік төртбұрышын В мен Д және А мен С нүктелерін жабыстырғанда пайда болатын фигура).
7. Келесі көпбейнеліктердің Эйлерлік характеристикасын табыңыздар:
   а) n бұрышты призманың бүйір жағының;
   б) n бұрышты пирамиданың;
   в) тордың;
   г) конустың бүйір жағының;
   д) сақинаның.
   Жауаптары: а) 0 ; б) 2; в) -1; г) 1; д) 0:
8. Сфера және кубтың бағытталған көпбейнеліктер болатынын көрсетіңіз.
   Нұсқау: Сфера кубқа гомеоморфты Кубтың жайылмасын қарастырамыз.

9. Мебиус жапырағының бағытталмаған көпбейнелік болатынын көрсетіңіз.

Нұсқау: Мебиус жапырағы екі клеткаға ажыратылғанын қарастырыңыз.

I. Қайталауға арналған сұрақтар

1. Метрикалық кеңістік дегеніміз не ?
2. E_n евклидтік кеңістігінде кез келген екі нүкте $A, B \in E_n$ үшін $\rho(\overline{AB})$ метрика болады ма ?
3. Координаталар жүйесі $(O, \bar{\imath}, \bar{\jmath})$ ендірілген R^2 жазықтықта

a) $A = \{(x, y) / a \leq x \leq в, 0 \leq y < \infty\}$;

b) $B = \{(x, y) / a \leq x \leq в, y > 0\}$;

c) $C = \{(x, y) / a \leq x \leq в, c \leq y \leq d\}$;

d) $D = \{(x, y) / a \leq x \leq в, c < y < d\}$;

e) $E = \{(x, y) / -\infty < x < +\infty, c \leq y \leq d\}$

Осы жиындардың қайсылары ашық жиын, қайсылары шектелген жиын, қайсы бір жиындардың шекаралары барын анықтаңыз.

4. Топологиялық кеңістік дегеніміз не ?
5. Қандай жиынды дискретті топология антидискретті топологиямен беттеседі?
6. Ашықта тұйықта болатын топологиялық кеңістік боладыма? Мысалдар келтіріңіз.
7. Ашықта тұйықта болмайтын топологиялық кеңістік болады ма?
8. Бірде бір ішкі нүктесі жоқ топологиялық кеңістік бар ма ?
9. Кез келген ішкі жиынының шекарасы жоқ топологиялық кеңістік бар ма?
10. Барлық топологиялық кеңістіктің базасы болады ма, ал санаулы базасы ше ?
11. E_n қандай ішкі жиындары компактылы болады? Бірнеше мысалдар келтіріңіз.
12. Компактылы жиындардың бірігуі компактылы болады ма ? Ал қиылысуы компактылы болады ма ?
13. Екі компактылы топологиялық кеңістік гомеоморфты болса байланыстылық, компактылық және ажыратылымдықтары сақтала ма?
14. Келесі жиындардың қайсыбірлері гомеоморфты болады ?

а) эллипс және шеңбер;

б) параболла және түзу;

в) параболла және гиперболла.

15. Әр түрлі өлшемді көпбейнеліктер гомеоморфты болады ма?
16. Көпбейнеліктің Эйлерлік характеристикасы 0-ге тең боладыма, ал теріс сан ше? Мысалдар келтіріңіз.
17. Дөңес көпбұрыштың Эйлерлік характеристикасын табыңыз.
18. n- бұрышты призма бағытталған екі өлшемді қөпбейнелік екенін көрсетіңіз .
19. Мебиус жапырағы екі өлшемді бір жақты бет екенін көрсетіңіз .
20. Бір нүктесі алынып тасталған (тесік) сфера екі өлшемді көпбейнелік болады ма? Оның Эйлерлік характеристикасы неге тең?

2. ЕВКЛИД КЕҢІСТІГІНДЕГІ СЫЗЫҚТАР

2.1 Скаляр аргументті векторлық функция

Анықтама: V_3 – үш өлшемді векторлық кеңістік болсын, ал $I \subset R$ сандар аралығы берілсін Егер әрбір сан $t \in I$ үшін белгілі бір заң немесе ереже бойынша қандайда вектор $\bar{\upsilon}(t) \in V_3$ сәйкес келтірілсе онда I жиынында скаляр аргументті векторлық функция берілген деп айтамыз $\bar{\upsilon} = \bar{\upsilon}(t)$

Векторлық функция $\bar{\upsilon}(t)$ нүктесінде шексіз аз деп айтамыз , егер

$\lim_{t \to t_0} |\bar{\upsilon}(t)| = 0.$

Векторлық функция $\bar{\upsilon}(t)$ $t \to t_0$ ұмтылғандағы шегін $\bar{a}$- векторы деп айтамыз , егер $\lim_{t \to t_0} \bar{\upsilon}(t) = \bar{a}$ болса .

Басқашалап айтқанда кез келген кіші сан $\varepsilon > 0$ үшін $\delta > 0$ саны табылып $|t - t_0| < \delta$ орындалатын барлық $t -$ лар үшін $|\bar{\upsilon}(t) - \bar{a}| < \varepsilon$ болса.

Векторлық функция $\bar{\upsilon}(t)$ $t = t_0$ нүктесінде үзіліссіз деп аталады, егер $\bar{\upsilon}(t_0) \in V_3$ бар болып $\lim_{t \to t_0} \bar{\upsilon}(t_0) = \bar{\upsilon}(t)$ орындалса.

$\bar{\upsilon}(t)$ функциясы I жиынында үзіліссіз болады егер ол әрбір $t \in I$ нүктесінде үзіліссіз болса.

$t \in I$ аргументінің t_0 нүктесіндегі өсімшесі деп $\Delta t = |t - t_0|$ шамасын айтамыз, мұндағы t t_0 нүктесіне мейлінше жақын алынған нүкте $\bar{\upsilon}(t)$ функциясының t_0 нүктесіндегі өсімшесі деп $\Delta\bar{\upsilon}(t_0) = \bar{\upsilon}(t + \Delta t) - \bar{\upsilon}(t_0)$ векторлық шамасын айтамыз. $\bar{\upsilon}(t)$ функциясын $t_0 \in I$ нүктесінде дифференциалданады дейміз егер $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{\upsilon}(t_0)}{\Delta t} = \bar{\upsilon}'(t_0)$ бар болса.

Егер $\bar{\upsilon}(t)$ $t \in I$ жиынының әр бір нүктесінде дифференциалданатын болса , онда $\bar{\upsilon}(t)$ I аралығында дифференциалданады дейміз. $\bar{\upsilon}'(t) = \frac{d\bar{\upsilon}}{dt}$ $\bar{\upsilon}(t)$ функцияның туындысы деп аталады . $d\bar{\upsilon} = \bar{\upsilon}'(t)dt$ функцияның дифференциялы деп атаймыз.

$\bar{\upsilon}(t)$ функциясының I аралығындағы туындысының өзі t- ға тәуелді функция болады . Сондықтан оның да туындысын алуға болады. Ол екінші ретті туынды деп аталады $(\bar{\upsilon}'(t))' = \bar{\upsilon}''(t)$

Сол сияқты одан да жоғары ретті туындылар анықталады.

Егер V_3 кеңістігінде $(O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ ортонормальданған координаттар жүйесі ендірілсе ,онда $\bar{\upsilon}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$

векторлы функция үш аналитикалық функциялар арқылы анықталады. $\lim_{t\to t_0} \bar{\upsilon}(t) = \bar{a}$ дегеніміз $\lim_{t\to t_0} x(t) = a_1$, $\lim_{t\to t_0} y(t) = a_2$, $\lim_{t\to t_0} z(t) = a_3$ яғни $\bar{a} = \{ a_1, a_2, a_3 \}$

Координаттармен анықталады. Осыдан $\bar{\upsilon}(t)$функциясы үзіліссіз болады, егер $x(t), y(t)$, $z(t)$ функциялары үзіліссіз болса, $\bar{\upsilon}(t)$ – дифференциалданады, егер $x(t), y(t), z(t)$ дифференциалданса. Демек

$$\frac{d\bar{\upsilon}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{\imath} + \frac{dy}{dt}\bar{\jmath} + \frac{dz}{dt}\bar{k}$$

Дифференциалдаудың ережелері:

- $(\bar{a})' = 0$ $\bar{a}$- тұрақты вектор
- $(\bar{\upsilon}(t) + \bar{u}(t))' = \bar{\upsilon}'(t) + \bar{u}'(t)$
- $(c\,\bar{\upsilon}(t))' = c\,\bar{\upsilon}'(t)$
- $(\bar{\upsilon}, \bar{u}) = (\bar{\upsilon}'\bar{u}) + (\bar{\upsilon}u')$
- $[\bar{\upsilon}, \bar{u}]' = [\bar{\upsilon}', \bar{u}] + [\bar{\upsilon}, \bar{u}']$
- $(f(t)\,\bar{\upsilon}(t))' = f'(t)\bar{\upsilon}(t) + f(t)\bar{\upsilon}'(t)$

Лемма: Егер $\bar{\upsilon}(t)$функциясы үшін I аралығында $|\bar{\upsilon}(t)|$ тұрақты болса, онда $\bar{\upsilon}(t)$ векторы $\bar{\upsilon}'(t)$векторына әрбір $t \in I$ нүктесінде перпендикуляр болады .

Дәлелдеуі : $(\bar{\upsilon}(t)\bar{\upsilon}(t)) = \bar{\upsilon}^2(t) = \left|\bar{\upsilon}(t)\right|^2$

$(\bar{\upsilon}^2(t))' = \left(\left|\bar{\upsilon}(t)\right|^2\right)' = 2\left|\bar{\upsilon}(t)\right| \left|\bar{\upsilon}(t)\right|' = 0$

Сонда $\bar{\upsilon} \perp \bar{\upsilon}'$ болады екен.

<u>Мысалдар:</u>

1.Скаляр аргументті векторлық функция берілген

$\bar{\upsilon}(t) = t\,\bar{\imath} + \sin^2 t\,\bar{\jmath} + \cos^2 t\,\bar{k}$ $t \in [0, 2\pi)$

$\bar{\upsilon}''(t)$ кез келген $t \in [0, 2\pi)$ үшін YOZ жазықтығына паралель екенін көрсетіңіз

<u>Шешуі</u> : $\bar{\upsilon}''(t) = x''(t)\bar{\imath} + y''(t)\bar{\jmath} + z''(t)\bar{k}$ болғандықтан

$x''(t) = 0; y''(t) = 2\cos 2t, z''(t) = 2\cos 2t$ болады яғни

$$\bar{\upsilon}''(t) = 0\,\bar{\imath} + 2\cos 2t\,\bar{\jmath} + 2\cos 2t\,\bar{k} = 2\cos 2t\,\bar{\jmath} + 2\cos 2t\,\bar{k}$$

Осыдан $(\bar{\imath}, \bar{\upsilon}''(t)) = 0$ яғни $\bar{\imath} \perp \bar{\upsilon}''(t)$демек $\bar{\upsilon}''(t)$векторы YOZ жазықтығына паралель екен.

2. $\bar{\upsilon}(t)$ – векторлық функциясы кез келген $t \in I$ үшін тұрақты бағытты вектор болуы үшін $\bar{\upsilon}'(t)$, $\bar{\upsilon}(t)$векторына коллениар болуы қажетті және жеткілікті болатынын дәлелдеңіз.

Дәлелдеуі: Қажеттілігі : $\bar{\upsilon}(t)$тұрақты бағытты вектор болсын
$\bar{\upsilon}(t) = \lambda(t)\bar{a}$ онда $\bar{\upsilon}'(t) = \lambda'(t)\bar{a}$ яғни $\bar{\upsilon}(t)$ мен $\bar{\upsilon}'(t)$векторлары коллениар
Жеткіліктілігі : Егер $\bar{\upsilon}(t)$, $\bar{\upsilon}'(t)$ коллениар болса онда
$\bar{\upsilon}'(t) = \beta(t)\bar{\upsilon}(t)$ Келесідей бірлік векторды қарастырамыз
$\bar{e}(t) = \frac{\bar{\upsilon}(t)}{|\bar{\upsilon}(t)|}$ осыны дифференциалдасақ

$$\bar{e}'(t) = \frac{\bar{\upsilon}'(t)|\bar{\upsilon}(t)| - \bar{\upsilon}(t)|\bar{\upsilon}(t)|'}{|\bar{\upsilon}(t)|^2} = \frac{\beta(t)\bar{\upsilon}(t)|\bar{\upsilon}(t)| - \bar{\upsilon}(t)|\bar{\upsilon}(t)|'}{|\bar{\upsilon}(t)|^2} = \lambda|t| \cdot \frac{\bar{\upsilon}(t)}{|\bar{\upsilon}(t)|}$$

$e'(t) = \lambda(t)\bar{e}(t)$

мұндағы $\lambda(t) = \dfrac{\beta(t)|\bar{\upsilon}(t)| - |\bar{\upsilon}(t)|'}{|\bar{\upsilon}(t)|}$

$e(t)$ бірлік вектор, демек $|\bar{e}'(t)| = 1$ яғни ұзындығы тұрақты
Лемма бойынша

$$\bar{e}'(t) = \lambda(t)\bar{e}(t)$$

Орнына қойсақ $\lambda(t)\,\bar{e}'(t) = 0$. Осыдан $\lambda(t) = 0$, яғни $\bar{e}'(t) = 0$ $\bar{e}(t)$- тұрақты вектор екен, және $\bar{\upsilon}(t)$ мен бағыттас . Осыдан $\bar{\upsilon}(t)$тұрақты бағыттағы вектор болады.

3. Кез келген $t \in I$ үшін $\bar{\upsilon}(t) \neq 0$,$\bar{\upsilon}'(t)$және $\bar{\upsilon}''(t)$коллениарлы емес болсын Онда кез келген $t \in I$ үшін
$\bar{\upsilon}(t)$векторы қандайда бір жазықтыққа паралель болуы үшін

$$(\bar{\upsilon}(t)\bar{\upsilon}'(t)\bar{\upsilon}''(t)) = 0$$

Болуы қажетті және жеткілікті болатынын дәлелдеңіздер.
Қажеттілігі : $\bar{\upsilon}(t)$ векторы қандайда бір нормаль векторы $\bar{N}$ болатын жазықтыққа паралель болсын, онда $(\bar{\upsilon}(t), \bar{N}) = 0$ шарты орындалады $t \in I$
Осы өрнекті екі рет дифференциалдасақ
$(\bar{\upsilon}(t), \bar{N})' = (\bar{\upsilon}'(t), \bar{N}) = 0$,

$(\bar{\upsilon}'(t), \bar{N})' = (\bar{\upsilon}''(t), \bar{N}) + (\bar{\upsilon}'(t), \bar{0}) = 0$

яғни $(\bar{\upsilon}', \bar{N}) = 0$

Демек $(\bar{\upsilon}''(t), \bar{N}) = 0$, орнына қойғанда $(\bar{\upsilon}(t)\bar{\upsilon}'(t)\bar{\upsilon}''(t)) = 0$ болады

Жеткіліктілігі: $(\bar{\upsilon}(t)\bar{\upsilon}'(t)\bar{\upsilon}''(t)) = 0$ шарты орындалсын Онда $[\bar{\upsilon}(t)\bar{\upsilon}'(t)]$ векторы $\bar{\upsilon}''(t)$ векторына перпендикуляр болады. Екінші жағынан $\bar{\upsilon}(t)$-ға перпендикуляр $[\bar{\upsilon}'(t)\bar{\upsilon}''(t)]$ алдыңғы мысалда қарастырғандай $\bar{\upsilon}(t)$-тұрақты бағытты болуы үшін $\bar{\upsilon}'(t)$ мен $\bar{\upsilon}(t)$коллениар болуы керек, демек $\bar{\upsilon}'(t)\bar{\upsilon}''(t)$ бір жазықтықта жатқандықтан $[\bar{\upsilon}(t)\bar{\upsilon}'(t)]' = [\bar{\upsilon}(t), \bar{\upsilon}''(t)]$ векторлары $\upsilon(t)$ және $\bar{\upsilon}''(t)$перпендикуляр болады Сондықтан $[\bar{\upsilon}(t)\bar{\upsilon}'(t)]$ және $[\bar{\upsilon}'(t), \bar{\upsilon}''(t)]$ векторлары колллениар демек $[\bar{\upsilon}(t)\bar{\upsilon}'(t)]$ векторының бағыты тұрақты екен яғни $[\bar{\upsilon}(t)\bar{\upsilon}'(t) = \lambda(t)\bar{a}$ Осыдан $\bar{\upsilon}(t)$ векторына $\bar{a}$ векторы перпендикуляр Сонда $\upsilon(t)$ векторы нормаль векторы $\bar{a}$ болатын жазықтыққа паралель болады.

4. Келесі теңдіктер дұрыс боладыма ?

а) $|\bar{\upsilon}'| = |\bar{\upsilon}|'$,

б) $(\bar{\upsilon}\bar{\upsilon}') = |\bar{\upsilon}|\,|\bar{\upsilon}'|$

Шешуі : а) Дұрыс емес, мысалы $\bar{\upsilon} = \{\cos t, \sin t, 0\}$ болсын $\bar{\upsilon}' = \{-\sin t, \cos t, 0\}$ $|\bar{\upsilon}'| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$

$|\bar{\upsilon}'| = 1$ $|\bar{\upsilon}|' = (1)' = 0$ теңдік орындалмайды $|\bar{\upsilon}'| \neq |\bar{\upsilon}|'$

б) Дұрыс болады, себебі $(\bar{\upsilon}\bar{\upsilon}) = \bar{\upsilon}^2 = |\bar{\upsilon}|^2$

Екі жағын дифференциалдасақ $2(\bar{\upsilon}\bar{\upsilon}') = 2|\upsilon|\,|\bar{\upsilon}|'$,

$(\bar{\upsilon}\bar{\upsilon}') = |\upsilon|\,|\bar{\upsilon}|'$

Жаттығулар :

1. Келесі векторлық функциялардың туындыларын табыңыздар: а) $\bar{\upsilon}^2$; б) $|\bar{\upsilon}|$; в) $(\bar{\upsilon}', \bar{\upsilon}''$; г) $[\bar{\upsilon}', \bar{\upsilon}'']$; д) $(\bar{\upsilon}', \bar{\upsilon}''\bar{\upsilon}''')$ е) $\sqrt{[\bar{\upsilon}\bar{\upsilon}']^2}$.

Жауаптары:

а) $2(\bar{\upsilon}\bar{\upsilon}')$; б) $\frac{(\bar{\upsilon}\bar{\upsilon}')}{|\bar{\upsilon}|}$; в) $\bar{\upsilon}''^2 + (\bar{\upsilon}', \bar{\upsilon}'')$;г) $[\bar{\upsilon}', \bar{\upsilon}'']$; д) $(\bar{\upsilon}', \bar{\upsilon}''\bar{\upsilon}''')$

е) $\frac{[\bar{\upsilon}\bar{\upsilon}'][\bar{\upsilon}', \bar{\upsilon}'']}{\sqrt{[\bar{\upsilon}\bar{\upsilon}']^2}}$

2. $\upsilon(t) = \cos t\,\bar{\imath} + \sin t\,\bar{\jmath}$, $t \in [0, 2\pi]$ функциясы берілген келесі теңдіктерді дәлелдеңіз

а) $\bar{\upsilon}'(t)(t + \frac{\pi}{2})$;

б) $\bar{\upsilon}''(t) = -\bar{\upsilon}(t)$в) $\bar{\upsilon}'''(t) = -\bar{\upsilon}'(t)$

г) $\bar{\upsilon}'''(t)\bar{\upsilon}'(t) = -1$

3. $\bar{\upsilon}(t) = a\cos t\,\bar{\imath} + a\sin t\,\bar{\jmath} + e^{-t}\bar{k}$, $t \in [0, 2\pi)$функциясы берілген а-тұрақты шама. Дәлелдеңіздер:

а) $(\bar{\upsilon}(t))^2 = (\bar{\upsilon}''(t))^2$;
б) $|\bar{v}(t)| = |\bar{\upsilon}'''(t)|$;
в) $\bar{\upsilon}(t)+\bar{\upsilon}'(t) + \bar{\upsilon}''(t) + \bar{\upsilon}'''(t) = 0$; г) $(\bar{\upsilon}(t)\bar{\upsilon}''(t)) = (\bar{\upsilon}'(t)\bar{\upsilon}'''(t))$

4. Келесі векторлық функциялардың, қандайда бір жазықтыққа паралель болатынын дәлелдеңіз

а) $\bar{\upsilon}(t) = (t^2 - 5)\bar{i} + (t^2 + 3)\bar{j} + e^t\bar{k}$, $t \in (-\infty; +\infty)$;
б) $\upsilon(t) = e^t\bar{i} + (e^t + 1)\bar{j} + (e^{-t} - 2)^k$, $t \in (-\infty; +\infty)$;

<u>Нұсқау :</u> 3- ші мысалды пайдаланыңыз , яғни

$(\bar{\upsilon}(t)\bar{\upsilon}'(t)\bar{\upsilon}''(t)) = 0$ болатынын дәлелдеу жеткілікті .

5. Векторлық функция $\upsilon(t) t \in I$ траекториясы сонда ғана түзу сызық болады, егер $\bar{\upsilon}'(t), \bar{\upsilon}''(t)$ векторлары коллениар.болса ғана. Дәлелдеңіз

<u>Нұсқау:</u> 2-ші мысалды пайдаланып, $\bar{\upsilon}'(t) = t\bar{a} + \bar{a}_0$ - түзудің теңдеуі болатынын ескеріңіз. Ол үшін $\bar{\upsilon}'(t) = \alpha(t)\bar{a}$ теңдігін интегралдау қажет .

1.1. Евклид кеңістігіндегі сызықтар. Біртегіс сызықтар

Анықтама: Кесінді, түзу және тұйық сәулені өте қарапайым сызықтар деп атаймыз.
Өте қарапайым сызықтардың біріне гомеоморфты болатын евклид кеңістігіндегі E_3 фигураны элементар сызық дейміз . Басқаша айтқанда элементар сызық деп, қандайда бір сандық аралыққа I гомеоморфты фигураны айтамыз. Егер кеңістікте тік бұрышты координаталар жүйесі ендірілсе, онда элементар сызықтарды келесідей теңдеулер арқылы анықтауға болады .

1. Векторлық теңдеуі: $\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$ $\bar{r}(t) = \overline{OM}$, яғни $M(t)$ нүктесінің радиус векторы , $t \in I$.
2. Параметрлік теңдеуі : $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ мұндағы ең болмағанда бір функция қатаң монотонды функция.
3. Айқындалмаған теңдеуі:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \Phi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Ақырлы немесе санаулы элементар сызықтар жиынымен жабуға болатын фигураны сызық немесе қисық деп атаймыз. Өз-ара қиылысатын сызықтардың нүктелері қарастырылмайды.

Әрбір нүктесінің маңайы элементар сызық болатын фигураны қарапайым сызық дейміз.

$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$ теңдеулерімен берілетін қарапайым сызықты $t \epsilon$I C^k классына жататын біртегіс сызық дейміз ($k \in N$), егер: біріншіден, $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ функциялары $t \in I$ болғанда k ретке дейінгі үзіліссіз туындылары бар болса; екіншіден, $t \in I$ әрбір мәні үшін $rang||x', y', z'||$=1 болса, яғни әрбір нүктеде функцияның туындылары бір мезгілде нольге айналмаса.

Егер C^k классына жататын бір тегіс сызық берілсін, $\gamma = f(I)$ I аралығы үшін гомеоморфты функция $h(I) = I'$ анықталса онда $g = fh^{-1}$ гомеоморфизмі анықталады. Бұл жағдайда g гомеоморфизмі $\gamma = f(I)$ сызығын анықтайды, ал $h -$ функциясын параметрді ауыстыру мүмкіндігі функциясы дейміз.

C^k классына жататын $x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$ теңдеуімен берілген бір тегіс сызық үшін $h(t)$ параметрі ауыстыру мүмкін, егер: 1) $h(t) t \in I$ kретке дейінгі үзіліссіз туындылары бар болса; 2) Барлық $t \in I$ үшін $\frac{dh}{dt}$нольден өзгеше болса.

Айқын емес теңдеулері арқылы берілген сызық $M(x, y, z)$ нүктесінде C^k классына жататын біртегіс сызық болады, егер: 1) $M(x, y, z)$ нүктесінің қандайда бір маңайында $F(x, y, z\ )$ және $\Phi(x, y, z)$функцияларының k ретке дейінгі үзіліссіз дербес туындылары бар болса;

2) М нүктесінде $\begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix} = 2$ болса.

Мысалдар:

1. Параметрлік теңдеулері арқылы берілген келесі γ_1және γ_2 сызықтары беттесетін сызықтар екенін дәлелдеңіздер:

$$\gamma_1: \quad x = cost, \quad y = sint, \qquad z = t - 1, \qquad I_1 = [0,1]$$

$$\gamma_2: \quad x = cos\frac{u-a}{b-a}, \quad y = sin\frac{u-a}{b-a}, \quad z = \frac{u-b}{b-a}, \quad I_2 = [a.b], a < b$$

Шешуі:

Алдымен екеуіде бір класстағы біртегіс сызықтарға жататынын тексеріп көреміз. Ол қиын емес, $\gamma_1 \in C^\infty, \quad \gamma_2 \in C^\infty$ класстарына жататын біртегіс сызықтар екен. Параметр ауыстыруын қарастырамыз:$t = \frac{u-a}{b-a}$, ал $t - 1 = \frac{u-a}{b-a} - 1 = \frac{u-b}{b-a}$

Параметр ауыстыру мүмкін ауыстыру болатынын тексереміз $I_2 \to I_1$- гомеоморфизм $t = \frac{u-a}{b-a}$ - монотонды өспелі функция шексіз дифференциалданғанда $\frac{dt}{du} = \frac{1}{b-a} \neq 0, u \in I_2$. Сонымен параметрді ауыстыру мүмкін ауыстыру болып барлық шарттарды қанағаттандырады, демек γ_1және γ_2 бір сызық болады екен.

2. Келесі теңдеулермен берілген сызықтар бір сызықтың теңдеулері емес екенін көрсетіңіз.

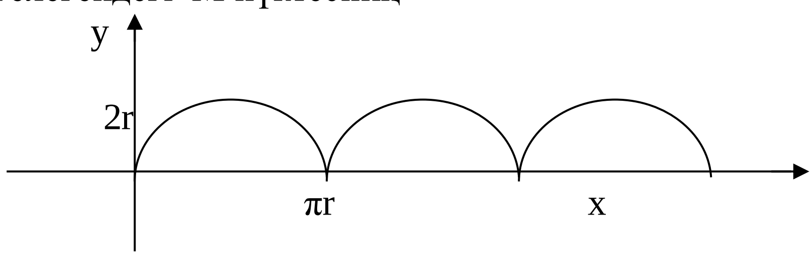
$$r_1(t) = t\bar{\imath} + t^2\bar{\jmath} + 0\bar{k} \quad t \in (-\infty, +\infty)$$
$$r_2(u) = u^3\bar{\imath} + u^6\bar{\jmath} + 0\bar{k} \quad u \in (-\infty, +\infty)$$

Шешуі:
Бір сызықтың теңдеуі бола алмайды, себебі $t = u^3$ параметрі ауыстыру мүмкін емес $\frac{dt}{du} = 3u^2$, $u = 0$, $\frac{dt}{du} = 0$ болады.

3. Келесі теңдеумен берілген сызықтың айналу параболоидында жататынын көрсетіңіз және оның XOY координаталар жазықтығындағы проекциясын табыңыз.

$$\gamma: \quad x = atcost, \quad y = atsint, \quad z = \frac{a^2t^2}{2p} \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

$a, p -$ тұрақты шамалар $a > 0, \quad p \neq 0$
Шешуі:
Айналу параболлоидінің канондық теңдеуі келесі түрде екенін білеміз: $x^2 + y^2 = 2pz$, $x^2 = a^2t^2cos^2t, y^2 = a^2t^2sin^2t$ орнына қойсақ толық қанағаттандыратынын көреміз.
XOY жазықтығында сызықтың теңдеуі келесі түрде болады:
$x = atcost, \quad y = atsint, \quad z = 0$ осыдан $tgt = \frac{y}{x}, \quad x^2 + y^2 = a^2t^2$ екенін ескерсек $t = arctg\,\frac{y}{x}$ орнына қойып $\sqrt{x^2 + y^2} = aarctg\,\frac{y}{x}$ теңдеуіне келеміз. Бұл Архимед спиралының теңдеуі.
4. Радиусы r –ге тең шеңбердің сырғымай түзу бойымен дөңгелегендегі қандайда бір М нүктесінің траекториясын циклоида деп атаймыз. Координаталар жүйесінің басы О нүктесімен бастапқы нүктесі М беттескенде ОХ осі бойымен қозғалған шеңбердің циклоидасының параметрлік теңдеуін жазыңыздар.
Шешуі:
Бастапқыда координаталар жүйесінің басында орналасқан шеңбердің М нүктесі, шеңбер t бұрышына дөңгелегендегі М нүктесінің координаталарын табайық



M(x,y) үшін
x=OS=OP-SP, y=MS=CP-CN
OP=MP=rt , SP=MN=r sint,
CP=r, CN=r cost
Демек циклоиданың параметрлік теңдеуі келесідей болады:

$$x = r(t - sint), \quad y = r(1 - cost), \quad z = 0, \quad t \in [0, 2\pi)$$

Бұл сызықты циклоиданың бір аркасы деп атаймыз. Жалпы циклоида осыған конгруентті шексіз аркалардан тұратыны белгілі. Бір аркасын жасау үшін шеңбер бір айналғанда $2\pi r$ жол жүріп өтетіні анық.
Жаттығулар:
1. Келесі сызықтардың параметрлік теңдеуін жазыңыздар:

а) түзу; б) шеңбер; в) эллипс; г) гипербола; д) парабола

Жауаптары:

а) $x = acos^2t, \quad y = bsin^2t \quad z = 0, \quad t \in [0, 2\pi), a, b$ −тұрақты

б) $x = rcost, \quad y = rsint, \quad t \in [0,2\pi)$, егер шеңбердің центрі $(a, b, 0)$ нүктесінде болса, онда

$x = rcost + a, \quad y = rsint + b, z = 0, \quad t \in [0,2\pi)$

в) $x = acost, \quad y = bsint, \quad z = 0, \quad t \in [0,2\pi)$, a,b-жарты осьтері

г) $x = cht, \quad y = bsht, \quad z = 0, \quad t \in (-\infty, +\infty), \quad a, b$ −жарты осьтері

д) $x = \frac{t^2}{2p}, \quad y = t, \quad z = 0, \quad t \in (-\infty, +\infty)$, p-параболаның параметрі

2. Келесі теңдеулермен қандай сызықтар берілетінін анықтаңыздар:

а)$x = e^t, \quad y = e^t, \quad z = 0, \quad t \in (-\infty, +\infty)$;

б)$x = \frac{a}{cost}, \quad y = btgt, \quad z = 0, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

в)$x = cos^2t, \quad y = sin^2t, \quad z = 0, \quad t \in [0,\pi)$;

г)$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2}, \quad z = 0, \quad t \in (-\infty, +\infty)$;

д)$x = \frac{a}{\sqrt{1+t^2}}, \quad y = \frac{at}{\sqrt{1+t^2}}, \quad z = 0, \quad t \in (-\infty, +\infty)$;

е)$x = \frac{a-t}{a+t}, \quad y = \frac{t}{a+t}, \quad z = 0, \quad t \neq -a$

ж)$x = \frac{3at}{1+t^2}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^2}, \quad z = 0, \quad t \neq -1$

Жауаптары:

а) $x - y = 0$ түзуі;б) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболасы; в) $x + y = 1$ түзуі; г) $x^2 + y^2 = 1$ шеңбері; д) $x^2 + y^2 = a^2$ шеңбері; е) $x + 2y = 1$ түзуі; ж) $x^3 + y^3 = 3axy$ декарт жапырағы.

3. Айқындалмаған теңдеулері арқылы берілген келесі сызықтардың параметрлік теңдеулерін жазыңыздар:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ y^2 - z + 1 = 0 \end{cases}$; в)$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ y - xz = 0 \end{cases}$.

Жауаптары:

а) $x = cost, \quad y = sint, \quad z = cost + 2, \quad t \in [0,2\pi)$.

б)$x = \frac{1}{cost}, \quad y = -tgt, \quad z = \frac{1}{cos^2t}, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

в)$x = acost, \quad y = asint, \quad z = tgt, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

4. Келесі сызықтардың көрсетілген беттерде жататынын дәлелдеңіз:

а) $x = acost, \quad y = asint, \quad z = bt, \quad t \in (-\infty, +\infty)$осі Ozболатынын дөңгелек цилиндрде;

б) $x = 1 + cost, \quad y = sint, \quad z = 2sin\frac{t}{2}, \quad t \in [0,2\pi)$центрі координаттар басында радиусы 2-ге тең сферамен $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ цилиндрлік бетте;

в) $x = t^2cost, \quad y = t^2sint, \quad z = t^2, \quad t \in (-\infty, +\infty)$төбесі координаттар басында, ал осі Ozболатынын дөңгелек конуста;

г) $x = a\ \sin^2 t$, $y = в \sin t \cos t$, $z = c \cos t$, $t \in [0, \pi)$ үш осьті эллипсоидта ;
д) $x = ch\, t$, $y = sh\, t$, $z = c\, t$, $t \in (-\infty; +\infty)$ гиперболалық цилиндрде

5. Келесі теңдеулермен берілген әрбір сызықтық координаттар жазықтығындағы проекцияларын табыңыздар

а) $x = t$, $y = t^2$, $z = e^t$, $t \in (-\infty; +\infty)$

б) $x = acht$, $y = asht$, $z = ct$, $a, c \neq 0$, $t \in (-\infty; +\infty)$

в) $\begin{cases} z = x^2 - y^2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ XOY жазықтығындағы;

г) $\begin{cases} x = y^2 + z^2 \\ x - 2y + 4z - 4 = 0 \end{cases}$ YOZ жазықтығындағы .

Жауаптары :

а) XOУ жазықтығында $\begin{cases} z = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$;

XOZ жазықтығында $\begin{cases} y = 0 \\ z = e^x \end{cases}$;

YOZ жазықтығында $\begin{cases} x = 0 \\ z = e^{\sqrt{x}} \end{cases}$;

б) XOУ жазықтығында $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 - y^2 = a^2 \end{cases}$;

XOZ жазықтығында $\begin{cases} y = 0 \\ x = ach\frac{z}{c} \end{cases}$;

YOZ жазықтығында $\begin{cases} x = 0 \\ y = ash\frac{z}{c} \end{cases}$;

в) $\begin{cases} z = 0 \\ (x - y)(x + y - 1) = 0 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x = 0 \\ (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 9 \end{cases}$.

6.Параметрлік теңдеуі арқылы берілген келесі сызықтардың айқындалмаған теңдеуін жазыңыздар

а) $x = t$, $y = t^2$, $z = e^t$, $t \in (-\infty; +\infty)$;

б) $x = \sin 2t$, $y = 1 - \cos 2t$, $z = 2\cos t$, $t \in [0, \pi)$

Жауаптары :

а) $\begin{cases} y = x^2 \\ z = e^x \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 = 1 \\ z^2 + y = 4 \end{cases}$

7. Келесі екі бір қуысты гиперболоидтардың қиылысуынан пайда болған сызықтың параметрлік теңдеуін жазыңыздар.

$x^2 - y^2 + z^2 = 1$ және $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

<u>*Жауабы:*</u> Төрт жағдайы болуы мумкін :

1) $x = 1$; $y = t$, $z = t$;

2) $x = 1$, $y = t$, $z = -t$;

3) $x = -1$, $y = t$; $z = t$;

4) $x = -1$, $y = t$, $z = -1$.

2.3.Жанама және доғаның ұзындығы

Егер E_3 кеңістігінде $(O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ координаттар жүйесі ендіріліп біртегіс сызықтың векторлық теңдеуі берілсе $\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$, онда әр бір M_0 нүктесінде оның жанамасы бар болады , ол осы нүктедегі бағыттаушы вектор $\bar{r}' = \frac{d\bar{r}}{dt}$ арқылы анықталады.

$M(x_0, y_0, z_0)$ нүктедегі жанаманың теңдеуі келесі түрде болады

$$\frac{x-x_0}{x_0'} = \frac{y-y_0}{y_0'} = \frac{z-z_0}{z_0'}$$

Мұндағы x_0', y_0', z_0', $\bar{r}'(t_0)$ - векторының координаттары ,$\bar{r}'(t_0) = \{ x_0', y_0', z_0' \}$

Егер сызықтың теңдеуі айқындалмаған түрде берілсе

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \Phi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Онда сызықтың M_0 нүктесінде жүргізілген жанамасының бағыттаушы векторы $\bar{r}' \in [F', \Phi']$ векторлық көбейтіндісі арқылы берілген векторға коллениар болады , мұнда $F' = F_x\bar{i} + F_y\bar{j} + F_z\bar{k}$және $\Phi' = \Phi_x\bar{i} + \Phi_y\bar{j} + \Phi_z\bar{k}$

Демек бағыттаушы вектор

$$\bar{r}' = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix}\bar{i} + \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ \Phi_z & \Phi_x \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{vmatrix}\bar{k}$$

болып жанама түзудің теңдеуі келесі түрде болады

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ \Phi_z & \Phi_x \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{vmatrix}}$$

Егер сызықтың теңдеуінде параметр ретінде доғаның ұзындығын алсақ онда $\bar{r} = \bar{r}(s)$ s параметрін біз натурал немесе табиғи параметр деп атаймыз .

Жалпы параметрмен табиғи параметр арасындағы байланыс келесідей болады .$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt$

Жалпы параметрлік теңдеумен берілген сызықтың доғасының ұзындығы келесідей анықталады .

$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$

Мұндағы $t = t_0$, сызықтың M_0 нүктесіне сәйкес келеді , ал $t = t_1, M_1$ нүктесіне.

Егер сызықтың теңдеуі табиғи параметр арқылы берілсе $\bar{r} = \bar{r}(s)$, онда $\left|\frac{dr}{dS}\right| = 1$ тұрақты болады, демек $\bar{r}' \perp \bar{r}''$.

Мысалдар:

1. Келесідей параметрлік теңдеуі арқылы берілген винттік сызықтың кез келген нүктесіндегі жанамасы OZ осімен тұрақты бұрыш жасайтынын дәлелдеңіз

$X = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = вt$, $t \in (-\infty; +\infty)$, мұндағы а, в - тұрақты , $a > 0$.

Винттік сызық деп біз бір мезгілде OZ осі бойынша айналатын және OZ осіне паралель бір қалыпты қозғалатын материалдық нүктенің траекториясын айтамыз .

Шешуі : Жанамамен OZ осі арасындағы бұрыштың тұрақты екенін дәлелдеу үшін жанама вектормен OZ осінің бағыттаушы векторы $\bar{R} = \{0, 0, 1\}$ арасындағы бұрыштың тұрақты екенін дәлелдеуіміз керек .

$\frac{d\bar{r}}{dt} = -a\sin t\,\bar{i} + \cos t\,\bar{j} + в\bar{k}$ кез келген нүктедегі жанаманың бағыттаушы векторы

$\cos\alpha = \frac{(\bar{r}', \bar{k})}{|\bar{r}'|} = \frac{-a\sin t \cdot 0 + a\cos t \cdot 0 + в \cdot 1}{\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + в^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

Осыдан $\cos\alpha = \frac{в}{\sqrt{a^2 + в^2}}$, яғни кез келген $t \in (-\infty; +\infty)$ үшін бұрыш тұрақты екен .

2. Келесі айқындалмаған теңдеуі арқылы берілген сызықтың әр бір нүктесіндегі жанамасы XOZ жазықтығына паралель екенін дәлелдеңіз

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ x^2 - y^2 - z^2 = 1 \end{cases}$$

Шешуі: Айқындалмаған теңдеу арқылы берілген сызықтың әр нүктесіндегі жанамасының бағыттаушы векторы $[F', \Phi']$ болады. Осы векторды табамыз.

$F_x = 2x$, $F_y = 2y$, $F_z = -2z$, $\Phi_x = 2x$, $\Phi_y = -2y$, $\Phi_z = -2z$

$$\begin{vmatrix} F_y F_z \\ \Phi_y \, \Phi_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & -2z \\ -2y & -2z \end{vmatrix} = -8yz, \quad \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ \Phi_z & \Phi_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2z & 2x \\ -2z & 2x \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} F_x F_y \\ \Phi_x \quad \Phi_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = -8xy$$

Осыдан $[\,F'\,,\,\Phi'\,] = -8\,(yz\bar{i} + xy\bar{k})$
Ал бұл вектор $I = \{0\,;1\,;0\}$ векторына перпендикуляр екені айқын. Демек жанама түзулер XOZ жазықтығына паралель болады .

4. Циклоиданың бір аркасының ұзындығын табыңыз
$x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$, $z = 0$, $t \in (-\infty; +\infty)$

Шешуі: Циклоиданың анықтамасына сәйкес оның бір аркасы $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$ параметрінің аралығымен анықталады
$x' = r(1 - \cos t), y' = r\sin t, z' = 0$

Осыдан $ds = \sqrt{r^2(1 - \cos t)^2 + r^2\sin^2 t}\,dt = r\sqrt{2(1 - \cos t)}\,dt = 2r\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt$, онда доғаның ұзындығы

$s = 2r\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt = 4r\int_0^{\pi}\sin u\,du = -4r(\cos\pi - \cos 0) = 8r$

Бір арнасының ұзындығы $8r$, r – циклоиданы жаратушы шеңбердің радиусы.

5. $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$, $t \in (-\infty; +\infty)$
арқылы берілген сызықтың теңдеуін табиғи параметр арқылы жазыңыздар

Шешуі : Табиғи параметр дегеніміз сызықтың әр бір нүктесіне дейінгі доғасының ұзындығы Осы берілген теңдеудің өзінде параметр t – табиғи параметр болады ма тексеріп көреміз Ол үшін $\left|\frac{dr}{ds}\right| = 1$ болуы керек.
$x' = e^t(\cos t - \sin t), y' = e^t(\cos t + \sin t), z' = e^t$

$\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = 3e^{2t} \neq 1, \quad t$ – табиғи параметр емес

Табиғи параметрді табамыз , $t = 0$ деп $t = t$ дейінгі доғаны табу керек

$s = \int_0^t\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt = \sqrt{3}\int_0^t e^u\,du = \sqrt{3}(e^t - 1)$

$s = \sqrt{3}(e^t - 1)$ осыдан t- ны табамыз.
$t = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)$ онда $e^t = \frac{s}{\sqrt{3}} + 1$

Бастапқы теңдеуде t – ның орнына қойып сызықтың табиғи параметр арқылы теңдеуін жазамыз

$x = (\frac{s}{\sqrt{3}} + 1)\cos(\ln(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1))$, $y = (\frac{s}{\sqrt{3}} + 1)\sin(\ln(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1))$, $z = \frac{s}{\sqrt{3}} + 1$
мұндағы $s > 0$.

Жаттығулар:

1. Келесі теңдеумен берілген сызықтардың көрсетілген аралықтағы доғасының ұзындықтарын табыңыздар.

а) $x = a(\cos t + \sin t)$; $y = a(\sin t - \cos t)$, $z = 0$, $t \in [0, 2\pi]$
б) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $z = 0$, $t \in [0, 2\pi]$
в) $y = ch\frac{x}{a}$ $x \in [0, в]$
г) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $z = \cos 2t$ тұйық сызық
д) $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$, $t \in [0, \pi]$
е) $\begin{cases} x^2 = 3y \\ 2xy = 9z \end{cases}$ $x \in [0, 3]$

Жауаптары: а) $2a\pi^2$; б) $\frac{3a}{2}$; в) $\frac{a}{2}(e^{\frac{в}{a}} - e^{-\frac{в}{a}})$; г) 10; д) $\sqrt{3}(e^{\pi} - 1)$; е) $4\sqrt{2}$.

2. Келесі теңдеулер арқылы берілген сызықтардың табиғи параметрге өткен теңдеуін жазыңыздар.

а) $x = \frac{t^2}{2}$, $y = \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{\frac{3}{2}}$, $z = t$, $t \in (-\infty; +\infty)$
б) $x = 2 - 2t$, $y = 3 + t$, $z = 2t$, $t \in (-\infty; +\infty)$
в) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = вt$, $t \in (-\infty; +\infty)$

Жауаптары: а) $x = \frac{1}{2}(\sqrt{1 + 2s} - 1)^2$,
$y = \frac{2\sqrt{2}}{3}(\sqrt{1 + 2\bar{s}} - 1)^{\frac{3}{2}}$, $z = \sqrt{1 + 2\bar{s}} - 1$
б) $x = -\frac{3}{2}\bar{s}$, $y = 3 + \frac{1}{3}\bar{s}$, $z = \frac{2}{3}\bar{s}$
в) $x = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2 + в^2}}$, $y = a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2 + в^2}}$, $z = в\frac{s}{\sqrt{a^2 + в^2}}$

3. Келесі теңдеулер арқылы берілген сызықтардың көрсетілген нүктедегі жанамаларының теңдеуін жазыңыздар

а) $x = \sin 2t$, $y = 1 - \cos 2t$, $z = 2\cos t$, $t = \frac{\pi}{4}$
б) $x = t - \sin t$, $y = (1 - \cos t)$, $z = \sin t$, $t = 0$
в) $x = e^t$, $y = t$, $z = e^{-t}$, $t \in (-\infty; +\infty)$ кез келген$t = t_0$ нүктеде:
г) $\begin{cases} x^2 + z^2 = 25 \\ x^2 + y^2 = 10, \end{cases}$ $M_0(3,1,4)$
д) $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 - z^2 = 47 \\ x^2 + 2y^2 = z^2, \end{cases}$ $M_0(-2,1,6)$
е) $\begin{cases} x^2 + 3y^2 + z^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 2, \end{cases}$ $M_0(1,1,1)$

Жауаптары: а) $x = 1$, $\frac{y-1}{-\sqrt{2}} = z - \sqrt{2}$; б) $x - 1 = y = z - 1$

в) $\frac{x-e^{t}}{e^{t}} = y - t = \frac{z-e^{-t}}{-e^{-t}}$; г) $x - 3 = 0$, $y + 8z - 33 = 0$ д) $\frac{x+2}{-21} = \frac{y-1}{28} = \frac{z-6}{4}$;

е) $x + y - z = 0$, $z = 0$.

4. Келесі сызықтардың берілген жазықтыққа паралель болатын жанамаларының теңдеулерін жазыңыздар

а) $x = \frac{t^4}{4}$, $y = \frac{t^3}{3}$, $z = \frac{t^2}{2}$ сызығы, $x + 3y + 2z + 5 = 0$ жазықтығына

б) $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = \mathrm{tg}\, t$ сызығы , $x - y - 3 = 0$ жазықтығына

в) $\begin{cases} x^2 = 3y + 27 \\ 2xy = 9z \end{cases}$ сызығы $z = 6$ жазықтығына

Жауаптары: а) $\frac{x-4}{4} = \frac{y+\frac{8}{3}}{-2} = z - 2$, $\frac{x-\frac{1}{4}}{1} = \frac{y+\frac{1}{3}}{-1} = \frac{z-\frac{1}{2}}{1}$;

б) $\frac{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y-\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{z-1}{2}$;

в) $\begin{cases} 2x - y - 12 = 0 \\ z = -4 \end{cases}$, $\begin{cases} 2x + y + 12 = 0 \\ z = 4 \end{cases}$.

5. Келесі сызықтардың әр бір нүктесіндегі жанамалары $\overline{P} = \{ 1 , 0 , 1\}$ векторымен тұрақты бұрыш жасайтынын көрсетіңіз.

а) $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$, $t \in (-\infty ; +\infty)$

б) $\begin{cases} x = 3y \\ 2xy = 9z. \end{cases}$

2.4.Сызықтың қозғалушы репері. Сызықтың қисықтығы мен бұралымы. Френе формулалары

Табиғи параметрі арқылы теңдеуі берілген $\bar{r} = \bar{r}(s)$, біртегіс γ сызығы берілсін $s\epsilon I$. Онда бұл сызықтың әрбір нүктесіндегі M(s) жанамасының бағыттаушы бірлік векторы $\bar{r}(s) = \frac{d\bar{r}}{ds}$ болады, себебі $\left|\frac{d\bar{r}}{ds}\right| = 1$

$\bar{N} = \frac{d}{ds}\frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{d^2 r}{ds^2}$ γ сызығының M(s) нүктесіндегі қисықтық векторы деп аталады, ал $|\bar{N}| = \left|\frac{d^2 r}{ds^2}\right| = k(s)$ қисықтың осы нүктедегі қисықтығы деп аталады, $k(s) > 0$. Бұл шама қисықтық жанамасының өзгеру жылдамдығын көрсетеді. $k(s) \neq 0,$ онда $R(s) = \frac{1}{k(s)}$ шамасы γ сызғының M нүктесіндегі қисықтық радиусы деп аталады.

Егер кеңістікте ортонормальданған координаттар жүйесі ендірілсе, онда γ сызығының теңдеуі келесі түрде беріледі:

$$\bar{r}(s) = x(s)\bar{\imath} + y(s)\bar{\jmath} + z(s)\bar{k}$$

Онда оның әрбір нүктедегі қисықтығы келесідей анықталады:

$$k(s) = \left|\frac{d^2r}{ds^2}\right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}$$

Теорема: Бір тегіс сызық түзу немесе түзудің бөлігі болуы үшін оның әрбір нүктесіндегі қисықтығы нөлге тең болуы қажетті және жеткілікті.

Егер сызықтың теңдеуі кез келген параметр арқылы берілсе

$$\bar{r}(t) = \bar{x}(t)\bar{\imath} + \bar{y}(t)\bar{\jmath} + \bar{z}(t)\bar{k}$$

Онда оның қисықтығы келесі формулалармен анықталады: $k(t) = \frac{|[\bar{r}^{\cdot}\bar{r}^{\cdot\cdot}]|}{|\bar{r}|^3}$

$\bar{\gamma} = \frac{\bar{N}}{|N|}$ векторын, бас нормаль түздің бірлік векторы деп атаймыз.

$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = k(s)\bar{\gamma}, \bar{\beta} = [\bar{r}, \bar{\gamma}]$ векторы γ сызығының М нүктесіндегі бинормалінің бірлік векторы деп атаймыз.

Сонымен γ сызығының әрбір М нүктесінде ортонормальданған үштік вектор бар болады екен.

$R_M = (M, \bar{\tau}, \bar{\gamma}, \beta)$ реперін γ сызығының М нүктесіндегі қозғалушы репері деп атаймыз.

Бұл репер келесі үш түзу арқылы қозғаушы координаттар жүйесін анықтайды:

$(M, \bar{\tau})$ – жанама түзу;

$(M, \bar{\gamma})$ – бас нормаль түзу;

$(M, \bar{\beta})$- бинормаль түзу.

Қозғалушы репердің координаттық жазықтықтар келесідей аталады:

$(M, \bar{\tau}, \overline{\gamma)}$- жанасушы жазықтық;

$(M, \bar{\gamma}, \bar{\beta})$- нормаль жазықтық;

$(M, \bar{\tau}, \bar{\beta})$- түзетуші жазықтық.

$\tau, \bar{\gamma}, \bar{\beta}$ векторларын байланыстыратын келесі формулалар Френе формулалары деп аталады:

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = k(s)\bar{\gamma} \qquad (1)$$

$$\frac{d\bar{\gamma}}{ds} = -k(s)\bar{\tau} + x(s)\bar{\beta} \qquad (2)$$

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds} = -x(s)\bar{\gamma} \qquad (3)$$

Мұндағы $x(s)$- сызықтың М нүктесіндегі бұралымы деп аталады. Ол берілген γ сызықтың М нүктесіндегі бинормалінің өзгеру жылдамдығын көрсетеді.

$$(s) = \frac{1}{k}\left(\frac{d\bar{r}}{ds}, \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}, \frac{d^3\bar{r}}{ds^3}\right).$$

Теорема: Біртегіс γ сызығы жазық болуы үшін, яғни жазықтықта жатуы үшін, оның әрбір нүктедегі бұралымы нолге тең болуы қажетті және жеткілікті.
$k = k(s)$ және $x = \gamma(s)$ теңдеулерін сызықтың табиғи теңдеуі деп атаймыз. Егер сызықтың табиғи теңдеулері берілсе, ол сызықтың кеңістікте орналасуын әрбір нүктесі бойынша толық анықтайды.

Мысалдар.

1.Кеңістіктегі γ сызығы кез келген параметрлеу арқылы берілсін $\bar{r} = \bar{r}(t)$. Егер γ- түзу немесе түзудің бөлігі емес сызық болса, онда оның қозғалушы реперінің кез келген нүктедегі координаттық осьтерімен координаттық жазықтықтарын анықтаушы элементтерін табыңыздар.

Шешуі: γ сызығының кез келген М нүктесін қарастырамыз. $\overline{r^{\cdot}}\frac{d\bar{r}}{dt}$ сызықтың М нүктесіндегі жанамасының бағыттаушы векторы болады.

Демек оның жанамасы (М, $\overline{r'}$) түзуімен анықталады, ал М нүктесінен өтетін $\overline{r'}$ векторына перпендикуляр жазықтық сызықтың М нүктесіндегі нормаль жазықтық болады.

Егер s- табиғи параметр болса, онда γ сызығының теңдеуі $\bar{r} = \bar{r}(s(t))$ болады. Сондықтан,

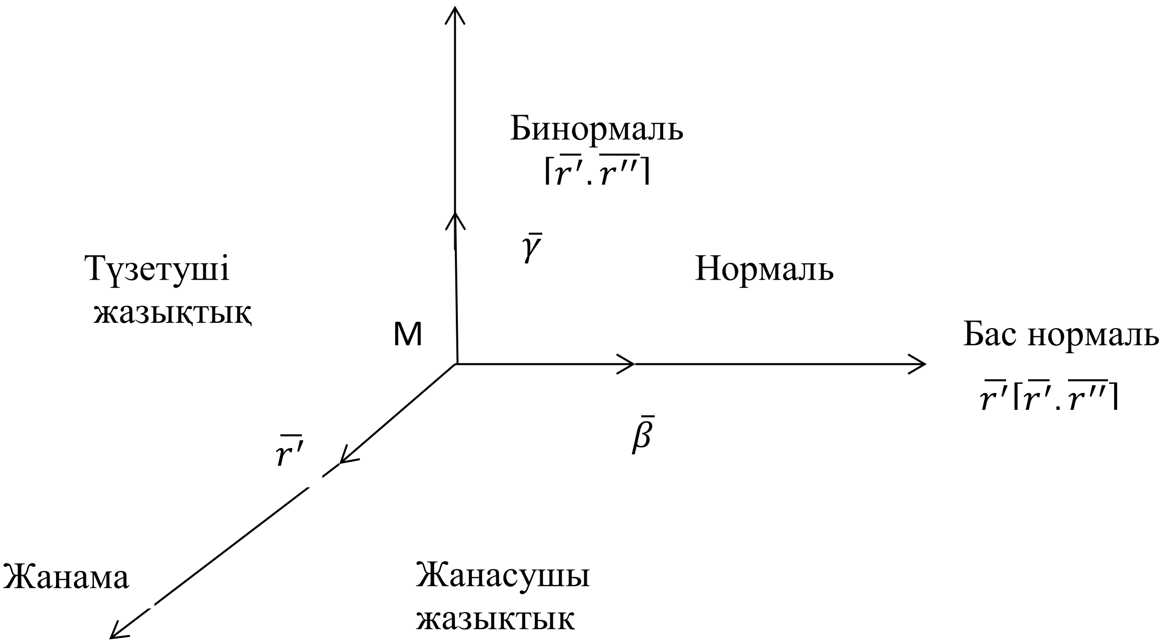
$$\overline{r'} = \frac{d\bar{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \bar{\tau}\frac{ds}{dt}, \quad \overline{r''} = \frac{d\bar{\tau}}{ds}\left(\frac{d^2s}{dt}\right)^2 + \bar{\tau}\frac{d^2s}{dt^2} = \bar{v}k(s)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \tau\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Осыдан $\overline{r''}$ $\bar{\tau}$ және $\bar{v}$ векторларының сызықтық комбинациясы болады.
k(s)$\neq 0$ және $\frac{ds}{dt} \neq 0$ болады.
Сондықтан $\overline{r'}(t)$ және $\overline{r''}(t)$ векторлары жанасушы сызықтың базисы болады. осыдан М нүктесіндегі жанасушы сызықтың (М, $\overline{r'}, \overline{r''}$) болады.

Сызықтың бинормалі жанасушы жазақтыққа перпендикуляр болғандықтан $[\overline{r'}, \overline{r''}]$ векторы бинормальға параллель екен. Осыдан сызықтың М нүктесіндегі бинормалі (М, $[\overline{r'}, \overline{r''}]$) сызықты анықтайды.

Сызықтың бас нормалі жанама және бинормальға перпендикуляр болғандықтан $[\overline{r'}[\overline{r'},\overline{r''}]]$ векторы бас нормальға паралель болады. осыдан сызықтың М нүктесіндегі бас нормаль түзуі (М, $[\overline{r'}[\overline{r'},\overline{r''}]]$) арқылы анықталады.

Түзетуші сызықтың жанама және бинормаль түзулері арқылы өтетінін ескерсек, сызықтың М нүктесіндегі түзетуші жазықтық (М,$\overline{r'}$ $[\overline{r'}[\overline{r'},\overline{r''}]]$) арқылы анықталатынын көреміз.



2.Келесі теңдеулер арқылы берілген сызықтың кез келген нүктедегі қозғалушы реперінің координаттық жазықтықтарының теңдеуін жазыңыздар және қисықтығы мен бұралымын табыңыздар.

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}cos^2t,\ \ y = \frac{\sqrt{2}}{2}sin^2t, \qquad z = \frac{1}{2}\sin 2t, \qquad t\epsilon(0;\pi)$$

__Шешуі:__ Берілген сызықтың теңдеуі табиғи параметр арқылы берілгенін тексеріп көреміз. Ол үшін

$$x' = -\sqrt{2}\cos t \sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t;\ \ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t;\ \ z' = \cos 2t$$

$$|\overline{\boldsymbol{r'}}| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\mathbf{sin\ 2}\boldsymbol{t}\right)^{\mathbf{2}} + \left(\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\mathbf{sin\ 2}\boldsymbol{t}\right)^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{cos^2}\mathbf{2}\boldsymbol{t}} = \sqrt{\boldsymbol{sin^2}\mathbf{2}\boldsymbol{t} + \boldsymbol{cos^2}\mathbf{2}\boldsymbol{t}} = \mathbf{1}$$

Демек, берілген сызықтың теңдеуі табиғи параметрі арқылы берілген екен, яғни параметр ретінде доғаның ұзындығы алынған. Осыдан кез келген $\boldsymbol{t = t_0}$ нүктесінде

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t_0, \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t_0, \cos 2t_0\right\}$$

Сызықтың теңдеуі табиғи параметр арқылы берілгендіктен $\bar{\nu}$ $-$ бас нормаль векторы $\overline{r''}$ векторымен бағыттас болады.

$$x'' = -\sqrt{2}\cos 2t, \qquad y'' = \sqrt{2}\cos 2t, \;\; z'' = -2\sin 2t.$$

Осыдан $|\overline{r''}| = 2$ және кез келген $\mathrm{t} = \mathrm{t}_0$ үшін $\bar{\nu} = \frac{r''}{|\bar{r}''|} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2t_0,\right.$ $\left.\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2t_0, -\sin 2t_0\right)$

$\bar{\beta} = [\bar{\tau}, \bar{\nu}]$ есептеп табамыз.

$$\bar{\beta} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t & \cos 2t \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2t & -\sin 2t \end{vmatrix}\bar{\imath} + \begin{vmatrix} \cos 2t & -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t \\ -\sin 2t & -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2t \end{vmatrix}\bar{\jmath} + \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t & \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2t & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2t \end{vmatrix}\bar{k} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{\jmath}$$

Осыдан $\bar{\beta}$- сызықтың кез келген нүктедегі бинормалі OXY жазықтығына параллель болады. $\bar{\beta}$- векторы түзетуші жазықтыққа перпендикуляр болғандықтан оның теңдеуі келесі түрде болады:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}cos^2 t_0\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}sin^2 t_0\right) = 0$$

$$\text{немесе } x - y - y - \frac{\sqrt{2}}{2}cos^2 t_0 = 0$$

$\bar{\nu}$ векторы түзетуші жазықтыққа перпендикуляр болғандықтан

$$\frac{\sqrt{2}}{2}cos2t_0\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}cos2t_0\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}cos2t_0\left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}sin^2 t_0\right) + sin2t_0\left(z - \frac{1}{2}sin2t_0\right) = 0.$$

Ықшамдағаннан кейін келесі түрге келеді:

$$\sqrt{2}\cos 2t_0(x - y) + 2\sin 2t_0 \cdot z - 1 = 0$$

$\bar{\tau}$- векторы нормаль жазықтыққа перпендикуляр болғандықтан, оның теңдеуі $-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t_0\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}cos^2 t_0\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t_0\left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}sin^2 t_0\right) +$ $+\cos 2t_0\left(z - \frac{1}{2}\sin 2t_0\right) = 0.$

Ықшамдағаннан кейін

$$\sqrt{2}\sin 2t_0(x-y) - 2\cos 2t_0 z = 0.$$

Осымен үш жазықтықтың да теңдеуін таптық.

Жанама түзудің теңдеуі:

$$\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}cos^2 t_0}{-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t_0} = \frac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}sin^2 t_0}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t_0} = \frac{z-\frac{1}{2}\sin 2t_0}{cos2t_0}$$

Нормаль теңдеуі:

$$\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}cos^2 t_0}{-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2t_0} = \frac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}sin^2 t_0}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2t_0} = \frac{z-\frac{1}{2}\sin 2t_0}{-sin2t_0}$$

Бинормаль түзудің теңдеуі: x+y=0,   z=0

Сызық табиғи параметр арқылы берілгендіктен, оның қисықтығы k=$|\overline{r'}|$ яғни k=2.

Сызықтың бұралымын табу үшін оның радиус-векторының үшінші ретті туындыларын табуымыз қажет болады:

$x''' = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t,\ \ y''' = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t, z''' = -4\cos 2t.$

$\overline{r'}, r'', r'''$векторларының аралас көбейтіндісін табамыз:

$$(\overline{r'}, r'', r''') = \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t & \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t & cos2t \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2t & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2t & -2sin2t \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t & -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t & -4cos2t \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -sin2t & sin2t & cos2t \\ -cos2t & cos2t & -2sin2t \\ sin2t & -sin2t & -4cos2t \end{vmatrix} = 0$$

Демек, сызықтың әрбір нүктесіндегі бұралымы $æ = 0$. Осыдан берілген сызық жазық сызық болады.

3. $x = cos^3 t,\quad y = sin^3 t,\ \ z = cos2t,\ \ t\epsilon[0; 2\pi)$ теңдеуімен берілген сызықтың кез келген нүктедегі қозғалушы реперінің векторларын табыңыздар.

<u>*Шешуі:*</u> Параметрі t табиғи параметр болатынын тексеріп көреміз. Ол үшін $|\overline{r'}|$ табамыз.

$$x' = -3cos^2 tsint, y' = 3sin^2 tcost,\qquad z = -4sintcost$$

$|\overline{r'}| = \sqrt{(-3cos^2tsint)^2 + (3sin^2tcost)^2 + (-4sintcost\ )^2}\ =\ \sqrt{25cos^2tsint^2}$
$= 5|sintcost|.$

$|\overline{r'}| \neq 1$ болғандықтан параметрлеу табиғи емес екен.

Доғаның ұзындығын табамыз:

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt = 5|sintcost|.$$

Осыдан

$$s = 5\left|\int_0^t \sin u \cos u du\right| = 5\left|\int_0^t \sin u d(sinu)\right| = 5\frac{sin^2t}{2}\Big|_0^t = \frac{5}{4}(1 - cos^2t)$$

$cost = 1 - \frac{4}{5}s$ теңдігінен $cost, sint$ табамыз.

$$cost = \sqrt{\frac{1 + cos2t}{2}} = \sqrt{\frac{1 + (1 - \frac{4}{5}s)}{2}} = \sqrt{\frac{5 - 2s}{5}}$$

$$sint = \sqrt{\frac{1 - cos2t}{2}} = \sqrt{\frac{2}{5}}s$$

Онда сызықтың теңдеуі келесі түрге келеді:

$$x = \left(\sqrt{\frac{5 - 2s}{5}}\right)^3, \quad y = \left(\sqrt{\frac{2}{5}}s\right)^3, \qquad z = 1 - \frac{4}{5}s.$$

Туындыларын табамыз:

$x' = \frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{2}{5}s}\left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{3}{5}\sqrt{1 - \frac{2}{5}s}$

$y' = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}s, \quad z' = -\frac{4}{5}$

$\bar{r}(s) = -\frac{3}{5}\sqrt{1 - \frac{2}{5}}s\,\bar{\imath} + \frac{3}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}s\,\bar{\jmath} - \frac{4}{5}\bar{k}$

$\vec{\gamma} = \overline{r''}(s)$ болады.

$x'' = \frac{3}{25}\left(\sqrt{1 - \frac{2}{5}}s\right)^{-1};\ y'' = \frac{3}{25}\left(\sqrt{\frac{2}{5}}s\right)^{-1};\ z'' = 0;\ |\overline{r''}| =$
$\frac{3}{25}\left(\sqrt{\frac{2}{5}}s\right)^{-1}\left(\sqrt{1 - \frac{2}{5}}s\right)^{-1}$

$\bar{v} = \frac{\overline{r''}}{|\overline{r''}|} = \sqrt{\frac{2}{5}}s\,\bar{\imath} + \sqrt{1 - \frac{2}{5}}s\,\bar{\jmath} + 0\bar{k}$

$\bar{\beta} = [\bar{r}, \bar{v}] = \frac{4}{5}\sqrt{1 - \frac{2}{5}}s\,\bar{\imath} + \frac{4}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}s\,\bar{\jmath} - \frac{3}{5}\bar{k}$

4. Айқындалмаған теңдеуі арқылы берілген сызықтың түзетуші жазықтығының теңдеуін табыңыздар.

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x = y \end{cases}$$ $M_0(1,1,2)$ нүктесінде

Шешуі: сызықтың теңдеуін параметрлік түрге келтірейік: x=t, y=t, z=2t^2
$M_0(1,1,2)$ нүктесіндегі параметрі t=1 болады.

$$x' = 1, \quad y' = 1, \quad z' = 4t$$

Осыдан $|\overline{r'}| = \sqrt{2}\sqrt{1+2t^2}$
Демек, сызықтың теңдеуі табиғи параметризациялауда емес екен. $|\overline{r'}|$ тұрақты емес сызықтан $\overline{r'}\overline{r''}$- қа перпендикуляр болмайды. $\overline{r'}$ және $\overline{r''}$ векторларының векторлық көбейтіндісі бейнормаль векторына коллинеар

$$[\overline{r'}\overline{r''}] = \begin{vmatrix} 1 & 4t \\ 0 & 4 \end{vmatrix}\bar{\imath} + \begin{vmatrix} 4t & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\bar{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\bar{k} = \bar{\imath} - \bar{\jmath}$$

$\bar{v}$ —векторы түзетуші жазықтықтың нормаль векторы олай болса $\overline{r'}$ және $[\overline{r'}\overline{r''}]$ векторларының векторлық көбейтіндісі коллинеар болады.

$$\left[\overline{r'}, [\overline{r'}\overline{r''}]\right] = \begin{vmatrix} 1 & 4t \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\bar{\imath} + \begin{vmatrix} 4t & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\bar{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\bar{k} = 4t\bar{\imath} - 4t\bar{\jmath} - 2\bar{k}$$

t=1 бұл вектор $\{2, -2, -1\}$ векторына коллинеар. Осыдан $M_0(1,1,2)$ нүктесіндегі түзетуші жазықтықтың теңдеуі келесі түрде болады:
2(x-1)-2(y-1)-(z-1)=0 немесе 2x-2y-z+2=0.

6. Айқындалмаған теңдеуі арқылы берілген сызықтың кез келген нүктедегі қисықтығы мен бұралымын табыңыздар.

$$\begin{cases} x^2 = 3y \\ 2xy = 9z \end{cases}$$

Шешуі: Егер сызықтың теңдеуі параметрлік түрде болса, онда x=x(t), y=y(t), z=z(t) онда сызықтың теңдеуін қанағаттандырады. Сондықтан теңдеуді дифференциалдасақ

$$\begin{cases} 2xx' - 3y' = 0 \\ 2xy' + 2x'y - 9z' = 0 \end{cases}$$

Демек $\bar{r}' = x'\bar{\imath} + y'\bar{\jmath} + z'\bar{k}$ векторы $\{2x, -3, 0\}$ және $\{2y, 2x, -3\}$ векторларына перпендикуляр болады. Осыдан $\bar{r}'$векторы осы екі вектордың векторлық көбейтіндісіне коллениар болады, демек $\bar{r}'$ векторлық көбейтіндісі арқылы табамыз.

$$\bar{r}' = \boldsymbol{\lambda}\left(\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2x & -9 \end{vmatrix}\bar{\imath} + \begin{vmatrix} 0 & 2x \\ -9 & 2y \end{vmatrix}\bar{\jmath} + \begin{vmatrix} 2x & -3 \\ 2y & 2x \end{vmatrix}\bar{k}\right)$$
$$= \boldsymbol{\lambda}\left(27\bar{\imath} + 18x\bar{\jmath} + (4x^2 + 6y)\bar{k}\right)$$

$\bar{r}'$ векторын параметризациялауды өзгерту арқылы n=1 жағдайға келтіруге болады. $x^2 = 3y$ екенін ескерсек, $x' = 3,\ y' = 2x,\ z' = 2y$ деп алуға болады. Сонда

$|\bar{r}'| = \sqrt{9 + 4x^2 + 4y^2} = |2 + 3y|$
$\bar{r}'' = \{x'', y'', z''\}$=$\{0, 2x', 2y'\}$
$x' = 3,\ y' = 2x$ екенін ескерсек, $\bar{r}'' = \{0,6,4x\}$, ал $\bar{r}''' = \{0,0,12\}$ осыдан,
$|[\bar{r}'\bar{r}'']| = 6\sqrt{4y^2 + 4y^2 + 9} = 6\sqrt{4y^2 + 12y + 9} = 6|2y + 3|$
$k = \frac{|[\bar{r}'\bar{r}'']|}{\overline{r'^3}} = \frac{6}{(2+3y)^2}$
Бұралымын табу үшін $(\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}''') = ([\bar{r}'\bar{r}''], \bar{r}''') = 18 * 12$
$æ = \frac{(\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}''')}{|[\bar{r}'\bar{r}'']|^2} = \frac{18*12}{36(2+3y)^2} = \frac{6}{(2+3y)^2}$
Сызықтың әрбір нүктесіндегі қисықтығы мен бұралымы тең болады екен.

Жаттығулар:

1.Келесі сызықтардың қозғалушы реперларының векторларының координаттарын және координаттық жазықтықтарының теңдеуін табыңыздар:

а) $x = t,\ \ y = \frac{1}{2}t^2,\ z = \frac{1}{3}t^3,\ t\epsilon(-\infty, +\infty),\ \ t = 1$ нүктесінде

б) $x = tsint,\ \ y = tcost,\ z = te^t,$
$t\epsilon(-\infty, +\infty),\ \ O(0,0,0)$ нүктесінде

в) $x = acost,\ \ y = asint,\ z = bt,\ t\epsilon(-\infty, +\infty),$
a,b- тұрақты, a>0, кез келген нүктеде

2.Келесі параметрлік теңдеулер арқылы берілген сызықтардың кез келген нүктесіндегі қисықтығы мен бұралымын табыңыздар:

а) $x = e^t,\ \ x = e^{-t},\ z = t\sqrt{2},\ t\epsilon(-\infty, +\infty)$

б) $x = 2t,\ \ y = lnt,\ z = t^2, t > 0$

в) $x = e^t sint,\ \ x = e^{-t}cost,\ z = e^t,\ t\epsilon(-\infty, +\infty)$

г) $x = 3t - t^3,\ \ y = 3t^2,\ z = 3t + t^3,\ t\epsilon(-\infty, +\infty)$

д) $x = cos^2 t,\ \ y = sin^2 t,\ z = cos2t,\ t\epsilon(0, \pi)$

3.Айқындалмаған теңдеулері арқылы берілген сызықтардың қисықтығы мен бұралымын табыңыздар:

а) $\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 1 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$ $M_0(1,1,1)$ нүктесінде:

б) $\begin{cases} y^2 = x \\ x^2 = z \end{cases}$ кез келген нүктеде;

в) $\begin{cases} x^2 = 2az \\ y^2 = 2bz \end{cases}$ a,b>0, кез келген нүктеде.

4. Келесі сызықтардың әрбір нүктедегі қисықтығы мен бұралымы тең екенін көрсетіңіздер:

а) $x = t,\ \ y = \frac{2}{3}\sqrt{2}t^{\frac{3}{2}},\ z = \frac{1}{2}t^2,\ t\epsilon(-\infty, +\infty),$

б) $x = 3t - t^3,\ \ y = 3t^2,\ z = 3t + t^3,\ \ t\epsilon(-\infty, +\infty),$

в) $x = acht,\ \ y = asht,\ z = at,\ t\epsilon(-\infty, +\infty),\ \ a > 0,$

г) $x = \frac{1}{2}t^2,\ \ y = \frac{2\sqrt{2}}{5}\sqrt{t^3},\ z = \frac{1}{3}t^3,\ t\epsilon(-\infty, +\infty)$.

5. Келесі сызықтардың табиғи (натурал) теңдеулерін жазыңдар:

а) $x = acost,\ \ y = acost,\ z = bt,\ t\epsilon(-\infty, +\infty)$, $a, b -$ тұрақты $a > 0$

б) $x = ae^t cost, y = ae^t sint,\ z = be^t,\ t\epsilon(-\infty, +\infty)$, $a, b -$ тұрақты $a > 0$

в) $x = cos^3 t,\ \ y = cos^3 t,\ z = cos2t,\ t\epsilon[0{,}2\Pi]$,

г) $x = at,\ \ y = a\sqrt{2}lnt,\ z = \frac{a}{t},\ t > 0, a -$ тұрақты, $a \neq 0$.

1-жауаптары:

а) $\bar{\tau} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\},\ \bar{\nu} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\},\ \ \bar{\beta} = \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, -2\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$,

б) $\bar{\tau} = \left\{0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\},\ \bar{\nu} = \left\{\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right\},\ \ \bar{\beta} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$,

в) $\bar{\tau} = \left\{-asint_0, \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}, acost_0 \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}, b\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\},\ \bar{\nu} =$ $\{-cost_0, -asint_0, 0\},\ \ \bar{\beta} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\{bsint_0, -bcost_0, 0\}$,

2-жауаптары:

а) $k = \frac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2},\ æ = -\frac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}$

б) $k = \frac{2t}{(1+2t^2)^2},\ æ = -\frac{2t}{(1+2t^2)^2}$

в) $k = \frac{\sqrt{2}}{3e^t},\ æ = \frac{1}{3e^t}$

г) $k = æ = \frac{1}{3(t^2+1)^2}$

д) $k = \frac{3}{2sintcost}, æ = \frac{4}{2sintcost}$

3-жауаптары:

а) $k = \sqrt{3},\ æ = 0$

б) $k = \frac{2\sqrt{1+36y^4+64y^6}}{(1+4y^2+16y^2)^3},\ æ = \frac{12y}{1+36y^4+64y^6}$

Нұсқау. Сызықтық теңдеуін параметрлік түрде жазу керек.

$x = t^2,\ \ y = t,\ \ \ z = t^4$

в) $k = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{(a+b+2z)^{\frac{3}{2}}},\ æ = 0$

Нұсқау: $x = \mathrm{e}\sqrt{2\mathrm{a}},\ \ y = t,\ \ \ z = t^2$

5-жауаптсары:

а) $k = \frac{a\sqrt{2}}{s+\sqrt{2a^2+b^2}},\ æ = \frac{b}{s+\sqrt{2a^2+b^2}}$

б) $k = \frac{a\sqrt{2}}{s+\sqrt{2a^2+b^2}}$, $æ = \frac{b}{s+\sqrt{2a^2+b^2}}$
в) $k = \frac{6}{5}\frac{1}{\sqrt{25-16s^2}}$, $æ = \frac{8}{5}\frac{1}{\sqrt{25-16s^2}}$
г) $k = æ = \frac{a}{2a^2+s^2}$
д) $k = \frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{s^2+4a^2}}, æ = 2\frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{s^2+4a^2}}$

1.5. Жазық сызықтар. Жазық сызықтың эволютасы мен эвольвентасы

Сызықты жазық сызық деп атаймыз, егер ол қандай да бір жазықтықта жатса. Жазықтықта тікбұрышты координаттар жүйесін (O,i,j) ендірсек, онда біртегіс сызықтың теңдеуін $\bar{r}(t) = x(t)\bar{\imath} + y(t)\bar{\jmath}\quad t \in I$ түрінде болады.

Бұл сызықтың $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінде жанамасының бағыттаушы векторы $\bar{r}' = \frac{d\bar{r}}{dt}$ арқылы анықталады. Онда $M_0(x_0,y_0)$ нүктесіндегі сызықтың жанамасының теңдеуі келесі түрде болады $\frac{x-x_0}{x_0'} = \frac{y-y_0}{y_0'}$

Мұндағы x_0', y_0' $\bar{r}'$ векторының координаттары, онда жанаманың бағыттаушы векторы $\frac{dt}{du}$ – скаляр шамаға көбейтіледі.

Егер параметр ретінде доғаның ұзындығын s-ті алсақ, онда $|\bar{r}'|$=1, яғни параметрлеуді табиғи параметрлеу деп алсақ болады.
$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}dt$

Сызықтың теңдеуі табиғи параметр арқылы берілген жағдайда $\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\tau}$ жанаманың бірлік векторы болады. Френенің бірінші формуласы $\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} = k(s)\bar{\vartheta}$ түрде болып $k(s)$ - сызықтың қисықтығы, ал $\bar{\vartheta}$ - нормаль түзудің бірлік векторы болады.

$$k(s) = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}$$

Сызықтың теңдеуі кез келген параметр арқылы берілсе

$$k(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Сызықтың қисықтығының формуласы болады.

Егер сызықтың теңдеуі айқындалмаған түрде берілсе: F(x,y)=0, онда оның нормаль түзуінің бағыттаушы векторы $\bar{\bar{F}} = \{F_x, F_y\}$ болады, ал $M_0(x_0,y_0)$ нүктедегі нормалінің теңдеуі

$$\frac{x - x_0}{F_x} = \frac{y - y_0}{F_y}$$

Жанамасының теңдеуі: $F_x(x - x_0) + F_y(y - y_0) = 0$

Френенің формулалары $\frac{d\bar{\tau}}{ds} = k\bar{\vartheta}, \frac{d\bar{\vartheta}}{ds} = -k\bar{\tau}$

k=k(s) – сызықтың табиғи теңдеуі деп аталады.

Егер жазық сызық $\bar{r} = \bar{r}(t)$ $t \in I$ теңдеуімен беріліп кез келген $t \in I$ үшін $k(t) \neq 0$, онда $\overline{C_0} = \bar{r}(t_0) + \rho(t_0)\bar{\vartheta}$ векторымен анықталатын нүкте сызықтың қисықтығының центрі деп аталады. Мұндағы $\rho(t_0) = \frac{1}{k(t_0)}$ - t_0 нүктесіндегі қисықтың радиусы деп аталады.

Берілген γ-сызығының қисықтығының центрлері болып табылатын геометриялық нүктелер орнын сызықтың эволютасы деп атаймыз. Ал эволютаға байланысты болып берілген сызықты эвольвента деп атаймыз. Яғни сызық эволютаның эвольвентасы болады.

Эволютаның теңдеуі келесі түрде болады $\bar{C}(t) = \bar{r}(t) + \rho(t)\bar{\vartheta}$

Эволютамен эвольвентаны байланыстыратын 2 қасиет бар:

1. Эвольвентаның нормальдары эволютаның жанамалары болады.
2. Эволютаның доғасының өсімшесі эвольвентаның қисықтығы радиусының өсімшесіне тең болады.

Мысалдар:

1. Параметрлік теңдеуі арқылы берілген келесі сызықтың табиғи теңдеуін жазыңыз $x = \cos t + t\sin t, y = \sin t - t\cos t, \ t \in (-\infty, +\infty)$

Шешуі: Сызықтың натурал теңдеуі $k = k(s)$түрінде болады, мұндағы $k(s)$-сызықтың қисықтығы, ал S – доғаның ұзындығы $x' = t\cos t, y' = t\sin t$

Демек, $x'^2 + y'^2 = t^2$, яғни $|\bar{r}'| = t$

Доғаның ұзындығын табайық.

$$s = \int_0^t \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = \int_0^t |t|\, dt = \frac{t^2}{2}$$

Осыдан $t = \pm\sqrt{2s}$ $x'' = -\cos t + t\sin t, y'' = \sin t + t\cos t$

Сызықтың қисықтығын табамыз

$$k(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-t\cos t(\sin t + t\cos t) - t\sin t(-\cos t + t\sin t)}{|t|^3} = \frac{t^2}{|t|^3} = \frac{1}{|t|}$$

t параметрін S-ке ауыстырғанда

$$k(s) = \frac{1}{\sqrt{2s}}.$$

2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ теңдеуімен берілген эллипстің эволютасының теңдеуін жазыңыздар.

Шешуі: Эллипстің параметрлік теңдеуі

$$x = acost, y = bsint \quad t\epsilon[0,2\pi]$$

Осыдан $x' = -asint, \; y' = bcost$

$$x'' = -cost, \;\; y'' = -bsint$$
$$|\bar{r}'| = \sqrt{a^2sin^2t + b^2cos^2t}$$
$$k(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{ab}{|\bar{r}'|^3}$$

Нормальдың бірлік векторы $\bar{\vartheta}$ табамыз. Алдымен бірлік жанама вектор $\bar{\tau}$ табайық.

$$\bar{\tau} = \frac{1}{|\bar{r}'|} \quad \{-sint\bar{\imath} + bcost\bar{\jmath}\}$$

$\bar{y}$ векторы $\bar{\tau}$ векторына перпендикуляр және онымен оң бағытталған болғандықтан

$$\bar{y} = \frac{1}{|\bar{r}'|} \;\; \{-bcost\bar{\imath} - asint\bar{\jmath}\}$$

Онда эволютаның теңдеуі

$$\bar{C}(t) = \bar{r}(t) + \frac{1}{k(t)}\bar{y} = acost\bar{\imath} + bsint\bar{\jmath} + \frac{|\bar{r}'|^3}{ab} * \frac{1}{|\bar{r}'|}\{-bcost\bar{\imath} - asint\bar{\jmath}\}$$
$$= \left(acost - \frac{|\bar{r}'|^2}{a}cost\right)\bar{\imath} + (bsint - \frac{|\bar{r}'|^2}{b}sint)\bar{\jmath}$$

$|\bar{r}'|^2 = a^2sin^2t + b^2cos^2t$ орнына қойсақ,

$$\bar{C}(t) = \frac{a^2 - b^2}{a}cos^3t\bar{\imath} + \frac{b^2 - a^2}{b}sin^3t\bar{\jmath}$$

Бұл ұзартылған астроиданың теңдеуі.

Жаттығулар.

1. Айқындалмаған теңдеулері арқылы жазылған жазық сызықтардың параметрлік теңдеулерін жазыңыздар.

а) $y^2 = 2px$; b)$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; c)$x^2 + x + y = 0$;

б)$x = acht, \; y = bsht, t\epsilon(0,\pi)$;

в)$x = a\cos^3 t, \; y = a\sin^3 t, \; t\epsilon[0,2\pi)$;

г)$y^2 = 2px,\ x > 0$;
д) $y = lnx,\ x > 0$;
е) $y = sinx$, х$\epsilon(-\infty, +\infty)$;
ж) $y = tgx,\ x\epsilon(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Жауаптары:

а) $y = ach\frac{x}{a}$;
б) $x = \frac{a^2+b^2}{a}ch^3t, y = \frac{a^2+b^2}{b}sh^3t$;
в) $x = acos^2t + 3asin^2tcost,\ y = asin^2t + 3acos^2tsint$;
г) $27py^2 = 8(x-p)^3$
д) $x = 2x_0 + \frac{1}{x_0},\ y = lnx_0 - x_0^2 - 1$;
е) $x = x_0 + cosx_0\frac{1+cos^2x_0}{sinx_0}, y = \frac{2cos^2x_0}{sinx_0}$;
ж) $x = x_0 + \frac{1+cos^4x_0}{cos^2x_0sin2x_0}, y = tgx_0 + \frac{1+cos^4x_0}{sin2x_0}; x\epsilon(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Қайталауға арналған сұрақтар.

1. Сызықтың әр нүктесінде жанама бар болады ма? Неге?
2. Сызықтың табиғи параметрлік теңдеуі дегеніміз не?
3. Сызықтың теңдеуі табиғи параметр арқылы берілгенін қалай білеміз?
4. Екі сызықтың өзара жанасатынын қалай білеміз?
5. Сызықтың әрбір нүктесіндегі жанамалары параллель болса, ол қандай сызық болады?
6. Барлық нүктелердегі бинормальдары параллель болатын қандай сызық?
7. Егер сызықтың әр нүктедегі нормаль жазықтықтары бір түзуге перпендикуляр болса, ол қандай сызық?
8. Сызық жазық сызық болуы үшін қандай қажетті жеткілікті шарт орындалады?
9. Кез келген жазық сызықтың эволютасы бар болады ма?
10. Эволютаның доғасының ұзындығы қалай анықталады?

3. ЕВКЛИД КЕҢІСТІГІНДЕГІ БЕТТЕР

3.1. Екі скаляр аргументті векторлық функция

Анықтама. R нақты сандар өрісінде V_3 – үш өлшемді векторлық кеңістік анықталсын. $G \subset R^2$ - екі өлшемді сандық жиын болсын $(u.v) \in G$. Егер қандай да бір ереже немесе заңдылық бойынша әрбір $(u.v) \in G$ нүктесіне анықталған бір вектор $\bar{r}(u.v) \subset V_3$ сәйкес келетін болса, онда G жиынында екі скаляр аргументті векторлық функция $\bar{r}(u.v)$ берілген деп айтамыз.

$\bar{r}(u.v)$ векторлық функциясы $(u_0, v_o) \in G$ нүктесінде шексіз аз деп айтамыз, егер $\lim\limits_{\substack{u \to u_0 \\ v \to v_0}} |\bar{r}(u,v)| = 0$ болса.

$\bar{r}(u,v)$ функциясынан (u_0, v_o) нүктесіндегі шегі деп ā векторын айтамыз, егер (u,v) нүктесі қалай болмасын (u_0, v_o) нүктесіне ұмтылғанда $u \to u_0$, $v \to v_0$ $\bar{r}(u,v) - \bar{a}$ векторы шексіз аз болса, $\lim\limits_{\substack{u \to u_0 \\ v \to v_0}} \bar{r}(u,v) = \bar{a}$.

$\bar{r}(u,v)$функциясын (u_0, v_o) нүктесінде үзіліссіз деп айтамыз, егер бұл функцияның (u_0, v_o) нүктесіндегі мәні бар болып, $\lim\limits_{\substack{u \to u_0 \\ v \to v_0}} \bar{r}(u,v) = \bar{r}(u_0, v_o)$.

Егер $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\bar{r}(u+\Delta u, v) - \bar{r}(u,v)}{\Delta u}$ және $\lim\limits_{\Delta v \to 0} \frac{\bar{r}(u, v+\Delta v) - \bar{r}(u,v)}{\Delta v}$ бар болса, онда функцияның u және v бойынша дербес туындылары бар деп айтамыз, оларды $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$ немесе $\bar{r}_u, \bar{r}_v$ деп белгілейміз.

Осы сияқты $\bar{r}(u,v)$ функциясының екінші және оданда жоғары ретті дербес туындылары анықталады.

$d\bar{r}(u,v) = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} dv$ векторын $\bar{r}(u,v)$ функциясының дифференциялы деп атаймыз.

Кеңістікте $(O_{\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}})$ тік бұрышты координаталар жүйесі ендірілсе, онда $\bar{r}(u,v) = x(u,v)\bar{\imath} + y(u,v)\bar{\jmath} + z(u,v)\bar{h}$ түрінде болады. Бұл жағдайда $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ функцияларын екі айнымалы функция деп қарастырамыз, яғни екі айнымалы функцияның дифференциялын есептеуін қарастыруға болады.

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\bar{\imath} + \frac{\partial y}{\partial u}\bar{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial u}\bar{k}, \qquad \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\bar{\imath} + \frac{\partial y}{\partial v}\bar{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial v}\bar{k}.$$

Сол сияқты $\quad d\bar{r}(u,v) = dx(u,v)\bar{\imath} + dy(u,v)\bar{\jmath} + dz(u,v)\bar{k}.$

Мысалдар.

1. $\bar{r}(u,v)$ екі скаляр аргументті векторлық функция берілсін $(u,v)\epsilon G$. $|\bar{r}(u,v)|$ – сонда ғана тұрақты болады, егер $\bar{r}(u,v)$ векторы барлық $(u,v)\epsilon G$ нүктелерінде $\bar{r}_u$ және $\bar{r}_v$ векторларына бір уақытта перпендикуляр болса ғана.

Шешуі: Егер $\bar{r}(u,v) = \bar{a}$, $(\bar{r}(u,v))^2 = \bar{a}^2$, осы өрнекті кез келген $(u,v)\epsilon G$ үшін u бойынша дифференциялдасақ, $2(\bar{r}_{(u,v)} \cdot \bar{r}_u)$=0, яғни $\bar{r} \perp \bar{r}_u$.

Керісінше $\bar{r} \perp \bar{r}_u$, онда $(\bar{r}, \bar{r}_u)$ онда $(\bar{r}, \bar{r}_u) = 0$ немесе $\frac{\partial}{\partial u}(\bar{r}_{(u,v)})^2 = 0$ яғни $\bar{r}^2 = |r^-|^2 = a$.

2. $\bar{r}_{(u,v)}$ – векторлық функциясы $(u,v)\epsilon G$ үшін тұрақты бағыттағы вектор функция болуы үшін $\bar{r}_{(u,v)}$, $\bar{r}_{u(u,v)}$, $\bar{r}_{v(u,v)}$ векторлары коллинеарлы болуы қажетті және жеткілікті.

Шешуі: $\bar{r}_{(u,v)}=\bar{0}$ болғанда вектордың бағыты анықталмаған, сондықтан $\bar{r}_{(u,v)} \neq \bar{0}$ деп қарастырамыз.

Егер $\bar{r}_{(u,v)}$ - тұрақты бағытты болса, онда $\bar{r}_{(u,v)} = \lambda(u,v)\bar{a}$. Мұнда $\bar{a}$ – тұрақты бағыттағы вектор.

$\bar{r}_u = \frac{\partial\lambda}{\partial u}\bar{a}$ және $\bar{r}_v = \frac{\partial\lambda}{\partial v}\bar{a}$, яғни $\bar{r}, \bar{r}_u, \bar{r}_v$ коллинеар векторлар.

Жеткіліктілігін қарастырамыз. $\bar{r}, \bar{r}_u, \bar{r}_v$ – колленеар болсын.

$\bar{r}_{u,v} = A_{u,v}\bar{e}_{u,v}$, $\bar{r}_{u(u,v)} = B_{(u,v)}\bar{e}_{(u,v)}$, $\bar{r}_{v(u,v)} = C_{(u,v)}\bar{e}_{(u,v)}$, $\bar{e}_{(u,v)}$ - векторлы функция.

Бірінші теңдіктен $\bar{r}_{u(u,v)} = A_{u\,(u,v)}\bar{e}_{(u,v)} + A_{(u,v)}\bar{e}_{u(u,v)}$.

Екінші теңдіктен $\bar{e}_{u(u,v)} = \bar{0}$, сол сияқты $\bar{e}_{v(u,v)} = 0$, демек $\bar{e}_{(u,v)}$ u және v тәуелді емес вектор екен, яғни $\bar{e}_{(u,v)}$- тұрақты бағыттағы вектор болады.

Жаттығулар.

1. Келесі вектор-функциялардың дербес туындыларымен дифференциялдарын табыңыздар.

а) $\bar{r}_{(u,v)} = (2u+v)\bar{\imath} + (u^2+v^2)\bar{\jmath} + (u^3-v^3)\bar{k}$

б) $\bar{r}_{(u,v)} = ucosv\bar{\imath} + usinv\bar{\jmath} + av\bar{k}$

в) $\bar{r}_{(u,v)} = \frac{a}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)\bar{\imath} + \frac{b}{a}\left(u-\frac{1}{u}\right)\bar{\jmath} + v\bar{k}$

г) $\bar{r}_{(u,v)} = acosucosv\bar{\imath} + bcosusinv\bar{\jmath} + csinu\bar{k}$

2. Келесі вектор-функциялардың скаляр және векторлық көбейтінділерінің дербес туындыларын табыңыздар: $(\bar{r}_{(u,v)}, \bar{P}_{(u,v)})$

а) $\bar{r}_{(u,v)} = (u+v)\bar{\imath} + (u-v)\bar{\jmath} + u\bar{k}$, $\bar{P}_{(u,v)} = (u-v)\bar{\imath} + (u+v)\bar{\jmath} + v\bar{k}$;

б) $\bar{r}_{(u,v)} = cosv\bar{\imath} + sinv\bar{\jmath} + u\bar{k}$, $\bar{P}_{(u,v)} = cosu\bar{\imath} + sinu\bar{\jmath} + v^2\bar{k}$;

в) $\bar{r}_{(u,v)} = u^2\bar{\imath} + v^2\bar{\jmath} + \bar{k}$, $\bar{P}_{(u,v)} = \cos(uv)\bar{\imath} + \sin(uv)\bar{\jmath} + \ln(uv)\bar{k}$.

3. $\bar{r}_{(u,v)} = ucosv\bar{\imath} + usinv\bar{\jmath} + v\bar{k}$ вектор-функциясы үшін келесі теңдіктердің орындалатынын тексеріп көріңіздер:

а) $(\bar{r}_u\bar{r}_v) = 0$; **б)** $|[\bar{r}_u\bar{r}_v]| = |\bar{r}_v|$; **в)** $(\bar{r}_{uv}\bar{r}_{vv}) = 0$; **г)** $\bar{r}_v^2 - \bar{r}_u^2 = \bar{r}_{vv}^2$; **д)** $(\bar{r}_u\bar{r}_{vv}) = 0$; **е)** $(\bar{r}_u\bar{r}_{uv}\bar{r}_{vv}) = 0$; **ж)** $(\bar{r}_u\bar{r}_{uv}\bar{r}_{vv})^2 + (\bar{r}_u\bar{r}_v\bar{r}_{uv})^2 = \bar{r}_v^2$ **з)**$|\bar{r}_{uv}|^2 + |\bar{r}_{vv}|^2 = |[\bar{r}_u\bar{r}_v]|^2$

3.2. Бет туралы түсінік. Бір тегіс беттер

Ең қарапайым беттер деп жазықтық, тұйық жарты жазықтық және квадратты айтамыз. Ең қарапайым беттерге гомеоморфты фигураны элементар бет деп айтамыз.

Басқаша айтқанда, элементар бет деп $F \subset E_3$ фигурасын айтамыз, егер ол екі өлшемді сандық жиын $G \subset R^2 -$ ға гомеоморфты болса.

Евклид кеңістігіндегі E_3 бет деп ақырлы немесе санаулы элементар беттермен жабуға болатын $F \subset E_3$фигурасын айтамыз.

Егер әрбір нүктесінің маңайы элементар бет болса, онда ол бетті қарапайым деп атаймыз.

E_3 евклидтік кеңістігінде (O, i, j, k) тік бұрышты координаттар жүйесін ендіреміз, онда элементар беттің теңдеуін келесі түрде беруге болады.

1. Векторлық теңдеуі: $\bar{r}(u, v) = x(u, v)\bar{\imath} + y(u, v)\bar{\jmath} + z(u, v)\bar{k}, \quad (u, V) \in G \subset R^2$

мұндағы $\bar{r}(u, \vartheta) = \overline{OM}$ - $M_{(u,\vartheta)}$ нүктесінің радиус векторы.

2. Параметрлік теңдеуі: $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$

3. Айқындалмаған теңдеуі; $\Phi(x, y, z) = 0$

Параметрлік теңдеуі арқылы берілген F элементар беті C^k класына жататын біртегіс бет деп аталады. $(k \in N)$, егер $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ функциялары k реткіге дейін үзіліссіз дербес туындылары бар болып әрбір $(u,) \in G_1$ нүктесінде ранг $\begin{pmatrix} x_u y_u z_u \\ x_\vartheta y_\vartheta z_\vartheta \end{pmatrix} = 2$ орындалса ғана.

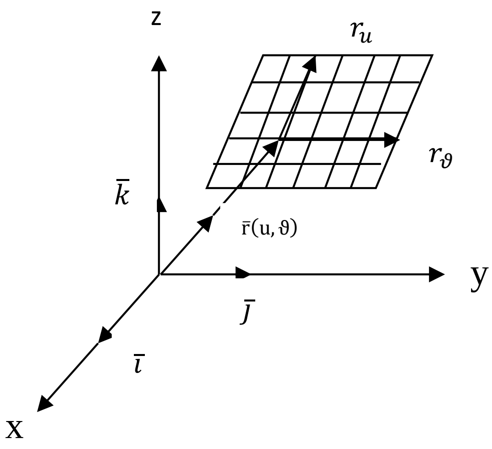
Айқындалмаған теңдеу арқылы берілген F беті C^k классына жататын бертегіс бет деп аталады, егер келесі екі шарт орындалса:

1) $M(x, y, z)$ нүктесінің маңайында $\Phi(x, y, z)$функциясы және оның k реткіге дейінгі дербес туындылары үзіліссіз болса;

2) M нүктесінде ранг $\left|\Phi_x, \Phi_{y,} \Phi_z\right| = 1$ орындалса.

Егер векторлық функция арқылы теңдеуі берілген F бетінде $v = v_0 -$тұрақты деп алсақ, яғни, $(u, V_0) \in C$ онда $\bar{r}(u, v_0)$ функциясы F бетінде жататын қандайда бір сызықты береді, оны u-сызығы деп атаймыз. Бұл сызықтың $\overline{r_u}$ жанама векторы болады. Сол сияқты $u = u_0$ болған жағдайда. $\bar{r}(u_0 v) -$ беттегі бір сызықтың теңдеуі болады, оны

v −сызығы деп атаймыз. $\overline{\mathrm{r_u}}$ бұл сызықтың жанама векторы болады. Беттегі әрбір (u, ϑ) нүктесі арқылы біруден u және ϑ сызықтары өтеді. Осы сызықтарды беттегі координаттық сызықтар деп атаймыз. Бір тегіс беттегі $\overline{\mathrm{r_u}}$ және $\overline{\mathrm{r_\vartheta}}$ векторлары сызықты тәуелсіз векторлар болады: демек, біртегіс беттегі координаттық сызықтар әртүрлі бағыттарда өтеді екен.



Егер $\mathrm{C^k}$ класына жататын $\mathrm{F} = \mathrm{f(C)}$ параметрлеу арқылы берілсе, ал $h(C) = C'$ гомеоморфизм болса, онда

$C' = \{(f, b)\}$ $C = \{(u, \vartheta)\}$, онда $g = fh^{-1}$ гомеоморфизмі анықталады. Егер g гомеоморфизмі $F = f(c)$ бетін анықтаса, онда h параметрлерді ауыстыру мүмкіндігінің гомеоморфизмі деп аталады.

$F \subset C^k$ беті үшін $h : \alpha = \alpha(u, \vartheta), \beta = \beta(u, \vartheta)$ параметрін ауыстыру мүмкіндігіндегі бейнелуі деп аталады, егер келесі үш шарт орындалса:

1) h - гомеомарфизм болса яғни $h : \alpha(u, v),\ \beta(u, v)$ үзіліссіз функциялар бар болып және $u = u(\alpha, \beta)$ $v = V(\alpha, \beta)$ анықталса;

2) $\alpha = \alpha(u, \vartheta), \beta = \beta(u, \vartheta)$ функцияларының k ретке дейінгі үзіліссіз дербес туындылары бар болса;

3) Әрбір нүктесі үшін $(u, v) \subset C$, $\begin{vmatrix} \alpha_u \beta_u \\ \alpha_\vartheta \beta_\vartheta \end{vmatrix} \neq 0$ орындалса.

Мысалдар:

1. Келесі теңдеу арқылы берілген шеңберді OZ осі бойынша айналдырғанда пайда болған беттің параметрлік теңдеуін құрыңыздар:

$x = a + b\cos u\,, y = 0, z = b\sin u \quad (b > a)$

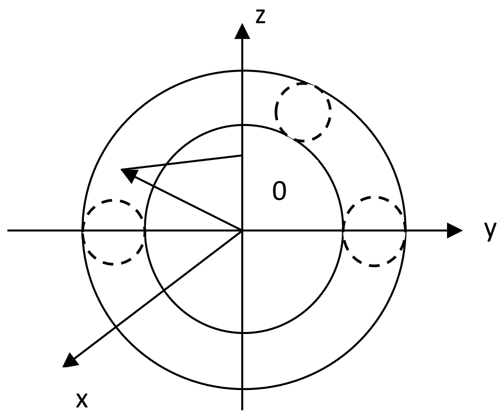
<u>*Шешуі*</u>: Бастапқыда бұл беттің M_0 нүктесі шеңбердің бойында және XOZ жазықтығында жатсын. t уақытынан кейін ол нүкте v бұрышына бұрылып $M\,(x, y, z)$нүктесіне келеді. Бұрылу OZ осіне перпендикуляр жазықтықта нүктенің z координатасы $z = b\sin u -$ өзгермейді. Нүктенің траекториясы шеңбер болатыны белгілі және ол шеңбер хоу жазықтығына паралель жазықтықта жатады, демек нүктенің координаттары $x = R\ cosv, y = R\sin V$ болады. R– айналу радиусы өзгермейді, демек $R = a + b\cos u$ болады. Осыдан беттің теңдеуі келесі түрде болатынын көреміз.

$x = (a + b\cos u)\cos\vartheta$

$y = (a + b\cos u)\sin\vartheta$

$z = b\sin u$

$u\ \epsilon\ [0{,}2\pi]\ \vartheta\ \epsilon\ [0, 2\pi)$



Осы пайда болған бетті біз тор деп атаймыз.

2. Келесі параметрлік теңдеулері арқылы берілген беттер беттесетінін дәлелдеңіздер.

3. $F_1\colon x = u, y = \vartheta, z = u\vartheta, (u, \vartheta)\ \epsilon\ R^2$

$F_2\colon x = \alpha + \beta, y = \alpha - \beta, z = \alpha^2 - \beta^2, (\alpha, \beta)\ \epsilon\ R^2$

<u>*Шешуі:*</u> $(u, \vartheta) \to (x, y, z)$бейнелеуі_гомеоморфизм болады және C^2 классына жатады, демек F_1Беті бір тегіс себебі ранг $\begin{bmatrix} x_u\ y_u\ z_u \\ x_\vartheta\ y_\vartheta\ z_\vartheta \end{bmatrix} =$

ранг$\begin{bmatrix} 1\ 0\ \vartheta \\ 0\ 1\ u \end{bmatrix} = 2$

Осы сияқты $F_2 \subset\ C^2$көреміз.

$h{:}\, u = \alpha + \beta, \vartheta = \alpha - \beta$ деп алсақ,

$h^{-1}{:}\, \alpha = \frac{1}{2}(u + \vartheta), \beta = \frac{1}{2}(u - \vartheta)$ болып олар гомеоморфизмді анықтайды

және $\begin{vmatrix} \alpha_u \beta_u \\ \alpha_\vartheta \beta_\vartheta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \neq 0$

Демек $u = \alpha + \beta, \vartheta = \alpha - \beta$ параметризация ауыстыруы мүмкін екен. Осыдан бұл екі теңдеу бір бетті анықтайды.

3. Келесі теңдеумен берілген бет бірқуысты гиперболлоидты анықтайтынын көрсетіңіз. Осы беттегі координаталық сызықтарды табыңыз:

$$\bar{r}\,(u, \vartheta) = \alpha \frac{1 + u\vartheta}{u + \vartheta} \bar{i} + \beta \frac{\vartheta - u}{u + \vartheta} \bar{j} + c \frac{u\vartheta - 1}{u + \vartheta} \bar{k}, (u, \vartheta) \in R^2, u \neq \vartheta$$

__Шешуі__: $x\ \alpha \frac{1 + u\vartheta}{u + \vartheta} \bar{i}, \beta \frac{\vartheta - u}{u + \vartheta} \bar{j}, c \frac{u\vartheta - 1}{u + \vartheta} \bar{k}$ өрнектері $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ теңдеуін қанағаттандыратынын тексеріп көруге болады.

$u = u_0$ координаттық сызығының теңдеуі келесі түрде болады.

$x = \alpha \frac{1 + u_0\vartheta}{u_0 + \vartheta}, y = \beta \frac{u - u_0}{u_0 + \vartheta}, z = \frac{u_0\vartheta - 1}{u_0 + \vartheta}$ немесе $x = a(1 - u_0^2) \frac{1}{u_0 + \vartheta} + au_0,$

$y = -2u_0 b \frac{1}{u_0 + \vartheta} + 1, z = -c(1 - u_0^2) \frac{1}{u_0 + \vartheta} + cu_0$ әрбір өрнектен $\frac{1}{u_0 + \vartheta}$ табатын болсақ,

$$\frac{x + au_0}{a(1 - u_0^2)} = \frac{y - b}{-2bu_0} = \frac{z - c\,u_0}{-c(1 - u_0^2)}$$

Келесі теңдікке келеміз.

Бұл $M_0(a\,u_0, b, c\,u_0)$ нүктесінен өтетін бағыттаушы векторы

$\bar{P} = \{a(1 - u_0^2);\ -2bu_0;\ -c(1 - u_0^2)\}$

Осы сияқты $V = \vartheta_0$ координаталық сызығын табамыз,

ол $\frac{x - a\vartheta_0}{a(1 - \vartheta_0)} = \frac{y - b}{2b\vartheta_2} = \frac{z - c\vartheta_2}{-c\,(1 + \vartheta_0^2)}$ $\bar{q} = \{a(1 - \vartheta_0^2), 2b\,\vartheta_0, -c\,(1 + \vartheta_0^2)\}$

бұл сызықты $N_0(a\,\vartheta_0, b, c\,\vartheta_0)$ нүктесінен өтеді, бағыттаушы векторы

Сонымен бір қуысты гиперболлоидтық координаттық сызықтары түзу сызықтар болады, және бетте бұлардан өзгеше түзу сызықтар жоқ болады.

Жаттығулар:

1. Келесі сызықтардың қайсылары бір тегіс сызық болады? Болса қандай класска жатады?

а) $x = u + \vartheta\epsilon, y = u - \vartheta, z = u^2 + \vartheta^2, u \in (-\infty, +\infty), \vartheta \in (-\infty, +\infty)$.

б) $x = u^2 + \vartheta^2, y = u^2 - \vartheta^2, z = u^2\vartheta^2 \;\; u \in (-\infty, +\infty), \vartheta \in (-\infty, +\infty)$.

в) $x = a\cos u \cos\vartheta, y = a\sin u \cos\vartheta, z = a\sin\vartheta, u\epsilon[0.2\,\pi], \vartheta\epsilon\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

г) $x = u^3 + \vartheta^3, y = |u - \vartheta|, z = u^3 - \vartheta^3 \; u\epsilon(-\infty, +\infty), \vartheta \in (-\infty, +\infty)$.

д) $x = \frac{a}{2}\left(\vartheta - \frac{1}{\vartheta}\right)\cos u,\ y = \frac{b}{2}\left(\vartheta - \frac{1}{\vartheta}\right)\sin u,\ z = \frac{c}{2}\left(\vartheta + \frac{1}{\vartheta}\right), u,\vartheta \in (-\infty, +\infty)$

е) $x = a\mathrm{ch}\frac{u}{\vartheta}\cos\vartheta, y = a\mathrm{ch}\frac{u}{\vartheta}\sin\vartheta\;, z = u$

Жауаптары:

а) Болады, C^∞ класына жатады;

б) болмайды, кері бейнелері жоқ сондықтан гомеоморфизм болмайды

в) болады, C^∞ класына жатады;

г) болмайды, функция $u = \vartheta$ дифференциялданбайды;

д) болмайды, функция $\vartheta = 0$ анықталмаған;

е) болады, C^∞ класына жатады.

2. Параметрлік теңдеулері арқылы берілген келесі екінші ретті беттерді табыңыздар.

а) $x = u + \sin\vartheta, y = u + \cos\vartheta, z = u + \alpha, u,\vartheta \in (-\infty, +\infty)$

б) $x = \alpha(u + \vartheta), y = \beta(\vartheta - u), z = 2u\vartheta, u, \vartheta \in (-\infty, +\infty)$

в) $x = r\cos u \cos\vartheta, y = r\sin u \cos\vartheta, z = r\sin\vartheta, u\epsilon\ [0.2\pi), \vartheta\epsilon\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

г) $x = a\ \mathrm{sh}u\cos\vartheta, y = a\ \mathrm{sh}u\ \sin\vartheta\;, z = c\ \mathrm{ch}u, u, \vartheta \in (-\infty, +\infty)$

д) $x = \frac{a}{2}\left(\vartheta - \frac{1}{\vartheta}\right)\cos u,\ y = \frac{b}{2}\left(\vartheta - \frac{1}{\vartheta}\right)\sin u,\ z = \frac{c}{2}\left(\vartheta + \frac{1}{\vartheta}\right), u,\vartheta \in (-\infty, +\infty)$

е) $x = \frac{a}{2}\left(\vartheta - \frac{1}{\vartheta}\right)\cos u,\ y = \frac{b}{2}\left(\vartheta + \frac{1}{\vartheta}\right)\sin u,\ z = \frac{c}{2}\left(\vartheta - \frac{1}{\vartheta}\right),\ u,\vartheta \in (-\infty, +\infty)$

Жауаптары:

а) эллипстік цилиндр: $(x - z + \alpha)^2 + (y - z + \alpha)^2 = 1;$

б) гиперболалық парабаллоид: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z;$

в) сфера: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2;$

г) екі қуысты гиперболлоид: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1;$

д)екі қуысты гирепболлоид: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1;$

е) бір қуысты гиперболлоид: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$

3. Параметрлері арқылы берілген беттердің теңдеулерін айқындалмаған түрде жазыңыздар:

а) $x = a\,\vartheta\cos u,\ y = b\,\vartheta\sin u\cos\vartheta,\ z = c\,\vartheta,\ u \in [0.2\pi),\ \vartheta > 0$

б) $x = \frac{a}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right),\ y = \frac{b}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right),\ z = \vartheta,\ u \neq 0,\ \vartheta \in (-\infty, +\infty)$

в) $x = u^2 + \vartheta,\ y = \vartheta^2 + u,\ z = u^3,\ u,\vartheta \in (-\infty, +\infty)$

г) $x = \ln(u\vartheta),\ y = \ln\frac{u}{\vartheta},\ z = \ln\frac{u^2}{\vartheta^2},\ u,\vartheta \in (-\infty, +\infty)$

Жауаптары:

а) конус: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0;$

б) гиперболалық цилиндр: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$

в) $\left(x - \sqrt[3]{z^2}\right)^2 - y + \sqrt[3]{z} = 0$

г)гиперболалық цилиндр: xy=z;

4. Келесі беттердің параметрлік теңдеуін жазыңыздар.

а) сфера;

б) эллипсоид;

в) екі қуысты гиперболлоид;

г) эллипстік параболлоид;

д) екінші ретті конус;

е) эллипстік цилиндр;

ж) гиперболалық цилиндр;

з) параболалық цилиндр.

<u>*Жауаптары:*</u>

а) $x = r\cos u \cos\vartheta\,, y = r\sin u \cos\vartheta\,, z = r\sin\vartheta\,, u\epsilon\ [0.2\pi), \vartheta\epsilon\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

б) $x = a\cos u \cos\vartheta\,, y = b\sin u \cos\vartheta\,, z = c\sin\vartheta\,, u\epsilon\ [0.2\pi), \vartheta\epsilon\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

сфералық эллипсоидтың дербес түрі болатыны ескерілді;

в) $x = \frac{a}{2}\left(\vartheta - \frac{1}{\vartheta}\right)\cos u,\ y = \frac{b}{2}\left(\vartheta - \frac{1}{\vartheta}\right)\sin\vartheta,\ z = \frac{c}{2}\left(\vartheta - \frac{1}{\vartheta}\right), u\epsilon\ [0.2\pi), \vartheta \neq 0$

г) $x = \sqrt{\rho}\ \ \vartheta\cos u\,, y = \sqrt{\rho}\ \vartheta\sin u\,, z = \frac{1}{2}\vartheta^2, u\epsilon\ [0.2\pi), \vartheta\ \epsilon\ (-\infty, +\infty)$

д) $x = a\,\vartheta\,\cos u\,, y = b\,\vartheta\sin u\,, z = c\ u\ \vartheta, u\epsilon\ [0.2\pi), \vartheta\ \epsilon\ (-\infty, +\infty)$

е) $x = a\ \cos u\,, y = b\ \sin u\,, z = c\ \vartheta, u\epsilon\ [0.2\pi), \vartheta\ \epsilon\ (-\infty, +\infty)$

ж) $x = \frac{a}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right), y = \frac{b}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right), z = \vartheta, u \neq 0, \vartheta\ \epsilon\ (-\infty, +\infty).$

3.3. Беттің жанама жазықтығымен нормалі

C^k класына тиісті F бетінің векторлық теңдеуі берілсін

$$\bar{r}=\bar{r}\,(uv) \qquad (u,v)\epsilon G c R^2$$

Егер u=u(t), v=v(t)$t\epsilon I c R$ болса, ((u(t), v(t))ϵG және(u(t), v(t) функцияларының k ретке дейін үзіліссіз туындылары бар болып $u'(t)\neq 0$, $v'(t)\neq 0$ $t\epsilon I$ болса, онда $\bar{r}$ (t)= $\bar{r}(u(t),v(t))$ F бетінде жататын C^k класына тиісті қандай да бір сызықты анықтайды.

Бұл жағдайда M_0 нүктесінен өтетін әрбір бағыттағы сызықтардың жанамалары бір жызықтықты анықтайды. Бұл жазықтықты F бетінің M_0 нүктесіндегі жанама жазықтығы деп атаймыз.

Бұл жазықтық (M_0 $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$) арқылы анықталады, мұндағы { $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ } векторлық ішкі кеңістігінің базисі деп аталады. Егер параметрді ауыстырсақ α= α (u,ν), β= β(u,ν), онда $\bar{r}_\alpha$, $\bar{r}_\beta$беттің осы нүктедегі басқа жанама векторлық ішкі кеңістіктің базисі болады. $\overline{N}$=[$\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$] – жанама жазықтықтың нормаль векторы деп аталады. (M_0 $\overline{N}$,) түзуі беттің M_0 нүктесіндегі нормаль түзуі деп аталады.

Егер E_3 кеңістігінде (0, ί, j, $\bar{k}$) тік бұрышты координаттар жүйесін ендірсек, онда ($M_0\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$) жанама жазықтығымен (M_0, $\overline{N}$) нормаль түзуінің теңдеулері келесі түрде болады:

$$N_1(x-x_0) + N_2\,(y-y_0) + N_3\,(z-z_0) =0; \qquad \frac{x-x0}{N1} = \frac{y-y0}{N2} = \frac{z-z0}{N3}$$

Мұндағы $\overline{N}$={N_1, N_2, N_3 }

Егер $\bar{r}_u$ = {x_u, y_u, z_u } $\bar{r}_v$ = {x_v, y_v, z_v }болса,

Онда $N_1=\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}$, $N_2=\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}$, $N_3=\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$

Егер беттің теңдеуі айқындалмаған түрде берілсе Ф(x, y, z) онда оның нормаль векторы келесі түрде болады. $\overline{N}$ = {Φ_x, Φ_y,Φ_z }

Бұл жағдайда жанама жазықпен нормаль түзудің теңдеуі келесі түрде болады: $\Phi_x(x-x_0)+\Phi_y(y-y_0)+\Phi_z(z-z_0)=0$; $\frac{x-x0}{\Phi x} = \frac{y-y0}{\Phi y} = \frac{z-z0}{\Phi z}$

Мысалдар.

1. Келесі теңдеумен берілген түзу геликойдтың жанама жазықтығымен нормаль түзуінің теңдеуін жазыңыздар.

x=ucosv, y=usinν, z=aν, u>0, $v\epsilon[-\pi\backslash 2, \pi\backslash 2]$ егер оның осы нүктедегі нормаль векторы $\bar{p}$ ={1, 2, 3 } векторына параллель болса

Шешуі: $\bar{N}$ векторын табу үшін алдымен $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$векторларын табамыз.

$\bar{r}_u$ = { cosv, sinv,0} $\bar{r}_v$ = { -usinv, ucosv, a}

Осыдан

$$N=\begin{vmatrix} \bar{i}, & \bar{j}, & \bar{k} \\ cosv & sinv & 0 \\ -usinv, & ucosv & a \end{vmatrix} = asinv\bar{i} - acosv\bar{j} + u\bar{k}$$

$\bar{N}$векторы $\bar{p}$={1, 2, 3 } векторына коллинеар болуы үшін $\frac{asinv}{1}=\frac{-acosv}{2}=\frac{u}{3}$ теңдігі орындалады.

Бірінші теңдіктен tgv=-1\2, екінші теңдіктен u=-3\2 acosv=$-\frac{3}{2}a\frac{1}{\sqrt{1+tg^2v}}$, $tgv = -\frac{1}{2}$, $u = -\frac{3}{\sqrt{5}}a$ мәндерін орнына қоямыз, сонда x=-6a\5, y=3a\5, z=aarctg(-1\2)

Сонымен, (x+6a\5) + 2 (y – 3a\5) + 3 (z-aarctg(-2\1)) = 0

Жанама жазықтықтың теңдеуі, ал

$$\frac{x+6a\backslash 5}{1} = \frac{y-3a\backslash 5}{2} = \frac{z - aarctg(-\frac{2}{t})}{3}.$$

нормалінің теңдеуі

2. $x = \frac{1}{(1+t)}$, $y = \frac{2}{(1-t)}$, $z = t$, t≠±1 теңдеуімен берілген сызық z=$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$ бетінде жататынын көрсетіңіз және осы сызықтың әрбір нүктесіндегі жанасушы жазықтық бетінен осы нүктедегі жанама жазықтығымен беттесетінін дәлелдеңіздер.

*Шешуі: Б*ерілген сызықтың бетте жататынын көрсету үшін орнына қойып тексерудің өзі жеткілікті

$$\frac{1}{y^2} = \frac{(1-t)^2}{4}$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{(1+t)^2}{4},$$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{4t}{4} = t = z.$$

Демек, $z = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$

Берілген сызықтың жанасушы жазықтығын табамыз. Кез келген M_0 нүктесіндегі жанасушы жазықтық $\frac{d\bar{r}}{dt}$ және $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ векторларымен анықталады.

$x' = -\frac{2}{(1+t)^2}$, $y' = \frac{2}{(1-t)^2}$, $\cancel{z}' = 1$, $x'' = 4(1+t)^{-3}$, $y'' = 4(1-t)^{-3}$, $z'' = 0$

Онда $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесіндегі $t=t_0$болғандағы жанасушы жазықтықтың теңдеуі келесі түрде болады.

$$\begin{vmatrix} x-2(1+t_0)^{-1} & y-2(1-t_0)^{-1} & z-t_0 \\ -2(1+t_0)^{-2} & 2(1-t_0)^{-2} & 1 \\ 4(1+t_0)^{-3} & 4(1-t_0)^{-3} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Немесе $(1+t_0)3 + x-(1-t_0)^3 + y + 4\cancel{z} - 12t_0 = 0+4$ жанасушы жазықтықтың теңдеуі

Айқындалмаған теңдеуі арқылы берілген $\Phi(x, y, z) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} - z = 0$

Беттің жанама жазықтығының теңдеуі

$\Phi_x(x-x_0)+\Phi_y(y-y_0)+\Phi_z(z-z_0)=0$

Немесе орнына қойғанда

$$\frac{2(x-x_0)}{x_0^3} - \frac{2(y-y_0)}{x_0^3} + \frac{z-z_0}{1} = 0$$

осыдан

$$\frac{2x}{x_0^3} - \frac{2y}{y_0^3} + z - 3z_0 = 0$$

немесе $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүскесінің бетте берілген сызықта жататынын ескерсек

$x_0 = 2/1+t_0$, $y_0 = 2/1-t_0$, $z=t_0$

мәндерін алдыңғы теңдеуге қойғанда сызықтың жанасушы жазықтығымен беттің сол нүктедегі жанама жазықтықтарының беттесетінін көреміз.

Жаттығулар.

1. Параметрлік теңдеулері арқылы берілген беттердің көрсетілген нүктедегі жанама жазықтығы мен нормалінің теңдеулерін жазыңыздар.

а) $x=2u-v$, $y=x^2+y^2$, $z=u^3-v^3$, $u\epsilon R$, $v\epsilon R$, $M_0(-1, 1, -1)$;

б) $x=u+v$, $y=u^2-2v$, $z=u^3-uv$, $u\epsilon R$, $v\epsilon R$, $M_0(u=1, v=2)$;

в) $x=\cos u \cos v$, $y=\cos u \sin v$, $z=\sin u$, $u\epsilon(0, 2\pi) v\epsilon[0, 2\pi) M_0$ (u=0, $v=\pi\backslash 3$;

г) $x=au$, $y=\sin u$, $z=bv$, $u\epsilon R, v\epsilon R$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, кез келген нүктеде.

Жауаптары:

а) Жанама жазықтығы: $3y-2z-1=0$, нормаль: $x+1=0$: $y-1/3 = z+1/2$;

б) Жанама жазықтығы: $y-2z-1=0$, нормаль: $x-3=0$, $y+1=z+1/-2$;

в) Жанама жазықтығы: $x+\sqrt{3}y-2=0$, нормаль:

$$\frac{x-1/2}{1} = \frac{y-\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}}, \qquad z=0;$$

г) Жанама жазықтығы: $x\cos u_0 - ay + a\sin u_0 - au_0\cos u_0 = 0$

нормаль:

$x+au_0 \quad = \quad y-\sin u_0 \ ,$

Cosu$_0$ -a z-bv$_0$=0

2. Айқындалмаған теңдеулері арқылы берілген беттердің көрсетілген нүктедегі жанама жазықтықпен нормальдарының теңдеуін жазыңыздар.

а) $x^6y^2+z^3=31$, $M_0\,(1, 2, -1)$

б) $x^3+y^3=z$, $M_0\,(1, 1, 2)$

в) $x^2-2y^2-3z^2-4=0$, $M_0\,(3, 1, -1)$

г) $x^2/a^2+y^2/b^2=2z$, $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$

Жауаптары:

а) Жанама жазықтық: $24x+4y+3z-4=0$, нормаль: $\frac{x-1}{24} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+1}{3}$.

б) Жанама жазықтық: $3x+3y+z-4=0$, нормаль:

$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{Z-1}{1}$.

в) Жанама жазықтық: $3x-2y+3z-4=0$, нормаль: $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{3}$

с) Жанама жазықтық: $\frac{Xx_0}{a^2} + \frac{Yy_0}{b^2} = z$, нормаль: $\frac{X-x_0}{x_0/a^2} + \frac{Y-y_0}{y_0/b^2} = z_0 - z$,

3. Берілген беттің берілген жазықтыққа параллель жанама жазықтықтарын табыңыздар:

а) $x^2/16+y^2/9 - z^2/4=1$, $x+4y+2z-7=0$ жазықтығына;

б) $xyz=1$ беті, $x+y+z=7$ жазықтығына;

в) $x=2\cos u\cos v$, $y=2\sin u\cos v$, $z=2\sin v$, $v\epsilon[0, 2\pi)$, $u\epsilon[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ беті, $x+y+z+3=0$ жазықтығына.

Жауаптары:

а) $x+4y+2z+12=0$. Нұсқау: Беттің кез-келген (x_0,y_0, z_0) нүктедегі жанамасының теңдеуін аламыз. Оның жазықтықтың нормаль векторының координаттарына {1,4,2} пропорционал

$\underline{x_0}$; $\underline{y_0}$; - $\underline{z_0}$.

16   9   4

сандарын табу керек және (x_0, y_0, z_0)нүктесі бетте жататынын ескереміз. Яғни

$$\frac{x_0^2}{4^2} + \frac{y_0^2}{3^2} - \frac{z_0^2}{2^2} = 1.$$

$$\frac{x_0}{16} : \frac{y_0}{9} : \frac{z_0}{4} = 1:4:1.$$

Бұл шарттарды екі нүкте қанағаттандырады.
M_1 (-4/3; -3; 2/3) M_2(4/3; 3; -2/3)
X+4y+2z+D=0 теңдеуін қойып D=±12 екені табылады.

б) x+y+z-3=0

в) x+y+z+$\sqrt{3r}$ =0,   x+y+z-$\sqrt{3r}$=0

3.4. Беттің бірінші квадраттық формасы

C^R классына тиісті Ғ беті келесі векторлық теңдеуі арқылы берілсін $\bar{r} = \bar{r}(u, \vartheta)$ $(u, \vartheta) \in C \subset r^2$

Беттің радиус векторының дифференциалы $d\bar{r} = \bar{r}udu + \bar{r}\vartheta d\sigma,$

осыдан$(dr)^2 = E(du)2 \quad + 2Fdud\sigma + G(d\vartheta)^2,$ мұндағы $E = \bar{r}_u{}^2 \quad F = (\bar{r}_u \bar{r}_\vartheta), G = \bar{r}_\sigma{}^2$

$$\bar{r}^2{}_u = x^2{}_u + y^2{}_u + \bar{z}^2{}_u$$

$$\bar{r}_u \bar{r}_\sigma = x_u x_\sigma + y_u y_\sigma + \bar{z}_u \bar{z}_\sigma$$

$$\bar{r}_\sigma{}^2 = x_\sigma{}^2 + y_\sigma{}^2 + x_\sigma{}^2$$

Бұл өрнекті біз беттің бірінші квадраттық формасы деп атап I деп белгілейміз.

Беттің бірінші квадраттық формасы оң анықталған форма болады. Беттің бірінші квадраттық формасы оның М нүктесінде жүргізілген жанама жазықтықтары векторлық кеңістікте анықталады. Бұл форма жанама векторлық кеңістігіндегі евклидттік векторлық кеңістік болады.

Егер бетте $\gamma : u = u(t),\ \vartheta = \vartheta(t),\quad t \in I \subset R$ болып $(u(t),\ \vartheta(t)) \in C$ болса, ал s осы сызықты доғасының ұзындығы болғанда, онда келесі теңдік орындалады: $I = (ds)^2 = Edu^2 + 2Fdud\vartheta + Gdu^2$

Беттің бірінші квадраттық формасы келесідей қолданыстарға ие болады:

1. $\gamma : u = u(t),\ \vartheta = \vartheta(t)$ беттегі жататын сызықтық доғасының ұзындығын келесі формула арқылы табуға болады.

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + Q\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt$$

2. Бетте жататын қиылысатын екі сызықтың арасындағы бұрышты табу. Бетте жататын бір нүктеде қиылысатын екі сызықтың арасындағы бұрыш деп, осы қиылысу нүктесінде сызықтарға жүргізілген жанама түзулердің арасындағы бұрышты айтамыз. Бірінші α_1 сызығы бойында дифференциалдау символын d, ал екінші α_2 сызығы бойымен дифференциалдау символын δ деп белгілесек, онда d$\bar{r}$ және $\delta\bar{r}$ сызықтардың қиылысу нүктесіндегі жанама векторлары болады. d$\bar{r}$ және $\delta\bar{r}$ векторларының арасындағы бұрыштың конусы келесі түрде болады.

немесе $cos\ \varphi = \frac{Edu\delta u + 2Fdu\delta v + Fdv\delta u + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdu\delta v + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}$

<u>Салдар</u>. Беттегі координаттық тор ортогональ болуы үшін $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$,

беттің әрбір нүктесіндегі $F = 0$ болуы қажетті және жеткілікті.

3. Ғ беттің квадратталатын бет болса, яғни әрбір нүктесінде келесі үш шарт орындалса.

1) Ғ беті дөңгелекке гомеоморфты болу шарты:

2) Ғ біртегіс беттің бөлігі болса:

3)Ғ бетінің шекарасы бөліктей біртегіс сызық болса.

Бұл жағдай Ғ бетінің ауданы келесі формула арқылы табылады:

$$S(F) = \left| \iint_G \sqrt{EG - F^2}\, dud\upsilon \right|$$

Мұндағы G $u,\upsilon-$айнымалыларының өзгеру облысы.

Беттің бірінші квадраттық формасын оның метрикалық сипаттамасы деп аталады, себебі беттегі метрикалық мәселерді шешуге қолдануға болады.

Мысалдар:

1. Ғ: $x=\frac{1}{2}u(\sqrt{3}\sin\upsilon-\cos\upsilon),\qquad y=\frac{1}{2}u(\sqrt{3}\sin\upsilon-\cos\upsilon),\quad z=a\upsilon$

$u\in[0,+\infty),\ \upsilon\in[0:+\infty)$бетінде жататын $\gamma:\ u=\frac{1}{2}a\upsilon^2,\quad a\neq 0$ сызығының $A(u=0,\quad \upsilon=0)$ және $B(u=2a,\quad \upsilon=2)$ нүктелері арасындағы доғасының ұзындығын табыңыздар.

Шешуі: $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\cos\upsilon+\sin\upsilon\right)=\sin\left(\upsilon+\frac{\pi}{3}\right),\ \ \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\sin\upsilon+\cos\upsilon\right)=-\cos\left(\upsilon+\frac{\pi}{3}\right),$

екенін ескерсек беттің теңдеуі келесі түрге келеді.

$$x=u\ \sin\left(\upsilon+\frac{\pi}{3}\right),\qquad y=-u\rightleftarrows cos\left(\upsilon+\frac{\pi}{3}\right),\qquad z=a\upsilon$$

$$\bar r_u=\left\{\sin\left(\upsilon+\frac{\pi}{3}\right);\quad -\cos\left(\upsilon+\frac{\pi}{3}\right);\quad 0\right\}$$

$$\bar r_\upsilon=\left\{u\cdot\cos\left(\upsilon+\frac{\pi}{3}\right);\quad u\cdot\sin\left(\upsilon+\frac{\pi}{3}\right);\quad a\right\}$$

Бірінші квадраттық формасының коэффиценттері

$$E=\bar r_u{}^2=1;\quad F=(\bar r_u\bar r_\upsilon)=0;\quad G=\bar r_\upsilon{}^2=u^2+a^2$$

Осыдан $I=du^2+(u^2+a^2)d\upsilon^2$ $\qquad\gamma:\ \ u=\frac{1}{2}a\upsilon^2$ сызығында $du=a\upsilon d\upsilon$

болғандықтан $I(\gamma)=(a^2\upsilon^2+\frac{1}{2}a^2\upsilon^4+a^2)d\upsilon=a^2\left(\frac{1}{2}\upsilon^2+1\right)^2d\upsilon^2$ осыдан

$$S=\int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{2}}\sqrt{I(\gamma)}d\upsilon=a\int_0^2\left(\frac{1}{2}\upsilon^2+1\right)d\upsilon=a\frac{1}{6}\left(\upsilon^3+\upsilon\right)\Big|_0^2=\frac{10}{3}a\Big|$$

2. Сфераның параметрлік теңдеуі берілген

x=2$cos\,\upsilon\,cos\,u,\quad y=\alpha\,sin\,\upsilon\,cos\,u,\quad \upsilon=\alpha\,sin\,u,\quad u\in[0.2\pi)\quad \upsilon\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ Сфераның меридиандарын $(\upsilon = const)$ тұрақты α бұрышымен қиып өтетін сызықтың теңдеуін табыңыздар. Мұндай сызықты **локсодрома** деп атаймыз.

Шешуі: Сфераның бірінші квадраттық формасын табамыз

$I = du^2 + \cos^2 u du^2$ ізделінді сызық бойынша дифференциалдауды δ деп белгілейміз, осыдан $I(\delta) = \delta u^2 + \cos^2 u\delta\upsilon^2$ меридиандар бойынша дифференциалдауды d деп белгілесек $d\upsilon = 0$ $du \neq 0$ екенін ескергенде

$I(d) = du^2$

Бұл жағдайда меридианмен ізделінді сызықтың арасындағы бұрыштың косинусы $\cos\alpha = \dfrac{du\delta u + \cos^2 u d\upsilon\delta\upsilon}{\sqrt{du^2 + \cos^2 u d\upsilon^2}\sqrt{\delta u^2 + \cos^2 u\delta\upsilon^2}}$

Меридиан үшін $d\upsilon = 0$ екенін ескерсек $\cos\alpha = \dfrac{\delta u}{\sqrt{\delta u^2 + \cos^2 u \cdot \delta \cdot \upsilon^2}}$,

осыдан $\delta u^2 = -tg^2\alpha \dfrac{1}{\cos^2 u} du^2$, немесе $\delta\upsilon = \pm tg\alpha \dfrac{1}{\cos\ u} du$

Интегралдағаннан кейін $\upsilon = \pm tg\alpha\, ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$ бұл локсодраманың теңдеуі.

3. Келесі теңдеумен берілген винттік бетте жататын ABC үшбұрышты облыстың ауданын табыңыздар

$x = u\cos\vartheta, \quad y = \sin\vartheta, \quad z = u \pm \vartheta, \quad u \in R, \quad \vartheta \in R,$

$AB: \vartheta = 1; \quad BC: u = 0, \quad AC: u = \vartheta$

Шешуі: Беттің бір бөлігінің ауданын табу үшін келесі формуланы қолданамыз.

$$S(F) = \left|\iint_{\zeta} \sqrt{E\zeta - F^2} du d\upsilon\right|$$

Беттің бірінші квадраттық формасын табамыз.

$I = 2du^2 + 2dud\upsilon + (1tu^2)d\upsilon^2$, яғни $E = 2, \quad F = 1, \quad \zeta = (1 + u^1)$,

осыдан $EG - F^2 = 1 + 2u^2$

$$S(F) = \left|\iint_{ABC} \int \sqrt{1+2u^2}dudv\right| = \left|\int_0^1 dv \int_0^v \sqrt{1-2u^2}du\right|$$

$$= \left|\int_0^1 \frac{1}{2}\left[4\sqrt{1+2u^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}arcsin\sqrt{2}\,v\right)_0^v dv\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{1\int{}^1{}_0\frac{5}{12}}\left(\left(v\sqrt{1-2v^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}arcsin\sqrt{2}\,v\right)dv\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left|-\frac{1}{6}\left(\sqrt{1-2v}\right)^3 + \frac{v}{\sqrt{2}arcsin\sqrt{2}\sqrt{1-2v^2}}||\right|$$

Жаттығулар.

1. Параметрлік теңдеулері арқылы берілген келесі беттердің бірінші квадраттық формаларын табыңыздар.

а) тік геликоид: $x = u\cos\upsilon, \quad y = u\sin\upsilon, \quad z = a\upsilon, \quad u \geq 0, \quad \upsilon \in R, \quad a \neq 0$

б) тор: $x = (a + b\cos u)\cos v\,, \quad y = (a + b\cos u)\sin v\,, \quad z = b\sin u$

$$u \in [0.2\pi], \quad v \in [0,2\pi], \quad a, b \geq 0$$

в) айналу беті: $x = v\cos u\,, \quad y = v\sin u\,, \quad z = f(v), \quad u \in [0,2\pi], \quad \delta \geq 0$

г) псевдосфера: $x = a\sin u\cos v\,,\ y = \alpha sinu\, sinv \quad z = a\left(ln\,t\,g\frac{u}{2} + \cos u\right) \quad u \in [0,\pi]$

$$v \in [0,2\pi]$$

д) катенонд: $x = ach\frac{u}{a}\cos\vartheta\,, \quad y = ach\frac{u}{a}\sin\vartheta\,, \quad z = u, \quad u \in R$

$$v \in [0,2\pi],$$

е) жалын геликоид: $x = u\cos\vartheta, \quad y = u\sin\upsilon, \quad z = f(u) + a\upsilon, \quad u \geq 1,$ $\upsilon \in [0,2\pi], \quad a \neq 0$

Жауаптары:

а) $I = du^2 + (u^2 + a^2)d\upsilon^2$

б) $I = b^2du^2 + (a + b\cos u)^2 d\upsilon^2$

в) $I = v^2du^2 + (1 + f'^2(v))dv^2; z$

г) $I = a^2ctg^2udu^2 + a^2\sin^2 a\, dv^2$

д) $I = ch^2du2 \quad + a^2ch^2\frac{u}{2}dv^2$

е) $I = (1 + f'^2{}_{(u)})du^2 + 2af'_{(u)}dud\upsilon + (a^2 + u^2)d\upsilon^2$

2. Параметрлік теңдеулері арқылы берілген келесі екінші ретті беттердің бірінші квадраттық формасын табыңыздар

$$y = b\sin u\cos\upsilon,\quad z = c\sin\upsilon$$
$$u \in [0,2\pi],\quad \upsilon \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

б) бір қуысты гиперболоид:

$$x = \frac{a}{2}\left(\upsilon + \frac{1}{\upsilon}\right)\cos u,\ \ y = \frac{b}{2}\left(\upsilon + \frac{1}{\upsilon}\right)\sin u,\quad z = \frac{c}{2}\left(\upsilon + \frac{1}{\upsilon}\right),\quad u \in [0,2\pi],\quad \upsilon \neq 0$$

в) бір қуысты гиперболоид:

$$x = a\frac{1+u\upsilon}{u+\upsilon},\quad y = \frac{\upsilon - u}{u+\upsilon},\quad z = c\frac{u\upsilon - 1}{u+\upsilon},\qquad u+\upsilon \neq 0;$$

г) екі қуысты гиперболоид:

$$x = \frac{a}{2}\left(\upsilon + \frac{1}{\upsilon}\right)\cos u,\quad y = \frac{b}{2}\left(\upsilon + \frac{1}{\upsilon}\right)\sin u,\qquad z = \frac{c}{2}\left(\upsilon + \frac{1}{\upsilon}\right),\quad u \in [0,2\pi],\quad \upsilon \neq 0$$

д)Эллипстік параболлоид:

$$x = \upsilon\sqrt{p}\cos u,\quad y = \upsilon\sqrt{p}\sin u,\quad z = \frac{1}{2}\upsilon^2,\quad u \in [0,2\pi),\quad \upsilon \in R$$

е)гиперболалық параболоид:

$$x = (u+\upsilon)\sqrt{p},\quad y = (u-\upsilon)\sqrt{q},\quad z = 2u\upsilon,\quad u \in [0,2\pi],\quad \upsilon \in R;$$

ж)конус:

$$x = a\upsilon\cos u,\qquad y = b\upsilon\sin u,\qquad z = c\upsilon,\qquad u \in [0,2\pi],\qquad \upsilon \in R_2$$

з) Эллипстік цилиндр:

$$x = a\upsilon\cos u,\qquad y = b\upsilon\sin u,\qquad z = \upsilon,\qquad u \in [0,2\pi],\qquad \upsilon \in R$$

и) гиперболалық цилиндр:

$$x = \frac{a}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right),\quad y = \frac{b}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right),\qquad z = \upsilon,\quad u \neq 0\qquad \upsilon \in R$$

к) параболалық цилиндр:

$$x = 2pu^2,\qquad y = 2pu,\qquad z = \upsilon,\quad u \in R\qquad \upsilon \in R$$

<u>*Жауаптары:*</u>

а) $I=(a^2\sin^2 u+b^2\cos^2 u)\cos^2\upsilon du^2+2(a^2-b^2)\cos u\cdot\sin u\cdot\cos\upsilon\cdot\sin\upsilon du d\upsilon+$
$\left(\left(a^2\cos^2 u+b^2\sin^2 u\right)\sin^2\upsilon+c^2\cos^2\upsilon\right)d\upsilon^2$

б) $I=\frac{1}{4}\left(\upsilon+\frac{1}{\upsilon}\right)^2(a^2\cos^2 u+b^2\sin^2 u)du^2+\frac{1}{2}(b^2-a^2)\sin u\cdot\cos u\left(1-\frac{1}{\upsilon^2}\right)du d\upsilon+$
$\left(\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\upsilon^2}\right)\left(a^2\cos^2 u\sin^2 u\right)+\frac{1}{4}c^2\left(1+\frac{1}{\upsilon^2}\right)^2\right)d\upsilon^2$

в)

$$I=\frac{1}{(u+\upsilon)^4}\left(a^2\left(\upsilon^2-1\right)+4b^2\upsilon^2+c^2\left(\upsilon^2+1\right)^2\right)du^2+2\left(a^2\left(u^2-1\right)\left(u^2-1\right)-4b^2u\upsilon+c^2\left(u^2+1\right)\left(\upsilon^2+1\right)du d\upsilon\right)$$
$$+\left(a^2\left(u^2-1\right)^2+4b^2u^2+c^2\left(u^2+1\right)^2\right)d\upsilon^2$$

г) $I=\frac{1}{4}\left(\upsilon-\frac{1}{\upsilon}\right)^2\left(\begin{array}{l}a^2\sin^2 u+b^2\sin^2 u du^2+\frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right)\sin u\cos u\left(1-\frac{1}{\upsilon^3}\right)du d\upsilon+\\ \left(\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\upsilon^2}\right)^2\left(a^2\cos^2 u+b^2\sin^2 u\right)+\frac{1}{4}c^2\left(1-\frac{1}{\upsilon^2}\right)^2\right)\end{array}\right)d\upsilon^2;$

д) $I=\left(\left(p\sin^2 u+q\cos^2 u\right)\upsilon^2du^2+2\upsilon(q-p)\sin u\cos u du d\upsilon+p\cos^2 u+q\sin^2 u+\upsilon^2\right)d\upsilon^2$

е) $I=\left(\left(p+q+4\upsilon^2\right)du^2+2\left(p-q+4u\upsilon\right)du d\upsilon+\left(p+q+4u^2\right)d\upsilon^2\right)$

ж)

$$I=\left(\upsilon^2\left(a^2\sin^2 u+b^2\cos^2 u\right)du^2+2\left(b^2-a^2\right)\upsilon\sin u\cos u du d\upsilon+a^2\cos^2 u+b^2\sin^2 u+c^2\right)d\upsilon^2$$

з) $I=\left(a^2\sin^2 u+b^2\cos^2 u\right)du^2+d\upsilon^2$

и) $I=\left(\frac{1}{4}a^2\left(1-\frac{1}{u^2}\right)^2+\frac{1}{4}b^2\left(1+\frac{1}{u^2}\right)^2\right)du^2+d\upsilon^2$

к) $I=\left(16p^2u^2+4p^2\right)du^2+d\upsilon^2$

3.Беттің айқындалған теңдеуі бойынша $z=f(x,y)$ оның бірінші квадраттық формасын табыңыздар:

а) $z=\sqrt{r^2-x^2-y^2};$ *б)* $z=x^2-y^2$ *в)* $z=\frac{1}{xy}$

<u>Жауаптары</u>:

<u>Нұсқау:</u> беттің теңдеуін параметрлік түрге келтіреміз

$x=u,\quad y=\upsilon,\quad z=f(u,\upsilon)$

Сонда $z = f(x,y)$ үшін $I = \left(1+f_x^{\,2}\right)dx^2 + 2f_x f_y dxdy + \left(1+f_y^{\,2}\right)dy^2$

4. Беттің бірінші квадраттық формасы берілген. Осы беттегі 4м сызық арқылы берілген үшбұрыштың периметрін табыңыздар; егер

$\gamma_1: \ \upsilon = 0, \quad \gamma_2 \ u = 1; \quad \gamma_3 : u = \upsilon$

а) $I = du^2 + (2u-1)dud\upsilon + (1+u^2)d\upsilon^2;$

б) $I = du^2 - 2dud\upsilon + (1+e^{21})d\upsilon;$

в) $I = \left(1+(1+\upsilon)^2\right)du^2 - 2(1+\upsilon)^2 dud\upsilon + (1+\upsilon^2)d\upsilon^2;$

г) $I = (1+e^{2\upsilon})du^2 + 2e^{24}dud\upsilon + 2ud\upsilon^2;$

<u>*Жауаптары:*</u>

$a) \quad p = \frac{5}{2} + \sqrt{2}; \qquad \acute{a}) \quad e + \sqrt{1+e}; \qquad \hat{a}) \quad p = \frac{5}{2} + \sqrt{2}; \qquad \tilde{a})\, 1 + \sqrt{2} + e^2$

<u>*Нұсқау:*</u> доғалардың ұштары сызықтардың қиылысу нүктелері болады.

5. Берілген беттерде жататын сызықтардың $M_1(u_1\ \upsilon_1)$ және $M_2(u_2\ \upsilon_e)$ нүктелерінің арасындағы доғаларының ұзындықтарын табыңыздар:

а) түзу геликодтегі: $x = u\cos\upsilon + u\sin\upsilon, \quad z = a\upsilon, \quad u \ge 0, \quad \upsilon \in [0, 2\pi], \quad a \ne 0$

сызықтың теңдеуі: $\upsilon = \ln\left(u \pm \sqrt{u^2 + a^2}\right) + C$

б) псевдосферадағы

$x = a\, sin\, u\, cos\, \upsilon, \qquad y = a\, sin\, u\, sin\, \upsilon, \quad z = a\left(ln\, t\, g\frac{u}{2} + cos\, u\right), \quad u \in (0,\pi), \quad \upsilon \in [0, 2\pi]$

сызықтың теңдеуі: $\upsilon = \pm a\, ln\, t\, g\frac{u}{2} + C$

<u>*Жауаптары:*</u> $a) \quad s = \sqrt{2}\left|u_2 - u_1\right|; \quad \acute{a}) \quad s = a\left|\upsilon_2 - \upsilon_1\right|$

6.Келесі беттердің кез келген нүктедегі координаттың сызықтарының арасындағы бұрыштарды табыңыздар

$a) \quad x = z\cos\upsilon\cos u, \quad y = z\sin\upsilon\cos u, \qquad z = 2\sin u, \quad u \in [0, 2\pi], \quad \upsilon \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\acute{a}) \quad x = \cos\upsilon, \quad y = u\sin\upsilon, \quad x = \upsilon + u, \quad u \ge 0, \quad \upsilon \in [0, 2\pi)$

$\hat{a}) \quad x = u\cos\upsilon, \quad y = u\sin\upsilon, \quad z = f(u) + a\upsilon, \quad u \ge 0, \quad \upsilon \subset [0, 2\pi), \quad a \ne 0$

$\tilde{a})\quad x\dfrac{a}{2}\left(u+\dfrac{1}{u}\right),\quad y=\dfrac{b}{2}\left(u-\dfrac{1}{u}\right),\quad z=\upsilon,\qquad u\neq 0,\quad \upsilon\in R$

<u>*Жауаптары:*</u>

<u>*Нұсқау*</u>: координаттық сызықтардың арасындағы бұрыш келесі формула арқылы табылады:

$$\cos\varphi=\frac{F}{\sqrt{E\zeta}}\qquad a)\ \varphi=\frac{\pi}{2}:\qquad \acute{a})\quad \cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2(u^2+1)}}\qquad \hat{a})\ \cos\varphi=\frac{af'_{(u)}}{\sqrt{\left(1+f'^{\,2}_{(u)}\right)a^2+u^2}};$$

$$\tilde{a})\quad \varphi=\frac{\pi}{2}$$

7.Берілген бетте орналасқан γ_1 және γ_2 сызықтарының арасындағы бұрышты табыңыз.

$a)\quad x=u\cos\vartheta,\quad y=u\sin\vartheta,\quad z=u^2,\quad u\geq 0,\quad \vartheta\in[0,2\pi),$

$\gamma_1:\vartheta=u+1;\quad \gamma_2:\vartheta=3-\vartheta$

б) $x=u\cos\vartheta,\quad y=u\sin\vartheta,\quad z=a\vartheta,\quad u\geq 0,\quad \vartheta\in R$

$\gamma_1:\vartheta+u=0;\quad \gamma_2:u-\vartheta=0$

в) $x=1(u+\vartheta),\quad y=3(u-\vartheta),\quad z=2u\vartheta,\quad u\in R,\quad \vartheta\in R,$

$\gamma_1:u+\vartheta=0;\quad \gamma_2:u-\vartheta=0$

г) $z=xy\qquad \gamma_1:\quad k=a,\quad \gamma_2:\quad y=\varepsilon,\quad a,c-$тұрақты.

<u>*Жауаптары*</u>:

$$a)\quad \varphi=\arccos\frac{2}{3};\quad \acute{a})\quad \varphi=\arccos\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)\text{æàíå}\qquad \varphi=\arccos\left(-\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)$$

$$\hat{a})\quad \varphi=\frac{\pi}{2};\quad \tilde{a})\ \varphi=\arccos\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}$$

<u>*Нұсқау:*</u> $x=u,\quad y=\upsilon,\quad z=u\upsilon$ деп аламыз.

8. $x=u\cos\upsilon,\qquad y=u\sin\upsilon,\qquad z=a\upsilon,\qquad u\geq 0,\qquad \upsilon\in[0,2\pi]$ геликоидінде орналасқан келесі фигуралардың аудандарын табыңыздар.

а) $u=\pm\vartheta,\quad \vartheta=1$ Сызықтарымен қоршалған үшбұрыш

б) $u=0,\quad u=a,\quad \vartheta=0,\quad \vartheta=1$Сызықтарымен қоршалған төртбұрыш.

Жауаптары: $a)\ S(f)=a^2\left(\frac{2-\sqrt{2}}{3}+\ln(1+\sqrt{2})\right);$ $\acute{a})\quad S(f)=\frac{a^2}{2}\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$

9. Бірінші квадраттық формалары арқылы берілген беттерде жататын АВС үшбұрышының аудандарын табыңыз.

Егер АВ: $\vartheta=0,\quad BC:\quad u=1,\quad AC:\quad u=\vartheta$ сызықтары болғанда:

а) $I=(1+24)du^2+2e^{4+\vartheta}dud\vartheta+e^{2\vartheta}du^2$:

б) $I=(1+(1+\vartheta)^2)du^2-2(1+\vartheta^2)dud\vartheta+(1+\vartheta^2)du^2$

в) $I=(1+e^{2\upsilon})du^2-2e^{2\upsilon}dud\upsilon+e^{2\upsilon}d\upsilon^2$

г) $I=du^2+2\cos\frac{\pi 4}{3}dud\upsilon+d\upsilon^2$

Жауаптары:

$a)\ S(F)=e-2,$ нұсқау $S(F)=\left|\int\int_a\sqrt{E\zeta-F^2}dud\upsilon\right|=\int_0^1 d\upsilon\int_1^{\vartheta}\sqrt{E\zeta-F^2}du$ деп аламыз; б) $S(F)=\frac{11}{12};$ в) $S(F)=2-e;$ г) $S(F)=\frac{3}{Ti}\left(1-\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right)$

3. 5 Екінші квадраттық форма. Беттегі сызықтың қисықтығы

C^k классына тиісті Ғ беті келесідей векторлық теңдеуі арқылы берілсін $(k\geq r)$

$$\bar{r}=\bar{r}(u,v)\quad (u,v)=GcR^2$$

Беттің кез келген М нүктесіндегі бірлік нормаль векторы $\bar{n}=\frac{\bar{N}}{|N|}=\frac{[\overline{r_u}\overline{r_v}]}{|[\overline{r_u}\overline{r_v}]|}$

Анықтама: Беттің екінші квадраттық формасы деп $II=(-d\bar{r},d\bar{n})$ формасын айтамыз.

$\bar{n}\perp\bar{r}_u$ және $\bar{n}\perp\bar{r}_u$ бұл жазықтықтан $\bar{n}\perp d\bar{r}$ болады. олай болса $(d\bar{r},\bar{n})$=0 екені белгілі. Осы теңдікті және бір дифференциалдасақ: $d(d\bar{r},\bar{n})=(d^2r,d\bar{n})+(d\bar{r},d\bar{n})=0$. Осыдан ($d^2\bar{r},\bar{n})=(-d\bar{r},d\bar{n})$ Демек $II=(d^2\bar{r},\bar{n})$

$$d\bar{r}=\bar{r}_u dn+\bar{r}_v dv,$$

$$d^2\bar{r}=\bar{r}_{uu}du^2+2r_{uv}dudv+\bar{r}_{uv}dv^2+\bar{r}_u d^2n+\bar{r}_v d^2v$$

Осы теңдіктің екі жағын $\bar{n}$ векторына скаляр көбейткенде $(\bar{r}_u\bar{n}) = 0$, $(\bar{r}_v\bar{n}) = 0$ екенін ескерсек $II = (d^2\bar{r}, \bar{n}) = (\bar{r}_{uu}, \bar{n})du^2 + 2(\bar{r}_{uv}\bar{n})dudv + (\bar{r}_{uv}\bar{n})dv^2$ екенін табамыз. Келесідей белгілеулер ендіреміз: L=$(\bar{r}_{uu}\bar{n})$, M=$(\bar{r}_{uv}\bar{n})$, N=$(\bar{r}_{vv}\bar{n})$. Сонда $II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ түрінде жазуға болады.

$\bar{n} = \frac{[\bar{r}_u\bar{r}_v]}{|[\bar{r}_u\bar{r}_v]|}$ және $|[\bar{r}_u\bar{r}_v]| = \sqrt{EG - F^2}$ екені белгілі онда L=$\frac{(\bar{r}_{uu}\bar{r}_u\bar{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}$, M=$\frac{(\bar{r}_{uv}\bar{r}_u\bar{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}$, N=$\frac{(\bar{r}_{vv}\bar{r}_u\bar{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}$.

Ашып жазатын болсақ L=$\frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}$, M=$\frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}$, N=$\frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}$.

Егер беттің теңдеуі z=$f(x, y)$түрінде берілсе x=u, y=u, z=$f(x, v)$ деп аламыз, сонда L=$\frac{z_{xx}}{\sqrt{1+z_u^2+z_v^2}}$, M=$\frac{z_{xy}}{\sqrt{1+z_u^2+z_v^2}}$, N=$\frac{z_{yy}}{\sqrt{1+z_u^2+z_v^2}}$.

Егер беттің теңдеуі айқындалмаған түрде берілсе

$z_x = -\frac{F_x}{F_z}$, $z_y = -\frac{F_y}{F_z}$, ескерсек

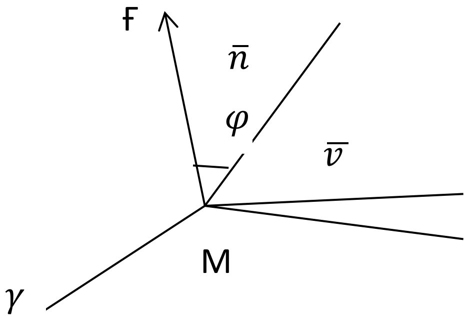
L=$\frac{2F_{xz}F_xF_z - F_{xx}F_z^2 - F_{zz}F_x^2}{F_z^2\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}$, M=$\frac{F_{xz}F_yF_z + F_{yz}F_xF_z - F_{xy}F_z^2 - F_{zz}F_xF_y}{F_z^2 \ 1+1}$.

$$N = \frac{2F_{yz}F_yF_z - F_{yy}F_z^2 - F_{zz}F_y^2}{F_z^2\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}$$

F бетінде $\gamma: u = u(s),\ v = v(s)$ сызығы табиғи теңдеуі арқылы берілсін. s —табиғи параметр.

Анықтама: γ сызығының нормаль қисықтығы деп $k_n = (\bar{n}, k\bar{v})$ шамасын айтамыз.

Егер $\varphi = \widehat{\bar{n}, \bar{v}}$, онда $k_n = k \cdot \cos\varphi$ болады.



Беттегі сызықтың нормаль қисықтығы келесі формуламен табылады.

$$k_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$

Беттің нормаль қимасы деп беттің берілген нүктедегі нормалі арқылы өтетін жазықтықпен қимасын айтамыз. Беттің нормаль қимасы болатын сызықтың қисықтығы, оның сол бағыттағы нормаль қисықтығының абсолюттық шамасына тең болады.

Менье теоремасы: Беттің берілген нүктесі арқылы өтетін ортақ жанамасы бар барлық біртегіс сызықтардың нормаль қисықтықтары бірдей болады. Демек нүктедегі нормаль қисықтық сызықтың бағытымен анықталады.

Беттің жанама жазықтығында жататын әрбір жанама түзуінде, әр бір бағыты бойынша ұзындығы нормаль қисықтықтың квадрат түбіріне тең болатын кесінділер салсақ, ол кесінділердің ұштары жанама жазықтықта нүктелердің геометриялық орнын анықтайды. Бұл нүктелердің геметриялық орны болатын сызықты беттің нормаль қисықтығының индикатрисасы (Дюпен индикатрисасы) деп атаймыз.

Беттің М нүктесіндегі нормаль қисықтығының индикатрисасы $\overline{\mathrm{MP}} = \pm \frac{1}{\sqrt{|k_n|}} \bar{\tau}$ арқылы анықталады.

Егер жанама жазықтықта (М $\bar{r_u}$, $\bar{r_v}$) координаттар жүйесін ендірсек, онда бұл теңдікті келесі түрде жазуға болады.

$x\overline{r_u} + y\overline{r_v} = \pm \frac{1}{\sqrt{|k_n|}} (\overline{r}u \cdot \frac{du}{ds} + \bar{r}_v \frac{dv}{ds})$ $\overline{r_u}, \overline{r_v}$ векторлары коллениар емес сондықтан x= $\pm \frac{1}{\sqrt{|k_n|}} \frac{du}{ds}$, y= $\pm \frac{1}{\sqrt{|k_n|}} \frac{dv}{ds}$

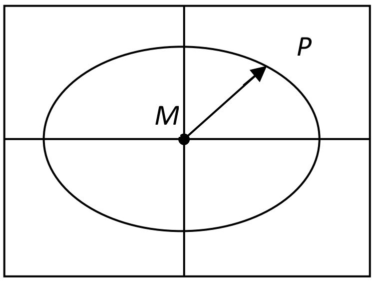
$k_n = L\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + N\left(\frac{du}{ds}\right)^2$ теңдігіне $\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}$ орнына қойғанда, біз келесідей теңдеуге келеміз. $Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = \pm 1$

Бұл екінші ретті теңдеу Дюпен индикатрисасының теңдеуі болады. ол екінші ретті сызықтың теңдеуі болады. F$\epsilon C^k (k \geq \tau)$ бір тегіс беттер үшін L,M,N бір уақытта нөлге тең емес деп алсақ, онда үш түрлі жағдай кездеседі.

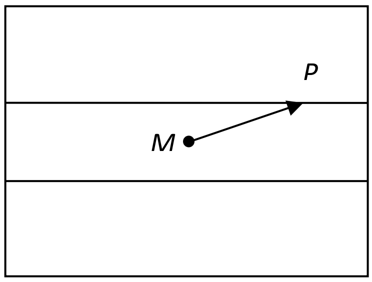
1. $LN\text{-}M^2>0$ болса, Дюпен индикатрисасының теңдеуі, эллипсті анықтайды. Бұл жағдайда беттегі М нүктесі, эллиптикалық нүкте деп атаймыз. Нормаль қисықтықтың индикатрисасы шеңбер болатын нүктелерді омбиликалық нүктелер деп атаймыз (сфера, айналу параболлоидының төбесі, т.с.с..)

2. Егер М нүктесінде $LN\text{-}M^2<0$, онда индикатриса түйіндес жұп гиперболлалар болады. М нүктесін гиперболалық нүкте деп атаймыз. Гиперболлоидттар, гиперболалық параболлоид, катеноид т.с.с..

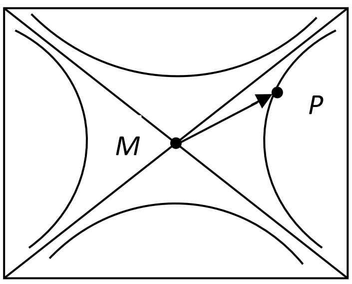
3. Егер М нүктесінде $LN\text{-}M^2=0$, онда индикатрисасы жұп паралель түзулер болады. Мұндай нүктені параболлалық нүкте деп атаймыз (цилиндерлік, конустық беттер).



Эллиптикалық



Параболалық



Гиперболалық

3.6. Басты қисықтар.Беттің толық және орташа қисықтықтары

Біртегі F бетінің теңдеуі берілсін $\bar{r}=\bar{r}(u,v)\ \ (u,v)\epsilon G\ \subset R^2$

Беттің берілген нүктедегі басты бағыттары деп, сол нүктедегі Дюпен индикатрисасының басты бағыттарын айтамыз.Осы бағыттарға сәйкес келетін нормаль қисықтықтарын беттің бас қисықтықтары деп атаймыз. Егер $F^n \subset C^k$ (k≥2) беті берілсе, онда оның М нүктесіндегі координаттар жүйесін $\bar{r}_u$ және $\bar{r}_v$ бас бағыттарға сәйкес келетіндей етіп алуға болады.Осылай етуге болады, себебі координаталар жүйесін өзгертуге болады. Бас бағыттар ортогональ болғандықтан ($\bar{r}_u\bar{r}_v$)=0. Бұл жағдайда беттің бірінші квадраттық формасының екінші коэфициенттері F=0. Координаталық осьтер Дюпен индикатритасының симметрия осьтерімен бағытталғандықтан. Дюпен индикатрисасының теңдеуінде аралас көбейтінділер болмайды, яғни F=M=0 екенін көреміз. k_1, k_2 F бетінің М нүктесіндегі бас қисықтықтары болсын.

Родрига теоремасы: Беттегі М нүктесінде d$\bar{r}$ бағыты бас бағыт болуы үшін $d\bar{n} = -k_n d\bar{r}$ шартының орындалуы қажетті және жеткілікті.Мұндағы d$\bar{n}$-бірлік нормаль вектордың дифференциалы. k_n-М нүктесіндегі d$\bar{r}$ бағытындағы нормаль қисықтық .

Бас бағыттарды табудың теңдеуі келесі түрде болады.

$$\begin{vmatrix} Ldu + Mdv & Edu + Fdv \\ Mdu + Ndv & Fdu + Gdv \end{vmatrix} = 0.$$

Беттегі сызықты қисықтық сызығы деп атаймыз, егер оның әрбір нүктесіндегі жанаманың бағыты беттің бас бағытымен бірдей болса. Беттегі әр бір нүктесі арқылы екі қисықтық сызығы өтеді, олардың бағыттары ортогональ және түйіндес болады.

Родрига формуласын ашып жазғанда

$$n_u du + n_v dv = -k(\bar{r}_u du + \bar{r}_v dv)$$

Осы теңдеуді $\bar{r}_u$ және$\bar{r}_v$ скаляр көбейтсек келесідей теңдеулер жүйесі шығады.

$$\begin{cases} (L - kE)du + (M - kF)dv = 0 \\ (M - kF)du + (N - kG)dv = 0 \end{cases}$$

d$\bar{r} \neq 0$ болғандықтан бұл du,dv – бойынша алынған анықтауыш нольге тең болады

$$\begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kT & N - kG \end{vmatrix} = 0$$

Осыдан келесі квадрат теңдеуге келеміз

$$k^2 \begin{vmatrix} E & F \\ F & U \end{vmatrix} - \left(\begin{vmatrix} E & M \\ F & N \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L & F \\ M & G \end{vmatrix} \right) k + \begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix} = 0$$

Осы теңдеудің түбірлері k_1 жәнеk_2 беттің М нүктесігдегі басты қисықтықтары болады.

Эйлер теоремасы: Беттің М нүктесіндегі нормаль қисықтық k_nd$\bar{r}$ бағыты бойынша алынғанда бас қисықтықтар мен (k_1 жәнеk_2) келесі формуламен анықталады $k_n = k_1 cos^2\varphi + k_2 sin^2\varphi$ мұндағы φ-бұрышы d$\bar{r}$ бағытымен нүктедегі бірінші басты бағыттың арасындағы бұрыш.

Басты қисықтықтардың арифметикалық ортасы беттің M_0нүктесіндегі орташа қисықтығы деп аталады H=$\frac{k_1+k_2}{2}$, ал басты қисықтықтардың көбейтіндісі K=$k_1 * k_2$ беттің осы нүктедегі толық немесе Гаусс қисықтығы деп аталады. Виета теоремасы бойынша

H=$\frac{1}{2}\frac{\left|\begin{vmatrix} E & M \\ F & N \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} L & F \\ M & G \end{vmatrix}\right|}{EG-F^2}$, K=$\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$

Бізде EG-$F^2 > 0$ екіні белгілі. Сондықтан беттің эллиптикалық нүктелерінде $K > 0$ болады, гиперболалық нүктелерінде $K < 0$, ал параболалық нүктелерінде $K = 0$.

Егер бет қарапайым бет болса, онда ол бір жазықтықта жатады. Бұл жағдайда $\bar{n} -$ тұрақты болғандықтан $\bar{n}_u = \bar{n}_v = \bar{0}$, демек L=M=N=0 осыдан қарапайым беттерде H=K=0, яғни жазықтықтың немесе оның бөлігінің әр нүктесіндегі орташа және толық қисықтықтары нольге тең болады. Егер беттің әрбір нүктесінде H=0 онда бетті минимальдық бет деп атаймыз.

Мысалдар

1. *Геликоидтың қисықтық сызықтарын табыңыздар.* x=cos$v$, y=usin$v$,z=av, u> 0, $v\epsilon R$, a=const, a$\neq 0$.

Шешуі: Геликоидтна бірінші және екінші квадраттық формалары:

$I = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$, II=-2$\frac{adudv}{\sqrt{a^2+v^2}}$.

Осы квадраттық формалардағы коэфициенттерді қисықтық сызығын табудың формуласына қойғанда:

$$\begin{vmatrix} Ldu + Mdv & Edu + Fdv \\ Mdu + Ndv & Fdu + Gdv \end{vmatrix} = 0$$

Келесідей дифференциалдық теңдеуге келеміз$(a^2 + u^2)dv^2 - dv^2 = 0$

Бұл дифференциалдық теңдеу келесі екі дифференциалдық теңдеулермен мәндес болады.

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{a^2 + u^2}dv + du = 0 \\ \sqrt{a^2 + u^2}dv - du = 0 \end{array}\right.$$

немесе d$v = -\frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}}$ және d$v = \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}}$.

Интегралдаудың нәтижесінде екі қисықтық сызықтар топтамы бар екенін көреміз

$v = -ln\left|u + \sqrt{a^2 + u^2}\right| + C_1$, $v = ln\left|u + \sqrt{a^2 + u^2}\right| + C_2$.

2. Параболаның директриса бойынша айналу бетінің теңдеуі келесі теңдеумен берілген:

$$x = ucosv, y = usinv, z = \sqrt{2p(u - \frac{p}{2}}, u > 0 \;\; v\epsilon[0; 2\pi]$$

Мұндағы p-параболаның параметрі.

Осы беттің әрбір нүктесіндегі басты қисықтықтарының қатынастары тұрақты болатынын дәлелдеңіздер.

Шешуі:

Берілген беттің бірінші және екінші квадраттық формалары келесі теңдікпен анықталатынын табамыз.

I=$\frac{u}{u-\frac{p}{2}}du^2 + u^2dv^2, II = \frac{P}{2\sqrt{pu}(u-\frac{p}{2})}du^2 - \frac{pu}{\sqrt{2pu}}dv^2.$

Бірінші квадраттық форманың орта мүшесі нольге тең болғандықтан беттегі координаталық сызықтар ортогональ болады (F=0) , осыған байланысты екінші квадраттық формасының орта мүшесі нольге тең болғандықтан (M=0). Кординаттық сызықтар түйіндес болады. Сондықтан анықтама бойынша координаталық сызықтардың бағыттары бас бағыттар болады; ал координаталық сызықтардың өздері қисықтық сызықтары болады. Демек олардың нормаль қисықтықтары беттің басты қисықтықтары болады.

Координаталық u – сызығының $(dv = 0)$ нормаль қисықтығы

$$k_1 = \frac{L}{E} = -\frac{P}{du\sqrt{2pu}}$$

Координаталық v –сызығының (du=0) нормаль қисықтығы

$$k_2 = \frac{N}{G} = -\frac{P}{u\sqrt{2pu}}.$$

Осылардан беттің әр бір нүктесіндегі басты қисықтықтарының қатынасы тұрақты болады екен

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{2}.$$

3. Минимальді беттің әрбір нүктесіндегі асимптоталық бағыттар өзара перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

<u>*Шешуі*</u>: Минималдық беттің анықтамасына сәйкес H=0, яғни $\frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0$, мұндағы $k_1k_2 -$ беттің басты қисықтықтары. Демек $k_1 = -k_2$ болуы керек. Эйлер теоремасы бойынша беттің әр бір нүктесіндегі нормаль қисықтықты келесі түрде жазуға болады $k_n = k_1\,cos^2\varphi + k_2sin^2\varphi$, немесе $k_n = k_1cos^2\varphi - k_1sin^2\varphi = k_1cos2\varphi$

Асимптоталық сызықтар үшін $k_n = 0$ екені белгілі, $k_1cos2\varphi = 0$ теңдеуінен, $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi r}{2}$ $(n\epsilon Z)$ шешімі бар болады, мұндағы $\varphi\epsilon[0, \pi]$, екенін ескерсек, асимптоталық сызықтар үшін $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$ болады.

Демек асимптоталық бағыттардың арасындағы бұрыш $\frac{\pi}{2}$, яғни олар перпендикуляр болады екен.

4. Егер беттің асимптоталық сызықтары оның қисықтық сызықтықтары да болса, онда оның әр бір нүктесінде келесі екі шарттың орындалатынын дәлелдеңіздер:

1) Беттің толық қисықтығы нольге тең (K=0).
2) Осы сызықтар бойынша бетке жүргізілген нормальдар паралель болады.

Шешуі:

1) Берілген сызық қисықтық сызығы болғандықтан, Родрига теоремасы бойынша, оның бойында келесі арақатынас орындалады $d\bar{n} = -k_n d\bar{r}$, мұндағы $d\bar{n} - M$ нүктесіндегі бірлік нормаль вектордың дифференциалы, $d\bar{r} - \bar{r}$ векторының өсімшесі, ал k_n $d\bar{r}$ бағыты бойынша алынған нормаь қисықтығы .

Берілген сызық беттің ассимптоталық сызығы болғандықтан $k_n = 0$. Демек берілген сызық бойында d$\bar{n} = 0$, осыдан $\bar{n}$ векторы тұрақты екенін көреміз, яғни барлық нормальдары өзара паралель болады екен .

2) L=$-(\bar{n}_u\bar{r}_u), M = -(\bar{n}_v\bar{r}_u) = -(\bar{n}_u\bar{n}_v), N = -(\bar{n}_v\bar{r}_v)$ болатындығын ескерсек, сызықтық бойында алынған екінші квадраттық форманың барлық коэфициенттері нольге тең болады, осыдан беттегі алынған осы сызықтың бойындағы толық қисықтығы нольге тең болады (K=0)

Жаттығулар:

1.Келесі беттердің кез келген нүктесіндегі басты бағыттарын табыңыздар.

a) Конус: $x = avcosu, y = avsinu, z = cv, v > 0, u\epsilon[0,2\pi]$
   $a, b -$ тұрақты;
b) Винттік бет: $x = ucosv, y = usinv, z = u + v, u\epsilon R, v\epsilon R.$

Жауаптары:

a) $d_1v = 0, d_2u = 0;$
b) $\frac{d_1u}{d_1v} = u^2\sqrt{u^u + 2}\ , \frac{d_2u}{d_2v} = u^2 - \sqrt{u^u + 2}\ .$

2. Берілген беттің түзу сызықты жасаушыларының арасындағы бұрыштардың биссектрисалары басты бағыттарды көрсететінін дәлелдеңіздер:

a) Бір қуысты гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$
b) Гиперболалық параболоид :$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$

3. Жазықтықтағы және сферадағы кез келген сызықтар, қисықтық сызықтары болатынын дәлелдеңіздер.

4. Беттегі координаттық сызықтар, қисықтың сызықтары болатын қажетті және жеткілікті шарттарды табыңыздар.

5. Келесі беттердің координаталық сызықтары қисықтың сызықтары болатынын көрсетіңіз:

а) $x = u^2 + v^2, \quad y = u^2 - v^2, \quad z = v$;

б) $x = 3u - u^3 + 3uv^2, \; y = v^3 - 3u^3v - 3v, \; z = 3(u^2 - v^2)$.

6. Берілген беттердің басты қисықтарын табыңдар.

а)геликоид : $x = ucosv, y = usinv, \; z = av, \; a \neq 0, \; u > 0,$

$$v \in [\![0, 2\pi);$$

б)катеноид : $x = \sqrt{a^2 + u^2}\; cosv, \; y = \sqrt{a^2 + u^2}\; sinv$,

$z = a\ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}), \quad u > 0, \quad v \in [\![0, 2\pi);$

в) айналу беті: *x=ucosv*, *y=usinv* , *z=f(u) ;*

*г)*беттің теңдеуі: $x = asin^3cosv, \; y = asin^3usinv, \; z = acos^3u,$

$u \in [\![0, 2\pi); \; v \in [\![0, \; 2\pi);$

<u>Жауаптары:</u>

а) $k_1 = \frac{a}{a^2+u^2}, \quad k_2 = -\frac{a}{a^2+u^2}$,;

б) $k_1 = \frac{a}{a^2+u^2}, \quad k_2 = -\frac{a}{a^2+u^2}$

в) $k_1 = \frac{f^{II}}{(1+f^{I\,/\,2})^{3/2}}, \quad k_2 = \frac{f^{I}}{(1+f^{I\,/\,2})^{3/2}}$;

г) $k_1 = \frac{2}{3asinu}, \quad k_2 = \frac{-cosu}{asin^3u}$;

<u>Нұсқау</u>: беттің бірінші және екінші квадраттық формаларын тауып басты қисықтықтардың теңдеуінің орнына қойып, осы теңдеудің шешімдерін табыңыздар.

7. Берілген беттің көрсетілген нүктедегі басты қисықтықтарын табыңыздар.

а)беттің теңдеуі: $x = u^2 + v^2, \quad y = u^2 - v^2, \quad z = uv, \; u \in R$, $v \in R$, $M(u = 1, \; v = 1)$ нүктесінде;

б) беттің теңдеуі: z=xy , $M(1, 1, 1)$ нүктесінде.

8. Берілген беттің кез-келген нүктесінде орташа және толық қисықтықтарын табыңыздар.

а) геликоид : $x = ucosv, y = usinv, \; z = av, \quad u > 0, \quad v \in [\![0, \; 2\pi);$ а- тұрақты;

б) дөңгелек конус: $x = avcosu, y = avsinv, \; z = вv, \quad v > 0,$ $u \in [\![0, \; 2\pi);$ а,в – тұрақты ;

в) параболоид : $z = xy$;

г)гиперболалық параболоид : $z = x^2 - y^2$.

<u>Жауаптары :</u>

а)$H = 0, \; K = -\frac{a^2}{(a^2+u^2)^3}$;

б)$K = 0$, $H = -\frac{1}{2}\frac{в}{av^2\sqrt{a^2+в^2}}$;
в)$K = \frac{1}{x^2+y^2+1}$, $H = -\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$;
г)$K = -\frac{4}{(1+4u^2+4v^2)^2}$, $H = \frac{4(x^2-y^2)}{(1+4x^2+4y^2)^{3/2}}$.

9 . Сызықты OZ осі бойынша айналдырғанда пайда болған айналу бетінің толық және орташа қисықтықтарын табыңдар.

$$x = f(u)cosv \ , \qquad y = f(u)sinv \ , \qquad z = g(u) \ , \qquad u \in [\![0\,, 2\pi);$$

Жауабы: $K = \frac{g^I(g^{II}f^I-f^{II}g^I)}{f((f^I)^2+(g^I)^2)^2}$, $H = \frac{g^I(f^{I\,2}+g^{I\,2})+f(f^Ig^{II}-f^{II}g^I)}{2f(f^{I\,2}+g^{I\,2})^2}$.

10. Алдыңғы есептің нәтижесін пайдаланып, келесі айналу беттерінің толық және орташа қисықтықтарын табыңыздар .
а)элипсоиды: $x = acosucosv$,$y = acosusinv$, $z = csinu$, $u \in$
$[\![0\,,\ 2\pi)$;
$v \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$;
б) бір қуысты айналу гиперболиды:
$x = achucosv$,$y = achusinv$, $z = cshu$, $u \in [\![0\,, 2\pi)$, $v \neq 0$;
в) екі қуысты айналу гиперболоиды:
$x = ashucosv$, $y = ashusinv$, $z = cchu$, $u \in [\![0\,, 2\pi)$; $v \neq 0$;
г) айналу параболоиды: $x = ucosv, y = usinv$, $z = u, v \in [\![0\,, 2\pi)$; $u \in R$;
д) айналу конусы: $x = ucosv$,$y = usinv$, $z = cv$, $u \neq 0$, $v \in R$;
е) айналу цилиндрі: $x = acosv$,$y = asinv$, $z = u$, $v \in [\![0\,, 2\pi)$, $u \in R$.
Жауаптары :
а) $K = \frac{c^2}{(a^2sin^2u+c^2cos^2u)^2}$, $H = \frac{c(a^2sin^2u+c^2cos^2u)+a^2c}{2a(a^2sin^2u+c^2cos^2u)^{3/2}}$;
б) $K = \frac{c^2}{(a^2sh^2u+c^2ch^2u)^2}$, $H = \frac{c(a^2sh^2u+c^2cos^2u)-a^2c}{2a\ (a^2sh^2u+c^2ch^2u)^{3/2}}$;
в) $K = \frac{c^2}{(a^2ch^2u+c^2sh^2u)^2}$, $H = \frac{c(a^2ch^2u+c^2sh^2u)+a^2c}{2a\ (a^2ch^2u+c^2sh^2u)^{3/2}}$
г) $K = \frac{4}{(1+4u^2)^2}$, $H = \frac{2+4u^2}{(1+4u^2)^{3/2}}$;
д) $K = 0$, $H = \frac{c(c^2+1)}{2u(c^2+1)^{3/2}}$;
е)$K = 0$, $H = \frac{1}{2a}$.

11. Келесі теңдеулер арқылы берілген беттердің толық және орташа қисықтықтарын табыңыздар .
а)$z = ax^2 + вy^2$; б)$z = \frac{1}{xy}$; в)$z = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$; г)$z = e^x cosy$.
Жауаптары :

а) $K = \frac{4a\text{в}}{(1+a^2x^2+4\text{в}^2y^2)^2}$, $H = \frac{\text{в}(1+4a^2x^2)+a(1+4\text{в}^2y^2)}{(1+4a^2x^2+4\text{в}^2y^2)^{3/2}}$;

б) $K = \frac{3x^4y^4}{(x^4y^4+x^2+y^2)^2}$, $H = \frac{2x^3y^3(x^2+y^2)}{(x^4y^4+x^2+y^2)^{3/2}}$;

в) $K = -\frac{36x^8y^8}{(x^6y^6+4x^6+4y^6)^2}$, $H = \frac{6x^3y^3\left(x^2y^2(x^4-y^4)+4(x^2-y^2)\right)}{(x^6y^6+4x^6+4y^6)^{3/2}}$;

г) $K = \frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$, $H = \frac{e^{2x}cosy}{(1+e^{2x})^{3/2}}$.

<u>Нұсқау :</u> z=f(x,y) теңдеуімен берілген бет үшін $x = u, y = v$, ~~z~~$=f(u,v)$ деп алуға болады, немесе келесі формулаларды пайдалануға болады:

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}{1+f_x^2+f_y^2} \quad ; \quad H = \frac{(1+f_x^2)f_{yy}+(1+f_x^2)f_{xx}-2f_xf_yf_{xy}}{2(1+f_x^2+f_y^2)^{3/2}}$$

Формулаларын қорытып шығарамыз.

12 . Берілген беттердің минимальды беттер болатынын дәлелдеңіздер

а)катеноид: $x = \sqrt{a^2+u^2}cosv$, $y = \sqrt{a^2+u^2}sinv$, $z = a\ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right)$, $u > 0$, $v \in [\![0\,,2\pi)$;

б)геликоид : $x = ucosv$, $y = us3nv$, $z = av$, $v \in [\![0\,,2\pi)$; , $u \in R$,

в) $z = lncosx - lncosy$;

г)Эннепер беті : $x = 3u + 3uv^2 - u^3$, $y = v^3 - 3v - 3u^2v$, $z = 3(u^2 - v^2)$.

13 . Псевдосфераның әрбір нүктесіндегі толық қисықтығы тұрақты және теріс болатынын көрсетіңіз

$x = a\,sinu\,cosv$, $y = a\,sinu\,sinv$, $z = a\left(\ln tg\frac{u}{2} + cosu\right)$, $u \in [\![0\,,\pi)$, $v \in [\![0\,,2\pi)$;

14 . Берілген беттегі нүктелердің түрлерін анықтаңыз

а) $x = cosv - (u+v)sinv$, $y = sinv + (u+v)cosv$, $z = u + 2v$;

б)$z = x^2 + y^2$;

в)$x + y = z^3$;

г)$z = e^y sinx$.

<u>Жауаптары :</u>

а)параболалық нүктелер; б)эллиптикалық нүктелер; в) параболалық нүктелер;

г) гиперболалық нүктелер.

14 . Келесі беттердің элиптикалық, гиперболалық және параболалық нүктелерін табыңыздар :

$z = 3(u^2 - v^2)$;

а) Эннепер беті :$x = 3u + 3uv^2 - u^3$; $y = v^3 - 3v - 3u^2v$,

б) Тор: $x = (a + \text{в}\,cosv)cosu$, $y = (a + \text{в}\,cosv)sinu$, $z = \text{в}sinv$, $u \in [\![0\,,2\pi)$, $v \in [\![0\,,2\pi)$;

в) $x = avcosu$, $y = avsinu$, $z = v$, $u \in [\![0\,,2\pi)$, $v \neq 0$.

г) $z = \frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{2}$.   д) $zy^2 - x^2 = 0.$

Жауаптары :

а) $K = -\frac{4}{9(u^2+v^2-1)^4}$ барлық нүктелері параболалық ;

б) $u = \frac{\pi}{2}$, $v = \frac{3\pi}{2}$ болғанда , $K = \frac{cosv}{в(a+в\, cosv)}$ параболалық нүктелер , егер

$v \in [0\,;\frac{\pi}{2}) \cup \left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$ және $v \in \left[arccos\left(-\frac{a}{в}\right), 2\pi - arccos\left(-\frac{a}{в}\right)\right]$ болғанда эллиптикалық нүктелер басқа жағдайларда гиперболалық нүктелері

в) $K = 0$ барлық нүктелері параболалық;

г) $K = \frac{-2x}{(1+x^4+y^4)^2}$ $x > 0$ гиперболалық нүктелер , эллиптикалық нүктелер параболалық нүкте ;

д) $K = \frac{-4(\frac{x}{4})^2}{y^2+4(\frac{x}{4})^2+4(\frac{x}{4})^4}$ барлық нүктелер гиперболалық.

4. БЕТТІҢ ІШКІ ГЕОМЕТРИЯСЫ

4.1 Гаусс теоремасы. Геодезиялық қисықтық және беттегі геодезиялық сызықтар.

Беттің ішкі геометриясы деп беттің және ондағы фигуралардың қасиеттерін бірінші квадраттық формасы және оның туындылары арқылы анықталатын қасиеттерін зерттейтін дифференциялдық геометрияның бөлімін атаймыз,яғни беттің және ондағы фигуралардың метрикалық қасиеттеріне тәуелді болатын мәселелер қарастырылады.

Гаусс теоремасы: Біртегіс беттің толық қисықтығы тек бірінші квадраттық форма және оның туындылары арқылы өрнектеледі.

Бұл теорема бойынша келесідей Гауыстың формуласы қорытылып шығарылады:

$$К=\frac{1}{EG-F^2}\left\{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}G_{uu}+F_{uu}-\frac{1}{2}E_{vv} & \frac{1}{2}E_u F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E \quad F \\ \frac{1}{2}G_u & F \quad G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E \quad F \\ \frac{1}{2}G_u & F \quad G \end{vmatrix}\right\}$$

Егер беттегі координаттық сызықтар ортогональ болса, онда Гаусстың қисықтығы келесі түрге келеді К= $-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial G}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial F}{\partial v}\right)\right)$

Егер беттің параметрлерін өзгерту арқылы оның бірінші квадраттық формасын $I=du^2+Gdv^2$ түріне келтіруге мүмкін болса, онда Гаусстың формуласы келесі түрге келеді:

К=$\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\sqrt{G}\right)_{uu}$

F бетінің теңдеуі $\bar{r}=\overline{r\ (u,v)}$,$(u,v) \in G\epsilon R^2$
$\gamma \in F$- сызық болса, және γ: $u=u(s)$,v=v(s), $(u(s),v(s) \in G \in R$

k$\bar{v}$ векторы бірлік нормаль вектор $\bar{n}$және k$\bar{v}$ векторының жанама жазықтығы проекциясы $\bar{g}$ бойынша жіктелуін қарастырамыз

k$\bar{v}$=$k_n\bar{n}+k_g\ \bar{g}$
мұндағы k_n – нормаль қисықтық; $\bar{n}$ –бірлік нормаль векторы
$\bar{g}$=n$p_t(k\bar{v})$.
$k_g\bar{g}$- векторын γ сызығының геодезиялық қисықтығының векторы деп атаймыз, ал k_g – шамасын сызықтың геодезиялық қисықтығы деп атаймыз.

Сызықтың геодезиялық қисықтығы беттің бірінші квадраттық формасының коэффициенттерімен және оның туындылары арқылы ғана анықталады.

Егер сызықтың әрбір нүктесіндегі геодезиялық қисықтығы нольге тең болса, онда бұл сызықты геодезиялық сызық деп атаймыз *(k_g=0)*.Геодезиялық қисықтығы нольге тең болса ғана (k_g=0)
Егер беттегі координаттық сызықтар ортогональ болса, онда геодезиялық сызықтың дифференциалдық теңдеуі келесі түрде болады:

$$2E\frac{d^2u}{ds^2}+\frac{\partial E}{\partial u}\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\frac{\partial E}{\partial V}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}-\frac{\partial G}{\partial U}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0$$

$$2G\frac{d^2v}{ds^2}-\frac{\partial E}{\partial v}\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\frac{\partial G}{\partial u}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\frac{\partial G}{dv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0$$

Егер dv$\neq 0$ онда v-ны геодезиялық сызықтың параметрі ретінде қарастыруға болады, онда ол u=u(δ)функциясы түрінде анықталады, және екі теңдеудің орнына бір дифференциялдың теңдеуге келеміз.

$$\frac{d^2u}{du^2}+\frac{1}{2C}\frac{\partial E}{\partial U}\left(\frac{du}{dv}\right)^3+\left(\frac{1}{2E}\left(\frac{\partial E}{\partial U}\right)-\frac{1}{a}\frac{\partial G}{\partial u}\right)\left(\frac{du}{dv}\right)^2+\left(\frac{1}{E},\frac{\partial E}{\partial U}-\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}\right)\frac{du}{dv}-\frac{1}{2E}\frac{\partial G}{\partial u}=0$$

Теорема: F- бір тегіс беті берілсін. F бетінің әрбір нүктесі M$\in F$ арқылы M нүктесінің беттің шексіз аз маңайы болатын әр бір бағытта жалғыз ғана геодезиялық сызық өтеді.

Егер беттегі γ сызығы қандайда бір түзудің бөлігі болса онда γ беттегі геодезиялық сызық болады.Беттегі координаттық тор жарты геодезиялық деп аталады, егер ол ортогональ болса және координаттық сызықтардың бір топтамы геодезиялық сызықтар болса.

Беттегі координаталық тор жарты геодезиялық болса, онда оның бірінші квадраттық формасы келесі түрде болады.
I=$du^2+G(uv)du^2$.
Егер беттегі координаттық тор жарты геодезиялық болса, онда оның толық қисықтығы келесі түрде болады K= $-\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\sqrt{G}$.

F бетіндегі $М_1$ және $М_2$ нүктелерінің ара қашықтығы деп осы екі нүктеден өтетін сызықтардың ең кіші доғасының ұзындығын айтамыз, яғни $\rho(м_1 м_2)$=inf$\overline{(M_1\, M_2)}$, мұндағы $\overline{(M_1\, M_2)}$ $М_1$,$М_2$ доғаларын қосатын сызықтардың доғасының ұзындығы.

Теорема : Егер $М_1$,$М_2 \in \gamma$- беттегі геодезиялық сызықта жататын нүктелер болса, және $\rho\big(м_{1,} м_2\big)$- геодезиялық мейлінше аз шама болса, онда $М_1$,$М_2$ - геодезиялық сызықтың доғасының ұзындығы болады.

F-біртегіс бетінде F_0-клеткасын қарастырамыз. Бұл клетканың шекарасы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots \gamma_n$ −біртегіс сызықтарынан тұрады. Клетканың төбелеріндегі сызықтардың қиылысу бұрыштары $\varphi_1 = \widehat{\gamma_1}\gamma_2$,..., $\varphi_n = \widehat{\gamma_n \gamma_1}$болсын.

Гаусс-Бонне теоремасы: Ғ біртегіс бетіндегі $F_0 \in F$ клеткасы ұшын келесі формула орындалады

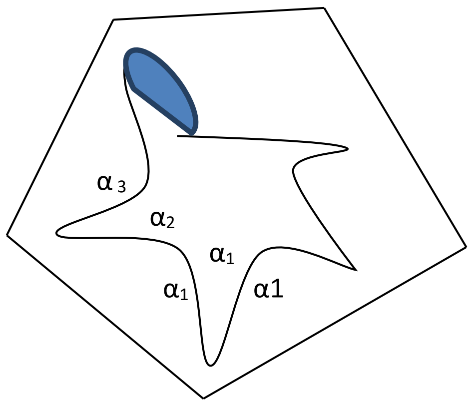
$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_1} k_g ds + \sum_{i=1}^{n} (\pi - \varphi_i) = 2\pi - \iint_{F_0} K d\delta$$

мұндағы k_g -γ_iсызығының геодезиялық қисықтығы;

К- беттің толық қисықтығы; dδ − ауданның элементі.

Салдар: Егер F_0клеткасының шекарасына әрбір нүктесінде k_g =0болса ,онда Гаусс- Бонне формуласы келесі түрде болады $\sum_{i=1}^{n}(\pi - \varphi_i) = 2\pi - \iint_{F_0} K d\delta$

Мұндай клетканы геодезялық көпбұрыш деп атаймыз.



Егер геодезиялық үшбұрыштың әрбір нүктесінде толық қисықтығының таңбасы тұрақты немесе нольге тең болса онда оның ішкі бұрыштарының қосындысы:

а) К $>$ 0 болса, π − ден үлкен болады: б) К$<$ 0 болса, π-ден кіші болады:
в) К=0 болса, π − ге тең болады.

Қабырғалары геодезиялық сызықтар болған үшбұрыш үшін $\delta(F_0)$= $\pi - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3$шамасын геодезиялық үшбұрыштың ақауы деп атаймыз. $\delta(F_0)$= -$\iint_{F_0} K d\delta$

Мысалдар:

1. а) Біртегіс γ сызығының геодезиялық қисықтығының бірлік векторы $\bar{g} = [\bar{n}, \bar{\tau}]$формуласымен анықталады мұндағы $\bar{\tau}$-сызықтың бірлік жанама векторы, $\bar{n}$-беттің бірлік нормаль векторы.

б) γ сызығын қисықтығы k , оның нормаль қисықтығы

k_n және геодезиялық қисықтығы k_g аралықтарында келесідей байланыс орнатуға болады: $k^2=k_n^2+k_g^2$

<u>Шешуі:</u> а) $k\bar{n}$-γ сызығының нормаль қисықтығының векторы болғандықтан, ол $\bar{\tau}$- бірлік жанама векторына перпендикуляр болады, және оның жанама жазықтықтағы проекциясы болып табылатын $k_g\bar{g}$

векторы да $\bar{\tau}$ векторына перпендикуляр. $\bar{g}$- векторы жанама жазықтықта жатқандықтан ол беттің нормаль векторы $\bar{n} -$ ге перпендикуляр. $\bar{g} -$ бірлік вектор, сондықтан $\bar{n}, \bar{\tau}$векторының бағытталуына байланысты $\bar{g} = [\bar{n}.\bar{\tau}]$,болады екен.

б) $k\bar{v}=k_n\bar{n}_+k_g\bar{g}$теңдігінің скаляр квадратын алатын болсақ $k^2=k_n^2+k_g^2$

мұнда біз $\bar{n}$ және $\bar{g}$ векторларының ортогональ болатынынескердік.

2. Келесі теңдеу арқылы берілген сфераның u –кординаттық сызығының көрсетілген нүктедегі геодезиялық қисықтығының абсолюттық шамасын табыңыздар

x=acosucosv, y=cosusinv, z=asinu, u$\in [0, 2\pi)$

v$\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]M\left(u = \frac{\pi}{3}, v = 0\right)$нүктесінде.

<u>Шешуі:</u>

$k^2=k_n^2+k^2_g$ формуласын пайдаланамыз ол үшін берілген сызықтыңнормаль қисықтығы k_nмен қисықтығын табамыз. Сфераның квадраттық формалары I=a$^2(du^2 + cos^2u\, du^2)$және II= a$(du^2 + cos^2u dv^2)$болатындығын білеміз

Осыдан $k_n=\frac{II}{I}$,ал u-координаттық сызығы үшін v-const dv=0 болатынын ескерсек $k_n=\frac{1}{a}$

Сызықтың қисықтығы k=$\frac{|[r\prime r\prime\prime]|}{|r\prime|^3}$ формуласы арқылы есептелуі u – сызығы үшін, көрсетілген нүктеде

$\overline{r'} = \{-asinucosv, -asinusinv, acosu\}$=$\left\{-a\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{a}{2}\right\}$

$$r'' = \{-acosucosv, -acosusinv, -asinu\} = \left\{-\frac{a}{2}, 0, -a\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

Осыдан $|\overline{r'}|$=a ,$[\overline{r'}, \overline{r'}]$=$a^2\bar{J}$, $|[r'r'']|$=a^2

Демек k=$\frac{1}{a}$.Бастапқы фориулаға қойғандаRg=0

3. $\bar{r} = \frac{1}{r}(uv)$теңдеуі арқылы берілген беттегі γ сызығының геодезиялық қисықтығы $k_g = \frac{(\bar{n}\overline{r', r''})}{|\overline{r'}|^3}$ ал беттегі геодезиялық сызықтың теңдеуі $\left(\bar{n}, \overline{dr}, d^2\bar{r}\right) = 0$ түрінде анықталатынын көрсетіңіз

Шешуі: $k\bar{v}$=$k_n\bar{n} + k_g\,\bar{g}$теңдігінің екі жағында $\bar{g}$ векторына скальяр көбейтеміз, сонда болады$\bar{g} = [\bar{n}, \bar{\tau}]$ екенін ескерсек
$k_g = k([\bar{n}, \tau]\bar{v}) = k(\bar{n}, \bar{\tau}, \bar{v}) = k(\bar{n}, [\bar{\tau}\bar{v}]) = k\left(\bar{n}, \bar{\beta}\right)$
Мұндағы $\bar{\beta} -$ сызықтың бинормалінің бірлік векторы.
Бірлік бинормаль вектордың анықтамасына сәйкес$\bar{\beta} = \frac{[\overline{r\prime r\prime\prime}]}{|[\overline{r\prime r\prime\prime}]|}$
Ал сызықтың қисықтығы k=$\frac{|[\overline{r\prime r\prime\prime}]|}{|\overline{r\prime}|^3}$ екенін білеміз. Орнына қойғанда келесідей теңдікке келеміз $k_g = \frac{(n,\overline{r\prime r\prime\prime})}{|r\prime|^3}$. Геодезиялық сызық үшін
$k_g = 0$ екенін ескерсек, осыдан беттегі геодезиялық сызықтың теңдеуі келесі түрде болатынын көреміз $(\bar{n}, d\bar{r}, d^2\bar{r})$ =0.

4. Айналу бетіндегі геодезиялық сызықтың бойында $\rho cos\alpha = const$ қатынасы орындалатынын дәлелдеңіздер, мұндағы
ρ —геодезиялық сызықтың нүктесінен айналу осіне дейінгі ара қашықтық, ал α-геодезиялық сызықпен айналу бетінің параллелі арасындағы бұрыш (Клеро теоремасы).

Шешуі: Беттің айналу осінің бірлік векторын $\bar{e}$ деп белгілейміз, геодезиялық сызықтың бірлік жанама векторы $\bar{\tau}$ ал беттің паралелінің берілген нүктедегі бірлік жанама векторы τ_p болсын ,$\bar{r}$ геодезиялық сызықтың берілген нүктесінің радиус- векторы. Бұл радиус- вектордың бастапқы нүктесі 0-ретінде геодезиялық сызықтың берілген нүктесі арқылы айналу осіне перпендикуляр жазықтықтың осы осьпен қиылысу нүктесін аламыз. Егер радиус- вектордың бірлік векторы $\overline{r_0}$болса $\bar{r} = \overline{\rho r_0}\rho$-нүктеден оське дейінгі ара қашықтық. Нүктедегі $\bar{e}, \overline{r_0}, \overline{\tau_p}$векторлары ортонормальданған базис болады.
Демек $\bar{r} = A\bar{e} + B\overline{r_0} + C\overline{\tau_n}$ деп аламыз. Мұндағы c=$(\overline{\tau\tau_u})$=cosα.
Келесі аралас көбейтіндіні қарастырамыз $(\bar{e}, \overline{r}, \overline{\tau})$= $\rho C(\bar{e}, \overline{r_0}, \overline{\tau_n})$=$\rho$cos$\alpha$.
Бұл шама қарастырып отырған геодезиялық сызық бойында өзгермейтін шама болатынын көрсетеміз. Ол үшін d$(\bar{e}, \bar{r}, \tau)$ дифференциялың табамыз: d$(\bar{e}, \bar{r}, \tau)$=$(d\bar{e}, \bar{r}, \bar{\tau})$+$(\bar{e}d\bar{r}, \bar{\tau})$+$(\bar{e}, \bar{r}, d\bar{\tau})$.
Бұл қосындының бірінші қосындысында $\bar{e} - const$ болғандықтан d$\bar{e} = 0$, ал екіншісінде d$\overline{r\ \perp \bar{\tau}}$
d$(\bar{e}, \bar{r}, \tau)$= $([\bar{e}, \bar{r}], d\bar{\tau})$=$(\bar{e}, \bar{r}, d\bar{\tau}) = (\rho[\bar{e}, \overline{r_0}], d\bar{\tau}) = (\rho\overline{\tau_n}, d\bar{r})$
Қарастырылған сызық геодезиялық сызық болғандықтан, оның бойында d$\bar{\tau}$векторы $\bar{n}$ беттің нормаль векторына коллениар болады, себебі d$\bar{\tau}$, беттің жанама жазықтығында жатыр. Сондықтан $(d\bar{\tau}, \bar{n}) = 0$.

Демек d$(\overline{e},\overline{r},\tau) = 0$. Осыдан $(\bar{e}\bar{r}, d\bar{\tau}) = (\rho\overline{\tau_u}, d\bar{\tau}) = 0$. $(\overline{e},\bar{r},\bar{\tau})$- тұрақты екенін көреміз, яғни$\rho cos\alpha$ шамасы геодезиялық сызық бойында өзгермейді.

5. Айналу конусындағы геодезиялық сызықтың теңдеуін табыңдар.

x= u cosv, y= u sinv, z=u, u>0, v$\in$[0; 2π).

__Шешуі:__ Берілген бет үшін $\overline{r_u}$, $\overline{r_v}$ табамыз

$\overline{r_u}$ = $\{cosv, sinv, 1\}$, $\overline{r_v}$ =$\{-u\ sinv, u\ cosv, 0\}$

Бұлардың векторлық көбейтіндісі: $[r_u, r_v]$ = *-u cosv* $\bar{\imath}$*–u sinv*$\bar{\jmath}$+$\bar{k}$

Геодезиялық сызықтың теңдеуі ($\bar{n}$, d$\bar{r}$, d^2 $\bar{r}$) = 0 түрінде болады, мұндағы $\bar{n}$ векторын $\overline{N}$=$\{cosv, sinv, -1\}$ деп алуға болады.

Геодезиялық сызықтың теңдеуін *u= u(v)* түрінде іздейміз, яғни *v*-гоедезиялық сызықтың параметрі болсын, онда *dv= 1, d*^{2}*v= 0* болады,

ал $\frac{du}{dv}$= u' , $\frac{d^2u}{dv^2}$= u'' түрінде болады.

d$\bar{r}$ және d^2 $\bar{r}$, векторларын табамыз.

d$\bar{r}$= $\{(u'cosv - usinv)du, (u'sinv + ucosv\ )dv, u'\ dv\}$

d$^2\bar{r}$=$\{(u''cosv - 2u'sinv - ucosv)d^2v, (u''sinv + 2u'cosv - usinv)dv^2, u''d^2v\}$

Осы өрнектерді $(\overline{N}, d\bar{r}, d^2\,\bar{r})$ = 0 теңдеуіне қойсақ, және қажетті түрлендіруден кейін *u=u(v)* бойынша келесі екінші ретті дифференциалдық теңдеуге келеміз: $2u''u - 4(u')^2 - u^2 = 0$

Бұл теңдеуді келесі түрде жазуға болады $2\left(\frac{u'}{u}\right)' - 2\left(\frac{u'}{u}\right)^2 - 1 = 0$

Келесідей алмастыру жасаймыз $y' = \frac{u'}{u}$, сонда $2y' - 2y^2 - 1 = 0$

түріндегі бірінші ретті дифференциал теңдеуге келеміз. Осыдан

$2y' = 1 + 2y^2$ немесе $\frac{y'}{y^2+\frac{1}{2}} = v'$, $\frac{\frac{du}{dv}}{y^2+\frac{1}{2}}$ =1, яғни $\frac{du}{y^2+\frac{1}{2}} = dv$.

Теңдеудің екі жағын квадраттасақ $v+c_0 = \sqrt{2}\,arctg(\sqrt{2}y)$

Мұндағы c_0 – интегралдаудың тұрақтысы, $y = \frac{u'}{u}$ екенін ескерсек

$$\frac{u'}{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ tg\frac{v+c_0}{\sqrt{2}}$$

Бұл бірінші ретті дифференциалдық теңдеуде $u' = \frac{du}{dv}$ екенін ескеріп интегралдау арқылы

$lnu = -\frac{1}{\sqrt{2}} ln\left(\cos\frac{v+c_0}{\sqrt{2}}\right) + c_1$ екенін табамыз, демек, $u = \left(\frac{c_0}{\cos\frac{v+c_0}{\sqrt{2}}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

Осы геодезиялық сызықтың теңдеуі болады. Мұнда c_0 және c_2 деген екі интегралдау тұрақтылары бар.

6. Бірінші квадраттық формасы арқылы берілген беттегі геодезиялық сызықтық теңдеуін табыңыздар: I= $v\ (d^2u + dv^2)$

<u>*Шешуі:*</u> Геодезиялық сызықтық теңдеуін $u = u(v)$ түрінде іздейміз, мұндағы v – геометриялық сызықтың параметрі ретінде қарастырамыз, $v' = 1, v'' = 0$ деп аламыз.

Геодезиялық сызықтың теңдеуін келесідей екінші ретті дифференциалдық теңдеудің шешімі ретінде табамыз:

$$\frac{d^2u}{dv^2} + \frac{1}{2G}\frac{\partial E}{dv}\left(\frac{du}{dv}\right)^3 + \left(\frac{1}{2E}\frac{\partial E}{du} - \frac{1}{G}\frac{\partial G}{du}\right)\left(\frac{du}{dv}\right)^2 - 1 + \left(\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{dv}\right)\frac{du}{dv} - \frac{1}{2E}\frac{\partial G}{\partial u} = 0$$

Біздің жағдайда $E = G = V,$ $\frac{du}{dv} = u', \frac{d^2u}{dv^2} = u''$ орнына қойғанда геодезиялық сызықтың дифференциалдық теңдеуі келесі түрде келеді: $u'' + \frac{1}{2v}(u')^2 + \frac{1}{2v}u' = 0$

$u' = y$ деп белгілегенде: $y' + \frac{1}{2v}y\,(y^2+1) = 0,\ y' = \frac{dy}{dx}$ деп алсақ $\frac{dy}{y(y^2+1)} = \frac{dv}{2v};$

Екі жағын интегралдау нәтижесінде $-ln\frac{y^2}{y^2+1} = lnv + lnc$

$\frac{y^2+1}{y^2} = Cv$, яғни $y = \pm\sqrt{\frac{1}{Cv-1}}$

$u' = y$ екенін ескерсек $u' = \pm\sqrt{\frac{1}{Cv-1}}$; $du = \pm\sqrt{\frac{1}{Cv-1}}dv$

Интегралдау нәтижесінде $u = \pm 2\sqrt{Cv-1}$ +C_1

C, C_1 – интегралдау тұрақтылары. Геодезиялық сызықтар (u,v) жазықтығындағы

$(u - C_1)^2 = 4(Cv - 1)$ түріндегі бар болатынын көреміз.

Жаттығулар

1. Беттегі сызық геодезиялық сызық болады, егер оның әрбір қисықтығы нольге тең болмайтын нүктесіндегі бас нормалі, беттің нормалімен параллель болса ғана. Дәлелдеңіз.

Нұсқау: Геодезиялық сызық бойында k_g=0 екенін және $k\bar{v} = k_n\bar{n} + k_g\bar{g}$ теңдігін пайдаланамыз.

2. Беттегі тек геодезиялық сызықтар үшін ғана қисықтығы нольге тең болмайтын нүктелердегі түзетуші жазықтығы жанама жазықтығымен беттесетіндігін дәлелдеңіздер.

Нұсқау: Геодезиялық сызықтың бойындағына, оның бас нормалі, беттің сол нүктедегі нормаліне параллель болатынын пайдаланыңыз.

3. Геодезиялық сызық асимптоталық сызық болады, егер ол түзу сызық болса ғана, екенін дәлелдеңіз.

Нұсқау: $k\bar{v} = k_n\bar{n} + k_g\bar{g}$ теңдігін пайдаланыңыз.

4. Берілген беттегі сызықтың көрсетілген нүктедегі геодезиялық қисықтықты k_g табыңыздар.

a) Сфера: $x = a\cos v\cos u$, $y = a\sin v\cos u$, $z = a\sin u$, $[0, 2\pi)$ $v \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, сызық γ: u=v , M$\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$ нүктесінде;

b) Бет $z = x^2 + y^2$ сызық γ: $x=1$, M (1,0,1) нүктесінде.

Нұсқау: Геодезиялық сызықтың қисықтығы беттің нормаль қисықтығының абсолюттық шамасына тең болатынын пайдаланыңыздар.

Жауабы: a) $k_g = \frac{5\sqrt{3}}{9a}$; b) $k_g = -\frac{4}{3}$;

5) Берілген беттегі сызықтың кез келген нүктесіндегі геодезиялық қисықтығын табыңыздар.

а) бет: x=u, y=$e^u\cos v$, z=$e^u\sin v$, u∈R, $v \in [0,2\pi)$, сызық γ: u=*const*

б) бет: $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = v$, $u > 0$, $v \in [0,2\pi)$,
сызық γ: u=*cosv*.

в) бет: $x = acosvcosu$, $y = a\sin v\cos u$, $z = a\sin u$, $u \in [0,2\pi)$,

$v \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, сызық γ: радиусы в-ға тең шеңбер.

Жауаптары: а) $k_g = \sqrt{2}\,e^u$; б) $k_g = \frac{\sqrt{2}\cos v}{\sqrt{1+cos^2 v}}$; в) $k_g = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$;

6) Келесі беттерде жататын винттік сызықтың: $x = a\cos v,\ \ y = a\sin v, z = bv$ геодезиялық қисықтығын табыңыздар.

а) геликоидта: $x = ucosv,\ y = u\sin v,\ z = v,\ \ u > 0$;

б) цилиндрде: $x = acosv,\ y = asinv,\ z = u,\ u \in R$;

Жауаптары: а) $k_g = \frac{a}{a^{2+b^2}}$; б) $k_\gamma = 0$;

7) Айналу бетінің меридиандары, геодезиялық сызықтар болатынын дәлелдеңіздер.

Нұсқау: Клеро теоремасын пайдаланамыз. ρcos $\alpha = const$ екенін көрсетсек $d\bar{\tau}$, $\bar{\tau}_n$ векторлары тұрақты екен. Осыдан $d\bar{\tau}$ векторы $[\bar{\tau}_n, \bar{\tau}]$ векторына коллениар болады.

8) Келесі беттердің геодезиялық сызықтарын табыңыздар:

а) цилиндр: $x = acosv,\ y = asinv,\ z = u$;

б) геликоид: $x = ucosv,\ y = u\sin v,\ z = av$;

*Жауаптары***:** а) $u = const$, және $v = const$ сызықтары және винттік сызық $x = acosv,\ y = asinv,\ z = bv$; б) Келесі интеграл арқылы анықталады:

$$v - v_0 = C\int_{u_0}^{u}\frac{du}{(u^2+a^2)(u^2+a^2-c^2)};\ u_0, v_0, C \text{ тұрақтылар.}$$

9) Бірінші квадраттық формалары берілген беттердің геодезиялық сызықтарын табыңыздар:

а) $I = (u+v)(du^2 + dv^2)$;

б) $I = (u^2+v^2)(du^2+dv^2)$;

в) $I = \frac{1}{v^2}(du^2 + dv^2)$;

Жауаптары: а) $\sqrt{u+c} = \pm\sqrt{v-c} + c_1$, c, c_1 – тұрақтылар;

б) $u = \pm c_1\sqrt{v^2+c^2} + v\sqrt{1+c_1^2}$; c, c_1 – тұрақтылар;

в) $u^2 + (v-v_0)^2 = c^2$; $v > 0$ және $u = u_0,\ v_0 > 0$; u_0, v_0, c – тұрақтылар.

10) Берілген беттерде орналасқан кез келген геодезиялық үшбұрыштардың ақауының таңбасын табыңыздар.

а) $x = \cos v - (u+v)\sin v, y = \sin v + (u+v)\cos v, z = u + 2v$;

б) $z = x^2 + y^2$;

в) $x + y = z^3$;

г) $z = e^y \sin z$;

Нұсқау: Толық қисықтығының таңбасын тауып, Гаусс-Боне теоремасының салдарын пайдаланамыз.

Жауаптары: а) нольге тең; б) теріс таңбалы; в) нольге тең; г) оң таңбалы.

4.2. Изометриялық беттер. Беттің майысуы

Анықтама. Ғ және Ғ$'$ беттері изотермиялық беттер деп аталады. Егер қандайда бір $f: F \to F'$ биективтік бейнелеуі бар болып кез келген бір тегіс γ доғасының ұзындығы сақталатын болса. f бейнелеуін изотермия деп атаймыз.

Теорема: (Изотермиялық беттер туралы) Екі біртегіс беттер сонда ғана изотермиялық болады, егер олардың қисық сызықты координаталары бірдей болатын нүктелеріндегі бірінші квадраттық формаларының коэффициенттері тең болатындай етіп параметризациялау мүмкіндігі болса ғана.

Салдар: Егер Ғ және Ғ$'$ беттері изотермиялық беттер болып $f: F \to F'$ изотермиясындағы M нүктесі M$'$ нүктесіне бейнеленсе, онда бұл нүктелер бір түрдегі нүктелер болады, яғни екеуі де эллинтикалық, параболалық немесе гиперболалық.

Φ_t – бір параметрлік изометриялық беттер топтамы болсын және t параметрлік тәуелді үзіліссіз болсын. Егер Φ_1 және Φ_2 осы топтамға тиісті екі бет болса, онда бұл беттердің біреуі екіншісінен майыстыру арқылы пайда болған беттер деп атаймыз, ал Φ_1 бетін Φ_2 бетіне беттестіруге болады дейміз.

Майысатын беттер келесідей қасиеттерге ие болады:

1. Беттегі кез келген бір тегіс сызықтың доғасының ұзындығы сақталады;
2. Беттегі екі сызықтың арасындағы бұрыш сақталады;
3. Беттегі сәйкес сызықтармен қоршалған облыстардың аудандары сақталады;
4. Беттің толық қисықтығы сақталады;
5. Кез келген бір тегіс сызықтың геодезиялық қисықтылығы сақталады.

Мысалдар.

1. Толық қисықтықтары бірдей болатын екі бетті бір-біріне беттестіруге болады.

   Шешуі: Беттегі координаттық сызықтарды жартылай геодезиялық сызықтармен алайық. Онда оның бірінші квадраттық формасы

$$I = du^2 + G(u,v)dv^2$$

$u = v$ координаттық сызығының бойында $ds^2 = G(u,v)dv^2$ $u = v$ дегеніміз v- сызықтары, олай болса соңғы теңдіктен v- сызығының ұзындығын табуға болады. Осыдан $G(u,v)=1$ теңдігі орындалады. Беттегі $\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{n}$ векторлары, базистік векторлар болатын координаталар жүйесін ендіреміз. Онда $\bar{r}_{uv}=a\bar{r}_u+b\bar{r}_v+c\bar{n}$ деп санауға болады.

u- сызығы геодезиялық сызық болғандықтан келесі шарт орындалады: $(\bar{r}_u,\bar{r}_{uu},\bar{n})=0$. Осыдан $\bar{r}_{uu}$ $\bar{r}_u$ және $\bar{n}$ векторларының сызықты комбинациясы болады, демек $\bar{r}_{uu}$ үшін $\bar{r}_v$ коэффициенті b=0 болады. $(\bar{r}_v\bar{r}_{uu})=0$, себебі $\bar{r}_v\,\bar{r}_u, \bar{r}_v\,\bar{n}$ және f=0, болғандықтан беттегі координаттық сызықтар ортогональ екендігі ескерілді. $(\bar{r}_v\bar{r}_u)=0$ теңдігін u параметрі бойынша диференциалдасақ $(\bar{r}_u,\bar{r}_{uu})+(\bar{r}_u,\bar{r}_{uv})=0$ осыдан $\bar{r}_{uu}$ ($\bar{r}_u$ және $\bar{n}$ векторларының сызықты комбинациясы болады, демек $\bar{r}_{uu}$ үшін $\bar{r}_v$ коэффициенті в=0 болады. $(\overline{r_v}\overline{r_{uu}})$=0, себебі $\bar{r}_v\,\bar{r}_u, \bar{r}_v\,\bar{n}$ және F=0, болғандықтан беттегі координаттық сызықтар ортогональ екендігі ескерілді. $(\bar{r}_u,\bar{r}_v)=0$ теңдігін u параметрі бойынша диференциалдасақ: $(\bar{r}_{uu},\bar{r}_v)+(\bar{r}_{uv},\bar{r}_u)=0$, осыдан $(\bar{r}_{uv}\,\bar{r}_u)=0$. $(\bar{r}_u,\bar{r}_v)=0$ теңдікті v бойынша дифференциялдасақ $(\bar{r}_{uv}\,\bar{r}_u)=0$, осыдан $\frac{\partial G}{\partial u}=0$ теңдігі шығады.

u=0 сызығы үшін келесі шарттар орындалатынын көреміз
$G(u,v)=1$ және $\frac{\delta G}{\delta u}=0$.

Беттегі жартылай геодезиялық координаттық сызықтар берілген жағдайда толық қисықтық келесі формуламен табылатыны белгілі

$$K=-\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}$$

Келесі үш жағдайды қарастырамыз:

1. $K=0$, яғни $\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}$=0

Осы дифференциалдық теңдеуді $\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}=0$ бойынша шешіп $G(0,v)=1$ екенін ескерсек беттің бірінші квадраттық формасы $I=du^2+dv^2$ түрінде табылады. Ал бұл жазықтықтың бірінші квадраттық формасымен бірдей болатынын көреміз. Демек бұл жағдайда бет жазықтыққа беттеседі.

2. $K=a^2(a=const, a\neq 0)$. Онда дифференциал теңдеу келесі түрге келеді $\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}=-\mathrm{a}^2$

$\sqrt{G}=cosau$ өрнегі берілген дифференциалдық теңдеуді қанағаттандыратындығын көреміз. Онда $G=cos^2(au)$ болып, беттің бірінші квадраттық формасы келесі түрге келеді $I=du^2+cos^2(au)dv^2$. Бұл радиусы a-ға тең сфераның бірінші квадраттық формасы, демек толық қисықтығы a^2 болатын барлық беттер сфераға беттеседі.

3. $K=-a^2(a=const, a\neq 0)$ болса дифференциалдық теңдеу келесі түрге келеді $\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}=\mathrm{a}^2$

Бұл дифференциалдық теңдеудің шешімі $\sqrt{G}=c\mathrm{h}au$ болатынын тексеріп көрсе болады, онда беттің бірінші квадраттық формасы $I=$

$du^2 + c\mathrm{h}^2(au)dv^2$ түріне келеді, ал бұл радиусы а-ға тең псевдосфераның бірінші квадраттық формасы екені есімізде. Демек, толық қисықтығы тұрақты теріс болатын барлық беттерді псевдосфераға беттестіруге болады.

Қорытынды: Толық қисықтығы тұрақты болатын және оның мәніне тәуелді емес беттердің бірінші квадраттық формасы тұрақты болғандықтан ол толық қисықтықты қабылдаған мәніне ғана тәуелді болады, яғни беттің түрі қандай болса да өзгермейді. Осыдан толық қисықтықтары тұрақты және тең болатын барлық беттер локалды изометриялық болады.

2. Келесі теңдеулер арқылы берілген геликоид пен катеноидтың изометриялық бет болатынын дәлелдеңдер

Геликоид: $x = u\cos v;\ \ y = u\sin v;\ z = v \quad u \in R, \quad v \in [0,2\pi);$
Катеноид: $x = chtcosw;\ \ y = chtsinw,\ z = t \quad t \in R,$
<u>*Шешімі:*</u> Геликоидтың бірінші квадраттық формасы $I = du^2 + (u^2 + v^2)dv^2$
Ал катеноидтың бірінші квадраттық формасы $I = ch^2tdt^2 + c\mathrm{h}^2tdw^2$

Геликоидтың бірінші квадраттық формасы жартылай геодезиялық координаттар торында жазылғаны көрініп тұр.

Катеноидтың теңдеуінде параметрлері келесідей өзгеріп оның жартылай геодезиялық координаттар торына ауыстырайық: $t = t(u,v), w = w(u,v),$ орнына $u = sht,\ v = w$ деп алсақ du=chtdt, мұндағы u- геодезиялық сызықтар болсын ал v- оған артогональ траектория. Осыдан $\bar{u} = sht$ немесе $t = Arcsh\bar{u}$ онда $ch^2t = ch^2(Arcshu) = 1 + \bar{u}^2$. Демек, $I = du^2 + (u^2 + 1)dv^2$ екенін табамыз. Демек, геликоидпен катеноидтардың бірінші квадраттық формалары бірдей . олай болса, олар изотермиялық беттер болады.

3. Кез келген конустық бет пен жазықтық изометриялық болатынын көрсетіңдер.

<u>*Шешуі:*</u> Кез келген конустық бетті оның төбесімен ен бағыттаушысы арқылы анықтауға болатыны белгілі.

Конустық төбесі OXYZ координаттар жүйесінің басында орналасқан деп алсақ, онда бағыттаушының әрбір нүктесі төбесінен бір арақашықтықта жатады десек болады. Демек координаттар басынан арақашықтығы бірге тең болатын нүктелер, центрі координаттар басында радиусы бірге тең, бағыттауыш сызықтың теңдеуі келесі түрде жазуға болады:

$$\gamma: x = u, \qquad y = f(u), \qquad z = \varphi(u)$$

u=s табиғи параметр деп алсақ $u^2 + f^2(u) + \varphi^2(u) = 1$

Бұл жағдайда конустық беттің теңдеуі келесі түрде болады $x = u, y = vf(u), z = \varphi(u),$

Осыдан беттің квадраттық формасын табамыз.

$$x_u = v, x_v = u, y_u = vf(u)', y_v' = f(u), z_u = v\varphi'(u), z_v = \varphi(u)$$

$$E = v^2 + v^2 f'(u) + v^2 f'(u),$$

$$F = uv + vf(u)f'(u), G = u^2 + f^2(u) + \varphi^2(u).$$

$$I = v^2\big[1 + (f'(u))^2 + (\varphi'(u))^2 du^2 + 2\big(uv + vf(u)f'(u) + vf(u)f'(u)\big)dudv + \big(u^2 f^2(u) + \varphi^2(u)\big)dv^2.$$

Егер бағыттаушы сызық бойынша 1+$(f_u')^2 + (\varphi' u)^2 = 1$ екенін ескерсек $I = v^2 du^2 + dv^2$ $\quad v = v,\ vdu = d\bar{u}$ деп айнымалыны ауыстырсақ бірінші квадраттық форма $I = du^2 + dv^2$. Ал бұл жазықтықтың бірінші квадраттық формасы екенін білеміз.

Жаттығулар:

1.Келесі теңдеумен берілген беттер жазықтықпен беттесетінін көрсетіңіз.

а) $x = \cos v - (u+v)\sin v,\ y = \sin v + (u+v)\cos v,\ z = u + 2v$, $u \in R, v \in R$:

б)$z^3 = x + y$

Нұсқау: Берілген беттердің толық қисықтықтары тұрақты және нольге тең екенін көрсетіңіз.

5. Кез келген цилндірлік бет пен жазықтық изометриялық болатынын көрсетіңіз.

Нұсқау: бағыттаушы сызықтың теңдеуін $\gamma: x = u, y = f(u), z = h$ ал цилиндрдің теңдеуін $\gamma: x = u, y = f(u), z = v$ деп аламыз. Сонда бірінші квадраттық формасы $I = (1 + (f_u')^2)du^2 + dv^2$ немесе $I = du^2 + dv^2$ келеді.

6. Жайылма бет жазықтыққа изометриялы болатынын көрсетіңіз.

Қайталауға арналған сұрақтар

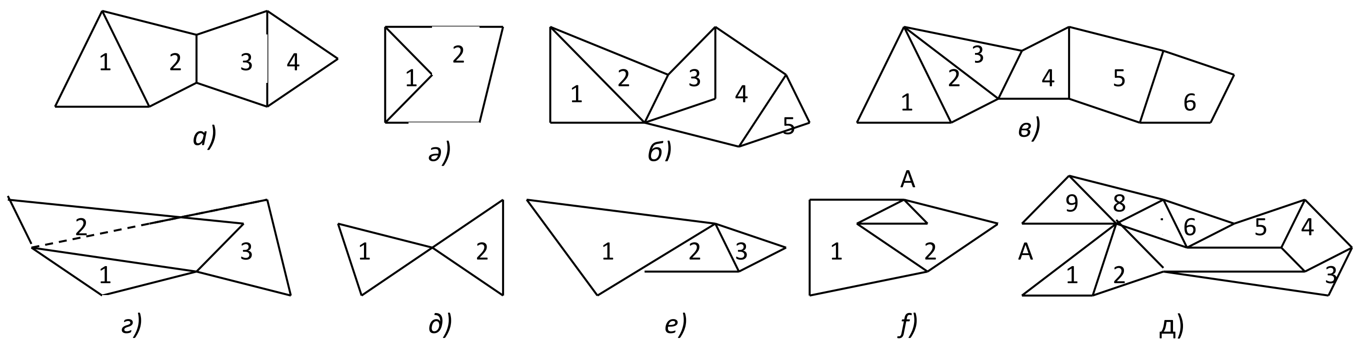
1. Геодезиялық қисықтық түсінігі беттің ішкі геометриясына жата ма?
2. Беттің кез келген нүктесі арқылы геодезиялық сызық өте ме?
3. Беттің бір нүктесі арқылы неше геодезиялық сызық өтуі мүмкін?
4. Геодезиялық сызық ассимптоталық сызық болуы мүмкін бе?
5. Геодезиялық сызық қисықтық сызығы болуы мүмкін бе? Қай жағдай да?
6. Геодезиялық сызық бір уақытта асимптоталық және қисықтық сызығы болуы мүмкін бе?
7. Геодезиялық сызық сызықтың қисықтығының абсолюттық шамасы нормаль қисықтықтың абсолюттық шамаларын салыстырыңыздар.
8. Жазықтық геодезиялық сызықтарын табыңыздар.
9. Асимптоталық сызықтың нүктедегі қисықтығы осы нүктедегі геодезиялық қисықтыққа тең болуы мүмкін бе?

10. Егер беттің толық қисықтығы тұрақты болса, онда осы беттегі гедезиялық үшбұрыштың бұрыштарының қосындысы тұрақты болады ма?
11. Толық қисықтығы тұрақты болатын беттегі геодезиялық үшбұрыштың ақауы нольге тең болуы мүмкін бе?
12. Берілген беттегі барлық геодезиялық сызықтардың ақауы бірдей болады ма?
13. Толық қисықтығы тұрақты болатын беттегі геодезиялық үшбұрыштың ақауы неге тәуелді болады?
14. Жазықтыққа изметриялы беттерді атаңдар.
15. Изометриялық беттердің геодезиялық сызықтары геодезиялық сызыққа бейнеленеді ма?
16. Изометриялық беттердің омбиликалық нүктелері изометриялық беттерге бейнеленеді ме?

5. ЕВКЛИД КЕҢІСТІГІНДЕГІ КӨПЖАҚТАР

5.1. Көпжақты беттер.

Көпжақты бет. Реттелген қос – қостан әртүрлі $F_1, F_2, ...F_n$ көпбұрыштар жүйесін F_1 көпбұрышты F_n көпбұрышқа жалғайтын **шынжырлы тізбек** дейді. Егер олар төмендегі талаптарды қанағаттандыратындай болып біріктірілген болса:



5.1-сурет

1. Әр көпбұрыштын қабырғасы тек сол көпбұрыштын, не тағы бір ғана көпбұрыштың қабырғасы болатын болса;
2. Әрбір сыбайлас көпбұрыштың кемінде бір ортақ қабырғасы болатын болса;
3. Кез-келген екі көпбұрыштың төбелерінен өзге ортақ нүктесі болса, ол қабырғалар беттесетін болса;
4. Кез-келеген екі көпбұрыштың ортақ төбелері, олардың ортақ қабырғаларынын үштары болатын болса;
5. Егер F_m, F_n көпбұрыштар ортақ төбесі болса, онда ол төбе осы екі көпбұрыш арасындағы барлық $F_{m+1}, F_{m+2}, ..., F_{n-2}, F_{n-1}$ көпбұрыштардың e_0 ортақ төбесі болатын болса.

5.1-*а,ә,б,в* суреттердегі көпбұрыштар бірігуі шынжырлы тізбек жасайды, қалғандары шынжырлы тізбек болмайды. Өйткені *г*-суретте 1-талап бұзылған, *АВ* қабырға екіден көп көпбұрышқа ортақ қабырға болып тұр; *д*-суретте 2-талап бұзылған, ортақ қабырғасы жоқ; *е*-суретте 3-талап бұзылған көпбұрыштың қабырғасынын төбесі өзге ортақ нүктесі бар; *f*-суретте (мұндағы боялған жер ашық жер, ойып алынып тасталған) 4-талап бұзылған, *А* ортақ төбесі ортақ қабырғасынын ұшы емес д-суретте (боялған жер, ойылған, ашық жер) 5-талап бұзылған, 1 мен 9 көпбұрыштың ортақ төбесі *А*, бұл көпбұрыштар арасындағы 3,4,5,6 көпбұрыштарға ортақ төбе болмай қалған. Егер шынжырлы тізбек *n* көпбұрыштан тұрса және олардын кез-келген сыбайлас екеуінен бір ортақ қабырғасын алсақ, олардың саны *n-1* болады. Оларды көпбұрыштардың қабырғаларын **байланыстырытан жүйе** дейді. Ондай жүйе біреуден көп болуы мүмкін. Өйткені кейбір сыбайлас көпбұрыштарды ортақ қабырға 1-ден көп болуы мүмкін. Ол жүйеге шеткі көпбұрыштардан бір, аралық көпбұрыштардан екі қабырғадан енеді.

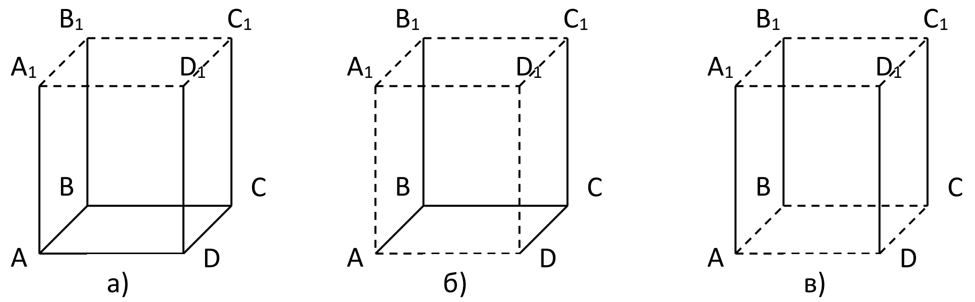
n көпбұрыш берілсін. Олардан жасалған бірігуді **көпжақты бет** дейді, егерде 1-ден, көпбұрыштын әрбір қабырғасы тек осы көпбұрыштын немесе тағы бір көпбұрыштын қабырғасы ғана болатын болса, 2-ден кез-келеген F_m, F_n көпбұрыштар тізбегі шынжырлы тізбек болатын болса.

Көпжақты бетті құрайтын көпбұрыштарды ол көпжақты беттін **жақтары,** көпбұрыштың төбелері мен қабырғаларын көпжақты беттін **төбелері, қырлары** дейді. Егер қыр екі жаққа ортақ болса**ішкі қыр,** тек бір жақтың ғана қабырғасы болса **шекаралық қыр** делінеді.

Шекаралық қырлардын біріктірмесін көпжақты беттін **шекарасы** дейді.

Мысалы, кубтын бір жағын немесе екі жағын алып тастағаннан қалған бөлігі көпжақты бет болады. 5.2-суреттін *а*-сында $A_1B_1C_1Д_1$ бет, *б*-

сында $A_1Д_1ДА$ беттер, *в*-сында үстінгі және астынғы табандары алып тасталған 5.2-*а* суретте $A_1B_1C_1Д_1$ квадрат, *б*-да $АДД_1C_1B_1A_1A$, *в*-да $A_1B_1C_1Д_1$ және $АВСД$ шекара болады.

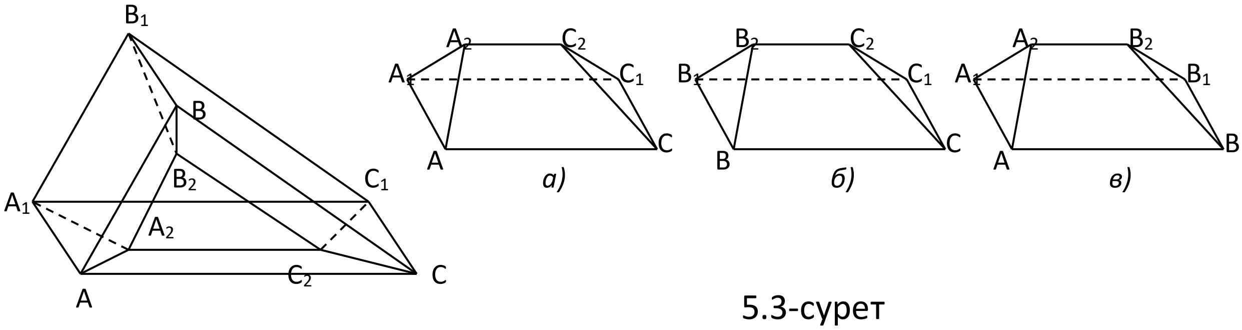


5.2-сурет

Кез-келген жазық көпбұрышты бір беті бар көпжақты бет ретінде қарастырамыз, оның барлық қабырғасы шекаралық қыр болады. Көпжақтардың түрлері көп. Әдетте геометрияда жай көпжақты бет қарастырылады.

Бірден көп жағы бар көпжақты беттердің жақтарының қимасы бос жиын немесе бір және одан көп ішкі қырлардан тұратын болса және оның шекаралық қырлары (егер олар бар болса) бір сынық сызық (оның жазық болуы да, болмауы да мүмкін) құрайтын болса, онда ондай көпжақты бетті **жай көпжақты бет** дейді. Бір ғана жағы бар бет жай деп есептеледі. 5.2-*а,б* суреттерде жай көпжақты беттер кескінделген. Олардың кез-келген жақтарынын қимасы бір ғана ішкі қырдан тұрады және шекаралық қырлардың бірігуі *а*-суретте жазық, *б*-суретте жазық емес сынық сызық жасайды.

Егер сынық сызықтын әр төбесі әртүрлі болса, ешқандай төбе басқа қабырғанын ішкі нүктесі болмаса және кез-келген қабырғалар жұбынын ішкі ортақ нүктесі болмаса онда ол сынық сызық **жай сынық сызық** делінеді. Көпжақты беттін **тілігі** деп, ол көпжақты беттің төмендегідей болатын кез-келген тұйықталмаған жай сынық сызықтарын айтады, егер де ол сынық сызықтын 1-ден, қабырғалары берілген көпжақты беттен ішкі қырлары болса, 2-ден, үштары осы беттін шекарасында жататын болса, 3-ден, шекарамен ұштарынан басқа ортақ нүктесі болмаса. Сөйтіп тілік – ұштары өзара беттеспейтін шекаралық нүктелер болады. 5.4 – *а* суретте тілік A_1ABCC_1, *б*- суретте B_1BCC_1 сынық сызықтар болады. Тілік көпжақты бетті екі көпжақты бетке бөлуі де, бөлмеуі де мүмкін. Шекаралық қырлары бар көпжақты беттін бірде бір тілігі болмаса немесе барлық тілігі оны екі көпжақты бетке бөлетін болса, онда ол көпжақты бет **бір байланысты** көпжақты бет делінеді, ал көпжақты беттесетін оны екі көпжақыт бетке бөлмейтін ең болмағанда бір тілігі болса ол көпжақты бет **көп байланысты көпжақты** бет делінеді. 5.2-*а,б* суреттегі көпжақты беттер бір байланысты көпжақты беттер болады. 5.3- суретте *а,б,в* суреттерде кескінделген үш көпжақты беттің бірігуінен тұратын көпжақты бет берілген. Егер ол көпжақты беттің CBB_1C_1 жағын алып тастаса қалған бөлігі көп байланысты көпжақты бет болады. Өйткені BB_2B_1 тілігі көпжақты бетті екі көпжақты бетке бөлмейді. Бұл тілік көпжақты бетті жартылай беттесетін. BB_2B_1, BB_1C_1CB көптүрмен шектелген бір бетке айландырады.



5.3-сурет

Бір байланысты көпжақты бетті оның тілігі екі көпжақты бөлiке бөлса, ол бөліктерде бір байланысты көпжақты бет болады.

Көпжақты беттін Эйлер характеристикасы. *Ф* көпжақты бет болсын. Ол көпжақты бетте барлығы α_0-төбе, α_1- қыр, α_2- жақ болсын. Онда мына санды

$$\alpha = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 \quad (1)$$

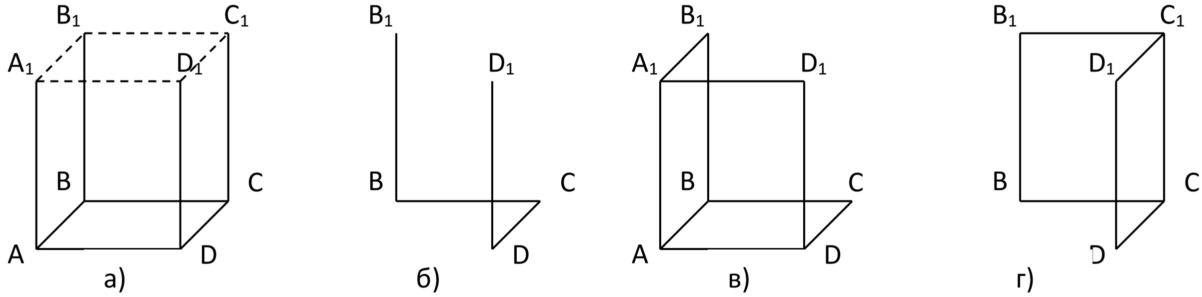
сол көпжақты беттін, **Эйлер характеристикасы** дейді.

Теорема. Кез-келген бір байланысты көпжақты беттің Эйлер характеристикасы 1-ге тең болады.

$$\alpha = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad (2)$$

Дәлелі. Математикалық индукция әдісін пайдаланайық. Жақ саны $\alpha_2 = 1$ болсын, яғни *Ф* бет бір жақты бет болсын. Ол жақ n қабырғалы көпбұрыш болса, онда $\alpha_1 = n$. Сондықтан $\alpha_0 = n$, шарт бойынша $\alpha_2 = 1$. Сонда $\alpha = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = n - n + 1 = 1$ болады. Бір жақты бет үшін теорема дұрыс екен. Енді теорема жағы α_2-ден аз болатын көпжақты бет үшін дұрыс деп алып, жағы α_2 болатын көпжақ үшін де дұрыс екенін дәлелдейік. Ол үшін α_2 жағы, α_1- қыры, α_0-төбесі бар *Ф* көпжақты беттін бір тілігін жүргізейік (шарт бойынша $\alpha_0 \geq 2$ болатындықтан оның міндетті түрде тілігі болады), ол тіліктің қабырғасынын саны α_3 болсын. *Ф* көпжақты бетті $Ф_1, Ф_2$ екі көпжаққа бөлсін. Бұл көпжақты беттердегі жақтың саны α_0', α_0'' қырдын саны α_1', α_1'', жақтың саны α_2', α_2'' болсын. Сонда $\alpha_1' + \alpha_1'' = \alpha_1 + \alpha_3$, $\alpha_0' + \alpha_0'' = \alpha_0 + \alpha_3 + 1$, $\alpha_2' + \alpha_2'' = \alpha_2$ (3) болады. Ал, жақ саны α_2-ден аз болғанда теорема дұрыс болатындықтан $\alpha_0' - \alpha_1' + \alpha_2' = 1$, $\alpha_0'' - \alpha_1'' + \alpha_2'' = 1$ болу керек. Бұларды қосақ $\left(\alpha_0' + \alpha_0''\right) - \left(\alpha_1' + \alpha_1''\right) + \left(\alpha_2' + \alpha_2''\right) = 2$.

Сонда (3) ескерсек. $(\alpha_0+\alpha_3+1)-(\alpha_1+\alpha_3)+\alpha_2=2$. Бұдан $\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=1$ болып теорема дәлелденеді.



5.4-сурет

5.4-суретте үстінгі табаны $A_1B_1C_1Д_1$ алып тасталған параллелепипед кескінделген. Оны $B_1BCДД_1$ тілігі (*б*-сурет) екі (*в,г*-суреттер) бір байланысты көпжақты бетке бөледі.

Осылар үшін (2) формуланы (3) теңдіктін дұрыстығын тексерейік. 5.4-*а* суретте төбе $\alpha_0=8$, қыр $\alpha_1=12$, жақ $\alpha_2=5$. Демек $\partial=\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=8-12+5=1$. 5.4 –*в* суретте төбе $\alpha_0^{'}=7$, қыр $\alpha_1^{'}=9$, жақ $\alpha_2^{'}=3$. Демек $\alpha=\alpha_0^{'}-\alpha_1^{'}+\alpha_2^{'}=7-9+3=1$. 5.4 – *г* суретте төбе $\alpha_0^{''}=6$, қыр $\alpha_1^{''}=7$, жақ $\alpha_2^{''}=2$. Демек $\alpha=\alpha_0^{''}-\alpha_1^{''}+\alpha_2^{''}=6-7+2=1$.

Эйлер характеристикасы туралы теорема бұлар үшін дұрыс (3) теңдіктін дұрыстығын тексерейік $\alpha_1^{'}+\alpha_1^{''}=\alpha_1+\alpha_3, 9+7=12+4$ теңдік дұрыс. $\alpha_2^{'}+\alpha_2^{''}=\alpha_2, 3+2=5$ бұл теңдік те дұрыс. $\alpha_0^{'}+\alpha_0^{''}=\alpha_0+\alpha_3+1, 7+6=8+4+1$ бұл теңдік те дұрыс.

5.2. Көпжақтар. Дөңес көпжақтар.

Геометриялық дене. $r>0$ нақты сан, M_0 евклидтік кеністіктін нүктесі болсын.

Мына шартты қанағаттандыратын

$$|M_0M|<r,\ |M_0M|\le r,\ |M_0M|=r \quad (4)$$

сол кеністіктін *M* нүктелерінің жиыннын, сәйкесінше, радиусы *r*, центрі M_0 болатын **ашық шар, тұйық шар, сфера** дейді. $|M_0M|<E$ болатын (M_0,E) ашық шар M_0 нүктенін *E*-аймағы делінеді. Евклидтік E_3 кеністіктін *M* нүктесі осы кеністіктін *x* жиынынын **ішкі нүктесі** делінеді, гер *M* нүктенін толығымен *x*-та жататын аймағы болса, егер *M* нүктенін *x* жинынынын бірде-бір нүктесі енбейтін аймағы болса, *x*-тын **сыртқы нүктесі** , ал *M*-нің кез-келген аймағында *x* жиынында, *x* жиынды E_3-ке толықтырушы E_3- *x* жиынында нүктелері енетін болса ол *x*-тын **шекаралық нүктесі** делінеді.

Шекаралық нүктелердің жиыны *x* жиыннын **шекарасы** делінеді. Тек ішкі нүктелерден тұратын жиын **ашық жиын** делінеді. Егер жиын екі ашық жиыннын бірігуі болатындай болып шектелмес ол **байламды** жиын делінеді.

Топологияда кеністік нүктелерінін кез-келген ашық байламды жиындарын **облыс** дейді. Евклидтік кеністікте облыс толығымен жататын ашық шар табылса, ол облыс **шектелген** делінеді. Облыстын **тұйықталуын** яғни ішкі және шекаралық нүктелерінен бірігуин **геометриялық дене** дейді. Сөйтіп геометриялық дене өзінің ішімен (ол шектелген облыс) шекарасынын бірігуінен тұратын фигура болады. Геометриялық дененің шекарасын оның **беті** дейді.

Ал, фигура деп нүктелердің кез-келген жиынын айтатындықтан геометриялық дене фигуранын дербес түрі болады. Тұйық шар, пирамида, параллелепипед, цилиндр, конус геометриялық денелер болады. Ашық шар шекарасы болғандықтан, сфера іші болмайтындықтан, жарты кеністік шектелмегендіктен геометриялық дене болмайды.

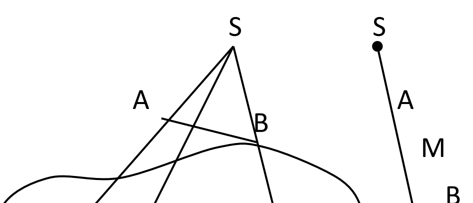
Геометриялық денелер бетінін түріне қарай көпжақтар, шар, цилиндр, конус т.б. болып бөлінеді. Геометриялық дененін кез-келген екі ішкі нүктесін ішкі нүктелерден тұратын үздіксіз сызық арқылы жалғауға болатынын дәлелдеуге болады. Ал, ішкі және сыртқы нүктелерді жалғайтын үздіксіз сызық дене бетімен кемінде бір нүктеде қиылысады.

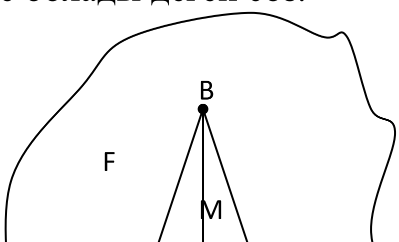
Геометриялық дене фигуранын дербес түрі болғандықтанжиын, фигура туралы өткен баптарда айтылған көптеген тұжырымдар геометриялық денелер үшінде дұрыс болады. Геометриялық дене **дөңес** делінеді, егер оны кез-келген екі нүктесін қосатын кесінді толығымен сол денеде жататын болса. Конус, цилиндр, пирамида дөңес денелер болады. Дөңес дене дөңес фигуранын дербес түрі. Дөңес дене терминін бір жазықтықта жатпайтын 4 нүктесі болатын нүктелер жиыны (фигура) деп түсіну керек. Сонымен қатар бір нүктеден тұратын фигураны да, бос жиынды да геометриялық дене деп есептеу қолайлы. Өйткені бұл кезде дөңес дене анықтамасынан кез-келген дөңес денелер қимасы да дөңес дене болатыны шығады.

Дөңес денені жасау туралы мынадай теоремалар бар.

1-теорема. *F* дене фигура, *S*-онда жатпайтын нүкте болсын. *F*-тен ағымдық нүктесі *M* сол *F*-тің барлық нүктесін жүріп өткенде онын жасайтын *SM* кесінділерінін біріктірмесі *Ф* дөңес дене болады.

Дәлелі. *SM* кесінділер жиынынан әртүрлі *A,B* нүктелер алайық. Онда *F*-те A_0, B_0 нүктелері табылып *A* нүкте SA_0, B нүкте SB_0 кесінді де жатуы керек (5.5-*а* сурет). *F* дене болғандықтан A_0B_0 кесіндінін кез-келген *M* нүктесі *F*-тін ішкі нүктесі болады. Сондықтан *SM* кесінді де *F*-те жатады. *AB* кесіндінін әрбір нүктесі осындай *SM* кесінді де жатады, *SM* кесінді *Ф*-ға жатады. Демек *AB* кесінді толығымен *Ф*-да жатады. Ал, бұл *SM* кесінділер *Ф* фигурасы дөңес дене болады деген сөз.





Егер A_0, B_0 нүктелер $A_0 \equiv B_0$ беттесе, онда *A* нүктеде, *B* нүктеде SA_0 кесінді де жататындықтан *AB* кесінді де SA_0 кесінді де жатады, ал бұл кесінді *Ф*-те жататындықтан *AB* кесінді де *Ф*-те жатады.

Салдар. Пирамида, конус дөңес дене болады. Өйткені бұлар дөңес фигураны (табанын) онда жатпайтын нүктеге (төбесіне) қосудан шығады.

2-теорема. Егер *F* дөңес фигура болса, $\vec{a}$ нөл емес вектор болса, онда *F*-тен әрбір *M* нүктесінен $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$ етіп салынған MM' кесінділерден бері *Ф* дөңес дене болады.

Дәлелі тура 1-теореманы қайталайды.

Салдар. Цилиндр, параллелепипед дөңес дене болады. Өйткені олардың жасаушылары өзара тең кесінділер болады.

Дөңес дененің қасиеттері.

1. *A* дене *F* дененің ішкі, *B* ішкі немесе шекаралық нүктелері болса, онда *AB* кесіндінін *A* мен *B* арасындағы барлық нүктелері *F*-тін ішкі нүктесі болады.

Дәлелі. *A* ішкі нүктесі болғандықтан оның кез-келген U_A аймағы толығымен *F*-те жатады. *B* нүкте бұл бұл аймаққа кермесін (5.5-*б* сурет). U_A аймақтын ағымдық нүктесі *X* ол аймақтың барлық нүктесін жүріп өткенде шығатын *BX* кесінділердін бірігуі *Ф* 1-теорема бойынша дөңес дене болады және ол *F*-те жатады. *B* мен *A* арасындағы *BA* кесіндінін әрбір *M* нүктесі *Ф*-тын ішкі нүктесі болатыны айқын. Сондықтан *M* *F*-тін де ішкі нүктесі болады, $M \in Ф \subset F$.

2. Егер *A*-да, *B*-да *F* дөңес дененін шекаралық нүктесі болса, онда не *AB* кесінді толығымен шекарада жатады, не онын *A* мен *B*-дан өзге барлық нүктесі *F* дененің ішкі нүктесі болады.

3. Дөңес дененін ішкі нүктесінен шығатын әрбір сәуле ол дененің бетін бір нүктеде қияды.

Дәлелі. F дөңес дене A_0 оның ішкі нүктесі болсын, a-ны нүктеден шығатын тұйық сәуле болсын. Бұл кезде $F \cap a$ -ның кесінді болатынын дәлелдейік. $F \cap a$ - қима: 1-ден, дөңес фигура болуы керек (себебі, F-те, a-да дөңес фигуралар); 2-ден, тұйық болуы керек (өйткені, F-те, a-да тұйық фигуралар); 3-ден, шектелген болуы керек (өйткені, F шектелген). Ал, бұл үш шартты тек кесінді қанағаттандырады (ол сәуленің бөлігі – дөңес, тұйық, шектелген). Ол кесіндіні A_0A дейік. A нүкте F-тын шекаралық нүктесі болады, өйткені ол ішкі нүкте десек онын аймағы U_A толығымен F-те жатар еді. Сондықтан a сәуленін A_0A кесіндісінін созындысында жататын F-тын ішкі нүкте болатын A_1 нүктесі табылар еді, ал бұл $F \cap A_0A = A_0A$ кесінді болсын деп алғанымызға қайшы. Демек, A нүкте F-тін ішкі нүктесі болмайды, шекаралық нүктесі болады. Сонда 1-қасиет бойынша A_0 мен A нүктелер арасындағы кесінді нүктелері F дененің ішкі нүктелері болуы керек. сондықтан a сәуле F-ті бір нүктеде қиады.

4. Егер түзу дөңес дененін ішкі нүктесінен өтсе, онда ол түзу бойында дененін кемінде 2 шекаралық нүктесі болады.

5. Егер $П$ жазықтығында $Ф$ дененін ішкі нүктелері болмаса, онда ол дене толығымен $П$ жазықтығы анықтайтын екі жарты кеністіктін бірінде жатады.

6. Егер $П$ жазықтығында $Ф$ дененін ішкі нүктесінен өтсе, онда олардың қимасы $П \cap Ф$ дөңес фигура болады. Өйткені, дөңес денелердің қимасы дөңес фигура болады.

3-теорема. Егер A нүкте екі дөңес дене F_1 мен F_2 -нің екеуінінде ішкі нүктесі болса, онда олардың қимасы $F_1 \cap F_2$ дөңес фигура болады.

Себебі, A нүкте F_1 мен F_2 -нің екеуінінде ішкі нүктесі болғандықтан ол $F_1 \cap F_2 = F$ қимада жатады. Егер B осы қиманын тағы бір нүктесі болса, онда A, B нүктелер F_1 -де де, F_2 -де де жатуы керек. ал, бұлар дөңес болғандықтан AB кесінді толығымен F_1 -де де, F_2 -де де жатды. Сондықтан, яғни $AB \subset F_1 \cap F_2$ жататындықтан $F_1 \cap F_2$ дөңес фигура болады.

Көпжақтар. Егер көпжақты беттейтін барлық қырлары ішкі қырлар болса, яғни көпжақты беттейтін шекарасы болмаса онда оны **тұйық көпжақты бет** дейді.

Тұйық жай көпжақты бет кеністікті өзіне қарағанда екі облысқа - ішкі және сыртқы облыстарға бөледі. Бір облыс нүктелерін қосатын кесінді және бетпен қиылыспайтын сынық сызық әр уақытта табылады, әр облыс нүктелерін қосатын сынық сызық бетпен бір нүктеде қиылысады.

Бетті ақырлы санды жазық көпбұрыштардан тұратын геометриялық дене **көпжақ** делінеді, егерде ешқандай іргелес екі көпбұрыш бір жазықтықта жатпаса және барлық көпбұрыштар бірігуі 2 өлшемді көпбейнелік болса. Көпбұрыштар көпжақтың **жағы,** көпбұрыштың төбелері мен қабырғалары көпжақтың **төбесі, қыры** делінеді.

Тұйық көпжақты беттің бетті көпжақтың да беті делінеді. Көпжақтарға мектепте оқытылатын пирамида, призма, параллелопипедтер жатады.

Көпжақтарды жағына қарай бөледі: **тетраэдр** (4 жақ), **пентаэдр** (5 жақ), **гексаэдр** (6 жақ), **октаэдр** (8 жақ), **додекаэдр** (12 жақ), **икасаэдр** (20 жақ)-ты көпжақтар болады.

Топологияда $2p+\kappa$ тесігі бар сферанын *2p* тесігіне *Р* тұтқа жапсыру арқылы бетеуге болатыны, сонда *Р* тұтқасы, *К* тесікті $O_{p,\kappa}$ көпбейнелік шығатыны және ондай көпбейнеліктен Эйлер характерискасы мына формуламен анықталатыны айтылады.

$$\alpha(O_{p,\kappa}) = 2 - 2p - \kappa \quad (2)$$

Мынадай теорема бар. Кез-келген бағдарланатын көпжақты екі өлшемді көпбейнелік қандай да бір $Q_{p,o}$ көпбейнелікке ал жиегі бар бағдарланатын көпжақты екі өлшемді көпбейнелік қандай да бір $Q_{p,\kappa}$ көпбейнелікке гомеоморфты болады. Осындағы он бүтін сандар *Р*-ны сол көпбейнеліктің **тегі,** *К*-ны оның **жиегінің** (көпбұрышынын) **саны** дейді.

Сфера (яғни ешқандай тұтқасы жоқ, тесігі жоқ сфера) нөл текті көпбейнелік $Q_{o,o}$ болады, өйткені $P=0, K=0$, ал бір тұтқасы сфера $Q_{1,0}$ бір текті көпбейнелік болады. Гомеоморфты көпбейнеліктердің Эйлер характеристикасы және тектері теңдей болады.

Көпжақтын тегі деп оның бетінін тегін айтады. Тетраэдрдін, кубтың беттері сфераға гомеоморфты, сондықтан олар нөл текті көпжақтар болады.

Жақтары клетка болатын нөл текті көпжақтарды **жай көпжақ** дейді. Тетраэдр, куб жай көпжақты болады. Элипистер геометрияда тұйық жай көпжақты бетпен онын ішінен біріктірмесін жай көпжақ дейді. Барлық қабырғалары берілген көпжақтың қырлары болатын кез-келген жай тұйық сынық сызықты ол **көпжақтың тілігі** дейді. Көпжақтың тілігі оны екі көпжақты бетке бөлетін болса, ол **нөл текті көпжақ,** бөлмесе **нөл текті емес көпжақ** делінеді. Мектепте қарастырылатын көпжақтар нөл текті көпжақтар болады.

Көпжақтың Эйлер характеристкасы.

4-теорема. (Эйлер теоремасы). Кез-келген көпжақтың (яғни нөл текті көпжақтың) төбесінен саны мен жағының санынын қосындысы қырының санынан 2-ге артық болады.

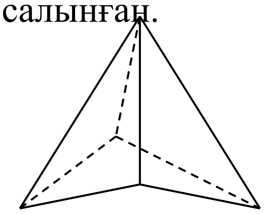
Дәлелі. *Ф* жай көпжақ болсын. Ол көпжақтың төбесінен саны - α_0 , қырының саны - α_1 , жағының саны - α_2 болсын. Осы көпжақтың кез-келген бір жағын алып тастасақ жағының саны $\alpha_2 - 1$, төбесі мен қырының саны α_0, α_1 болатын көпжақты бет шығар еді. Көпжақты беттен

Эйлер характеристкасы 1-ге тен болатындығы дәлелденген (2). Сол бойынша $(\alpha_2 - 1) + \alpha_0 - \alpha_1 = 1$. Бұдан

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \text{ немесе } \alpha_0 + \alpha_2 = \alpha_1 + 2$$

Дөңес көпжақ. Кез-келген көпжақ дене болады. ***F* көпжақ дөңес** көпжақ делінеді, егер F дене дөңес болса. Демек, дөңес көпжақтың жақтары дөңес көпбұрыштардан тұрады.

1-теорема бойынша табаны дөңес көпбұрыш болатын пирамида дөңес көпжақ болады. Тетраэдрде дөңес көпжақ болады. 2-теорема бойынша табаны дөңес көпбұрыш болатын призма дөңес көпжақ болады. Параллелепипедте дөңес көпжақ болады. 5.6-суретте дөңес емес көпжақ салынған.



5.6-сурет

Көпжақты шектеу арқылы дөңес көпжақ шығарып алуға болады. E_3 евклидтік кеңсітіктің Φ фигурасы $F_1, F_2, ...F_n$ фигураларға **жіктеледі делінеді,** егер F_i-лар Φ –ның жабуы болса, яғни $\cup F_i = \Phi$ болса және кез келген F_i, F_j фигуралардың ортақ ішкі нүктелері болмаса.

Φ дөңес көпжақ болсын, Π – оның ішкі нүктесінен өтетін жазықтық болсын. Онда Π жазықтық Φ –ның Π –де жатпайтын барлық нүктелерін Φ_1, Φ_2 екі бөлікке бөлер еді және Φ – да, Π-де дөңес фигуралар болғандықтан $\Phi \cap \Pi = F$ дөңес фигура болады. Сондықтан $\Phi_1 \cup F, \Phi_2 \cup F$ екі көпжақтың екеуіде дөңес көпжақ болады және $\Phi_1 \cup \Phi_2 = \Phi$ болатындықтан Φ көпжақ Φ_1, Φ_2 екі дөңес көпжаққа жіктеледі. Көпжақтың төбесінің саны ең аз болғанда 4 болады, ал бұл тетраэдр. Кез келген көпжақтың саны шектеулі дөңес көпжақтарға, сондықтан тетраэдрлерге жіктеуге болатынын дәлеледеуге болады.

Төмендегі тұжырымдар дөңес көжақтың қасиеттерін анықтайды.

1. Дөңес көпжақтың бір жағы жататын жазықтықта ол дөңес көпжақтың бірде – бір ішкі нүктесі болмайды.

2. Дөңес көпжақтың барлық нүктелері оның бір жағы жататын жазықтық пен анықталатын екі тұйық жарты кеңістіктің бірінде жатады. Ол жарты кеңістікті сол дөңес көпжақтың кеңістігі дейді.

3. Дөңес көпжақ жай көпжақ болады. Дәлелдейік. Φ – дөңес көпжақ, M оның ішкі нүктесі болсын. Φ шектелген фигура болатындықтан ол толығымен жататын W шар болады. Ол шардың

шекарасын S дейік. Дөңес дененің 3- қасиеті бойынша M_0 – да шығатын әрбір сәуле $Ф$ –ның шекарасы $F_2Ф$ бір M нүктеде, ал W шардың шекарасы S -ты бір M' нүктеде қиып өтеді. Сөйтіп ол сәуле $F_2Ф$-тын M нүктесі мен S_i -нен M' нүктесі арасында бірмәнді сәйкестік орнатады, яғни f: $F_2Ф \to S$ бейнелеу биекция болады. Бұл бейнелеу Гомеоморфизм болады. Демек**,** $F_4Ф$ мен S гомоморфты болады. Сөйтіп $Ф$ көпжақтың беті сфераға гомоморфты болады екен. Ол $Ф$ нөлтекті көпжақ болады деген сөз. Оның жақтары дөңес болғандықтан ол жай көпжақ болады. Сөйтіп нөлтекті көпжақ дөңес көпжақ болады.

4. Дөңес көпжақ $Ф$ оның барлық жақтары мен анықталатын барлық жарты тұйық кеңістіктердің қимасы болады.

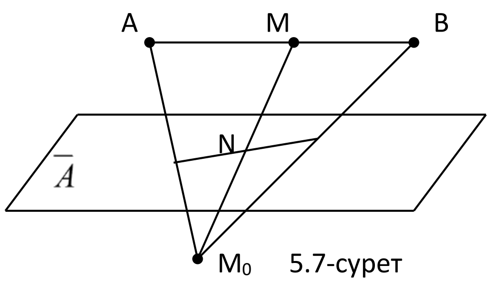
Дәлелі. Көпжақтың жақтарының саны n болсын, оларды $\partial_1, \partial_2, ...\partial_n$ дейік. Бұл жазықтықтармен анықталатын $Ф$ жатқан тұйық жарты кеңістіктерді $v_1, v_2, ...v_n$ дейік, бұлардың қимасы V болсын. Мақсат V мен $Ф$ -тан беттесетіндігін дәлелдеу.

Егер A нүкте $Ф$ –да жатса ол V_i– лардың бәрінде жататындықтан V–да жатады. Сөйтіп $Ф$ - ның нүктелері V –да жатады. Енді B нүкте $Ф$ да жатпасын. Онда ол нүкте $Ф$ – ның сыртқы жарты кеңістігінде жатады. Сондықтан V_i- лардың қимасы V– да жатпайды. Сөйтіп $Ф \equiv V$ беттеседі екен. Сондықтан $Ф$ өзінің жақтарымен анықталатын жарты кеңістіктің қимасы болады.

5. $Ф$ көпжақ дөңес болу үшін оның беті дөңес болуы керек.

6. 2- ші қасиетке кері, егер $Ф$ көпжақтың барлық нүктелері оның бір жағы анықтайтын тұйық жарты кеңістікте жатса, онда ол көпжақ дөңес көпжақ болады.

Дәлелі. Бұл тұжырым дұрыс емес, $Ф$ көпжақ дөңес болмайды десек, онда $Ф$- дан A, B екі нүкте табанын оның бойында $Ф$ – ға сыртқы нүкте болатын ең болмағанда бір M нүкте табылуы керек. M_0 нүкте AB –да жатпайтын $Ф$ –ның бір ішкі нүктесі болсын (347 сурет). Онда M_0M кесінді



5.7-сурет

көпжақтың бір бетін қандай да бір N нүкте қию керек. Ол бетті қамтитын жазықтық $П$ болсын. $П$ – дің бірде- бір нүктесі $Ф$ –ның ішкі нүктесі болмауы керек. Сондықтан M_0 нүкте $П$ –де жатпау керек. Демек, $П$ жазытық M_0A не M_0B кесіндінің бірін қию керек. Ал, бұл теорема шартына қайшы. Өйткені $Ф$ –ның нүктелері $П$ –дің екі жағында да жатуы мүмкін емес.

Дөңес көпжақ теориясына қатысты кейбір тұжырымдарды келтірейік. $Ф_1, Ф_2$ екі көпжақ берілсін. Бұлардағы жақтар A_1, A_2, қырлар жиының B_1, B_2, жақтар жиының C_1, C_2 дейік. Бұлардың біріктірмесін $A_1 \cup B_1 \cup C_1 = M_1, A_2 \cup B_2 \cup C_2 = M_2$ дейік. Сонда $Ф_1, Ф_2$ көпжақтар изоморфты делінеді, егерде төмендегі талаптарды қанағаттандыратын $f\colon M_1 \to M_2$ биективті бейнелеу табылса:

1. $f(A_1) = A_2, f(B_1) = B_2, f(C_1) = C_2$ болса;
2. Сәйкес жақтың төбелері теңдей болса;
3. f бейнелеуі төбелердің, қырлардың, жақтардың бір – бірінде жатуын сақтайтын болса.

Мысалы, кез келген тетраэдр өзара, куб өзара, параллеллипед өзара изоморфты көпжақтар болады.

Коши теоремасы. Егер екі көпжақ изоморфты болса және әрбір сәйкес қырлыры тең болса, онда ол көпжақтар өзара тең болады.

Александров А. Д теоремалары

1. Егер дөңес көпжақтың әрбір жағының симметрия центрі болса, онда ол дөңес көпжақтың симметрия центрі болады.

2. F_1 мен F_2 дөңес көпжақ, A_1 мен A_2 олардың қырларының жиыны болсын. Төмендегідей болатын $f\colon A_1 \to A_2$ биективті бейнелеу болса, онда $F_1 = F_2$ болады:

1) Әрбір іргелес екі жақтың сыртқы нормасы бағыттас болса;

2) Параллель жылжыту арқылы іргелес жақтың бірін екіншісінің ішіне көшіруге болмайтын болса.

5.3. Дұрыс және топологиялық дұрыс көпжақтар.

Топологиялық дұрыс көпжақтар.

Көпжақтың бір төбесінде тоғысатын жақтары жиынынан құралатын фигураны **көпжақты бұрыш** дейді. Оның әрбірі екі жағы арасындағы бұрышты **екі жақты бұрыш,** ал әр жақтың қырлары арасындағы бұрышты көпжақты бұрыштың **жазық бұрышы** дейді.

Дөңес көпжақтың жазық бұрыштарының $4d$ – дан кем болады. Үш жақты бұрыштың кез келген жазық бұрышы қалған екі жазық бұрыштың қосындысынан аз болады, ал екі жақты бұрыштарының қосындысы $2d$ мен $6d$ арасында болады. Егер үш жақты бұрыштың жазық бұрыштары α, β, γ болса, ал γ бұрышқа қарсы жатқан екі жарты бұрышы Θ болса, онда $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\,\Theta$ (1) болады. Керісінше үш жақты бұрыштың екі жақты бұрыштары φ, ψ, θ болса, ал Θ-ға қарсы жатқан жазық бұрышы γ болса, онда $\cos\theta = -\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi cjs\gamma$ (2) болады. Үш жақты бұрыштың жазық бұрыштары α, β, γ болса, оларға қарсы екі жақты бұрыштар φ, ψ, θ болса, онда $\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} = \frac{\sin\beta}{\sin\psi} = \frac{\sin\gamma}{\sin\theta}$ (3) болады.

Жай көпжақ (нөлтекті көпжақ) **топологиялық дұрыс көпжақ** делінеді, егерде оның барлық жақтарындағы төбелер саны өзара тең болса және әрбір көпжақты бұрыштың жақтарының саны өзара тең болатын болса.

Мұндай көпжақтар саны санаулы –ақ болады.

1 - теорема. Егер топологиялық дұрыс көпжақтың барлық төбелерінің саны $-\alpha_0$, барлық қырларының саны $-\alpha_1$, барлық жақтарының саны - α_2 болса және әрбір төбеде тоғысатын жақтардың саны – m, ал әр жақтағы төбе саны – $к$ болса, онда мына теңдік дұрыс болады $\frac{1}{m} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha_1}$ (4).

Дәлелі. Теорема шарты бойынша берілген топологиялық көпжақта α_0 төбе бар әр төбеде m жақ тоғысады. Сондықтан әр жақты жеке – жеке бөліп тастаса, олардағы төбе саны $\alpha_0 \cdot m$ болар еді. Сондықтан қырдың саны да осынша болады. Ал көпжақтың әрбір қыры екі жаққа ортақ болады. Сондықтан $\frac{\alpha_0 m}{2} = \alpha_1$ болады. Бұдан $\alpha_0 = \frac{2\alpha_1}{m}$ (5). Теорема шарты бойынша берілген көпжақта α_2 жақ бар, әр жақта $К$- төбе. Сондықтан $К$ – қыр бар. Сонда $\alpha_2 К$ барлық жақты жеке – жеке алғандағы қырдың саны болады. Ал, көпжақтың әрбір қыры екі жаққа ортақ болатындықтан $\frac{\alpha_2 К}{2} = \alpha_1$ болады. Бұдан $\alpha_2 = \frac{2\alpha_1}{К}$ (6). Бұлар да көпжаққа арналған Эйлер теоремасын (3 формула) қолдансақ $\frac{2\alpha_1}{m} - \alpha_1 + \frac{2\alpha_1}{К} = 2$ болар еді. Бұдан $\frac{1}{m} + \frac{1}{k} = \frac{2}{\alpha_1} + \frac{1}{2}$ болып теорема дәлелденеді.

2-теорема. Топологиялық дұрыс көпжақты әр төбеде тоғысатын жақтардың саны m мен әржақтағы төбе саны $К$ – ның бірі 3- ке тең болуы керек, олар 3- тен аз болалмайды және қатарынан 4-ке және одан үлкен санға тен болалмайды.

Дәлелі. Көпжақ бұрыш болу үшін әр төбеде кешенді 3 жақ қиылысып жатуы керек, яғни $m \geq 3$ болу керек, ал әр жақта кешенді 3 төбе болуы керек, яғни $k \geq 3$ болу керек. Егер $m = n = 4$ десек (56-4) бойынша $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha_1}$ болып қалар еді. Бұлай болу мүмкін емес, $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ болу керек.

Сонымен m мен n қатарынан 4- ке одан үлкен санға тең болалмайды.

Сөйтіп бұл теоремалар бойынша мынандай болу керек.

1. $k=3$ дейік. Онда (4) бойынша $\frac{1}{m} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha_1}$ болады. Бұдан $\frac{1}{m} + \frac{1}{3} > \frac{1}{2}$, $\frac{1}{m} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Демек $m<6$ болу керек екен.

Сөйтіп $k=3$ болған жағдайда m 6- ға тең, не одан кем болмайды екен. Сөйтіп топологиялық дұрыс көпжақтың әр жағындағы төбе саны 3 болса, онда әр төбеде тоғысатын жақтар саны 6- дан аз болу керек екен.

Сонда мынандай болуы мүмкін.

1-1. $k=3, m=3$. Онда (4) бойынша $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha_1}$. Бұдан $\alpha_1 = 6$. Сонда (56-5), (56-6) бойынша $\alpha_0 = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4, \alpha_2 = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4$ Сөйтіп бұл кезде $\alpha_0 = 4, \alpha_1 = 6, \alpha_2 = 6$ болады.

1-2. $k=3, m=4$. Онда (4) бойынша $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha_1}$, $\alpha_1 = 12$. Сонда (56-5), (56-6)-дан $\alpha_0 = \frac{2 \cdot 12}{4} = 6, \alpha_2 = \frac{2 \cdot 12}{3} = 8$. Демек бұл кезде $\alpha_0 = 6, \alpha_1 = 12, \alpha_2 = 8$.

1-3. $k=3, m=5$. Онда (4) бойынша $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha_1}$, $\alpha_1 = 30$. Сонда (5), (6)-дан $\alpha_0 = \frac{2 \cdot 30}{5} = 12, \alpha_2 = \frac{2 \cdot 30}{3} = 20$. Демек бұл кезде $\alpha_0 = 12, \alpha_1 = 30, \alpha_2 = 20$.

$k=3, m=6$ болалмайды. Өйткені $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ болып, $\frac{1}{m} + \frac{1}{\kappa} > \frac{1}{2}$ болу шарты бұзылады.

2. Егер $m=3$ десек $\frac{1}{3} + \frac{1}{\kappa} > \frac{1}{2}$ ден $\kappa < 6$ болып шығады. Топологиялық дұрыс көпжақтың әр төбесіндегі тоғысатын жақтың саны $m=3$ болса, ол жақтағы төбе саны 6-дан аспау керек екен. Сонда мынадай жағдайлар болуы мүмкін.

2-1. $m=3$, $к=3$. Бұл кезде (4) тен $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha_1}$ болып $\alpha_1=6$. Сонда (56-5), (56-6) формулалардан $\alpha_0=4, \alpha_2=4$ болады. Сонымен бұл кезде $\alpha_0=4, \alpha_1=6, \alpha_2=6$ болып 1-1 жағдай қайталанады.

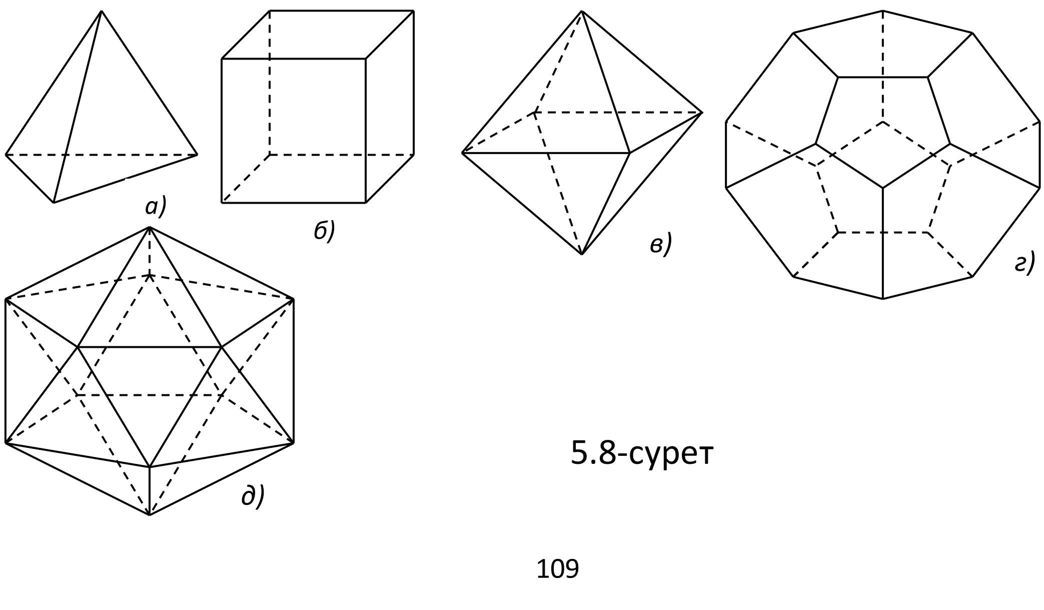
2-2. $k=4$, $m=3$. Бұл кезде (4) тен $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha_1}$, болып $\alpha_1=12$ болып шығады. Сонда (5), (6) формулалардан $\alpha_0=\frac{2\cdot 12}{3}=8, \alpha_2=\frac{2\cdot 12}{4}=6$.Сөйтіп $\alpha_0=8, \alpha_1=12, \alpha_2=6$.

2-3. $k=5$, $m=3$. Бұл кезде (4)тен $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha_1}$, болып $\alpha_1=30$болып шығады. Сонда (5), (6) формулалардан $\alpha_0=\frac{2\cdot 30}{3}=20, \alpha_2=\frac{2\cdot 30}{5}=12$. Сөйтіп $\alpha_0=20, \alpha_1=30, \alpha_2=12$. $k=3$, $m=6$ бола алмайды.

Сонымен топологиялық дұрыс көпжақтың бес-ақ түрі болады екен. Жағының саны *4, 6, 8, 12, 20* болатын көп жақтар ғана топологиялық дұрыс көпжақ болады екен.

Сонымен топологиялық дұрыс көпжақтардың әр түрлі мына таблицадағы сандар арқылы сипатталады.

Типі	k	m	Жақтың саны, α_2	Төбенін саны, α_0	Қырдың саны, α_1	Көпжақтың аты	Суреті
I	3	3	4	4	6	Тетраэдр	348-*а*
II	3	4	8	6	12	Октаэдр	348-*в*
III	3	5	20	12	30	Икосаэдр	348-*д*
IV	4	3	6	8	12	Гексаэдр	348-*б*
V	5	3	12	20	30	Додекаэдр	348-*г*

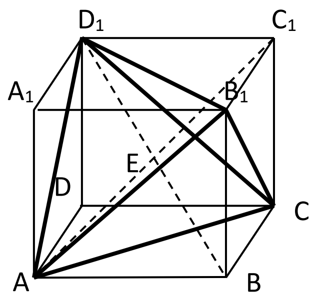


5.8-сурет

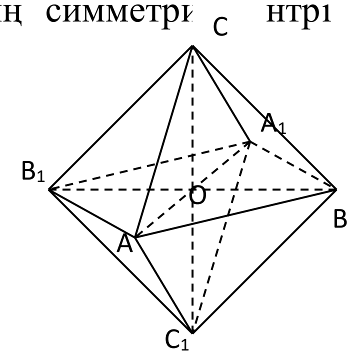
Дұрыс көпжақтар. Дөңес көпжақ дұрыс делінеді егер де оның жақтары өзара тен дұрыс көпбұрыштар болса және төбелеріндегі көпжақты бұрыштардын қырларының сандары бірдей болатын болса.

Дөңес көпжақтар жай көпжақ болатындықтан олар топологиялық дұрыс көпжақтардың дербес түрі болады. Сондықтан дұрыс көпжақтың да түрі 5-тен артпайды. Оған салу арқылы көз жеткізуге болады.

1. Куб. Қырлары өзара перпендикуляр O төбелі үшжақты бұрышты қарастырайық (5.9-сурет). Оның қырларына $OA=OC=OД$, кесінділер өлшеп салып, ол нүктелерден O көпжақты бұрыштын жақтарына параллель жазықтықтар жүргізсек, олар өзара қиылысып $OABCA_1B_1C_1Д_1$ дөңес көпжақ шығады. Оның 6 жағы бар және олар өзара тең квадраттар, ал әр төбедегі, көпжақты бұрыштарының қырларының саны теңдей (3-ке тең). Сондықтан бұл салынған көпжақ дұрыс көпжақтың анықтамасы бойынша дұрыс көпжақ болады. Оны **дұрыс гексаэдр** немесе **куб** дейді. Куб параллелепипедтін дұрыс түрі болатындықтан олардың диагоналдары бір нүктеде қиылысады. $A_1C \cap BД_1 = E$ десек, бұл нүкте кубтын әрбір төбесінен, әрбір жағынан және әрбір қырынан бірдей қашықтықта жататындықтан *а)*Кубтың төбелерінен өтетін, *б)* Кубтың жақтарына жанасатын, *в)* Қырларына жанасатын 3 сфераның ортақ центрі болады. Оны кубтың **центрі** дейді. Ол кубтың симметрия центрі де болады.



5.10-сурет



5.11-сурет

2. Дұрыс тетраэдр. Кубтың (5.10-сурет) $A_1Д_1B_1C$ нүктелері бір жазықтықта жатпайды. Сондықтан олар қандайда бір тетраэдрдің төбелері болады (5.10-сурет)

Оның 4 жағы бар, олардың қырлары кубтың жақтарынын диагоналдары болғандықтан өзара тең. Сондықтан 4 жақтың төртеуі де өзара тең және оның әрбір төбесінде тоғысатын жақтырдың қырларының саны теңдей (үшеуден). Сондықтан дұрыс көпжақтың анықтамасы бойынша $A_1Д_1B_1C$ тетраэдр (көпжақ) дұрыс көпжақ болады. Оны **дұрыс тетраэдр** дейді.

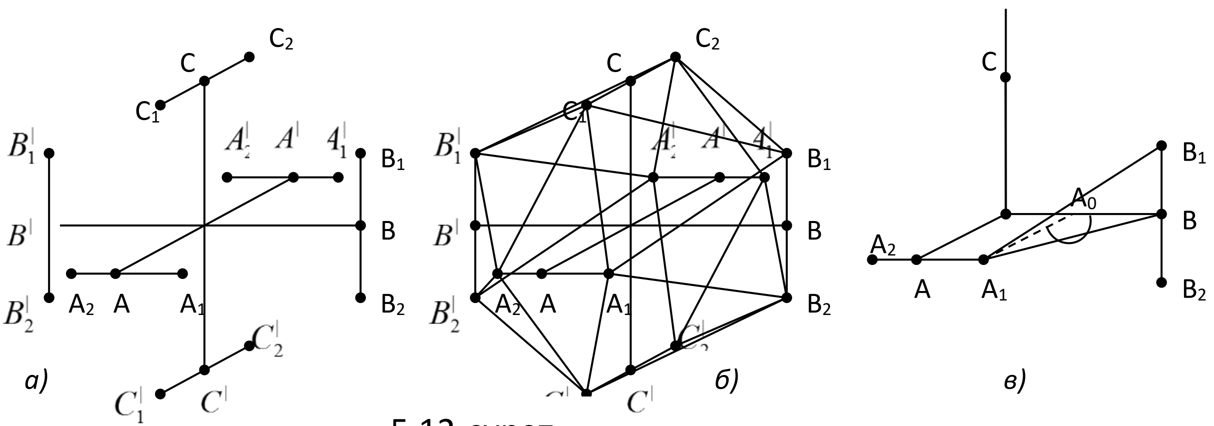
Кубтың $A_1C \cap BД_1 = E$ центрі болсын. Центрі E, радиусы EA болатын кубты сырттай сызылған сфера $A_1Д_1B_1C$ нүктелерден де өтетіндіктен, ол $A_1Д_1B_1C$ тетраэдрде де сырттай сызылған сфера болады. E нүкте тетраэдрдің 4 жағында бірдей қашықтықта жатқандықтан ол тетраэдрді іштей сызылған сферанында центрі болады. Оны дұрыс тетраэдрдің центрі дейді. Бірақ ол нүкте симметрия центрі болмайды (E нүктеге қарағанда A мен C_1 симметриялы, бірақ A тетраэдр жатады, C_1 жатпайды).

3. Дұрыс октаэдр. O нүктеден өзара перпендикуляр үш түзу жүргізін олардың бойына $OA = OA_1 = OB = OB_1 = OC = OC_1$ болатын AA_1, BB_1, CC_1 кесінділер саламыз. Сонда 8 жағы пар көпжақ шығады. Әр төбеде 4 жақ тоғысып тұр, оның қырлары катеттері тең тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузалары болатындықтан өзара тең. Сондықтан 8 жақ өзара тең үшбұрыштар. Сөйтіп, әр төбеден қиылысатын қырлардың сандары тең, жақтары тең. Сондықтан 5.11-суреттегі кескін дұрыс көпжақ болады. Оны **дұрыс октаэдр** дейді. O нүкте барлық төбелерден жақтардың, қырлардың бірдей қашықтықта жатқандықтан ол дұрыс октаэдр сырттай сызылған сфераның, жақтарына жанасатын сфераның центрі болады. Ол O нүктені – дұрыс октаэдрдің центрі дейді.

4. Дұрыс икосаэдр. O нүктеден өзара перпендикуляр үш түзу жүргізіп оның бойына $OA = OA' = OB = OB' = OC = OC' = a$ кесінділер саламыз. A, A'-тен BB'-ке, B, B'-тен C, C'-ке, C, C'-тен AA'-ке параллель түзулер жүргізіп, олардың бойына

$$AA_1 = AA_2 = BB_1 = BB_2 = CC_1 = CC_2 = A'A_1' = A'A_2' = B'B_1' = B'B_2' = C'C_1' = C'C_2' = b$$

кесінді өлшеп саламыз (5.12 – a сурет).



5.12-сурет

Сонда $A_1, A_1, A_2, A_2', B_1, B$ … $_2$ 12 нүкте аламыз. Олар қандай да бір икосаэдрдің төбелері болады. Оның жағын салу үшін $AA' \cap BB'$ жазықтығын қарастырайық B_1', C_1, C_2, B_1 нүктелер бұл жазықтықтын бір жағында B_2', C_1', C_2, B_2 екінші жазықтығында жатыр. Егер C_1, C_2 кесінді үштарын B_1', B_1 нүктелерге, C_1', C_2' кесінді ұштарын B_2', B_2 нүктелерге қоссақ $B_1C_1C_2$, $B_2'C_1C_2$, $B_2C_1'C_2'$, $B_2'C_1'C_2'$ - төрт тең бүйірлі үшбұрыш шығады.

$AA' \cap CC'$ жазықтығының A_2', B_1', B_2', A_2 нүктелері бір жағында A_1, B_2, B_1, A_1' екінші жағында жатыр A_2, A_2' нүктелерді B_1', B_2' нүктелерге, A_1, A_1' нүктелерді B_1, B_2 нүктелерге қоссақ тағы ба тең бүйірлі 4 үшбұрыш аламыз. Олар $A_2'B_1'B_2'$ $A_2B_1'B_2'$, $A_1B_1B_2$, $A_1'B_1B_2$.

Дәл осылар сияқты $BB' \cap CC'$ жазықтығының әр түрлі жағында жатқан нүктелерді қоссақ тағы да 4 тең бүйірлі үшбұрыш аламыз. Олар $C_1A_1A_2$, $C_1'A_1'A_2$, $C_2A_1'A_2'$, $C_2'A_1'A_2'$.

Бұл 12 тең бүйірлі үшбұрыштар өзара тең болады (5.12-сурет). Сонымен қатар мына 8 тең қабырғалы үшбұрыш шығады: $C_1B_1A_1$, $C_1B_1'A_2$, $C_2B_1A_1'$, $C_2B_1'A_2'$, $C_1'B_2A_1$, $C_1'B_2'A_2$, $C_2'B_2A_1'$, $C_2'B_2'A_2'$.

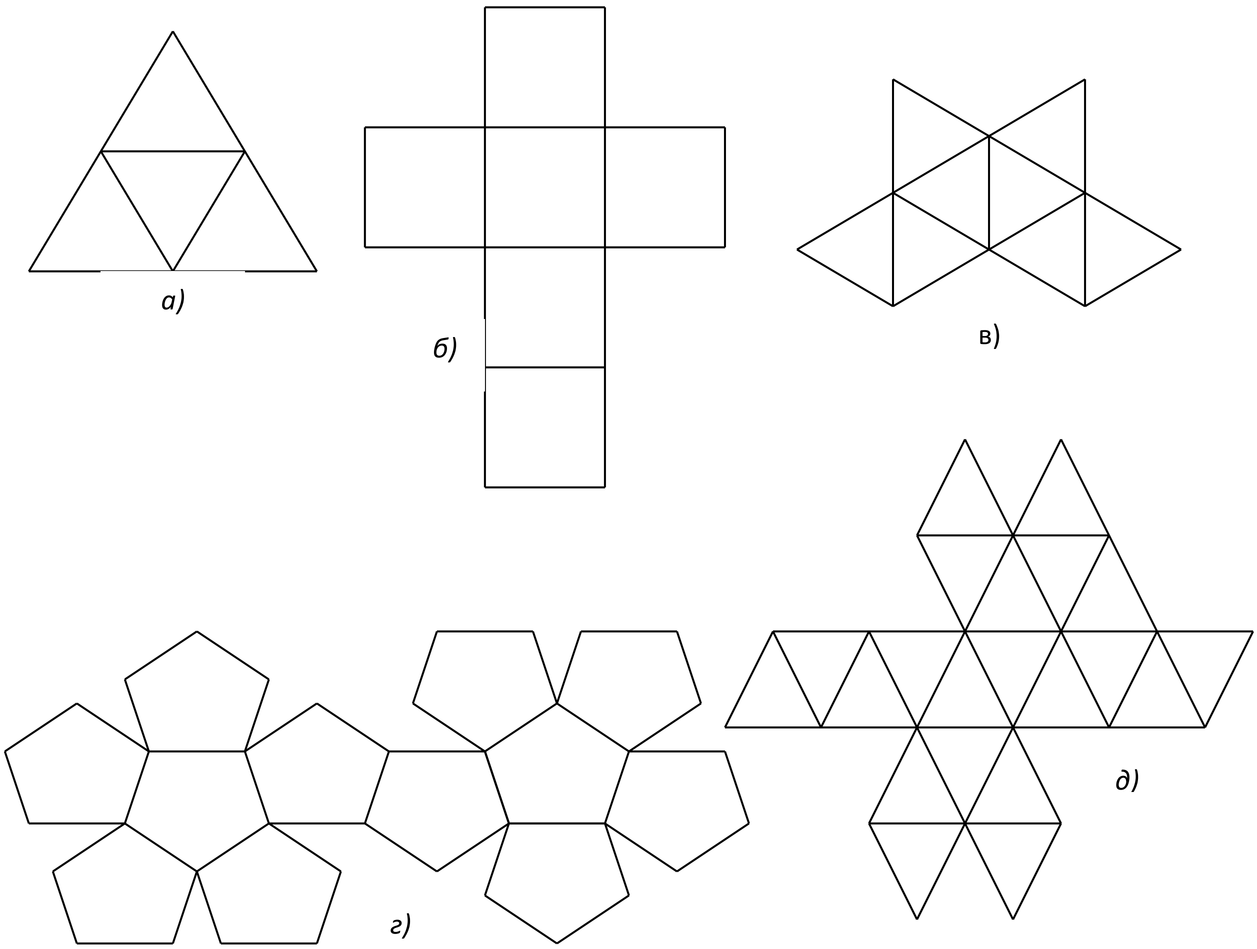
Сөйтіп 5.12-*б* суретте 20 жақты топологиялық дұрыс көпжақ болып шығады. Бұл көпжақ болу үшін *а=в* тең болу керек. Ол үшін $A_1B_1 = B_1B_2$ етіп алса болғаны. 5.12-*в* суреттегі тікбұрышты үшбұрышта $BB_1 = b,\ A_1A_0 = a = OA = OB$. Сонда $A_1B_1^{\,2} = A_1B^2 + BB_1^{\,2} = A_1A_0^{\,2} + A_0B^2 + BB_1^{\,2} = A_1A_0^{\,2} + (OB - OA_0)^2 + BB_1^{\,2} = a^2 + (a-b)^2 + b^2 = = a^2 + a^2 - 2ab + b^2 + b^2 = 2(a^2 - ab + b^2)$. $A_1B_1 = B_1B_2 = 2b$ дегендіктен $2(a^2 - ab + b^2) = 4b^2$ болады. Бұдан $b^2 + ab - a^2 = 0$. Бұл квадрат теңдеуі *в*-ға қарағанда шешсек $b = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \dfrac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}$, ал, *а* мен *в* кесінділер болғандықтан *а>0, в>0.* Сондықтан $b = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a$ (7). Егер (7) теңдік орындалатындай етіп салынса, онда икосаэдрдың барлық жақтары өзара тең дұрыс үшбұрыштардан болады және әр төбеде қиылысатын қырдың сандары бірдей болады. Сондықтан ол икосаэдр **дұрыс икосаэдр** болады.

О нүктесі ол көпжақтың барлық төбелерінен, жақтарынан және қырларынан бірдей қашықтықтарда жатады. Сондықтан ол икосаэдрді сырттай, іштей сызылған сфералардың және қырларына жанасатын сферанын центрі болады. Оны икосаэдрдің центрі дейді. Ол әрі симметрия центрінде болады.

5. Дұрыс додекаэдр. Додекаэдрді салу үшін дұрыс икосаэдрді салып, оның жақтарынын центрлерін өзара қосса дұрыс додекаэдр шығады. Икосаэдрдің центрі додекаэдрдін де центрі болады. Ол нүкте додекаэдрді сырттай, іштей сызылған сфераның және қырларына жанасатын сфераның центрі болады.

Сонымен дұрыс көпжақтардың да 5 түрі болады. Дұрыс *Ф* көпжақтың барлық екі жақты бұрыштары тең болады. Дұрыс көпжақтың жақтарының центрі тағы бір дұрыс көпжақтың төбелері болады. Мысалы, дұрыс тетраэдрдің, кубтың, дұрыс додекаэдрдің жақтарынын центрлері, сәйкесінше, тетраэдрдің, дұрыс октаэдрдің, дұрыс икосаэдрдің төбелері болады. Бұлардың керісі де дұрыс болады. Мұндай көпжақтарды **өзаралық көпжақтар** дейді.

Дұрыс көпжақтың суреттері 5.8-суреттегідей болады. Ал, олардың жазбалары 5.13-суреттегідей болады.



5.13-сурет

Есептер.

1-есеп. Дөңес n бұрышты көпбұрыштын ішкі бұрыштарының қосындысы $2d(n-2)$болатынын делелдендер.

Дәлелі. Математикалық индукция әдісімен дәлелдейік $n=3$ болса $2d(3-2)=2d$ теорема дұрыс. Теореманы $n \leq k-1$төбелі көпбұрыштар үшін дұрыс деп алып $n=k$төбелі көпбұрыш ішінде дұрыс екенін дәлелдейік. Ол үшін $A_1A_2....A_k$ дөңес көпбұрыштың кез-келген бір диогоналын жүргізейік. Ол диагоналдың барлық нүктесі берілген көпбұрышта жатады. Себебі, берілген көпбұрыш дөңес болғандықтан ол диагональ сол көпбұрышта толығымен жатады. Бірінші көпбұрыштағы төбе саны k_1, екінші көпбұрыштағы төбе саны k_2десек, онда $k_1 < k,\ k_2 < k$ және $k_1 + k_2 = k + 2$ (*) болар еді.

K_1 төбелі көпбұрыш үшін теорема дұрыс болғандықтан ол көпбұрыштын ішкі бұрыштарының қосындысы $2d(k_1-1)$. K_2 төбелі көпбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы $2d(k_2-1)$ болар еді. Сонда K төбелі көпбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы $2d(k_1-1)+2d(k_2-1)=2d(k_1+k_2-2)=2d(k-2)$ болады. Сөйтіп теорема K төбелі көпбұрыш үшін дұрыс екен. Сондықтан индукция ережесі бойынша кез-келген $n>k$ төбелі көпбұрыш ішінде дұрыс болады.

Сонымен дөңес көпбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы оның қабырғасының саны n-ге байланысты болады екен.

$$\sum\alpha_n = 2d(n-2) \quad (8).$$

Сонда ішкі бұрыштарының қосындысы үшбұрыш үшін $2d(3-2)=2d$, төртбұрыш үшін $2d(4-2)=4d$, 5 бұрыш үшін $2d(5-2)=6d$,... болады. Ал, көпбұрыштың әр төбесіндегі ішкі және сыртқы бұрыштардың қосындысы $2d$ болатындықтан, n қабырғалы (төбелі) көпбұрыштың сыртқы бұрыштарының қосындысы $2dn-(2d(n-2))=2dn-2dn+4d=4d$ болады. Сөйтіп, көпбұрыштың сыртқы бұрыштарының қосындысы, ол көпбұрыштың қабырға санына байланысты болмайды.

Егер дөңес көпбұрыш дұрыс көпбұрыш болса, барлық бұрыштар өзара тең болады. Сондықтан, n қабырғалы дұрыс көпбұрыштың бір бұрышы $\frac{2d(n-2)}{n}$-ге тең болады. Сондықтан дұрыс үшбұрыштың әрбір бұрышы $\frac{2d(n-2)}{3}=60^0$ дұрыс төртбұрыштың (квадраттың әр бұрышы $\frac{2d(n-2)}{4}=90^0$ дұрыс бесбұрыштың әрбір бұрышы $\frac{2d(5-2)}{5}=98^0$ дұрыс алтыбұрыштың әрбір бұрышы $\frac{2d(6-2)}{6}=\frac{8d}{6}=120^0$ болады.

2-есеп. Дөңес көпбұрыштың ең көп болғанда қанша сүйір бұрышы болуы мүмкін.

Шешуі: Дұрыс көпбұрыштың барлық сыртқы бұрыштарының қосындысы *4d* болады. Ал, көпбұрыштың әр төбедегі ішкі және сыртқы бұрышынын қосындысы *2d*-ға тең болады. Егер *n* қабырғалы көпбұрыштың 4 ішкі бұрышы сүйір болса онда бұларға сыбайлас 4 сыртқы бұрыштың төртеуі де доғал болады да олардың қосындысы *4d* көп болып кетеді. Сондықтан сүйір бұрыш ең көп болғаны 3-еу болу керек.

3-есеп. Үш жақты бұрыштың бір жазық бұрыш оның қалған екі жазық бұрыш қосындысынан кіші болатынын дәлелдеу керек.

Дәлелі. *SABC* үшжақты бұрыш берілсін. Егерде ол үшеуі тең болса, теореманын дұрыстығы айқын $\alpha<\alpha+\alpha$ болады (5.14-сурет). $\angle ASC>\angle BSC$ болсын. *ASC* жазықтығында $\angle BSC=\angle CSD$ салайық. $SD=SB$ болсын. Онда $\Delta DSC=\Delta BSC$ болар еді де $DC=BC$ болар еді. Ал, $AC<AB+BC,\ \ AA+DC<AB+BC$ дан $AD<AB$ болады. Сондықтан

$\Delta ADS, \Delta ABS$ үшбұрыштардың $\angle ASD < \angle ASB$ болатыны шығады. Бұған $\angle DSC = \angle BSC$ бұрыштарды мүшелеп қоссақ. $\angle ASD + \angle DSC < \angle ASB + \angle BSC, \quad \angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$ болып есеп дәлелденеді.

4-есеп. Үш жақты бұрыштың жазық бұрыштары α, β, γ болса, ал γ бұышқа қарсы жатқан екі жақты бұрыш φ болса, онда $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\varphi$ (9) болады.

Дәлелі. $S\ abc$ үшжақты бұрыш берілсін (5.15-сурет). Жазық бұрыштар $\angle(b,c) = \alpha, \ \angle(b,a) = \gamma, \ \angle(a,c) = \beta$ болсын. $SC = 1$ болатын $C \in c$ нүктеден SC-ға жақта жататын CA_1CB түзулерін жүргізейік $SB \perp SC, \ CC \perp SC, \ B \in b, \ A \in a.$ ΔABC-ға, ABS-ке косинус теоремасын қолдансақ $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \cdot CA \cdot CB \cdot \cos\varphi$, $AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2 \cdot SA \cdot SB \cdot \cos\gamma$. Ал, $SC = 1$ болғандықтан

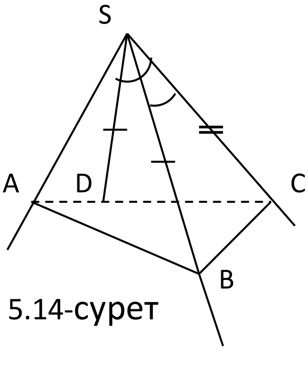
$BC = tg\alpha, \ AA = tg\beta: \quad \cos\beta = \dfrac{SC}{SA} = \dfrac{1}{SA}; \quad \cos\alpha = \dfrac{SC}{SB} = \dfrac{1}{SB}$. Сонда

$AB^2 = tg\beta^2 + tg^2\alpha - 2tg\alpha tg\beta\cos\varphi = \dfrac{1}{\cos^2\beta} + \dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 2 \cdot \dfrac{1}{\cos\beta} \cdot \dfrac{1}{\cos\alpha} \cdot \cos\gamma$. Ал,

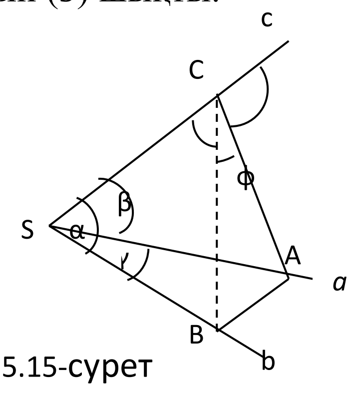
$\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - tg^2\alpha = 1, \quad \dfrac{1}{\cos^2\beta} - tg^2\beta = 1$ болатындықтан

$-2tg\alpha tg\beta\cos\varphi = 1 + 1 - 2\dfrac{1}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{1}{\cos\beta}\cos\gamma$,

$-2\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}\cos\varphi = 2 - \dfrac{2}{\cos\alpha\cos\beta}\cos\gamma, \ -2\sin\alpha\sin\beta\cos\varphi = 2\cos\alpha\cos\beta - 2\cos\gamma$, $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\varphi$ болып (9) шықты.



5.14-сурет



5.15-сурет

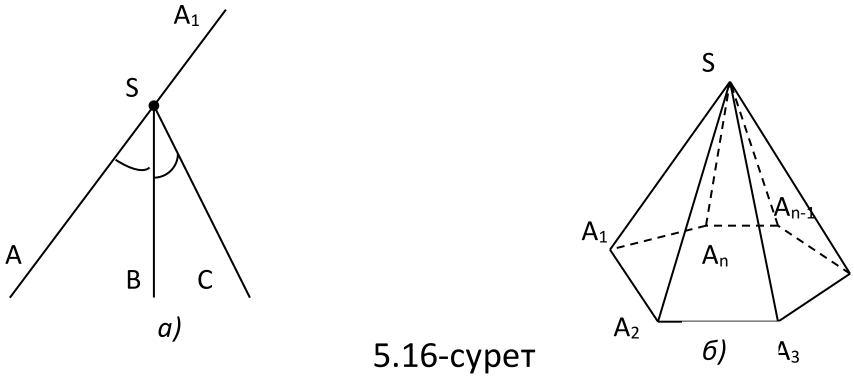
5-есеп. Үш жақты бұрыштың екі жақты бұрыштары φ, ψ, θ болса, онда φ-ге қырлы жазық бұрыш γ болсын, онда $\cos\varphi = -\cos\psi\cos\theta + \sin\psi\sin\theta\cos\gamma$ (10).

Дәлелі 4 есептегідей.

6-есеп. Дөңес көпжақтың жазық бұрыштарының қосындысы 360^0-тан кем болатынын дәлелдеңдер.

Дәлелі. Алдымен үш жақты бұрышты қарастырайық (5.16-сурет). SA қырын созайық. Сонда $SABC$ үш жақты бұрыштан өзге $SA'BC$ үш жақты бұрыш шығады. Үш жақты бұрыштың бір жазық бұрышы қалған екі жазық бұрыш қосындысынан кіші болатындықтан (3-есеп) $SA'BC$ үш жақты бұрыштан $\angle BSC < \angle BSA' + \angle CSA'$. Бұдан $\angle BSC < \left(180^0 - \angle ASB\right) + \left(180^0 - \angle ASC\right)$, $\angle BSC + \angle CSA + \angle ASB < 360^0$ есеп үш жақты бұрыш үшін дұрыс екен.

Енді кез-келген дөңес көпжақ үшін дұрыстығын дәлелдейік. $SA_1A_2...A_n$ көпжақ берілсін. Бұл дөңес болғандықтан $A_1A_2...A_n$ көпбұрыш дөңес болады. S төбедегі жазық бұрыштар қосындысы θ болсын. Берілген көпжақтың жазық бұрыштарынын қосындысы S төбеде қиылысатын жақтардың (үшбұрыштардың) жазық бұрыштарының қосындысымен $A_1A_2...A_n$ көпбұрышын бұрыштарының қосындысынан тұрады: $180^0 n + 180(n-2) = 360^0 n - 360$.



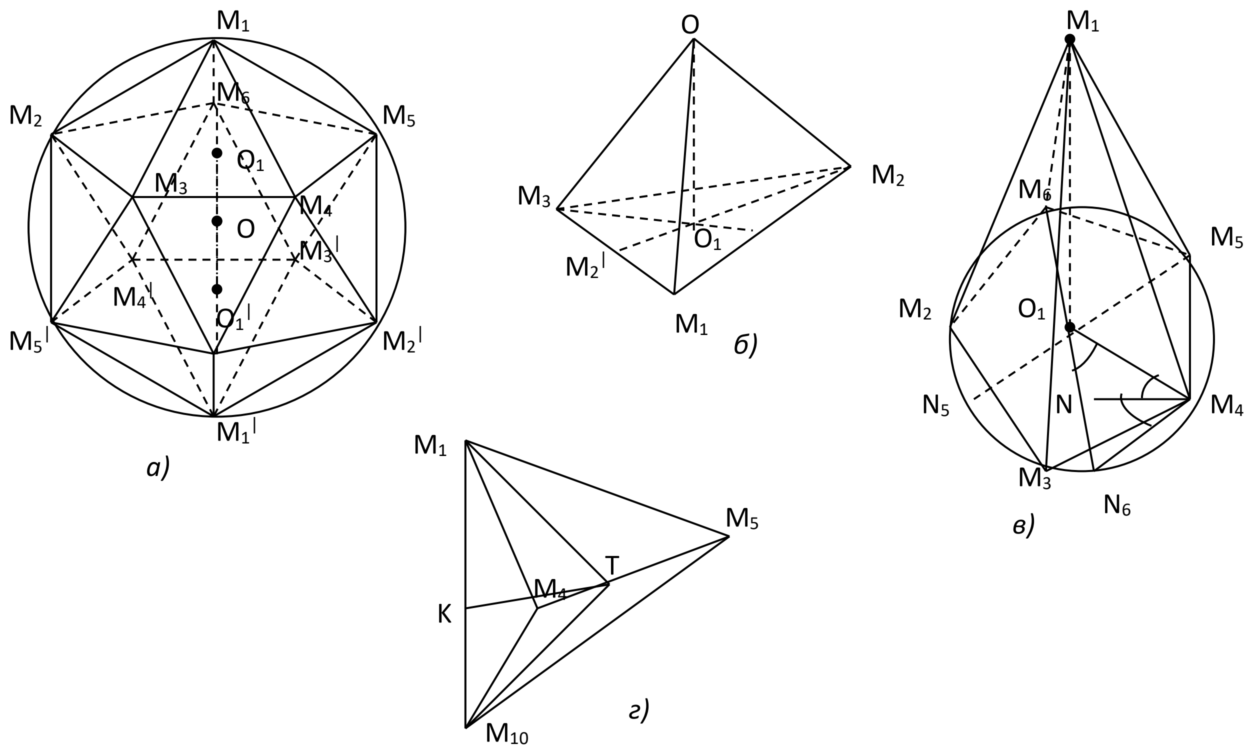
5.16-сурет

Ал, $A_1A_2...A_n$ төбелі үшжақты бұрыштардың әрқайсысынан жазық бұрышы қалған екі жазық бұрыштардың қосындысынан кем болатындықтан $180(n-2) < 180^0 n - \theta$. Бұдан $\theta < 360^0$ болып есеп талабы дәелденеді.

7-есеп. Дұрыс икосаэдрдің қыры a болса, онда оның бетінін ауданы, көлемі, екі жақты бұрышы, іштей және сырттай сызылған радиустары неге тең болады.

Шешуі: Дұрыс икосаэдрдің әрбір жағы тең қабырғалы үшбұрыш болады. Бір жағын $M_1M_2M_3$ дейік(5.17-*а* сурет). Бұл жақтардың төбелеріне икосаэдр центрі O-дан қашықтығы икосаэдрді сырттай сызылған сферанын радиусы болады. $OM_1 = OM_2 = OM_3 = ... = R$ дейік. Ал, әрбір жақтың O-дан қашықтығы іштей сызылған сферанын радиусы болады, оны r дейік. Ол жақты және икосаэдр центрін жеке қарастырайық (5.17-*б* сурет). Бұл суретте $OM_1 = R$ сырттай сызылған, $OO_1 = r$ іштей сызылған сфера радиусы болады. Ал, O_1 үшбұрыш медианаларынын қиылысу нүктесі болады, ал $M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4 = a$.

Сонда $M_2M_2^{'} = \sqrt{M_1M_2^{\ 2} - M_1M_2^{'\ 2}} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;
$M_2^{'}O_1 = \frac{M_2^{'}M_2}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $M_2O_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $OO_1 = \sqrt{OM_2^{\ 2} - O_1M_2^{\ 2}}$; Бұдан $r = \sqrt{R^2 - \frac{3a^2}{9}}$ (*) $\Delta M_1M_2M_3$ ауданы $S_\Delta = \frac{1}{2}M_1M_3 \cdot M_2^{'}M_2 = \frac{1}{2}a\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Икосаэдрде мұндай үшбұрыш (жақ) саны – 20. Сондықтан икосаэдр бетінің ауданы $S = S_\Delta \cdot 20 = 20\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 5a^2\sqrt{3}$. Дұрыс икосаэдрдегі $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ пирамиданы жеке бөліп алайық (*в*-сурет). Оның табаны *а* қабырғалы дұрыс бесбұрыш. Оның центрі $O_1 = M_6N_6 \cap M_5N_5$ болады M_6, N_5 шектерді іштей сызылған дұрыс 10 бұрыштың төбелері. Сонда $\angle N_6O_1M_4 = \frac{360^0}{10} = 36^0$, $\angle O_1N_6M_4 = \angle O_1M_4N_6 = 72^0$ тең болады. NM_4 биссектрисы болсын. Сонда $\angle N_6M_4N = \angle NM_4O_1 = \angle M_4O_1N_6 = 36$ болатындықтан $\Delta N_6M_4N \infty \Delta N_6M_4O_1$. Бұдан $\frac{N_6M_4}{N_6N} = \frac{N_6O_1}{N_6M_4}$, $N_6M_4 = x$, $N_6O_1 = r_0$ десек. $N_6N = r_0 - x$ болар еді де $\frac{x}{r_0 - x} = \frac{r_0}{x}$. Бұдан $x^2 + r_0x - r_0^{\ 2} = 0$. Бұдан $x_{1,2} = \frac{-r_0 \pm \sqrt{r_0^{\ 2} + 4r_0^{\ 2}}}{2} = \frac{-r_0 \pm r_0\sqrt{5}}{2}$ $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}r_0$ бұл дұрыс 10 бұрыштың бір қабырғасы, оны $a_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}r_0$ (**) дейік. Сонда қабырғаны екі еселеу формуласы $a_{2n} = r_0\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ (***) болып шығады. Бізге $a_5 = a$. Сонда бесбұрышты сырттай сызылған шеңбер радиусы $r_0 = \frac{a}{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}$ болады. Бұл 5.17-*а* дағы $O_1M_5 = r_0$. Сонда $O_1M_1 = \sqrt{M_1M_5^{\ 2} - O_1M_5^{\ 2}} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{5-\sqrt{5}}} = a\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}$, 361-*а* суреттен $M_1O_1 \cdot M_1M_7 = M_1M_5^{\ 2}$ болатындықтан $M_1M_7 = 2R$ екенін ескерсек $a\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}} \cdot 2R = a^2$.



5.17-сурет

Бұдан $R = \dfrac{a}{2\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}} = \dfrac{a}{2\sqrt{\dfrac{10-2\sqrt{5}}{20}}} = \dfrac{a}{2\sqrt{\dfrac{10-2\sqrt{5}}{20}}} = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$;

Сонымен $R = \dfrac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$. Сөйтіп икосаэдрді сырттай сызылған сфераның радиусы $R = \dfrac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ болады екен.

Іштей сызылған сфера радиусы (*) бойынша

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{16}\left(10+2\sqrt{5}\right) - \frac{3a^2}{4}} = a\sqrt{\frac{30+6\sqrt{5}-16}{48}} = a\sqrt{\frac{14+6\sqrt{5}}{48}} = \frac{a}{4}\sqrt{\frac{14+6\sqrt{5}}{3}} = \frac{a}{4}\sqrt{\frac{9+6\sqrt{5}+5}{3}} =$$

$$= \frac{a}{4}\sqrt{\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)^2}{3}} = \frac{a\left(3+\sqrt{5}\right)}{4\sqrt{3}}, \quad r = \frac{a\left(3+\sqrt{5}\right)}{4\sqrt{3}}$$

. 5.17-*б* суреттегі үшбұрышты пирамида көлемі

$$V_0 = \frac{1}{3}S_\Delta H = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot M_1M_3\cdot M_2M_2^{'}\cdot O_1O = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a\frac{a\sqrt{3}}{2}\frac{a\left(3+\sqrt{5}\right)}{4\sqrt{3}} = \frac{a^3\left(3+\sqrt{5}\right)}{48}.$$

Мұндай тетраэдр саны икосаэдрде 20 (жақта20). Сондықтан икосаэдр көлемі

$V = V_0 \cdot 20 = \frac{20a^3\left(3+\sqrt{5}\right)}{48} = \frac{5a^3\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}$. Екі жақты бұрышты табу үшін 5.17 – *а* суреттегі іргелес $M_1M_4M_5, M_4M_5M_{10}$ жақтарды жеке қарастырайық (5.17-*б* сурет) M_1 мен M_{10}нан M_4M_5-ке перпендикуляр жүргзсек, олар M_4M_5-тен қақ ортасы T нүктеге түседі. Сонда іздеген екі жақты бұрыш $\angle M_1TM_{10} = \varphi$ болады. Сонда $\sin M_1TK = \frac{M_1K}{M_1T}$; $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{M_1K}{M_1T} = \frac{M_1M_{10}}{2\cdot M_1T}$ 361- *а* суреттен

$$M_1M_{10} = \sqrt{M_1M_7{}^2 - M_7M_{10}{}^2} = \sqrt{(2R)^2 - a^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(10+2\sqrt{5}\right)a^2 - a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \frac{a}{2}\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2} =$$
$$= \frac{a\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}, \qquad M_1T = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

орындарына қойсақ $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{a\left(\sqrt{5}+1\right)}{2} : \frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}$ $\varphi = 2\arcsin\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}$.

Сонымен икосаэдрдің: $S = 5a^2\sqrt{3}$. Көлемі $V = \frac{5a^3\sqrt{3+\sqrt{5}}}{12}$. Сырттай сызылған сфера радиусы $R = \frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$. Іштей сызылған сфера радиусы $r = \frac{a\left(3+\sqrt{5}\right)}{4\sqrt{3}}$. Екі жақты бұрышы $\varphi = 2\arcsin\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}$ болады екен.

Икосаэдрдің қыры *а,* іштей сызылған сфера радиусы *r*, сырттай сызылған сфера радиусы *R* арасында мынадай қатыс болады $a^2 = 3\left(R^2 - r^2\right)$.

Бет ауданы $S = 15\sqrt{3}\left(R^2 - r^2\right)$.

5 тарауды қайталауға арналған сұрақтар мен есептер.

1. Көпжақты бет деген не? Оның төбесі, жағы, қыры, ішкі қыры, шекаралық қыры деп нені айтады?
2. Көпжақты беттейтін шекарасы деп нені айтады?
3. Қандай көпжақты бет жай көпжақты бет делінеді.
4. Көпжақты беттейтін жай сынық сызығы, тілігі деп нені айтады. Тілік үштары қайда жатуы керек.
5. Бір байланысты, көп байланысты көпжақты бет деген не? Бір байланысты бетті оның тілігі қандай көпжақты беттерге бөледі.
6. Көпжақты беттін Эйлер характеристикасы деп нені айтады. Бір байланысты беттін Эйлер характеристикасы неге тең?
7. Ашық шардың, шардың, сферанын айырмашылығы қандай?
8. Евклидтік E_3 кеністіктін M нүктесінен X жиынның ішкі, шекаралық, сыртқы нүкте болу анықтамалары қандай?
9. Ашық жиын, байламды жиын, облыс деп нені айтады?
10. Геометриялық дене анықтамасы. Геометриялық дене болатын, болмайтын фигураларды атаңыз.

11. Қандай дене дөңес делінеді. Дөңес денелерді жасау туралы теоремалар және дөңес дененің қасиеттері.
12. Тұйық көпжақ деп, көпжақ деп нені айтамыз.
13. P тұтқасы, K кщнтурлы $Q_{p,\kappa}$ көпбейнелік деген не? Көпбейнеліктін тегі, контурынын саны деп нені айтады. Мысал.
14. Көпжақтың тегі деп нені айтады?
15. Жай көпжақ анықтамасы қандай?
16. Көпжақтың тілігі деп нені айтады. Қандай көпжақ нөлтекті делінеді.
17. Көпжақ туралы Эйлер теоремасы.
18. Дөңес көпжақ анықтамасы. Мысал.
19. Көпжақты жіктеу арқылы дөңес көпжаққа келтіру.
20. Дөңес көпжақтың қасиеттері.
21. Дөңес көпжақтың жай көпжақ болатындығы. Дөңес көпжақ өзінің жақтарымен анықталатын жарты кеністіктердің қимасы екендігі.
22. Көпжақтар туралы Коши, Александров теоремалары қалай тұжырымдалады (дәлелсіз)
23. Топологиялық дұрыс көпжақ анықтамасы қандай?
24. Топологиялық дұрыс көпжақтың бір төбеден шығатын жақтарының саны – m, әр жақтағы төбе саны K –мен дұрыс көпжақтың барлық қырларының соның байланыстарының формула қандай және қорытып шығару.
25. Топологиялық дұрыс көпжақтың 3 түрі болатынын дәлелдеу.
26. Дұрыс көпжақ анықтамасы, оның топологиялық дұрыс көпжақ пен байланысы, айырмасы.
27. Дұрыс тетраэдр, куб, дұрыс октаэдр, дұрыс икосаэдр, дұрыс додекаэдр және оларды салу.
28. Әр жақтағы қыр саны тақ болатын тақ жақты жай көпжақтың болмау себебін түсіндір.
29. Әрбір жай көпжақтың қырларының сан 6-дан кем болмайтынын негіздеңдер.
30. Дұрыс тетраэдрді жазықтықпен қалай қиса қимада квадрат шығады.
31. Кубты жазықтықпен арқылы төмендегі фигураларды шығарып алуға болады ма?

- тік не доғал бұрышпен үшбұрыш
- квадрат, тік төртбұрыш, ромб
- трапеция
- дұрыс бесбұрышпен көпбұрыш
- қандайда бір жетібұрышты көпбұрыш

32. Мына теңдіктермен қандай облыс анықталады:

$z \geq 0,\ z-10 \leq 0,\ x-5 \geq 0,\ x-7 \leq 0,\ y-3 \geq 0,\ y-5 \leq 0$

33. Тікбұрышты координата жүйесінде төбелері *A(3,3,3), B(3,-3,-3), C(-3,3,-3), Д(-3,-3,3)* нүктелері болатын фигура қандай фигура (дене) болады.

34. *A(0,2,0), B(0,0,2), C(5,0,0),* $A_1(5,2,0)$, $B_1(5,0,2)$ болса $ABOA_1B_1C$ призманың аналитикалық өрнегі қандай болады.

35. Дұрыс көпжақтардың Эйлер характеристикаларын анықтаңдар.

36. Дұрыс тетраэдрдің, кубтың, дұрыс додекаэдрдың, дұрыс октаэдрдың қырларына *a* деп алып олардың

а) бүйір жағының ауданың

б) көлемін

в) іштей сызылған сфераның радиусын

г) сырттай сызылған сфераның радиусын

д) екі жақты бұрышын табыңыз

37. Дұрыс көпжақтардың моделін жасаңдар.

38. Дұрыс көпжақтардың жазбалары қандай болады?

Пайдаланылған әдебиеттер:

1. Л.С.Атанасян, В.Т.Базылев. Геометрия. Часть II.М.: «Просвящение» 1987 г.
2. Л.С.Атанасян, Н.С.Денисова. Многогранники. М.: «Просвящение» 1993 г
3. Н.И.Гусева, Н.С.Денисова, О.Ю.Тесля. Сборник задач по геометрии. Часть II.М.: «КноРус» 2012 г.
4. Бишок.Р.Л., Криттенден Р., Геометрия многообразии. М.1998.
5. П.К.Рашевский. Курс дифференциальной геометрии. 1956.
6. А.В.Погорелов. Лекции по дифференциальной геометрии. Харьков, 1961.
7. А.В.Погорелов. Дифференциальная геометрия. М 1974, 1969.
8. А.П.Норден. Краткий курс дифференциальной геометрии. М., 1958.
9. И.Я.Бакельман. Высшая геометрия. М. 1986
10. Н.В.Ефимов. Высшая геометрия. М., 1961г.
11. Сборник задач по геометрии. Часть II. (под редакции Л.С. Атанасяна) М. 1975г.
12. Б.С. Моденов. Сборник задач по дифференциальной геометрии. М.: 1948.
13. Э. Р. Розендорн. Задачи по дифференциальной геометрии. М. 1971г.
14. Сборник задач и упражнений по дифференциальной геометрии. (Под редакцией Воднева В.Т.) Минск.1970г.
15. М.Абенова Дифференциалдық геометрия және топология. Шымкент, 2011.

Құрбанхожа Абдрахманов

Дифференциалдық геометрия және топология элементтері (Оқу құралы)

Компьютерде терген және рәсімдеген - Бакирова Н.К.

Таралымы 200 дана.