Абдрахманов Қ., Кадеев И.У., Рахымбек Д., Мадияров Н.

ЖОҒАРЫ ГЕОМЕТРИЯ -1

(Аналитикалық геометрия)

ШЫМКЕНТ -2020

УДК 514.18(0758)
ББК 22.151.3я73

Оқу құралын басуға Оңтүстік Қазақстан мемелекеттік педагогикалық университетінің оқу әдістемелік кеңесі ұсынған, хаттама №5, 25.04.2019 ж.

Пікір жазғандар:

Қаратаев Ж.Қ. –ф.м.ғ.к., доцент, М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті

Қырғызбаев Ж.Қ. - ф.м.ғ.к., доцент, Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік педагогикалық университеті

Абдрахманов Қ., Кадеев Н.У., Рахымбек Д., Мадияров Н.
Жоғары геометрия – 1 : оқу құралы/ Қ.Абдрахманов, Н.У. Кадеев, Д.Рахымбек, Н.Мадияров. - Шымкен, 2020.- 307 б.

ISBN-

Оқу құралында векторлық алгебра элементтері, жазықтықтағы және кеністіктегі аналитикалық геометрия, көп өлшемдік кеністіктер, квадратық форма және квадрикалар теориясынан қысқаша лекциялар және есептер шығаруға мысалдар мен жаттығулар жинағы берілген.

Ұсынылған оқу құралы 5В010900 -“Математика”, 5В02600 – “Математика-физика”, 5В012700 -“Математика-информатика” мамандықтарының студенттері мен геометрияны тереңдетіп оқитын жоғары оқу орындарының студенттері мен оқытушыларына арналған.

КІРІСПЕ

Геометрия пәні шартты түрде екіге бөлінеді: Біріншісі - элементар геометрия, орта мектепте оқытылатын геометрия пәні, оның өзі планиметрия және стереометрия деп аталатын екі бөлімнен тұратынын білеміз. Екіншісі- жоғары геометрия. Жоғары геометрия бірнеше бөлімдерден тұрады: аналитикалық геометрия; проективтік геометрия; геометрия негіздер; сызба геометрия (кескіндеу әдістері); көпжақтар геометриясы; сфералық геометрия сияқты басқада классикалық курстардан тұрады. Жоғары геометрия университеттердің математикалық мамандықтарының, жоғары техникалық мамандықтарының студенттеріне оқытылды. Кейбір мамандықтарда оқитын студенттер үшін, жоғары математика курсының құрамында қысқаша беріледі.

Жоғары геометриядан орыс тілінде жазылған көптеген оқулықтар мен оқу құралдары баспадан әр-түрлі мазмұнда шығарылған. Олардың тізімі пайдаланылған әдебиеттерде келтірілген [1-13]. Жоғары математикадан қазақ тілінде жазылған толыққанды оқу құралы жоқ десе болады. Осы кемшілікті толтыру үшін Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік педагогикалық университетінің бір топ оқытушылары, өздерінің көпжылғы тәжірибесін пайдаланып, орыс тілінде жарық көрген жоғарыда атап өтілген оқулықтармен оқу құралдарын негізге алып жоғары геометриядан оқу құралын ұсынады.

Осы жұмысты алғашқы болып қолға алған және қолжазбаларын ұсынған, қадірменді ұстазымыз, марқұм И.У. Кадеевтің еңбегі орасан үлкен екенін атап өткіміз келеді.

Жоғары геометрия курсын үш кітаптан тұрады деп жоспарладық. Ұсынылып отырған бірінші кітап аналитикалық геометрия курсын толық қамтиды. Ал жоғары геометрияның басқа бөлімдері 2-ші және 3-ші кітап түрінде келешекте баспаға беруге жоспарлануда.

Жоғары геометрия – I аналитикалық геометрияның барлық теориялық материялдарын толық қамтиды. Сондай ақ көп өлшемдік аффиндік кеністіктің қасиеттері мен квадраттық форма және квадриканын теориялық мәселелерін қамтыған.

Әрбір тарауда, сол тарауға тиісті теориялық мәселелер баяндалып көптеген түйінді тұжырымдар мен теоремалардың дәлелдемелері келтірілген және олардың мәндерін аша түсетін мысалдар мен жаттығулар орындалған. Тарау соңында теориялық мәселелерді қайталауға арналған сұрақтар келтіріліп, есептер берілген.

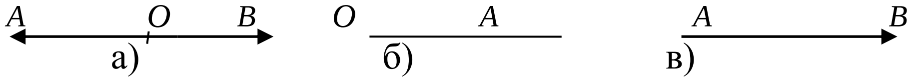
I тарау. Векторлық алгебра элементтері.

1. Вектор және оған қолданылатын сызықтық амалдар.

1.1. Эквивалентті кесінділер. Геометрияда нүктелердің кез – келген жиынын фигура дейді. Нүкте, түзу, жазықтық қарапайым фигураларға жатады.

Түзу бойындағы кез келген нүкте ол түзуді төбесі осы нүкте болатын екі сәулеге бөледі. Олар қарама – қарсы бағытта болады.

1-а суретте төбесі О болатын екі сәуле берілген. Оларды әдетте $[OA),[OB)$ түрінде белгілейді.



1-сурет

Түзудің кез келген А,В екі нүктесі мен олар арасындағы нүктелер жиынын кесінді дейді, және оны $[AB]$ немесе жай ғана АВ деп белгілейді. (1-б сурет)

Ұштары белгілі тәртіпте (ретте) қарастырылатын, яғни қай ұшы алғашқы, қай ұшы соңғы нүкте екені көрсетілген кесіндіні бағытталған кесінді дейді. Суретте соңғы нүктеге стрелка қойылады (1-в сурет).

Бағытталған кесіндіні екі әріппен, үстіне сызықша қойып былайша $\overrightarrow{AB}$ белгілейді. Бұл кезде А алғашқы, В соңғы нүкте деп белгілейді.

Бағытталған $\overrightarrow{AB}$ кесіндінің ұзындығы деп, кәдімгі АВ кесіндінің ұзындығын айтады және оны $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ деп белгілейді.

Кесінділер бағыттас дегенді қысқаша $\uparrow\uparrow$, қарама – қарсы бағытта дегенді $\uparrow\downarrow$ символымен белгілейік.

Егер $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}$ бағытталған кесінділер әрі бағыттас, әрі ұзындықтары тең болса, онда оларды эквивалентті кесінділер дейді, оны $\overrightarrow{AB}\sim\overrightarrow{DC}$ деп белгілейді.

Сонымен $\overrightarrow{AB}\sim\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow$ АВ=ДС, $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{DC}$ (1-1).

Бағытталған кесінділердің эквивалентті болу белгісі төмендегі теоремаларда көрсетілгендей.

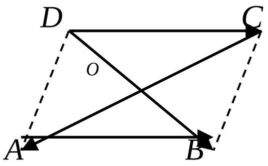
1-1 Теорема. Бағытталған $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}$ кесінділер эквивалентті болу үшін АС мен ВД кесінділердің орталарының беттесуі қажетті және жеткілікті.

Дәлелі. $\overrightarrow{AB}$ мен $\overrightarrow{DC}$ бағытталған кесінділер эквивалентті болсын, онда АВ=ДС, $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{DC}$ болуы керек (2-сурет).

Ал, төртбұрыштың бір қарама – қарсы қабырғалары әрі параллель, әрі тең болса, онда ол төртбұрыш параллелограмм болады. Демек АВСД параллелограмм. Ал, параллелограмның диагоналдары бірін – бірі қақ бөледі: ВО=ОД, АО=ОС.

Ал, бұл АС мен ВД – ның қақ орталары беттеседі деген сөз.

Керісінше АС мен ВД – ның қақ орталары беттессін, онда А мен С,Д мен В нүктелер О нүктеге қарағанда симметриялы. Сондықтан АВСД параллелограмм болады. Демек, АВ мен ДС әрі параллель, әрі тең. Сондықтан олар эквиваленнті болады.



2-сурет

1.2 <u>Вектор ұғымы.</u> W – бағытталған барлық кесінділер жиыны болсын. Бұл жиынға эквиваленттік қатысты ендірейік. Онда W жиыны эквивалентті класына бөлінер еді әр кластың векторлары өзара эквивалентті, ал әртүрлі кластың векторлары өзара эквивалентті емес болады. Сол әрбір эквивалентті кесінділер класын <u>вектор</u> дейді, ол кластың кез келген бағытталған кесіндісін ол вектордың <u>өкілі</u> дейді.

Сонымен вектор кез келген екеуі эквивалентті болатын яғни бағыттары бірдей, ұзындықтары теңдей болатын кесінділер жиыны. Векторды бір әріппен $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}$ түрде немесе ол вектордың өкілі болатын бағытталған кесінді арқылы екі әріппен, төбелеріне стрелка қойып $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}$ түрінде белгілейді.

<u>Вектор ұзындығы</u> деп оның өкілі болатын бағытталған кесіндінің ұзындығын айтады, оны $\left|\overrightarrow{AB}\right|, \left|\overrightarrow{CD}\right|, \left|\vec{a}\right|, \left|\vec{b}\right|$ түрінде белгілейді.

Ұзындығы 1-ге тең болатын векторды бірлік вектор дейді.

Алғашқы және соңғы нүктесі беттесетін векторды нөлдік вектор дейді, оны $\vec{O}$ арқылы белгілейді. Оның бағыты анықталмаған болады, ұзындығы о-ге тең болады.

$\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}$ нөлдік векторлар болады.

Екі вектор <u>тең</u> делінеді, егерде олардың бағыттары бірдей, ұзындықтары теңдей болатын болса:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b},\ \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|, \quad (1\text{-}2)$$

1-2. Теорема. Егер $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ болса, онда $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ болады (2-сурет). Дәлелі $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ болғандықтан $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$, АВ=ДС. Демек, АВСД параллелограмм болады. Сондықтан АД=ВС,АД||ВС болады. Ал, бұл $\overrightarrow{BC} \underset{=}{\omega} \overrightarrow{AD}$ деген сөз. Сондықтан $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ болады.

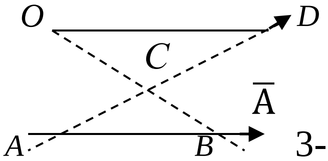
1-3. Теорема. Кез келген $\vec{a}$ вектор мен О нүкте үшін $\overrightarrow{OD} = \vec{a}$ болатын бір, тек бір, Д нүкте болады.

Дәлелі. $\vec{a}$ вектордың өкілі $\overrightarrow{AB}$ бағытталған кесінді болсын (3-сурет).

ОВ кесіндінің С қақ ортасы болсын. С-ға қарағанда А-ға симметриялы нүкте Д болсын. Сонда О мен В, А мен Д нүктелері С-ға қарағанда өзара симметриялы болғандықтан ОД=АВ, ОД$\parallel$АВ болады. Сөйтіп $\overrightarrow{OD}$

мен $\overrightarrow{AB}$ эквивалентті кесінділер болады. Сондықтан $\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{AB},$ бір вектор болады, яғни $\overrightarrow{OD}=\vec{a}$ болады.

Егер $\overrightarrow{OD_1}=\vec{a}$ болатын Д – дан өзге Д$_1$ нүкте бар десек $O\bar{D} = \bar{a}$ болғандықтан 1-2 Теорема бойынша $\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{OD}=\vec{a}$ болады.



3-сурет

Ал, бұл Д мен Д$_1$ беттеседі, Д=Д$_1$ деген сөз. Сонымен О нүктеден $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ векторға тең болатын тек бір вектор салуға болады.

О нүктеден мұндай болатын $\vec{a}$ векторды салу $\vec{a}$ векторын О нүктеге параллель жылжыту немесе О нүктеден $\vec{a}$ векторды өлшеп салу дейді. Дәлелденген теорема бойынша кез келген векторды кез келген нүктеден кез келген бағытта өлшеп салуға болады және ондай өлшеп салу бір мәнді болады.

Бір түзуде немесе өзара параллель түзулерде жататын векторларды өзара коллинеар векторлар дейді. Ондай векторлар не бағыттас не қарама – қарсы бағытта болады, яғни параллель болады. Сондықтан $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ коллинеар болса $\vec{a} \parallel \vec{b}$ деп жазатын боламыз.

Бір жазықтыққа параллель болатын векторларды жазықтыққа коллинеар векторлар дейді. Ондай векторларды параллель жылжыту арқылы бір жазықтыққа көшіруге болады. Сондықтан коллинеар векторларды бір түзуде жатыр, коллинеар векторларды бір жазықтықта жатыр деп қарастыруға болады.

Ескерту. Табиғатта, техникада, практикалық өмірде түрлі – түрлі шамалар кездеседі. Олардың кейбірі (мысалы масса, уақыт, тығыздық, көлем т.б.) өздерінің сан мөлшерімен толық анықталса, кейбірі (мысалы күш, жылдамдық, үдеу т.б) толық анықталу үшін сан мөлшерімен қатар бағытын білуді қажет етеді.

Бұл шамалардың алғашқысын скаляр шамалар, соңғысын векторлық шамалар дейді.

1-3. Векторларды қосу. Векторлардың қосындысын вектор болады.

Екі $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлардың қосындысы деп төмендегіше анықталатын $\vec{c}$ векторын айтады.

- алдымен кез келген А нүктеден $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ векторы салынады.

- содан соң В нүктеден $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ векторы өлшеп салынады.

Сонда А мен С-ны жалғайтын және А дан С-ға қарай бағытталған $\overrightarrow{AC}$ векторды берілген $\vec{a}, \vec{b}$ векторлардың қосындысы дейді де $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ немесе $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ деп жазады.

Өлшеп салуда В,С нүктелер бір мәнді анықталатындықтан векторлар қосындысы да бір мәнді анықталуын (4- а сурет).

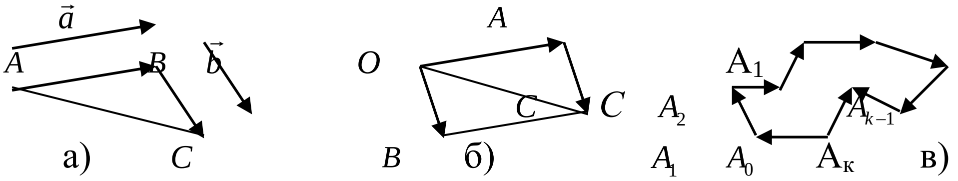
Векторларды осы жолмен «үшбұрыш әдісі» делінеді.

Егер кез келген О нүктеден $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ векторларын өлшеп салып, оны параллелограмға дейін толықтырсақ (4-б сурет), онда $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$ болғандықтан $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{a+b}$ болып шығады.

Сонымен бір нүктеден екі векторды өлшеп салып, оны параллелограмға дейін толықтырса, онда ол параллелограмның берілген векторлар өлшеп салынған нүктеден шығатын диагоналы берілген векторлардың қосындысына тең болады. Векторларды осылайша қосу «параллелограмм әдісі» делінеді.

«Үшбұрыш әдісін» қайталап қолдану арқылы 2-ден көп векторлардың қосындысын табуға болады. Мысалы, $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_k}$ векторлар берілсе, алдымен $\overrightarrow{A_0A_1}=\vec{a}, \overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{a_2}$ векторларын қосады, одан шыққан $\overrightarrow{A_0A_2}$ векторға $\overrightarrow{a_3}$ векторды қосады. Осылайша біртіндеп қосу арқылы ең соңында A_0A_{K-1} векторға $\overrightarrow{a_k}$ қосады. Сонда 1-вектордың бастапқы нүктесі А$_0$ бастапқы нүктесі болатын, соңғы вектордың соңғы нүктесі А$_к$ соңғы нүктесі болатын $\overrightarrow{A_0A_K}$ вектор берілген $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_k}$ векторлардың қосындысы болады (4-в сурет).

$$\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+...+\overrightarrow{A_{K-1}A_K}=\overrightarrow{A_0A_K} \quad (1\text{-}3)$$



4-сурет

Егер 1-вектордың бастапқы нүктесі мен соңғы вектордың соңғы нүктесі беттесе, яғни А$_0$=А$_к$ болса, онда берілген векторлар қосындысы нөлдік вектор болады.

Векторларды қосудың үшбұрыш әдісінен тікелей Шаль теоремасы деп аталатын мына теореманың дұрыстығы шығады.

1-4. Шаль теоремасы. А,В,С нүктелері жазықтықта қалай орналасса да мына теңдік орындалады.

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC} \quad (1\text{-}4)$$

Шаль теоремасын А,В,С нүктелерге қолдансақ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}$, А,В,А нүктелерге қолдансақ, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}$ болар еді. Егер $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{-a}, \overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AA}=\vec{O}$ десек, $\overrightarrow{a+}\vec{o}=\vec{a}$ (1-5), $\vec{a}+\left(\overrightarrow{-a}\right)=\vec{o}$ (1-6) болып шығады. Мұндағы $\left(\overrightarrow{-a}\right)$ векторды $\vec{a}$ векторға қарама – қарсы вектор дейді.

Векторды векторға қосу амалының бұлардан өзге мынадай қасиеттері бар.

1-5. Теорема. Векторларды қосу амалы мына қасиеттерге не болады:

$\overrightarrow{a+}\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (1-7) – орын алмастыру заңы.

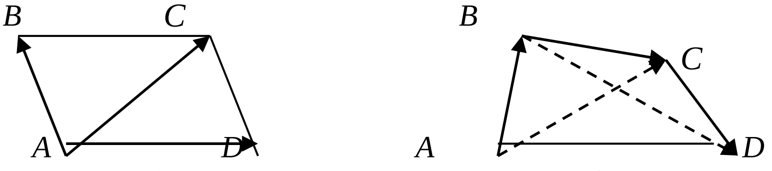
$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{a}+(b+c)$ (1-8) – теру заңы.

Дәлелі. (1-7) қасиеттің дәлелі 5-а суреттен (1-8) – дің дәлелі

5-в суреттен тікелей шығады.

5-а суретте АВСД параллелограмм, егер $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AD}=\vec{b}$ десек $\overrightarrow{DC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ болады да $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$ немесе $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
болады.

5-б суретте $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{BC}=\vec{b}, \overrightarrow{CD}=\vec{c}$ болсын, онда $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\vec{b}+\vec{c}$ болады жәнe $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$ болатындықтан $\left(\vec{b}+\vec{c}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ болып шығады.



а) 5-сурет б)

1-4. Векторлар айырымы. Векторлар айырымы векторлар болады. Вектор $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ ның айырымы $\vec{a}-\vec{b}$ деп $\vec{b}$-ға қосқанда $\vec{a}$ шығатын $\vec{c}$ векторын айтады және оны $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ деп жазады.

Анықтама бойынша $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$. Бұл теңдіктің екі жағына да $\left(\overrightarrow{-b}\right)$ны қоссақ (1-5,6)-ны ескерсек.

$\vec{b}+\vec{c}+\left(-\vec{b}\right)=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$, $\vec{c}+\left(\vec{b}+\left(-\vec{b}\right)\right)=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$, $\vec{c}+\vec{o}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$, $\vec{c}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$
болып, $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ (1-9) шығады.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ дан $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ (4-а сурет).

Бұл теңдіктен бір нүктеден шығатын $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ векторлардың айырымы $\overrightarrow{BC}$ вектор алғыш вектордан алынған векторға қарай бағытталатын көрінеді.

Сөйтіп бір нүктеден $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ векторларды өлшеп салып, оны АВСД параллелограмға дейін толықтырса (5-а сурет) ол параллелограмның сол вектор шығатын нүктеден шығатын диагоналы сол векторлардың қосындысына, ал екінші диагоналы ол векторлардың айырымына тең болады. 5-а суретте $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$ (1-10) болады.

1-5. Векторлар мен санның көбейтіндісі. Векторды санға көбейткенде вектор шығады.

Вектор $\vec{a}$ мен α нақты санның көбейтіндісі деп төмендегі екі шартты қанағаттандыратын $\vec{b}$ векторын айтады.

1^0. $\left|\vec{b}\right|=\left|\alpha\right|\left|\vec{a}\right|$ болу керек.

2^0. $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a}$ онда $\alpha>0$, $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$ онда $\alpha<0$ болу керек.

Вектормен сан көбейтіндісін $\vec{b}=\alpha\vec{a}$ деп жазады.

Бұл анықтамадан мына тұжырымдардың дұрыстығы шығады.

1^0. $\alpha\vec{a}=\vec{o}$ болу үшін не $\alpha=0$, не $\vec{a}=\vec{o}$ болу керек.

2^0. Векторды санға көбейткенде оған коллинеар вектор шығады. Өйткені $\vec{a}$ вектор $\alpha\vec{a}$ вектормен не бағыттас, не қарама-қарсы бағытта болады, сондықтан олар коллинеар болады.

3^0. Кез келген векторды өзінің ұзындығына бөлсе бірлік вектор шығады. $\frac{\vec a}{|\vec a|}$, $\frac{\vec b}{|\vec b|}$ вектор бірлік векторы болады.

4^0. $1\vec a=\vec a$ және $-1\vec a\neq-\vec a$ (1-11) болады.

Вектор мен санды көбейту амалы бұлардан өзге мынадай қасиеттерге ие болады.

1-6 Теорема. Векторды санға көбейту амалы төмендегі заңдарға бағынады.

1^0. $\alpha\left(\beta\vec a\right)=(\alpha\beta)\ \vec a$ (1-12), санға қарағандағы теру заңы.

2^0. $\left(\vec a+\vec b\right)\ \alpha=\alpha\vec a+\alpha\vec b$ (1-13) санның векторға қарағандағы үлесімділігі.

3^0. $(\alpha+\beta)\ \vec a=\alpha\vec a+\beta\vec a$ (1-14), вектордың санға қарағандағы үлесімділігі. Дәлелі 1) $\alpha\left(\beta\vec a\right)=\vec x$ (αβ) $\vec a$ дейінде $\vec x=\vec y$ екенін дәлелдейік.

Вектор мен санның көбейтіндісінің анықтамасы бойынша $|\vec a|=|\bar b|$, $\bar a\uparrow\uparrow\bar b$ $x=|\beta|\,|\bar a|\left|\vec y\right|=|\alpha\beta|\left|\vec a\right|=|\alpha|\,|\beta|\left|\vec a\right|$. Бұдан $\left|\vec x\right|=\left|\vec y\right|$. Енді $\vec x\uparrow\uparrow\vec y$ екенін дәлелдейік.

а) α>0, β>0 болсын. Онда $\vec a\uparrow\uparrow\beta\vec a, \beta\vec a\uparrow\uparrow\alpha\left(\beta\vec a\right)$ болатындықтан $\vec x=\alpha\left(\beta\vec a\right)\uparrow\uparrow\vec a$. Бұл кезде αβ>0 болғандықтан $\vec a\uparrow\uparrow(\alpha\beta)\vec a$ болады да $\vec y=(\alpha_1\beta)\vec a\uparrow\uparrow\vec a$. Демек $\vec x\uparrow\uparrow\vec y$.

Сөйтіп $\left|\vec x\right|=\left|\vec y\right|$, $\vec x\uparrow\uparrow\vec y$. Сондықтан $\bar x = \bar y$.

б) $\alpha<0$, $\beta>0$ болсын . Онда $\vec a\uparrow\uparrow\beta\vec a$, $\beta\vec a\uparrow\downarrow\alpha\left(\beta\vec a\right)$ болатындықтан $\vec x=\alpha\left(\beta\vec a\right)\uparrow\downarrow\vec a$. Бұл кезде $\alpha\beta<0$ болатындықтан $\vec a\uparrow\downarrow(\alpha\beta)\vec a$ болады да $\vec y=(\alpha\beta)\vec a\uparrow\downarrow\vec a$. Демек $\vec x\uparrow\uparrow\vec y$.

Сөйтіп бұл кезде де$\left|\vec x\right|=\left|\vec y\right|$, $\vec x\uparrow\uparrow\vec y$. Сондықтан $\vec x=\vec y$.

в)α<0,β<0 болсын. Онда $\vec a\uparrow\downarrow\beta\vec a$, $\beta\vec a\uparrow\downarrow\left(\beta\vec a\right)$. Демек $\vec x=\alpha\left(\beta\vec a\right)\uparrow\uparrow\vec a$.

Бұл кезде $\alpha\beta>0$ болатындықтан $\vec a\uparrow\downarrow\alpha(\alpha\beta)\vec a$. Демек $\vec y=(\alpha\beta)\vec a\uparrow\uparrow\vec a$.

Сөйтіп бұл кезде де $\vec x=\vec y$. Сонымен $\alpha\left(\beta\vec a\right)=(\alpha\beta)\vec a$. Енді 2)(1-13)-п дәлелдейік.

а) $\alpha>0$ болсын, $\vec a$ мен $\vec b$ коллинеар болсын. $\overrightarrow{AB}=\vec a$, $\overrightarrow{BC}=\vec b$ векторларын саламыз. Сонда A_1B_1C бір түзуде жатады және векторларды қосу ережесі бойынша $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\vec a+\vec b$ (6-а сурет) болады.

AC-дан тыс O нүктесін алып OA_1OB_1OC түзулерін жүргізіп $\overrightarrow{OA_1}=\alpha\overrightarrow{OA}$ болатын A_1 нүктеден AC-ға параллель жүргізсек ΔOAB ұқсас ΔOBC ұқсас ΔOB_1C_1, ΔOAC ұқсас ΔOA_1C_1 болады да үшбұрыш ұқсастығынан $\overrightarrow{A_1B_1}=\alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B_1C_1}=\alpha\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{A_1C_1}=\alpha\overrightarrow{AC}$ болады. Сонда A_1C_1-дан $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1C_1}$, AC-дан $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Орнына қойсаң $\alpha\overrightarrow{AB}-\alpha\overrightarrow{BC}=\alpha\overrightarrow{AC}=\alpha\left(\overline{AB+BC}\right)$ немесе $\alpha\vec a+\alpha\vec b=\alpha\left(\vec a+\vec b\right)$.

б) Егер $\vec a$ мен $\vec b$ коллинеар болмаса, онда $\overrightarrow{AB}=\vec a, \overrightarrow{AC}=\vec a+\vec b$ (6-б сурет) салсақ, $\overrightarrow{AC}=\vec b$ болады. Енді $\overrightarrow{AB_1}=\alpha\vec a$, $\overrightarrow{AC_1}=\alpha\left(\vec a+\vec b\right)$ салсақ, ΔABC ұқсас $\Delta A_1B_1C_1$ болады да $\overrightarrow{B_1C_1}=\alpha\vec b$ болады.

Сонда $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{AC_1}=\alpha\left(\vec a+\vec b\right)$ болатындықтан $\alpha\left(\vec a+\vec b\right)=\alpha\vec a+\alpha\vec b$ болып шығады.

в) (1-14) дәлелі $\alpha\beta>0$ болсын $\overrightarrow{AB}=\alpha\vec a$. $\overrightarrow{BC}=\beta\vec a$ векторларды саламыз (7-сурет).

Сонда $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ болатындықтан және $|\alpha|+|\beta|=|\alpha+\beta|$ болатындықтан.

$\overrightarrow{AC}=(\alpha+\beta)\vec a$ болады да $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$дан $\alpha\vec a+\beta\vec a=$ $(\alpha+\beta)\vec a$ болып шығады.

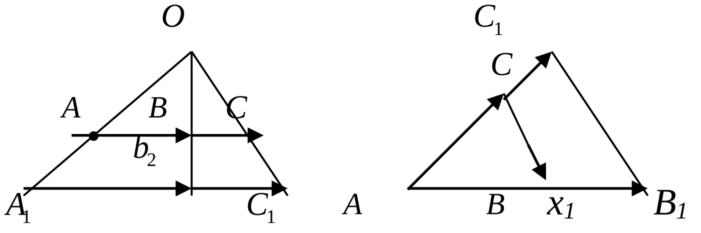
1-7. Теорема. (Екі вектордың коллинеар болу белгісі). Векторлар $\vec a$ мен $\vec b$ коллинеар болу үшін α саны табылып $\vec в=\alpha\vec a$ (1-15) болуы етті және жеткілікті.

Дәлелі $\vec a$ мен $\vec b$ коллинеар болсын, онда $\frac{\vec a}{\left|\vec a\right|}=\frac{\vec b}{\left|\vec b\right|}$ болады. Бұдан $\vec b=\frac{\left|\vec b\right|}{\left|\vec a\right|}$

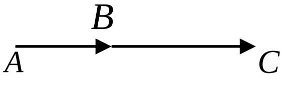
$\vec a=\alpha\vec a$ болып шығады.

Енді керісінше $\vec b=\alpha\vec a$ болсын, онда векторды санға көбейту анықтамасы бойынша $\vec a$ мен $\vec b$ коллинеар болады.

Сонымен $\vec b=\vec a\ (1-15)$ екі вектордың коллинеар болу шарты болып табылады.



а) 6-сурет б)



7-сурет

Векторлар жүйесінің сызықтық тәуелділігі. Векторлық кеңістік және оның базисі. Берілген базистегі вектор координаталары.

2.1. Векторлар жүйесінің сызықтық тәуелділігі мен тәуелсіздігі. Векторлар жүйесі $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2} \ \dots\ , \overrightarrow{a_n}$ берілсін. Мына өрнек $\vec P=\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{a_n}$ (мұндағы α_i нақты сандар) берілген векторлар жүйесінің сызықтық комбинациясы делінеді, α_i -лар комбинация коэффициенттері делінеді.

Векторлар жүйесінің сызықтық комбинанациясы оның барлық коэффициенттері түгелдей О болғанда ғана $\overline{0}$ -ге айналатын болса, ол жүйе сызықтық тәуелсіз делінеді, ал ең болмағанда бір коэффициенті О болмаса да $\overline{0}$ - ге айналатын болса сызықтық тәуелді делінеді.

Векторлар жүйесінің сызықтық тәуелді немесе тәуелсіз болуы жайлы төмендегі тұжырымдар дұрыс болады.

1^0. Берілген векторлар жүйесі (*) кезінде нөлдік вектор болса, ол жүйе сызықтық тәуелді болады. Өйткені $\vec{O}$- дік вектор коэффициентін $\alpha_k \neq 0$ етіп, қалғандарын о етіп алсаң сызықтық комбинациясы $\vec{O}$ болады:

$0\cdot\vec{a}_1+0\vec{a}_2+\ldots+\alpha_k\cdot\vec{o}+0\cdot\vec{a}_{k+1}+\ldots+0\cdot\vec{a}_n=\vec{o}$

2^0. Берілген векторлар жүйесінің бір векторы қалғандарының сызықтық комбинациясына тең болса, ол жүйе сызықтық тәуелді болады.

Өйткені $\vec{a}_n=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_{n-1}\vec{a}_{n-1}$ болса $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_{n-1}\vec{a}_{n-1}-1\cdot\vec{a}_n=\vec{o}$ болады және мұның ең болмағанда бір коэффициенттінің $(\alpha_n=-1+0)$ нөлге тең емес екені анық.

3^0. Бір вектордан тұратын жүйе ол вектор нөлдік вектор болса сызықтық тәуелді болады.

Өйткені $\alpha\cdot\vec{o}=\vec{o}$ теңдігі $k\neq 0$ болса да орындалады.

4^0. Берілген векторлар жүйесінің бір бөлігі (мысалы k<n вектор) сызықтық тәуелді болса, онда бүкіл жүйеде сызықтық тәуелді болады.

Өйткені k вектор сызықтық тәуелді болғандықтан мына комбинацияның $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_k\vec{a}_k=\vec{o}$ ең болмағанда бір коэффициенті о емес. Сондықтан қалған n-k векторды бұған о коэффициентпен тіркеп жазғаннан теңдік өзгермейді.

$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_k\vec{a}_k+o\cdot\vec{a}_{k+1}+\ldots+o\cdot\vec{a}_n=\vec{o}$ және мұның ең болмағанда бір коэффициенті о емес.

5^0. Егер векторлар жүйесі сызықтық тәуелсіз болса, онда оның кез келген бөлігінде сызықтық тәуелсіз болады.

Өйткені керісінше сызықтық тәуелді болады десек 4^0 бойынша бүкіл жүйе сызықтық тәуелді болар еді.

6^0. Екі вектордан тұратын жүйе олар коллинеар болған жағдайда ғана сызықтық тәуелді болады.

Өйткені $\vec{a}$ мен $\vec{в}$ екі вектор коллинеар болса, онда $\vec{в}=\alpha\vec{a}$ болу керек. Бұдан $\alpha a-1\cdot\vec{в}=\vec{o}$ коэффициенті $\alpha_2=-1\neq 0$. Сондықтан $\vec{a}$ мен $\vec{в}$ сызықтық тәуелді.

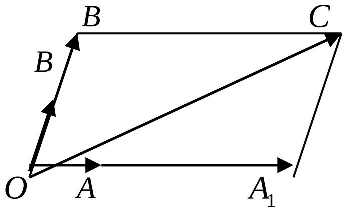
Егер $\vec{a}$ мен $\vec{в}$ сызықтық тәуелді болса $\alpha_1\vec{a}_k+\alpha_2\vec{в}=\vec{o}$ комбинация коэффициентінің кемінде біреуі нөл емес, $\alpha_2\neq 0$ дейік. Онда $\vec{b}=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\vec{a}=\alpha\vec{a}$, ал бұл $\vec{a}$ мен $\vec{в}$ коллинеар деген сөз.

Салдар. $\vec{a}$ мен $\vec{в}$ коллинеар болмаса, онда олар сызықтық тәуелсіз векторлар жүйесін құрайды.

2-1. Теорема. Егер $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ коллинеар болмаса, онда бұларға коллинеар болатын кез келген вектор $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ жіктеледі және ондай жіктелу біреу-ақ болады (яғни бір мәнді жіктеледі).

Дәлелі. $\overrightarrow{OA_1} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA} = \alpha\vec{a},$ $\vec{a}$ мен $\vec{в}$ коллинеар емес, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланар векторлар болсын. Онда олар бір жазықтықта жатады.

Бір О нүктеден $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, векторларды өлшеп салайық. Сонда $\vec{a}$ мен $\vec{в}$ коллинеар болмағандықтан A,O,B нүктелер бір түзуде жатпайды (8-сурет).



8-сурет

а) С нүкте OA, OB түзулерде жатпасын. С нүктеден OA,OB түзулеріне параллель жүргізсек A_1,B_1 нүктелер табылады. $\overrightarrow{OA_1} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA} = \alpha\vec{a},$ $\overrightarrow{OB_1} = \beta \cdot \overrightarrow{OB} = \beta\vec{в},$ болсын. Сонда $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}$ болғандықтан $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ (2-1) болып $\vec{c}$ вектор $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларға жіктеледі. $\vec{c}$ вектор $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларға бұдан басқа түрде $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ болып жіктеледі дейік. Бұл жіктелуді бір – бірінен алсақ $(\alpha - \alpha_1)\vec{a} + (\beta - \beta_1)\vec{b} = \vec{0}$ болар еді және $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ коллинеар болмағандықтан сызықтық тәуелсіз болады. Сондықтан $\alpha - \alpha_1 = 0$ $\beta - \beta_1 = 0$ болу керек. Бұдан $\alpha = \alpha_1$ $\beta = \beta_1$ болып екі жіктелу бірдей болып шығады екен.

б) Егер С нүкте OA түзуінде жатса, онда $\overrightarrow{OC} = \gamma \cdot \overrightarrow{OA}$ болар еді. Мұны $\overrightarrow{OC} = \gamma \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} + O \cdot \overrightarrow{OB}$ $\vec{C} = \gamma\vec{a} + \overrightarrow{OB}$ деп жазуға болады. Демек бұл кезде де $\vec{c}$ вектор $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторға бірмәнді жіктеледі.

Сөйтіп $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторларға компланар болатын кез келген вектор оларға тек бір жолмен $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ (2-1) түрде жіктеледі екен. Сондықтан (2-1) ді үш вектордың компланар болу белгісі (шарты) деп қарастыруға болады.

7^0. Дәлелденген теоремадан үш вектордан тұратын жүйе олар компланар болған жағдайда ғана сызықтық тәуелді болады деген қорытынды жасауға болады.

Шынында да $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторлар сызықтық тәуелді болса $\overrightarrow{\alpha a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ комбинацияның ең болмағанда бір коэффициенті О емес. Мысалы $\gamma \neq 0$ дейін. Онда соңғы теңдікті $\vec{c} = -\frac{\alpha}{\gamma}\vec{a} - \frac{\beta}{\gamma}\vec{b} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b}$ деуге болады. Бұл $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторлар компланар деген сөз.

Егер $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланар болса $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ деуге болады. Бұдан $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} - 1 \cdot \vec{c} = \vec{0}$. Бұл комбинацияда бір коэффициентің 0 еместігі ақиқат. Демек $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ сызықтық тәуелді болады.

Салдар. Компланар емес үш вектор сызықтық тәуелсіз болады.

2.2. Теорема. Егер $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторлар компланар болмаса онда кеңістіктің кез келген $\vec{ч}$ векторы буларға жіктеледі және ондай жіктелу жалғыз-ақ болады.

Дәлелеі. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторлар компланар болмасын. Онда бір О нүктеден $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, векторларды өлшеп салсақ $O_1A_1B_1C$ нүктелер бір жазықтықта жатпайды (9-сурет). Кеңістіктің кез келген $\vec{ч}$ векторын алып, онда О нүктеден өлшеп салайық. Ол $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{ч}$ болсын.

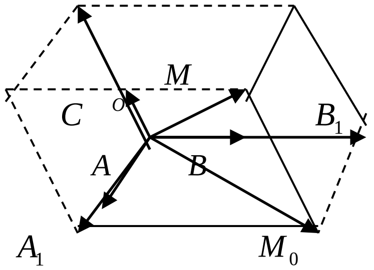
М нүктеден $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ вектор жатқан ОС түзуге параллель жүргізейік, ол $\vec{a},\vec{b},$ векторлар жатқан жазықтықпен M_0 нүкте қиылыссын.

Ол нүктеден $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, жатқан OA_1OB түзуге параллель жүргізейік. Олар A_1B_1 нүктеде қиылыссын, $M_0M=OC_1$ болсын.

Сонда $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_0}+\overrightarrow{M_0M}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}$ болар еді.

Ал, $\overrightarrow{OA}$ мен $\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OB}$ мен $\overrightarrow{OB_1},\overrightarrow{OC}$ мен $\overrightarrow{OC_1}$ коллинеар болғандықтан $\overrightarrow{OA_1}=\alpha\overrightarrow{OA}=\alpha\vec{a}$, $\overrightarrow{OB_1}=\beta\overrightarrow{OB}=\beta\vec{b}$, $\overrightarrow{OC_1}=\gamma\overrightarrow{OC}=\gamma\vec{C}$ болатын α,β,γ сандар табылады. Орнына қойсақ $\vec{C}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$ (2-2) болып $\vec{c}$ вектор $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторларға жіктеледі. Егер ол оларға (2-2)-ден басқа түрде былайша да $\vec{ч}=\alpha_1\vec{a}+\beta_1\vec{b}+\gamma\vec{c}$ жіктеледі десек, сөйтіп бір-бірінен алсақ $(\alpha-\alpha_1)\vec{a}+(\beta-\beta_1)\vec{b}+(\gamma-\gamma_1)\vec{c}=\vec{o}$ шығар еді. Ал, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланар болмағандықтан олар сызықтық тәуелсіз. Сондықтан $\alpha-\alpha_1=o,$ $\beta-\beta_1=o,$ $\gamma-\gamma_1=o$ болу керек, яғни $\alpha=\alpha,\beta=\beta,\gamma=\gamma$. Демек екі жіктелу бірдей екен.

Егер $\overline{OM}=\bar{d}$ вектор $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$-ның бірімен, мысалы $\vec{a}$ мен коллинеар болса $\overrightarrow{OM}=\alpha\overrightarrow{OA}$ болады. Мұны былайша жазуға болады, $\bar{d}=\ \alpha\bar{a}+o\bar{b}+o\bar{c}.$ Сөйтіп бұл кезде де $\bar{d}$ вектор $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторлары бірмәнді жіктелді.Сөйтіп кеңістіктің кез келген векторы компланар емес векторға жіктеледі екен және ондай жіктелу біреу-ақ болады екен.



9-сурет

2-3. Теорема. Үштен көп вектордан тұратын жүйе сызықтық тәуелді болады:

Дәлелі. Төрт вектор $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \bar{d}$ берілсін. Егер $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланар болмаса онда 2-2 теорема бойынша $\bar{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$ болып жіктеледі. Бұдан -1*$\vec{d}$+$\alpha\bar{a}$ + $\beta\vec{b}+y\vec{c}=\vec{o}$ $\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{o}$ және $-1\neq 0$. Сондықтан $\vec{d}$ $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$ төрт вектор сызықтық тәуелді болады. Сондықтан 4^0 қасиет бойынша 5,6,...,n,... вектордан тұратын жүйелерде сызықтық тәуелді болады.

2.2. Векторлық кеңістік. Біз элементтері-векторлар үшін векторларды қосу және векторларды санға көбейту амалдары орындалатын және ол амалдар төмендегі 8 талапқа бағынатын векторлар жиыны V=W/$\underline{\underline{\omega}}$-ны құрдық.

1^0. $\vec{a}+\vec{o}=\vec{a}$

2^0. $\vec{a}+\left(\overrightarrow{-a}\right)=\vec{o}$

3^0. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

4^0. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

5^0. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

6^0. $\alpha\left(\beta\vec{a}\right)=(\alpha\beta)\vec{a}$

7^0. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$

8^0. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\alpha=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$

Осы векторлар жиынын векторлық кеңістік дейді. Белгілі тәртіпте алынатын В векторлар жүйесін бұл кеңістік базисі делінеді, егерде ол жүйе:

1-ден, сызықтық тәуелсіз болса.

2-ден, кеңістік V-ның кез келген векторы В векторлар жүйесінің сызықтық комбинациясы болатын болса.

Базиске енетін векторларды базистік векторлар дейді, ал ол векторлардың санын кеңістік өлшемі дейді.

Біз құрған V=W/$\underline{\underline{\omega}}$ кеңістік үшін белгілі тәртіпте (ретте) қарастырылатын өзара компланар емес кез келген үш вектор базис болады.

Шынында да $B=\left(\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3\right)$ компланар емес үш вектордан тұратын жүйе болса, 2.1-дегі 7^0-нің салдары бойынша бұл үш вектор сызықтық тәуелсіз болады және 2.2, Теорема бойынша бұл кеңістіктің кез келген векторы бұл векторларға бірмәнді жіктеледі. Сондықтан $B=\left(\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3\right)$ жүйе базис болады.

2-3 Теорама бойынша үш вектордан артық векторлардан тұратын базис болмайды, өйткені олар сызықтық тәуелді болады.

V=W/$\underline{\underline{\omega}}$ кеңестік үшін үш вектордан аз вектордан тұратын базисте болмайды. Шынында да $\left(\vec{l}_1,\vec{l}_2\right)$ екі вектордан тұратын базис болады десек, кеңістіктің кез келетін векторы базистік векторға жіктелетіндіктен $\vec{d}$ $=\alpha\vec{l}_1+\beta\vec{l}_2$ болар еді.

Сондықтан кеңістіктің мұндай болатын кез келген $\vec{d}$ векторы $\vec{l}_1$ мен $\vec{l}_2$ жатқан жазықтыққа параллель болады. Ал кеңістіктің барлық векторы бір жазықтыққа параллель болуы мүскін емес. Сондықтан $B=\left(\vec{l}_1,\vec{l}_2\right)$ базис деген дұрыс емес.

Сонымен элементтері жоғары да келтірілетін 1^0-8^0 талаптар бағынатын векторлар жиынының базисі өзара компланар емес кез келген үш вектордан тұрады. Сондықтан V=W/$\underline{\underline{\omega}}$ кеңістік 3 өлшенеді кеңістік болады, оны V_3 арқылы белгілейік.

Оның базисі $B=\left(\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3\right)$ болса, онда $\vec{l}_1$-ді оның бірінші $\vec{l}_2$-ні екінші $\vec{l}_3$ ті үшінші базистік векторы дейді. Сондықтан $B_1=\left(\vec{l}_2,\vec{l}_1,\vec{l}_3\right)$ мен $B_2=\left(\vec{l}_3,\vec{l}_1,\vec{l}_2\right)$ әр түрлі базистер болады.

2.3 Берілген базистегі вектор координаталары. Егер $\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3$ базистік векторлар болса, олар кеңістікте 10-суреттегідей екі түрлі орналасуы мүмкін.

О нүктеден қарағанда $\vec{l}_1$-дің ұшынан $\vec{l}_2$ ұшына одан, $\vec{l}_3$-тің

ұшына одан қайтадан $\vec{l}_1$ ұшына келу жолының қозғалыс бағыты 10 –а суретте сағат тілі қозғалысына кері 10-б суретте сағат тілі қозғалысындай. Оның біріншісін (10-а сурет) оң базис екіншісін сол базис дейді. Біз оң базисті қолданамыз.

Кеңістікте $B=\left(\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3\right)$ базис берілсе, онда кеңістіктің кез келген $\vec{a}$ векторы базис ережесі бойынша базистік векторларға бір мәнді жіктеледі.

$$\vec{a}=a_1\vec{l}_1+a_2\vec{l}_2+a_3\vec{l}_3 \quad (2.3)$$

Осы жіктелудегі a_1,a_2,a_3 коэффициенттерді (олар нақты сандар болады) $\vec{a}$ вектордың $\left(\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3\right)$ базистегі координаталары дейді де былайша белгілейді.

$$\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\} \quad (2.4)$$

Мысалы $\vec{a}=\{2,-3,5\}$ десе оны толық түрде $\vec{a}=2\vec{l}_1-3\vec{l}_2+5\vec{l}_3$ түрінде жазады.

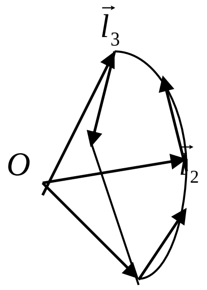
Базистік векторлардың сол $\left(\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3\right)$ базистегі координаталары $\vec{l}_1=\{1{,}0{,}0\}$, $\vec{l}_2=\{0{,}1{,}0\}$, $\vec{l}_3=\{0{,}0{,}1\}$ (2.5) болады. Себебі $\vec{l}_1=1\vec{l}_1+0\vec{l}_2+0\vec{l}_3$, $\vec{l}_2=0\vec{l}_1+1\vec{l}_2+0\vec{l}_3$, $\vec{l}_3=0\vec{l}_1+0\vec{l}_2+1\vec{l}_3$ болып жіктеледі.

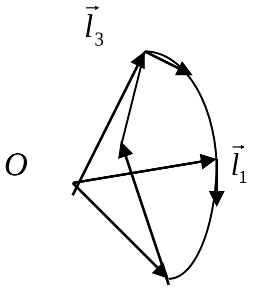
Егер базистік векторлар бірлік векторлар болса және қос-қостан өзара ортогонал (Перпендикуляр) болса, онда ол базисті ортонормаланған базис дейді. Әдетте ортонормоланған базисті $\vec{l},\vec{j},\vec{k}$ әріптері мен белгілейді.

Анықтама бойынша $\left|\vec{i}\right|=\left|\vec{j}\right|=\left|\vec{k}\right|=1,\ \overrightarrow{i\perp j},\ \vec{j}\perp\vec{k},\ \vec{k}\perp\vec{c}$ (2.6)

.

Векторларды қосу, алу, санға көбейту амалдарынан вектор координаталарынан төмендегідей қасиеттері шығады.





$\vec{l}_1$ а) $\vec{l}_2$ б)

10-сурет

2-4. <u>Теорема.</u> $B=\left(\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3\right)$ базисте $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$, $\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$ екі вектор берілсін онда

а) Егер векторлар тең болса, олардың сәйкес координаталары да тең болады, яғни $\vec{a}=\vec{b}$ болса, онда $a_1=b_1, a_2=b_2, a_3=b_3$ болады.

б) Егер векторлар қосылса (алынса) олардың сәйкес координаталары да қосылады (алынады) яғни $\vec{a}+\vec{b}=\{a_1+b_1, a_{.2}+b_2, a_3+b_3\}$

$$\vec{a}-\vec{b}=\{a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3\}$$

болады.

в) Егер вектор бір санға көбейтілсе, онда оның барлық координаталары сол санға көбейтіледі, яғни $k\vec{a}=\{ka_1, ka_2, ka_3\}$.

Дәлелі. $\vec{a}=a_1\vec{l}_1+a_2\vec{l}_2+a_3\vec{b}_3$, $\vec{b}=b_1\vec{l}_1+b_2\vec{l}_2+b_3\vec{l}_3$ болатындықтан

а) $\vec{a}=\vec{b}$ болса, $a_1\vec{l}_1+a_2\vec{l}_2+a_3\vec{l}_3=b_1\vec{l}_1+b_2\vec{l}_2+b_3\vec{l}_3$,

$(a_1-b_1)\vec{l}_1+(a_2-b_2)\vec{l}_2+\left(a_3-\vec{l}_3\right)\vec{l}_3=\vec{o}$

Ал, $\left(\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3\right)$ базис болғандықтан олар сызықтық туәелсіз, сондықтан $a_1-b_1=o, a_2-b_2=o, a_3-b_3=o$. Бұдан $a_1=b_1, a_2=b_2, a_3=b_3$.

б) $\vec{a}+\vec{b}=\left(a_1\vec{l}_1+a_2\vec{l}_2+a_3\vec{l}_3\right)\pm\left(b_1\vec{l}_1+b_2\vec{l}_2+b_3\vec{l}_3\right)=(a_1\pm b_1)\vec{l}_1+(a_2\pm b_2)\vec{l}_2+(a_3\pm b_3)\vec{l}_3$. Демек $\vec{a}+\vec{b}=\{a_1\pm b_1, a_2\pm b_2, a_3\pm b_3\}$.

в) $k\vec{a}=k\left(a_1\vec{l}_1+a_2\vec{l}_2+a_3\vec{l}_3\right)=(ka_1)\vec{l}_1+(ka_2)\vec{l}_2+(ka_3)\vec{l}_3$. Демек $k\vec{a}=\{ka_1, ka_2, ka_3\}$.

Сонымен $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow a_1=b_1, a_2=b_2, a_3=b_3$ (2.7)

$$\vec{a}+\vec{b}=\{a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3\} \quad (2.8)$$

$$\vec{a}-\vec{b}=\{a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3\} \quad (2.9)$$

$$k\vec{a}=\{ka_1, ka_2, ka_3\} \qquad (2.10)$$

2.4. <u>Векторлық кеңістіктің ішкі кеңістігі.</u> V векторлық кеңістік, ал W оның қандайда бір ішкі жиыны болсын.

Векторлар жиыны W векторлық V кеңістіктің ішкі векторлық кеңістіктегі немесе бөлімше кеңістігі делінеді, егер ол төмендегі екі шартты қанағаттандырса.

1^0. $\vec{a}\in$w, $\vec{b}\in$w болатын векторлар үшін $\vec{a}+\vec{b}\in$wболса.

2^0. $\vec{a}\in$w векторлар үшін $k\vec{a}\in$w болатын болса (к-саны). Яғни W де жататын векторлардың қосындылары да, нақты санға көбейтінділері де сол W жататын болса.

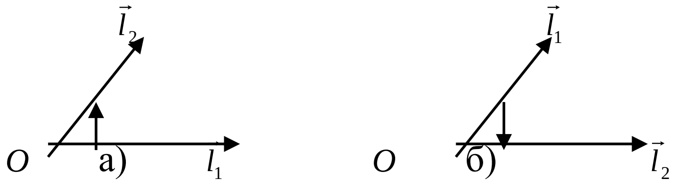
Векторлардың кеңістік V-ның ішкі векторлық кеңістігі W-ның белгілі тәртіпте қарастырылатын кез келген сызықтың тәуелсіз векторлар жүйесі сол ішкі кеңістіктің базисі болады. Базиске енетін векторлар саны сол ішкі кеңістіктің өлшемі делінеді.

V векторлық кеңістіктен $\vec{a},\vec{b}$ екі вектор алсаң онда $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ түрдегі векторлар жиыны жоғарыдағы екі шартты да қанағаттандырады. Сондықтан $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ векторлар жиыны V кеңістіктің ішкі векторлық кеңестігі болады. Оны $\vec{a},\vec{b}$ векторларға керілген ішкі кеңістік дейді. Ол $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ жатқан жазықтыққа параллель векторлардың жиыны болады. Оны Vкеңістіктен 2 өлшенді ішкі векторлық кеңістіктігі дейді және V_2 мен белгілейміз. Оның базисі кез келген коллинеар емес екі вектордан тұрады. Оны$(\vec{l}_1,\vec{l}_2)$ десек, олар екі түрлі орналасуы мүмкін. (11- а,б-сурет).

11 – а суретте $\vec{l}_1$-ді, $\vec{l}_2$-ге беттестіру үшін бұратын бұру бұрышының кішісінің қозғалыс бағыты сағат тілі қозғалысына кері, 11- б суретте бағыттас. Оның 1-сін оң, екіншісін сол базис дейді. Біз оң базисті пайдаланамыз.

2.1. Теорема бойынша $\vec{l}_1,\vec{l}_2$ векторлар жатқан жазықтықтың кез келген $\vec{a}$ векторы ол векторларға бірмәнді жіктеледі.

$$\vec{a}=a_1\vec{l}_1+a_2\vec{l}_2 \quad (2\text{-}11)$$



11-сурет

Осы жіктелудегі коэффициенттер – (a_1, a_2) сандарын вектордың $(\vec{l}_1,\ \vec{l}_2)$ базистегі координаталарын дейді де. Оны

$\vec{a}=\{a_1,a_2\}$ (2-12) деп жазады.

Вектор координаталарының 2.4-те дәлелденген қасиеттері екі өлшемді кеңістік үшінде дұрыс, яғни $\vec{a}=\{a_1,a_2\}$, $\vec{b}=\{b_1,b_2\}$ болса, онда

$\vec{a}=\vec{b}$ болса, $a_1=b_1$, $a_2=b_2$ (2-12),

$\vec{a}\pm\vec{b}=\{a_1\pm b_1,a_2\pm b_2\}$ (2-13),

$\lambda\vec{a}=\{\lambda a_1,\lambda a_2\}$ (2-14) болады.

$\lambda\vec{a}$ (λ нақты сан) түрдегі векторлар жиынын бір өлшемді ішкі векторлық кеңістік дейді. Олар бір түзуге параллель болатын векторлар жиыны болады.

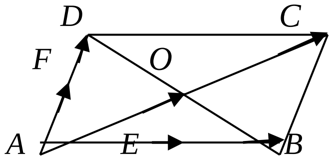
Оның кез келген $\vec{O}$-ден өзге векторы сол бір өлшемді векторлық кеңістіктің базисі болады. Бір өлшемді векторлық кеңістікті құрайтын векторлар координаты бір ғана саннан тұрады. Екі өлшемді кеңістіктің базистері $|\vec{l}_1|,|\vec{l}_2|$, $\vec{l}_1\perp\vec{l}_2$ болса ол базис ортонормаланған (тікбұрышты) делінеді.

1-мысал. АВСД параллелограм О=АС∩ВД диагоналдардың қиылысу нүктесі, АВ мен АД-ның орталары Е,Ғ нүктелері болсын. Төмендегі сұрақтарға жауап беріңдер (12-сурет).

1. $\overrightarrow{AE}$-ге коллинеар векторлар қайсы.

Векторлар коллинеар болу үшін олар бір түзуде немесе параллель түзулерде жатуы керек. Сондықтан $\overrightarrow{AE}$-ге $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{FO}$, $\overrightarrow{OF}$ векторлар коллинеар болады.

Коллинеар векторлар не бағыттас, не қарама – қарсы бағытта болады. $\overrightarrow{AE}$-ге $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FO}$, $\overrightarrow{DC}$ векторлары бағыттас,ал $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{CD}$ қарама – қарсы бағыттағы векторлар.



12-сурет

2. $\overrightarrow{AF}$ –ке тең векторлар қайсы. Векторлар тең болу үшін бағыттары бірдей (демек параллель), ұзындықтары теңдей болуы керек. Сондықтан $\overrightarrow{AF}$ - ке тең векторлар $\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{EO}$ болады.

3. $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DO}$ –ның қосындысы қайсы вектор болады. Шаль теоремасы бойынша $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AO}$. Осы сияқты $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO}$. Параллелограмм ережесі бойынша $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$.

4. $\overrightarrow{OC}$ мен $\overrightarrow{OB}$ векторлардың айырымы қайсы вектор болады. Бұл екі вектор бір нүктеден шығып тұр. Сондықтан олардың айырымы олардың соңғы нүктелерін жалғайтын вектор болуы керек және алынғыш векторға қарай бағытталуы керек.

Демек $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB}$. Осы сияқты $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO}$ болады.

5. Суретте вектор мен санның көбейтіндісін кескіндейтін вектор бар ма.

Параллелограмның диагоналының қасиеті бойынша АО=ОС, ДО=ОВ. Сондықтан $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BO} = 2\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AC} = -\,2\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, т.б.

6. $\overrightarrow{AE}$ мен $\overrightarrow{AF}$ -ті базистік векторлар үшін алып, параллелограмның қабырғалары мен диагоналдарын кескіндейтін векторлардың координаталарын табу керек.

Вектордың берілген базистегі координаталарын табу ретінде, ол векторды сол базисте жіктеу керек. Сол жіктеудегі коэффициенттер вектор координаталары болады.

$\overrightarrow{AE}$ мен $\overrightarrow{AF}$ сәйкесінше 1,2- базистік вектор болғандықтан олардың $\left(\overrightarrow{AE, AF}\right)$ базистегі координаталары $\overrightarrow{AE} = \{1{,}0\}$, $\overrightarrow{AF} = \{0{,}1\}$ болады.

Ал, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AE}$ болғандықтан $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AE} + 0\overrightarrow{AE}$ деуге болады. Сондықтан $\overrightarrow{AB} = \{2{,}0\}$ болады. Осы сияқты $\overrightarrow{AD} = \{0{,}2\}$ болады.

Тең векторлардың координаталары да тең болатындықтан $\overrightarrow{DC} = \{2{,}0\}$, $\overrightarrow{BC} = \{0{,}2\}$ болады.

Ал, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{AF}$ болғандықтан $\overrightarrow{AC} = \{2, 2\}$.

Ал, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{AF}$ болғандықтан $\overrightarrow{BD}=\{-2,2\}$.

Бұларды былайша да табуға болады. $\overrightarrow{AE}=\{1,0\}$, $\overrightarrow{AF}=\{0,1\}$ болғандықтан $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AE}=\{2,0\}$, $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AF}=\{0,2\}$, $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{AF}=\{2+0,0+2\}=$ $\{2,2\}$.

7. $\overrightarrow{OC}$ векторды $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ векторлар арқылы өрнектеу керек.Көп векторларды қосу әдісімен $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$.

Осы сияқты $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$. .

Қайталау сұрақтар мен есептер.

1. Түзу, сәуле, кесінді деген не?
2. Бағытталған кесінді деген не?
3. Бір түзу бойында жататын
   а) бағыттас сәулелердің
   б) қарама-қарсы бағыттағы сәулелердің
   қимасы мен бірігуі қандай фигура болады?
4. Бір түзуде а) жататын, б) жатпайтын 3 нүкте кеңістікте неше бағытты анықтайды?
5. Центрлі симметриясы болатын кесінділер, сәулелер жазықтықта қалай орналасады?
6. Қандай шамалар скаляр шамалар, қандай шамалар векторлық шамалар делінеді? Мысал келтіріңдер.
7. Қандай кесінді эквиполентті кесінділер делінеді?
8. Вектор деген не?
9. Бір түзуде жатпайтын 4 нүкте қанша векторды анықтауы мүмкін?
10. Вектор ұзындығы деп нені айтады?
11. Қандай векторлар коллинеар, тең, компланар делінеді?
12. Нөлдік бірлік деген не?
13. Векторлардың қосындысы деп нені айтады, векторларды қосу әдістері қандай?
14. Векторларды қосу амалының қасиеттері қандай?
15. Екі вектордың қосындысының ұзындығы қосылғыш векторларды екеуінің де ұзындығынан кем, біреуіне тең болуы мүмокін бе?
16. Екі вектордың айырымы деп нені айтады, оны қалай табады, оның бағыты қалай анықталады?
17. Екі вектордың айырымының ұзындығы ол векторлардың екеуінің де ұзындығынан артық, кем, біреуіне тең болуы мүмкін бе?
18. Векторды санға көбейту ережесі қандай, оның бағыты неге байланысты, бірлік векторды қалай табады?
19. Векторды санға көбейту амалының қасиеттері қандай?
20. Векторлар жиынының сызықтық комбинациясы деген не?
21. Векторлар жүйесі қай уақытта сызықтық тәуелді, қай уақытта сызықтық тәуелсіз делінеді.

22. Векторлардың сызықтық тәуелді, тәуелсіз болуының қандай қасиеттері бар?

23. Бір, екі, үш вектордан тұратын жүйенің сызықтық тәуелді, тәуелсіздігі туралы не айтуға болады?

24. Екі вектордың коллинеар, үш вектордың компланар болу шарттары қандай?

25. Векторлық кеңістік, оның ішкі кеңістігі деген не? Бір, екі, үш өлшемді кеңістік деген не?

26. Векторлық кеңістіктің базисі деген не, базис біреу-ақ болады ма, жоқ әлде көп болады ма? Векторлар жүйесінің базис болу шарты қандай. Оң, соң базис деген не?

27. Ортонормаланған базис қандай болады?

28. Үш, екі, бір өлшемді векторлық кеңістіктің базисі туралы не айтуға болады?

29. Вектор координаталарының қасиеті қандай?

30. Векторлар жиынында үлкен, тең, кіші қатыстары анықталған ба, жоқ па?

31. Векторлар $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ қандай шарттарды қанағаттандырғанда төмендегі теңдік дұрыс болады.

а) $|\vec{a}|+|\vec{b}|=|\vec{b}|$, ә) $|\vec{a}|-|\vec{b}|=|\vec{a}|$, б) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$, в) $|\vec{a}+\vec{b}| \succ |\vec{a}-\vec{b}|$ г) $|\vec{a}+\vec{b}| \prec |\vec{a}-\vec{b}|$.

32. Нөлдік вектор емес $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлар өзара қалай орналасқанда теңдік орындалады.

а) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$, ә) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$, б) $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$, в) $\vec{a}+\vec{b}=\lambda\vec{a}-\vec{b}$), г) $\frac{\vec{a}}{(\vec{a})}=\frac{\vec{b}}{(\vec{b})}$.

33. АВСД параллелограмның кез келген Е нүктесі үшін $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}$ = $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{ED}$ болатынын дәлелдеңдер.

34. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлар қандай шартты қанағаттандырса $\vec{a}+\vec{b}$ вектор $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлар арасындағы бұрыштың биссектрисасы болады.

35. ΔАВС берілген $\overrightarrow{AB}=\vec{C}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ болса, бұлар арқылы үшбұрыш медианалары, биссектрисалары қалай өрнектеледі.

36. $|\vec{a}|$=13, $|\vec{b}|$=19, $|\vec{a}+\vec{b}|$=27 болса, $|\vec{a}-\vec{b}|$ неге тең.

37. $|\vec{m}|$=11, $|\vec{n}|$=13, $|\vec{m}-\vec{n}|$=30 болса, $|\vec{m}+\vec{n}|$ неге тең.

38. $|\vec{a}|$=5, $|\vec{b}|$=8, $(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$=$60^0$ болса, $|\vec{a}+\vec{b}|$, $|\vec{a}-\vec{b}|$ неге тең.

39. АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$ параллелепипед. $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}\right)$ базисте параллелепипедтің қырларын, диагоналдарын және жақтарын өрнектейтін векторлардың координаталарын табыңдар.

40. $\vec{a}=\{2,4\}$, $\vec{b}=\{-3,1\}$, $\vec{c}=\{5,-2\}$ болса бұлар анықталған базистегі а) $2\vec{a}+3\vec{b}-5\vec{c}$, б) $\vec{a}+24\vec{b}+14\vec{c}$ векторлардың координаталары неге тең.

41. $\vec{a}=\{4,-2\}$, $\vec{b}=\{3,5\}$, $\vec{c}=\{-2,-12\}$ векторлар берілген. $\vec{C}$векторды $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларға жіктеңдер.

42. $\vec{d}$ векторын $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларға жіктеңдер егер $\vec{a}=\{2,3,1\}$, $\vec{b}=\{5,7,0\}$, $\vec{c}=\{3,-2,4\}$, $\vec{d}=\{4,12,-3\}$ болса.

43. Векторлардың сызықтық тәуелділігін өрнектеңдер

а) $\vec{a}=\{1,3,5\}$, $\vec{b}=\{0,4,5\}$, $\vec{c}=\{7,-8,4\}$, $\vec{d}=\{2,-1,3\}$

ә) $\vec{a}=\{1,2,5\}$, $\vec{b}=\{-1,6,3\}$, $\vec{c}=\{0,0,2\}$, $\vec{d}=\{1,0,4\}$

44. Мына векторлар сызықтық тәуелді ме, жоқ әлде сызықтық тәуелсіз бе?

а) $\vec{a}=\{5,2,1\}$, $\vec{b}=\{-1,4,2\}$, $\vec{c}=\{-1,-1,6\}$

б) $\vec{a}=\{6,4,2\}$, $\vec{b}=\{-9,6,3\}$, $\vec{c}=\{-3,6,3\}$

45. $\left(\overrightarrow{L_1},\overrightarrow{L_2},\overrightarrow{L_3}\right)$ базисте берілген $\overrightarrow{a_1}=\{1,-6,3\}$, $\overrightarrow{a_2}=\{0,-4,5\}$, $\overrightarrow{a_3}=\{2,-3,6\}$, $\overrightarrow{a_4}=\{3,0,0\}$, $\overrightarrow{a_5}=\{0,0,-2\}$, $\overrightarrow{a_6}=\{0,-1,0\}$, $\overrightarrow{a_7}=\{5,0,6\}$, $\overrightarrow{a_8}=\{-3,1,0\}$, $\overrightarrow{a_9}=\{6,0,1\}$, $\overrightarrow{a_{10}}=\{0,5,0\}$, векторлардың қайсысы $\overrightarrow{l_1}$-ге, $\overrightarrow{l_2}$-ге, $\overrightarrow{l_3}$-ке коллинеар болады.

46. $\vec{a}=\{5,7,2\}$, $\vec{b}=\{3,0,4\}$, $\vec{c}=\{-6,-1,-1\}$ болса,

а) $3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$, б) $5\vec{a}+6\vec{b}+4\vec{c}$ векторлардың координаталары неге тең.

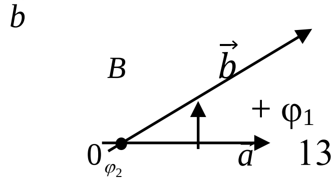
50. Векторлардың компланар болар, болмасын ажыратыңдар.

а) $\vec{a}=\{-3,0,2\}$, $\vec{b}=\{2,1,-4\}$, $\vec{c}=\{11,-2,-2\}$

б) $\vec{a}=\{1,0,7\}$, $\vec{b}=\{-1,2,4\}$, $\vec{c}=\{3,2,1\}$.

§3. Векторлардың скаляр көбейтіндісі.

3.1. <u>Векторлар арасындағы бұрыш.</u> Векторлар $\vec{a}$ мен $\vec{в}$ берілсін. Олардың О нүктеден $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{в}$ өлшеп салсақ, екі φ_1, φ_2 бұрыш шығады. (13-сурет). Оның кішісін $\vec{a}$ мен $\vec{в}$ векторлар арасындағы бұрыш дейді, оны $<(\vec{a}, \vec{в})$ немесе $(\vec{a}, \wedge \vec{в})$ арқылы белгілейді.

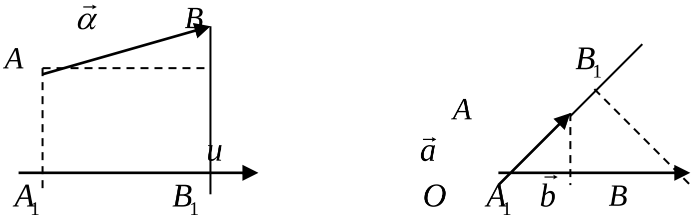


13сурет

Ол бұрыш тік болса, векторлар өзара ортагонал делінеді. Егер жазықтық бағдарланған болса, онда $\vec{a}$ дан $\vec{в}$ -ға дейінгі кіші бұрыш оң делінеді, егерде $\vec{a}$ - ны $\vec{в}$ мен беттестіру үшін бұру бағыты сағат тілі қозғалысы бағытына кері болса, сағат тілі қозғалысы мен бірдей болса теріс делінеді. Сөйтіп $(\vec{a}, \wedge\vec{в}) \neq (\vec{a}, \wedge\vec{в})$

3.2. <u>Вектордың осьтегі проекциясы</u>. Оң бағыты көрсетілген түзуді ось дейді.

Вектор мен ось арасындағы бұрыш деп вектормен осьтің бірлік векторы арасындағы бұрышты айтады.



а) 14-сурет б)

Вектор $\vec{a}$- ның u осіндегі ортогонал проекциясы деп вектор ұштарынан u осіне түсірілген перпендикулярдың табандарын жалғайтын $\vec{A}_1\vec{B}_1$ бағытталған кесіндінің шамасын айтады (14-а сурет). Оны Пр$_u\vec{a}$ деп жазатын боламыз.

Егер вектормен ось арасындағы бұрыш φ болса, онда Пр$_u\vec{a}=|\vec{a}|$ cosφ(3.1) болады.

Егер $\vec{a}, \vec{в}$ екі вектор берілсе (14-б сурет), $\vec{a}$-ның $\vec{в}$-дағы проекциясын табу үшін $\vec{a}$ -ның ұшынан $\vec{в}$-ға перпендикуляр түсіру керек, ал $\vec{в}$-ның $\vec{a}$-дағы проекциясын табу үшін $\vec{в}$-ның ұшынан $\vec{a}$ жатқан оске перпендикуляр түсіру керек.

Сонда Пр$_{\vec{в}}\,\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$, Пр$_{\vec{a}}\,\vec{в}=|\vec{в}|\cos\varphi$(3.2), болады.

3.3. <u>Екі вектордың скаляр көбейтіндісі</u>. Екі $\vec{a}, \vec{в}$ векторлардың скаляр көбейтіндісі деп сол векторлардың ұзындықтары мен арасындағы бұрыштың косинусының көбейтіндісіне тең болатын санды айтады, оны $\vec{a}, \vec{в}$ деп белгілейді.

$\vec{a}\,\vec{в}=|\vec{a}|\,|\vec{в}|\cos(\vec{a},\wedge\vec{в})$ (3.3)

Бұған вектор проекциясы (3.2.) формуланы қолдансақ

$\vec{a}\,\vec{в}=|\vec{a}|\,Пр_{\vec{a}}\,\vec{в} = \vec{в}\;Пр_{\vec{в}}\,\vec{a}$ (3.4)

Бұл формулалардан төмендегі тұжырымдардың дұрыстығы шығады.

1^0. Егер $\vec{a}=\vec{в}$ болса, $(\vec{a},\wedge\vec{в})=0^0$ болар еді. Сондықтан (3.3)-тен $\vec{a}\,\vec{a}= |\vec{a}||\vec{a}|\cos0^0=|\vec{a}|^2$. Сөйтіп $|\vec{a}|^2$ немесе $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}}$ (3.5).

Сонымен вектор ұзындығын табу үшін оны квадраттап нәтижесінен квадрат түбір табу керек екен.

2^0. Егер $\vec{a}\perp\vec{в}$ (векторлар ортагонал) болса, онда $(\vec{a},\wedge\vec{в})=90^0$ болады да (3.3) тен $\vec{a}\,\vec{в}= |\vec{a}||\vec{в}|\cos 90^0= |\vec{a}||\vec{в}|\cdot0=0$. Сөйтіп

$\vec{a}\perp\vec{в}\Leftrightarrow\vec{a}\,\vec{в}=0$ (3.6)

Сонымен ортагонал векторлардың скаляр көбейтіндісі 0-ге тең болады екен. Сондықтан (3.6)-ны екі вектордың ортагонал болу белгісі деп қарастыруға болады.

3^0. (3.3)-тен екі вектор арасындағы бұрышты табу формуласы шығады.

$\cos(\vec{a},\wedge\vec{в})=\dfrac{\overrightarrow{ав}}{\overrightarrow{|a||в|}}$ (3.7).

Сонымен екі вектор арасындағы бұрыштың косинусын табу үшін ол векторлардың скаляр көбейтіндісін олардың ұзындықтарының көбейтіндісіне бөлу керек екен.

3.4. Векторлардың скаляр көбейтіндісін сол векторлардың координаталары арқылы өрнектеу.

Ортонормаланған $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ базисі, ол базисте $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ $\vec{в}=в_1\vec{i}+в_2\vec{j}+в_3\vec{k}$ векторлар берілсін. Ортанормаланған базисте $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$, $\vec{i}\perp\vec{j}$, $\vec{j}\perp\vec{k}$, $\vec{k}\,1\,\vec{i}$ екенін ескерсе отырып бұл векторлардың скаляр көбейтінділерін анықтайық. (3.3) бойынша.

$\vec{i}\cdot\vec{i}=|\vec{i}|\,|\vec{i}|\cos0^0=1\cdot1\cdot1=1$; $\vec{j}\cdot\vec{j}=|\vec{j}||\vec{j}|=\cos0^0=1\cdot1\cdot1=1$; $\vec{k}\cdot\vec{k}=|\vec{k}||\vec{k}|=\cos0^0=1\cdot1\cdot1=1$;

Ал, $\vec{i}\,\vec{j}=|\vec{i}|\,|\vec{j}|\cos 90^0=1\cdot1\cdot0=0$; $\vec{j}\,\vec{k}=|\vec{j}||\vec{k}|\cos 90^0=1\cdot1\cdot0=0$; $\vec{k}\,\vec{i}=|\vec{k}|\,|\vec{i}|\cos 90^0=1\cdot1\cdot0=0$;

Сонымен $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$ (3.8) $\vec{i}\,\vec{j}=\vec{j}\,\vec{k}=\vec{k}\,\vec{i}=0$ (3.9).

Осыларды ескере отырып $\vec{a}$ мен $\vec{в}$-ны көбейтейік.

$\vec{a}\,\vec{в}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}),\ (в_1\vec{i}+в_2\vec{j}+в_3\vec{k})=a_1в_1\vec{i}+a_2в_2\vec{j}\cdot\vec{i}+a_3в_1\vec{k}\,\vec{i}+a_1в_2\vec{i}\,\vec{j}+a_2в_2\vec{j}^{\,2}+a_3в_2\vec{k}\,\vec{j}+a_1в_3\vec{i}\,\vec{k}+a_3в_3\vec{k}^{\,2}=a_1в_1+a_2в_2+a_3в_3$ қалғандары О болады.

$\vec{a}\,\vec{в}= a_1в_1+a_2в_2+a_3в_3$ (3.10)

Сонымен, координаталары арқылы берілген екі вектордың скаляр көбейтіндісі сол векторлардың сәйкес координаталарының көбейтінділерінің қосындысына тең болады.

Сонда $\vec{a}=\vec{в}$ болса $a_1=в$, $a_2=в_2$ $a_3=в_3$ болғандықтан (3.5),(3.10) бойынша $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ (3.11).

Вектор ұзындығын табу үшін координаталарын квадраттап қосып, нәтижесінен квадрат түбір табу керек.

Егер $\vec{a}\perp\vec{в}$ болса (3.6), (3.10) бойынша

$$\vec{a}\,\vec{в}=a_1в_1+a_2в_2+a_3в_3=0 \qquad (3.12)$$

Ортогонал векторлардың сәйкес координаталарының көбейтіндісінің қосындысы 0-ге тең болады.

Екі вектор арасындағы бұрыш (3.7), (3.10) бойынша

$$\cos(\vec{a},\wedge\vec{в})=\cos\varphi=\frac{a_1в_1+a_2в_2+a_3в_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^3}\sqrt{в_1^2+в_2^2+в_3^2}} \qquad (3.13)$$

формулаларымен табылады.

Егер векторлар ортогонал болса $\varphi=90^0$ болады да (3.13) тең

$a_1в_1+a_2в_2+a_3в_3=0$ (3.12) шығады.

Егер векторлар коллинеар болса $\vec{в}=\lambda\vec{a}$ болады. Мұны координаталары арқылы жазсақ $в_1=\lambda a_1$, $в_2=\lambda a_2$, $в_3=\lambda a_3$,

Бұдан $\frac{a_1}{в_1}=\frac{a_2}{в_2}=\frac{a_3}{в_3}$ (3.14).

Векторлар коллинеар болса сәйкес координаталары пропорционал болады екен. Бұл екі вектордың коллинеар болу белгісі, (3.12) екі вектордың ортогонал болу белгісі.

3.5. Вектордың скаляр көбейту амалының қасиеттері.

3.1. Теорема. Екі вектордың скаляр көбейтіндісі мына заңдарға бағынады:

$\vec{a}\,\vec{в}=\vec{в}\,\vec{a}$ (3.15) орын ауыстыру заңы.

$(\alpha\vec{a})\vec{в}=\alpha(\vec{a},\vec{в})$ (3.16) теру заңы.

$(\vec{a}+\vec{в})\vec{c}=\vec{a}\,\vec{c}+\vec{в}\,\vec{c}$ (3.17) үйлесу заңы.

Дәлелі. Дәлелін бұл векторлардың ортонормаланған базистегі координаталарын $\vec{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{в}=\{в_1, в_2, в_3\}$ пайдалану арқылы дәлелдейік.

(3.3) бойынша $\vec{a}\,\vec{в}=a_1в_1+a_2в_2+a_3в_3=$ в1а1+в2а2+$в_3а_3=\vec{в}\,\vec{a}$. Сонымен, $\vec{a}\,\vec{в}=\vec{в}\,\vec{a}$. $(\alpha\vec{a})\vec{в}=(\alpha\vec{a}_1)\vec{в}_1+(\alpha\vec{a}_2)\vec{в}_2+(\alpha\vec{a}_3)\vec{в}_3=\alpha(a_1в_1+a_2в_2+a_3в_3)=\alpha(\vec{a}\,\vec{в})$. Сонымен, $(\alpha\vec{a})\vec{в}=(\alpha\vec{a}\,\vec{в})$. $\vec{a}+\vec{в}=\{a_1+в_1, a_2+в_2, a_3+в_3\}$ болғандықтан $(\vec{a}+\vec{в})\vec{c}=(a_1+в_1)\vec{c}+(a_2+в_2)c_2+(a_3+в_3)c_3=(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)+(в_1c_1+в_2c_2+в_3c_3)=\vec{a}\,\vec{c}+\vec{в}\,\vec{c}$. Сонымен $(\vec{a}+\vec{в})\vec{c}=\vec{a}\,\vec{c}+\vec{в}\,\vec{c}$.

3.6. Вектор координаталарының геометриялық мәні.

Ортонормаланған $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ базисте $\vec{a}= \{a_1, a_2 , a_3\}$ вектор берілсін. Бұл вектор базистік векторлармен сәйкесінше α, β, γ бұрыштар жасасын.

$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ векторды $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ базистік векторларға жеке – жеке көбейтейік. $\vec{a}\,\vec{i}= a_1\vec{i}^{\,2}+a_2\vec{j}\,\vec{i}+a_3\vec{k}\,\vec{i}=a_1+0+0=a_1$

$$\vec{a}\,\vec{i}= a_1\vec{i}\,\vec{j}+ a_2\vec{j}^{\,2}+ a_3\vec{k}\,\vec{j}=0+a_2+0=a_2$$

$\vec{a}\,\vec{k}= a_1\vec{i}\,\vec{k}+ a_2\vec{j}\,\vec{k}+ a_3\vec{k}^{\,2}=0+0+ a_3= a_3$. Сонымен $\vec{a}\,\vec{i}=a_1$, $\vec{a}\,\vec{j}= a_2$, $\vec{a}\,\vec{k}=a_3$ (3.18)

Бұлардан $a_1=\vec{a}\,\vec{i}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos\alpha=|\vec{a}|\cos\alpha= \text{Пр}\vec{i}=\vec{a}$

$$a_2=\vec{a}\,\vec{j}=|\vec{a}||\vec{j}|\cos\beta=|\vec{a}|\cos\beta= \text{Пр}\vec{j}=\vec{a}$$

$$a_3=\vec{a}\,\vec{k}=|\vec{a}||\vec{k}|\cos\gamma=|\vec{a}|\cos\gamma= \text{Пр}\vec{k}=\vec{a}$$

$a_1=|\vec{a}|\cos\alpha$, $a_2=|\vec{a}|\cos\beta$, $a_3=|\vec{a}|\cos\gamma$. (3.19)

$a_1= \text{Пр}\vec{i}=\vec{a}$, $a_2\ \text{Пр}\vec{j}=\vec{a}$, $a_3\ \text{Пр}\vec{k}=\vec{a}$ (3.20)

Сонымен, вектор координаталары a_1, a_2, a_3 деген $\vec{a}$ вектордың $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ базистік векторларға түскен проекциясы болады екен.

Бұл вектор координаталарының геометриялық мәнін білдіреді. (3.19) – ден квадраттап қоссақ.

$a^2_1+a^2_2+a^2_3=|\vec{a}|(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)$. Бұдан (3.11) ескерсек

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \qquad (3.21)$$

Сөйтіп, вектор базистік векторлармен кез келген бұрыш жасай алмайды екен. Олар жасайтын α, β, γ бұрыш (3.21) формуламен жіктеледі. Ондағы косинустарды $\vec{a}$ вектордың бағыттаушы косинустары дейді.

(3.11) мен (3.19) – дан.

$$\text{Cos}\alpha=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}}},\quad \cos\beta=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}}},\quad \cos\gamma=\frac{a_3}{\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}}}$$

(3.22)

Бұл бойынша $\vec{a}$ вектордың $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ бұрыштарымен жасайтын бұрыштарының косинустарын табу үшін сәйкесінше 1-,2-, 3-координаталарын вектор ұзындығына бөлу керек.

3.7. Екі өлшемді векторлық кеңістіктегі векторлардың скаляр көбейтіндісі. Екі өлшемді V_2 векторлық кеңістіктің базисі тек екі вектордан тұратыны айтылған. Сондықтан вектор координаталары да екеу болады.

Тік бұрышты $(\vec{i}, \vec{j})$ базисте $\vec{a}=\{a_1, a_2\}$, $\vec{в}=\{в_1, в_2\}$ векторлар берілсе, олардың скаляр көбейтіндісі.

$$\overrightarrow{a,\, в}= a_1в_1+ a_2\, в_2 \qquad (3.23)$$

вектор ұзындығы $|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$ (3.24), векторлар арасындағы бұрыш $\cos(\vec{a},\wedge\vec{в})=\frac{a_1в_1+a_2в_2}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}\sqrt{{в_1}^2+{в_2}^2}}$ (3.25) формулаларымен табылады.

Векторлардың коллинеар болу шарты $\frac{a_1}{в_1}=\frac{a_2}{в_2}$ ортагонал болу белгісі $а_1в_1+а_2в_2=0$ болады.

Бұл формулалар үш өлшемді кеңістіктегі сәйкес формулалардан үшінші координат жоқ деп есептеу арқылы шығады.

1-мысал.Ұзындықтары 6 және 5 болатын арасындағы бұрышы 60^0 болатын векторлардың скаляр көбейтіндісін табыңдар.

Шешуі. (3.3) бойынша $\vec{a},\vec{в}=|\vec{a}||\vec{в}|\cos\varphi$. Мысалда $|\vec{a}|=6$, $|\vec{в}|=5$, $\varphi=60^0$. Сонда $\vec{a},\vec{в}=6\cdot5\cos60^0=6\cdot5\cdot\frac{1}{2}=15$

2-мысал. $\vec{x}=\{2,-1,2\}$, $\vec{y}=\{1,-3,-1\}$

Төмендегілерді табайық.

а) Екі вектордың скаляр көбейтіндісі (3.10) бойынша

$\vec{x}\,\vec{y}=2\cdot1-1\cdot(-3)+2(-1)=2+3-2=3$ болады.

ә) Вектор ұзындықтары (3.11) бойынша $|\vec{x}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{4+1+4}=\sqrt{9}=3$, $|\vec{y}|=\sqrt{1^2+(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{1+9+1}=\sqrt{11}$ болады.

б) Екі вектор арасындағы бұрыш (3.7), (3.13) бойынша

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{xy}}{\left|\vec{x}\right|\left|\vec{y}\right|}=\frac{3}{3\cdot\sqrt{11}}=\frac{1}{\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{11}}{11},\qquad \varphi=\arccos\frac{\sqrt{11}}{11}$$

в) Бұл векторлар ортогонал емес, себебі $\vec{x}\,\vec{y}=3\neq0$

г) Векторлар коллинеар емес. Өйткені сәйкес координаталары пропорционал емес $\frac{2}{1}\neq\frac{-1}{-3}\neq\frac{2}{1}$

д) $\vec{x}+\vec{y}$ вектордың $\vec{x}$ векторға түскен проекциясын табу үшін $Пр_{\vec{в}}\,\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi=|\vec{a}|\frac{\overrightarrow{ав}}{\overrightarrow{|a||в|}}=\frac{\overrightarrow{ав}}{\overrightarrow{|a||в|}}$ формуланы пайдаланамыз.

Сонда $\vec{x}+\vec{y}=\{2+1,-1-3,2-1\}=\{3,-4,1\}$;

$(\vec{x}+\vec{y})\vec{x}=3\cdot2-4(-1)+1\cdot2=6+4+2=12$

$Пр_{\vec{x}}\,(\vec{x}+\vec{y})=\frac{\overrightarrow{(xy)x}}{|\vec{x}|}=\frac{12}{3}=4$

3-мысал. $\vec{a}=\{8,4,1\}$, $\vec{в}=\{2,-2,1\}$ берілген. Мыналарды табыңдар.

1^0. $\vec{a}$ мен $\vec{в}$ - ның скаляр көбейтіндісі.

$\vec{a}\,\vec{в}=8\cdot2+4(-2)+1\cdot1=16-8+1=9$

2^0. Векторлардың ұзындығы.

$$|\vec{a}|=\sqrt{8^2+4^2+1^2}=\sqrt{64+16+1}=\sqrt{81}=9$$

$$|\vec{в}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3$$

3^0. Векторлар арасындағы бұрыш.

$$\cos\varphi=\frac{a_1в_1+a_2в_2+a_3в_3}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^3}\sqrt{в_1{}^2+в_2{}^2+в_3{}^2}}=\frac{9}{9\cdot 3}=\frac{1}{3}, \qquad \varphi=\arccos\frac{1}{3}$$

4^0. $\vec{a}$ вектордың $\vec{в}$ вектордағы проекциясы.

$$Пр_{\vec{в}}\,\vec{a}=\frac{\overrightarrow{ав}}{|\vec{в}|}=\frac{9}{3}=3, \qquad Пр_{\vec{a}}\,\vec{в}=\frac{\overrightarrow{ав}}{|\vec{a}|}=\frac{9}{9}=1$$

5^0. Векторлар коллинеар емес. Өйткені $\frac{a_1}{в_1}=\frac{a_2}{в_2}=\frac{a_3}{в_3}$ шарты орындалмайды. $\frac{8}{2}\neq\frac{4}{-2}\neq\frac{1}{1}$

6^0. Векторлар ортагонал емес. Өйткені $a_1в_1+a_2в_2+a_3в_3=0$ шарт орындалмайды: $8\cdot2+4\cdot(-2)+1\cdot1=9\neq0$

7^0. $\vec{a}$ вектордың базистегі $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ векторларға түсетін проекциясы неге тең. Ол сол вектордың сәйкесінше 1-, 2-, 3- колординаталарына тең болады ((3.20)формула).

$Пр\vec{i}=\vec{a}=8$, $Пр\,\vec{j}=\vec{a}=4$, $Пр\vec{k}=\vec{a}=1$

8^0. $\vec{в}$ вектордың бағыттаушы косинустары.

$$\cos\alpha=\frac{в_1}{|\vec{в}|}=\frac{2}{3}; \qquad \cos\beta=\frac{\vec{в}}{|\vec{в}|}=\frac{-2}{3}; \qquad \cos\gamma=\frac{1}{3}$$

Табылғандар дұрыс, себебі (3.21) бойынша

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=(\frac{2}{8})^2+(\frac{-2}{3})^2+(\frac{1}{3})^2=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\frac{9}{9}=1$ болады.

4-мысал. Базистік $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ векторлармен $\vec{a}$ векторы сәйкесінше 30^0,45^0, 60^0 бұрыш жасай алады ма?

Мұндай бұрыш жасау үшін $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ шартын қанағаттандыруы керек ((3.21) формула)

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\cos^2 30^0+\cos^2 45^0+\cos^2 60^0=$

$(\frac{\sqrt{3^2}}{2})+(\frac{\sqrt{2^2}}{2})+(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{6}{4}\neq1$. Сондықтан көрсетілген бұрыштарды жасай алмайды.

5-мысал. $\vec{a}$ векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$ базистік векторлармен сәйкесінше 120^0, 135^0 жасайды. Ол вектор $\vec{\gamma}$ векторымен қандай бұрыш жасайды.

Мұнда $\alpha=120^0$, $\gamma=135^0$, β-ны табу керек.

Сонда $\cos^2 120^0+ \cos^2\beta+ \cos^2 135^0=1$болу керек. Бұдан $\cos^2\beta=1-\cos^2 120^0- \cos^2 135^0=1- \cos^2(90^0-30^0)- \cos^2(120^0-45^0)=1-\sin^2 30^0- \cos^2 45^0=1-(\frac{1}{2})^2-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 =1-\frac{1}{4}-\frac{2}{4}=\frac{4-1-2}{4}=\frac{1}{4}$ $\cos\beta=\pm\frac{1}{2}$; $\beta=\arccos=(\pm\frac{1}{2})=60^0$ немесе 120^0.

Қайталау сұрақтары мен есептер.

1. Өс деген не, оның түзуден айырмашылығы қандай?

2. Вектордың өстегі проекциясы деп нені айтады; ол оң теріс бола алады ма? Оны қалай табады?

3. Векторлар арасындағы бұрыш деп нені айтады. Бағдарланған жағдайда оң, теріс бұрыш деген не?

4. Екі вектордың скаляр көбейтіндісі деп нені айтады?

5. Қандай векторлардың скаляр көбейтіндісі 0-ге тең болады?

6. Ортонормаланған базисте базистік векторлардың скаляр көбейтінділері неге тең болады?

10. Коллинеар векторлардың скаляр көбейтіндісі неге тең?

11. Векторлардың скаляр көбейтіндісі олардың координаталары арқылы қалай өрнектеледі (табылады)

12. Вектор ұзындығын, вектордың векторға түскен проекциясын табу формулалары қандай?

13. Екі вектордың арасындағы бұрышты табу формуласы қандай?

14. Векторлардың коллинеар, ортогонал болу белгілері қандай?

15. Векторлардың скаляр көбейтіндісінің оң, теріс болуы неге байланысты?

16. Вектор координаталарының геометриялық мағынасы қандай?

17. Вектордың бағыттаушы косинустары деген не, оны табу формуласы қандай?

18. Вектордың бағыттаушы косинустарына қандай тежеу қойылады?

19. Вектордың скаляр квадраты, кубы деуге болады ма?

20. Екі вектордың скаляр көбейтіндісі сол векторлардың ұзындықтарының көбейтіндісіне тең болуы мүмкін бе, жоқ па?

21. Векторды базистік векторлар $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ скаляр көбейткенде не шығады?

22. Төмендегі теңдіктердің дұрыс-қатесін анықтаңдар;

а)$\vec{a}\vec{a} = \vec{a}^2$ ә)$\vec{a} * \vec{a} =a^2$ б) $\vec{a}\cdot\vec{a}=a$ в) $\vec{a}\cdot a^2=\vec{a}^3$

г) $\vec{a}\cdot\left(\vec{a}\vec{b}\right)=\vec{a}^{2}\vec{b}$ д) $\vec{a}^{2}\cdot a=a^{3}$ е) $\left(\vec{a}\vec{b}\right)^{2}=\vec{a}^{2}\vec{b}^{2}$ $\vec{a}\left(\vec{b}\vec{b}\right)=\vec{a}b^{2}$

23. $|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|=1,\ \vec{a}\perp\vec{b}$ болса, $\vec{m}=3\vec{a}-2\vec{b},\quad \vec{n}=\vec{a}+4\vec{b}$ векторлардың скаляр көбейтіндісі неге тең?

24. Скаляр көбейтіндісін табыңдар: а) $|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|=2,\quad \left(\vec{a}\vec{b}\right)=135^{0}$

ә) $|\vec{a}|=2,\ \left|\vec{b}\right|=3,\quad \vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ б) $|\vec{a}|=3,\ \left|\vec{b}\right|=5,\ \vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$

в) $|\vec{a}|=10,\ \left|\vec{b}\right|=7,\quad \vec{a}\perp\vec{b}$ г) $|\vec{a}|=\sqrt{3},\ \left|\vec{b}\right|=6,\ \overset{\wedge}{\left(\vec{a}\vec{b}\right)}=\dfrac{\pi}{6}$

25. $\vec{a}=\{-1.5\},\quad \vec{b}=\{3.5\}$. Векторлар берілген $\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}-\vec{b}$ вектор координаталарын табыңдар, $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ ның скаляр көбейтіндісін табыңдар, ұзындықтарын табыңдар.

26. $\vec{a}=\{-2,-1,0\},\quad \vec{b}=\{1;\sqrt{2};-5\}\quad \vec{c}=\{1;2;5\}$ берілген. Мыналарды табыңдар: $\vec{a}\vec{b},\vec{a}\vec{c},\left|\vec{b}\right|,\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{c},\sqrt{\vec{a}^{2}}$

27. $\vec{a}=\{6,3,-2\},\ \vec{b}=\{\sqrt{3},\sqrt{5},-1\}$ векторлардың ұзындығын, бірлік векторларын табыңдар.

28. Векторлар арасындағы бұрышты табыңдар:

а) $\vec{x}=\{2;-1;3\},\ \vec{y}=\{1;-4;3\}$ б) $\vec{m}=\{2;-2;1\},\quad \vec{n}=\{3;0;-4\}$

29. $\vec{a}=\{5;-6;1\},\ \vec{b}=\{-4;3;0\},\ \vec{c}=\{5;-8;10\}$ болса а) $3a^{2}-4\vec{a}\vec{b}+2\vec{c}^{2}$ б) $3\vec{a}\vec{b}-4\vec{b}\vec{c}-5\vec{a}\vec{b}$ неге тең?

30. $\vec{a}=\{3;-6;-1\},\quad \vec{b}=\{1;4;-5\},\quad \vec{c}=\{3;-4;12\}$ болса $\text{Пр}_{\text{е}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ неге тең?

31. α мен β мәні қандай болғанда векторлар колинеар болады?

а) $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{\alpha}+\beta k,\ \vec{b}=\alpha\vec{c}-6\vec{j}+2\vec{c};$ б) $\vec{a}=6\vec{i}+\alpha\vec{j}-2\vec{k},\quad \vec{b}=\vec{3}\vec{c}+2\vec{j}-\beta\vec{k}$

32. β қандай болғанда векторлар ортогонал болады?

а) $\vec{a}=\{2;-5;\beta\},\quad \vec{b}=\{3;6;4\}$ б) $\vec{a}=\{2;1;6\},\quad \vec{b}=\{\beta,4,-7\}$

33. $\vec{a}\vec{x}=\vec{b}\vec{x},\quad \vec{x}\neq\vec{0}$ болса қысқартып $\vec{a}=\vec{b}$ деуге болады ма, жоқ па?

34. $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k},\quad \vec{b}=-6\vec{i}+3\vec{j}-9\vec{k}$ векторлардың бағыттары туралы не айтуға болады?

35. $\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k},\ \vec{b}=\vec{c}+4\vec{j}-5\vec{k},\ \vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}$

$\text{Пр}_{\text{е}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$-ны табыңдар.

4.Векторлардың векторлық көбейтіндісі

4.1. Оң және сол векторлар үштігі. Үш вектор тәртіптелген (реттелген) үштік делінеді, егер ол векторлардың қайсысы бірінші, қайсысы екінші, қайсысы үшінші екені көрсетілсе. Үштікті жазғанда бұл тәртіп сақталып жазылады. Мысалы $\vec a,\vec b,\vec c$ деп жазылса, онда $\vec a$ бұл үштіктің бірінші, $\vec b$ -екінш,і $\vec c$ -үшінші векторы, ал $\vec b,\vec a,\vec c$ деп жазылса бұл үштік үшін $\vec b$ -бірінші, $\vec a$ -екінші, $\vec c$ -үшінші вектор болады. Сондықтан $\vec a,\vec b,\vec c$ мен $\vec b,\vec a,\vec c$ әртүрлі үштік деп есептеледі.

Компланар емес $\vec a,\vec b,\vec c$ векторлар үштігі оң үштік (сол үштік) делінеді егерде оларды $\overrightarrow{OA}=\vec a,\ \overrightarrow{OB}=\vec b,\ \overrightarrow{OC}=\vec c$ етіп бір нүктеге көшіргенде төмендегі үш жағдайдың бірі орындалатын болса:

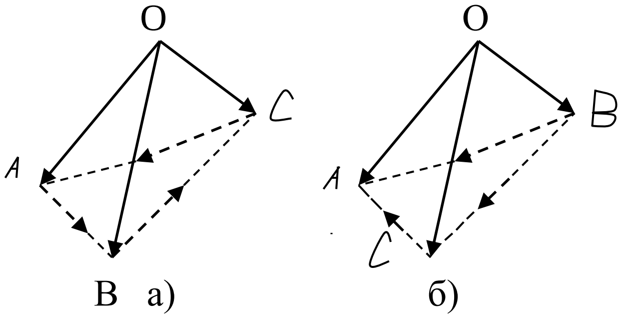
1-жағдай. А дан В-ға, В-дан С-ға, С-дан А-ға жүріп өту жолының бағыты О нүктеден сағат тілі қозғалысына кері (бағыттас) болып көрінетін болса (15-сурет)

15-а суретте $\vec a,\vec b,\vec c$ оң үштік, 15-б суретте сол үштік болады.

2-жағдай. $\vec c$ вектордың ұшынан қарағанда $\vec a$ -ны $\vec b$ -ға беттестіру үшін бұратын бұрыштың кішісінің бұрылу бағыты сағат тілі қозғалысы бағытына кері (бағыттас) болса (16-сурет)

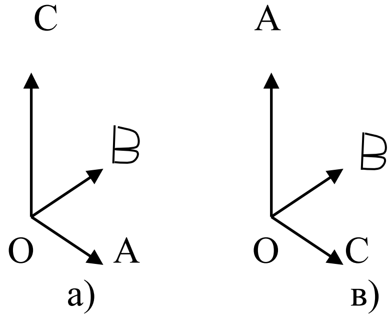
16-а суретте $\vec a\vec b\vec c$ оң үштік, 16-б суретте сол үштік болады.

3-жағдай. Оң (сол) қол алақанының соңғы екі саусағын жұмса, ортаңғы саусақты алақанымен 0-ден өзге бұрыш жасайтындай етіп қойғанда $\vec a$ -бас бармақ, $\vec b$ -сұқсаусақ, $\vec c$ -ортаңғы саусақ бағытымен бірдей болып орналасса (17-сурет). 17-а суретте $\vec a,\vec b,\vec c$ оң, 17-б суретте сол үштік болады. Демек, бұл жағдайда $\vec a,\vec b,\vec c$ векторлар оң (сол) қол ережесіне бағынуы керек.



а) б)

15-сурет



а) в)

16-сурет

Егер екі үштіктің екеуі де оң, не сол үштік болса, онда оларды бірдей бағдарланған, ал бірі оң екіншісіне сол үштік болса қарама-қарсы бағдарланған үштіктер дейді.

Мысалы $\vec a\vec b\vec c,\vec b\vec c\vec a,\vec c\vec a\vec b$ бірдей бағдарланған үштіктер, $\vec b\vec c\vec a,\vec a\vec c\vec b,\vec c\vec b\vec a$ үштіктерде бірдей бағдарланған, бірақ бұлар алғашқы үштікке қарама-қарсы бағдарланған.

4.2. Векторлардың векторлық көбейтіндісі. Вектор $\vec{a}$-ның вектор $\vec{b}$-ға векторлық көбейтіндісі деп төмендегі үш талапты қанағаттандыратын - векторын айтады:

1-ден, $\vec{c}$-векторының ұзындығы $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлардың ұзындықтарын олар арасындағы бұрыштың синусына көбейткенде шығатын санға тең болуы керек, яғни $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}||\sin \vec{a}\hat{}\vec{b}|$ $(4-1)$

2-ден, $\vec{c}$ вектор $\vec{a}$ векторға да, $\vec{b}$ векторға да ортогонал болуы керек, яғни $\vec{c} \perp \vec{a},\ \vec{c} \perp \vec{b}$ болуы керек,

3-ден, $\vec{a}$ (көбейгіш), $\vec{b}$ (көбейткіш), $\vec{c}$ (көбейтінді) векторлар орналасуында оң үштік жасауы керек.

Екі вектордың векторлық көбейтіндісін $\vec{c} = \left[\vec{a}\vec{b}\right]$ деп белгілейді.

Векторлардың векторлық көбейтіндісінің бұл анықтамасынан тікелей мына тұжырымдардың дұрыстығы шығады:

1. Берілген $\vec{a}, \vec{b}$ векторларлдың векторлық көбейтіндісі болатын вектордың ұзындығы, сан жағынан сол $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлар қабырғасы болатын параллелограммның ауданына тең болады.

Өйткені қабырғалары $|\vec{a}|, |\vec{b}|,$ олар арасындағы бұрышы $\left(\vec{a}\hat{}\vec{b}\right) = \varphi$ болатын параллелограмның ауданы $S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$ болатыны мектептен белгілі. Бұл (4-1) мен бірдей. Сондықтан параллелограмм ауданы мына $S_{пар} = \left|\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right|$ (4-2) формуламен анықталады.

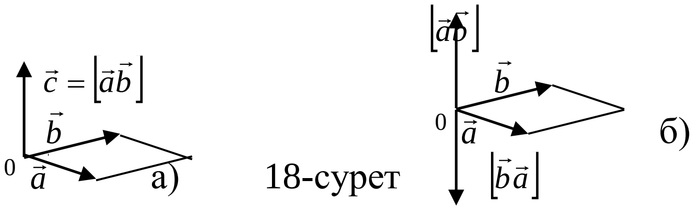
Ал, қабырғалары $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторды кескіндейтін үшбұрыш ауданы $S_{\wedge} \frac{1}{2}\left|\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right|$ (4-3) формуламен табылады.

2. Анықтаманың 2-талабынан $\left[\vec{a}\vec{b}\right] \perp \vec{a},\ \left[\vec{a}\vec{b}\right] \perp \vec{b}$ болғандықтан екі вектордың векторлық көбейтіндісі ол векторлар жататын $\left(\vec{a}\vec{b}\right)$ жазықтыққа перпендикуляр болады. (18-а сурет)

Ал, 3-талабы бойынша ол вектор векторлар жатқан $\left(\vec{a}\vec{b}\right)$ жазықтықтың $\vec{a}, \vec{b},\ \left[\vec{a}\vec{b}\right]$ векторлар оң үштік жасайтын жағына қарай бағытталады, яғни $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ үстіңгі жағына $\left[\vec{b}\vec{a}\right]$ төменгі жағына қарай бағытталады (18-б сурет)

3. Екі $\vec{a}, \vec{b}$ векторлардың векторлық көбейтіндісі ол вектордың бірі нөлдік вектор болғанда немесе ол векторлар коллинеар болғанда ғана нөлдік вектор болады. Өйткені $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\left|\vec{a}\hat{}\vec{b}\right| = 0$ болу үшін не $|\vec{a}| = 0,$ не $\left|\vec{b}\right| = 0,$ не $\sin\left(\vec{a}\hat{}\vec{b}\right) = 0$ болуы керек.

Егер $|\vec{a}| \neq 0,\ \left|\vec{b}\right| \neq 0$ болса, онда $\sin\left(\vec{a}\hat{}\vec{b}\right) = 0$ болады.



18-сурет

Ол үшін $(\vec a\,^\wedge\vec b)$ не 0^0 не 180^0 болуы керек. Ал, ол $\vec a$ мен $\vec b$ коллинеар болу керек деген сөз. Керісінше $a\|\vec b$ (коллинеар) болса, онда бұлар арасындағы бұрыш не 0^0, не 180^0 болады, ал $\sin 0^0 = \sin 180^0 = 0$ болатындықтан $\left|[\vec a\vec b]\right| = 0$ болады. Ал бұл $[\vec a\vec b]$деген сөз. Сөйтіп екі вектор коллинеар болса олардың векторлық көбейтіндісі

$$\left|[\vec a\vec b]\right| = 0 \quad (4\text{-}4)$$

нөл болады. (4.4) екі вектордың коллинеар болу шарты болады.

4. Кез келген $\vec a,\vec b$ векторлар үшін мына теңдік дұрыс болады.

$$[\vec a\vec b] = -[\vec b\vec a] \quad (4.5).$$

яғни векторлық көбейтуде көбейткіштердің орнын ауыстырғанда олардың таңбасы кері ауысады, вектор ұзындығы сақталады.

Дәлелі 1-ден $\left|[\vec a\vec b]\right| = |\vec a||\vec b|\sin(\vec a\,^\wedge\vec b)$, $\left|[\vec b\vec a]\right| = |\vec b||\vec a|\sin(\vec b\,^\wedge\vec a)$ болғандықтан $\left|[\vec a\vec b]\right| = \left|[\vec b\vec a]\right|$

2-ден, $\vec a,\vec b,$ $[\vec a\vec b]$ векторлар үштігі де, $\vec b,\vec a,$ $[\vec b\vec a]$ векторлар үштігіде оң үштік болу керек. Ал $[\vec a\vec b]$ да $[\vec b\vec a]$ да $\vec a$ мен $\vec b$ жатқан жазықтыққа перпендикуляр болатындықтан олар бұл жазықтықтың екеуі екі жағына қарай бағытталуы керек.

Сондықтан $[\vec a\vec b] = -[\vec b\vec a]$ болады. Сонымен векторлық көбейту амалында орын алмастыру заңы сақталмайды.

5. Кез келген α нақты саны мен $\vec a,\vec b$ векторлар үшін мына теңдіктер орындалады: $\alpha[\vec a\vec b] = [(\alpha\vec a)\vec b] = [\vec a(\alpha\vec b)]$ (4.6).

Дәлелі $\alpha \succ 0$ болса $\alpha\vec a \uparrow\uparrow \vec a,$ $\alpha\vec b \uparrow\uparrow \vec b$ болатындықтан $(\alpha\vec a,^\wedge \vec b) = (\vec a,^\wedge \alpha\vec b) = (\vec a,^\wedge \vec b)$

Сондықтан бұлардың синустары да тең болады $\sin(\alpha\vec a,^\wedge \vec b) = \sin(\vec a,^\wedge \alpha\vec b) = \sin(\vec a,^\wedge \vec b)$

Егер $\alpha \succ 0$ болса $\alpha\vec a \uparrow\downarrow \vec a,$ $\alpha\vec b \uparrow\downarrow \vec b$ болатындықтан $(\alpha\vec a,^\wedge \vec b) = 180^0 - (\vec a,^\wedge \vec b)$, $(\vec a,\alpha\vec b) = 180^0 - (\vec a,^\wedge \vec b)$ болады да бұл кезде де $\sin(\alpha\vec a,^\wedge \vec b) = \sin(\vec a,^\wedge \alpha\vec b) = \sin(\vec a,^\wedge \vec b)$

Осыларды ескерсек

$$\left|\alpha[\vec a,\vec b]\right| = |\alpha|\left|[\vec a\vec b]\right| = |\alpha||\vec a||\vec b|\sin(\vec a\,^\wedge\vec b)$$

$$\left|[(\alpha\vec a)\vec b]\right| = |\alpha\vec a||\vec b|\sin(\alpha\vec a,^\wedge \vec b) = |\alpha||\vec a||\vec b|\sin(\vec a,^\wedge \vec b)$$

$$\left|[\vec a(\alpha\vec b)]\right| = |\vec a||\alpha\vec b|\sin(\vec a,^\wedge \alpha\vec b) = |\alpha||\vec a||\vec b|\sin(\vec a,^\wedge \vec b)$$

бұлардан $\left|\alpha[\vec a,\vec b]\right| = \left|[(\alpha\vec a)\vec b]\right| = \left|[\vec a(\alpha\vec b)]\right|$

Сонымен қатар бұл векторлардың бағыттары да бірдей болады. Демек (4.6) теңдік дұрыс.

6. Кез келген $\vec a,\vec b,\vec c$ векторлар үшін

$$[(\vec a+\vec b)\vec c] = [\vec a\vec c] + [\vec b\vec c] \quad (4.7)$$

Дұрыстығын вектор координаталары арқылы дәлелдейміз.

4.3. Векторлардың векторлық көбейтіндісі сол векторлардың координаталары арқылы өрнектеу. Ортонормаланған $\left(\vec{i}\vec{j}\vec{k}\right)$ базис және ол базисте $\vec{a} = a,\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k},\qquad \vec{b} = b,\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ векторлар берілсін. Базис ортонормаланған болғандықтан $\vec{j} = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1;\ \vec{i} \perp \vec{j},\ \vec{j} \perp \vec{k},\ \vec{k} \perp \vec{i}\ (*)$ болатыны белгілі. Базистік векторлардың векторлық көбейтінділерін табайық.

$$\left|\left[\vec{i}\,\vec{i}\right]\right| = \left|\vec{i}\right|\left|\vec{i}\right|\sin 0^0 = 1\cdot1\cdot0 = 0,\ \left|\left[\vec{j}\vec{j}\right]\right| = \left|\vec{j}\right|\left|\vec{j}\right|\sin 0^0 = 1\cdot1\cdot0 = 0,\ \left|\left[\vec{k}\vec{k}\right]\right| = \left|\vec{k}\right|\left|\vec{k}\right|\sin 0^0 = 1\cdot1\cdot0 = 0$$

Сонымен $\left[\vec{i}\,\vec{i}\right] = \left[\vec{j}\vec{j}\right] = \left[\vec{k}\vec{k}\right] = \vec{0}$ (4.8)

$\left[\vec{i}\vec{j}\right] = \vec{k},\ \ \left[\vec{j}\vec{k}\right] = \vec{i},\ \ \left[\vec{k}\vec{i}\right] = \vec{j}$ (4.9) болады. Себебі

1-ден, $\left|\vec{k}\right| = \left|\left[\vec{i}\vec{j}\right]\right| = \left|\vec{i}\right|\left|\vec{j}\right|\sin 90^0\right| = 1\cdot1\cdot1 = 1,$

2-ден, $\vec{k} \perp \vec{i},\ \vec{k} \perp \vec{j};$ 3-ден, $\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ оң үштік жасайды.

Сөйтіп векторлық көбейтудің үш талабында $\vec{k}$ қанағаттандырады. Қалған екеуі де осындай.

Векторлық көбейтудің (4.5) қасиетін ескерсек, (4.9)-дан

$\left[\vec{j}\vec{k}\right] = -\vec{k},\ \ \left[\vec{k}\vec{j}\right] = -\vec{i},\ \ \left[\vec{i}\,\vec{k}\right] = -\vec{j}$ (4.10)

Осыларды ескере отырып $\vec{a}$-ны $\vec{b}$-ға векторын көбейтейік.

$$\left[\vec{a}\vec{b}\right] = \left[\left(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\right)\left(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}\right)\right] = a_1b_1\left[\vec{i}\,\vec{i}\right] + a_2b_1\left[\vec{j}\vec{k}\right] + a_3b_1\left[\vec{k}\vec{i}\right] + a_1b_2\left[\vec{i}\vec{j}\right] + a_2b_2\left[\vec{j}\vec{j}\right] + a_3b_2\left[\vec{k}\vec{j}\right] +$$
$$+ a_1b_3\left[\vec{i}\,\vec{k}\right] + a_2b_3\left[\vec{j}\vec{k}\right] + a_3b_3\left[\vec{k}\vec{k}\right] = 0 - a_2b_1\vec{k} + a_3b_1\vec{j} + a_1b_2\vec{k} + 0 - a_3b_2\vec{i} - a_1b_3\vec{j} + a_2b_3\vec{i} + 0 = \left(a_2b_3 - a_3b_2\right)\vec{i} +$$
$$+ \left(a_3b_1 - a_1b_3\right)\vec{j} + \left(a_1b_2 - a_2b_1\right)\vec{k} = \begin{vmatrix} a_2a_3 \\ b_2b_3 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} a_3a_1 \\ b_3b_1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1a_2 \\ b_1b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

Сонымен $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ вектор $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлардың координаталары арқылы былайша өрнектеледі екен.

$$\left[\vec{a}\vec{b}\right] = \begin{vmatrix} a_2a_3 \\ b_2b_3 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} a_3a_1 \\ b_3b_1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1a_2 \\ b_1b_2 \end{vmatrix}\vec{k} \quad (4.11)$$

Мұны былайда жазуға болады.

$$\left[\vec{a}\vec{b}\right]\begin{vmatrix} \vec{i}\vec{j}\vec{k} \\ a_1a_2a_3 \\ b_1b_2b_3 \end{vmatrix} \quad (4.12)$$

Екі вектордың векторлық көбейтіндісінің координаталары

$$\left[\vec{a}\vec{b}\right] = \left\{\begin{vmatrix} a_2a_3 \\ b_2b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3a_1 \\ b_3b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1a_2 \\ b_1b_2 \end{vmatrix}\right\} \quad (4.13)$$

формуламен табылады.

Екі вектордың векторлық көбейтіндісінің ұзындығы (3-11) бойынша

$$\left|\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right| = \sqrt{\begin{vmatrix} a_2a_3 \\ b_2b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3a_1 \\ b_3b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1a_2 \\ b_1b_2 \end{vmatrix}}^{\,2} \quad (4\text{-}14)$$

формуламен табылады. Қабырғалары $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$, $\vec{b}=\{b_1b_2b_3\}$ векторларды кескіндейтін үшбұрыштың ауданы (4-3) бойынша;

$$S_{\wedge}=\frac{1}{2}\left|\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}a_2a_3\\ b_2b_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_3a_1\\ b_3b_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_1a_2\\ b_1b_2\end{vmatrix}^2}\quad(4\text{-}15)$$

параллелограммның ауданы (4.2) бойынша:

$$S_{пар}=\left|\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right|=\sqrt{\begin{vmatrix}a_2a_3\\ b_2b_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_3a_1\\ b_3b_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_1a_2\\ b_1b_2\end{vmatrix}^2}\qquad(4\text{-}16)$$

формуламен анықталады.

Векторлардың векторлық көбетіндісінің координаталарын пайдалана отырып векторларды векторлық көбейту амалының барлық қасиеттерін дәлелдеуге болады.

Мысалы 4. $\left\lfloor\vec{a},\vec{b}\right\rfloor$= - $\left\lfloor\vec{b},\vec{a}\right\rfloor$ болатынын дәлелдейік.

(11-4)-тен $\left\lfloor\vec{a},\vec{b}\right\rfloor=\begin{bmatrix}a_2a_3\\ \text{в}_2\text{в}_3\end{bmatrix}\vec{i}+\begin{bmatrix}a_3a_1\\ \text{в}_3\text{в}_1\end{bmatrix}\vec{j}+\begin{bmatrix}a_1a_2\\ \text{в}_1\text{в}_2\end{bmatrix}\vec{k}=-\begin{bmatrix}\text{в}_2\text{в}_3\\ a_2a_3\end{bmatrix}\vec{i}-\begin{bmatrix}\text{в}_3\text{в}_1\\ a_3a_1\end{bmatrix}\vec{j}-\begin{bmatrix}\text{в}_1\text{в}_2\\ a_1a_2\end{bmatrix}\vec{k}=-\left[\vec{\text{в}}\vec{a}\right]$

Енді 5. $\left\lfloor(\vec{a}+\vec{\text{в}})\vec{c}\right\rfloor=\left\lfloor\vec{a}\vec{c}\right\rfloor+\left\lfloor\vec{\text{в}}\vec{c}\right\rfloor$ қасиеттін дәлелдейік.

$\vec{a}+\vec{\text{в}}=\{a_1+\text{в}_1,a_2+\text{в}_2,a_3+\text{в}_3\}$, $\vec{c}=\{c_1,c_2,c_3\}$ болсын. Сонда (4-11) бойынша

$$\left[\left(\vec{a}+\vec{\text{в}}\right)\vec{c}\right]=\begin{vmatrix}a_2+\text{в}_2 & a_3+\text{в}_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_2+\text{в}_2 & a_3+\text{в}_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}a_3+\text{в}_3 & a_1+\text{в}_1\\ c_3 & c_1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1+\text{в}_1 & a_2+\text{в}_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\text{в}_2 & \text{в}_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}\right)\vec{k}+\left(\begin{vmatrix}a_3 & \text{в}_1\\ c_3 & c_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\text{в}_3 & \text{в}_1\\ c_3 & c_1\end{vmatrix}\right)\vec{j}+\left(\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\text{в}_1 & \text{в}_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\right)\vec{k}=$$

$$\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ c_3 & c_1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\vec{k}\right)+\left(\begin{vmatrix}\text{в}_1 & \text{в}_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}\text{в}_3 & \text{в}_1\\ c_3 & c_1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}\text{в}_1 & \text{в}_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\vec{k}\right)=\left[\vec{a}\bullet\vec{c}\right]+\left[\vec{\text{в}}\bullet\vec{c}\right]$$

Сонымен $\left\lfloor\left(\vec{a}+\vec{\text{в}}\right)\vec{c}\right\rfloor=\left\lfloor\vec{a}\vec{c}\right\rfloor+\left\lfloor\vec{\text{в}}\vec{c}\right\rfloor$

1-мысал. Өзара 30^0 жасайтын ұзындықтары 10 және 9 болатын векторлардың векторлық көбейтіндісінің ұзындығын (модулін) табыңдар.

Шешуі. Мұнда $\left|\vec{a}\right|=10$, $\left|\vec{\text{в}}\right|=9$, ($\widehat{\vec{a}\vec{\text{в}}}$)=$30^0$. Сонда $\left\lfloor\vec{a}\vec{\text{в}}\right\rfloor$ вектор

ұзындығы (4-1) бойынша $\left|\left[\vec{a}\vec{\text{в}}\right]\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{\text{в}}\right|\left|\sin(\widehat{\vec{a}\vec{\text{в}}})\right|=10\cdot 9in30^0=90\cdot\frac{1}{2}=45$

2-мысал. $\vec{a}=3\vec{i}+6\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{\text{в}}=\vec{i}-9\vec{j}+6\vec{k}$ векторлар берілген.

Мыналарды табыңдар.

1. $\vec{a}$ және $\vec{\text{в}}$ векторлардың ұзындықтары

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}}=\sqrt{9+36+16}=\sqrt{61};\qquad\left|\vec{\text{в}}\right|=\sqrt{1+81+36}=\sqrt{118}$

2. $\vec{a}$ мен $\vec{\text{в}}$ векторлардың скаляр көбейтіндісі.

$\vec{a}\,\vec{\text{в}}=a_1\text{в}_1+a_2\text{в}_2+a_3\text{в}_3=3\cdot 1+6\cdot(-9)+(-4)\cdot 6=3-54-24=-75$

3. $\vec{a}$ мен $\vec{\text{в}}$ вектор арасындағы бұрыш

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\vec{в}}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}\sqrt{в_1{}^2+в_2{}^2+в_3{}^2}}=\frac{-75}{\sqrt{61}\sqrt{118}}=-\frac{75}{\sqrt{7198}},\quad \varphi=\arccos(-\frac{75}{\sqrt{7198}})$$

4. $\vec{a}$ мен $\vec{в}$ векторлардың векторлық көбейтіндісінің координаталары (4-13) формула бойынша

$$\left[\vec{a}\vec{в}\right]=\left\{\begin{vmatrix}6 & -4\\ -9 & 6\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-4 & 3\\ 6 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}3 & 6\\ 1 & -9\end{vmatrix}\right\}=\{36-36, \quad -4-18, \quad -27-6\}=\{0, \ -22, \ -33\}$$

5. $\left[\vec{a}\vec{в}\right]$ вектор ұзындығы (4-13) бойынша

$$\left|\left[\vec{a}\vec{в}\right]\right|=\sqrt{0^2+(-22)^2+(-33)^2}=\sqrt{484+1089}=\sqrt{1573}$$

6. Қабырғалары $\vec{a}=\{3,6,-4\}$, $\vec{в}=\{1,-9,6\}$ векторларын кескіндейтін үшбұрыш ауданы$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\left[\vec{a}\vec{в}\right]\right|=\frac{\sqrt{1573}}{2}$ парллелограмның ауданы $S_\Delta=\sqrt{1573}$.

Қайталау сұрақтары мен есептер

1. Екі вектордың векторлық көбейтіндісінен не шығады?
2. Екі вектордың векторлық көбейтіндісі деген не?
3. Екі векторды векторлық көбейту амалының қасиеттері қандай?
4. Екі вектордың коллинеар болу белгісі.
5. kklистік векторлардың векторлық көбейтіндісін ол векторлардың координаталары арқылы өрнектеу.
6. Екі вектордың векторлық көбейтіндісінің координаталары сол координаталардың орналасу ерекшелігі.
7. Вектор координаталары арқылы қабырғаларын осы векторлар кескіндейтін үшбұрыштың, параллелограммның аудандарын табу.
8. Оң қол, сол қол ережелері қандай?
9. Көбейткіш векторлардың бағыттары арқылы олардың векторлық көбейтіндісінің таңбасын қалай табады?
10. Өрнекті ықшамдаңдар:

    а) $[(\vec{m}+\vec{n})\ (\vec{m}-\vec{n})]$ б) $[(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})]$ в) $[\vec{a}\ (\vec{a}+\vec{b})]$
11. Теңдіктің дұрыс қатесін ажыратыңдар:

    а) $[(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})]=[\vec{a}^2]-[\vec{b}^2]$, б) $[\vec{a}\,\vec{b}]^2=\vec{a}^2\vec{b}^2$
12. $\vec{m}\perp\vec{n}$ $|\vec{m}|=3$, $|\vec{n}|=5$ болса $|\,[(\vec{m}+\vec{\vec{n}})\ (\vec{m}-\vec{\vec{n}})],|$ $\left|\left[\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\right]\right|$ неге тең?
13. $\vec{a}=\dot{\imath}+\vec{j}$, $\vec{b}=3\vec{j}+\vec{\kappa}$ $\vec{c}=2\dot{\imath}+\vec{\kappa}$ болса $\left[\vec{a}\left(\vec{b}\vec{c}\right)\right]$ $\left[\left(\vec{a}\vec{b}\right)\vec{c}\right]$ неге тең?
14. $\vec{a}=\vec{j}$, $\vec{b}=2\dot{\imath}-\vec{j}+3\vec{k}, \vec{c}=\dot{\imath}+2\vec{k}$ болса, $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$; $\left[\vec{b}\vec{c}\right]$, $\left[\vec{\imath}\vec{a}\right]$ теге тең?
15. ΔABC да $\overrightarrow{AB}-\{4;-0,5\ \}$, $\overrightarrow{AC}-\{0,4;-3\ \}$, $\overrightarrow{BC}=\{-4,9;-3\ \}$ болса A төбеден жүргізілген биіктік қаншаға тең?

16. $\vec{a}=\{3,-1,-2\ \}$, $\quad \vec{в}=\{1,2,-1\ \ \}$ болса $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$, $\left[2\vec{a}+\vec{в},\vec{c}\right]$, $\left[\left(3\vec{a}-\vec{в}\right)\left(3\vec{a}+3\vec{в}\right)\right]$ векторлардың координаталары неге тең?

5 Үш вектордың аралас көбейтіндісі

5.1. Үш вектордың аралас көбейтіндісі. $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ үш вектор берілсін. Егер мұның екеуін скаляр көбейтсек бір нақты сан шығар еді: $\vec{a}\vec{в}=m$ болсын. Мұны үшінші векторға көбейтсек оған коллинеар болатын $m\vec{c}$ вектор шығады.

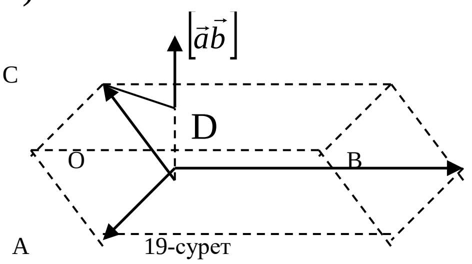
Егер алғашқы екеуін векторлық көбейтсек бір $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ вектор шығар еді. Мұны үшінші векторға скаляр көбейтуге және векторлы көбейтуге болады. Бірінші жағдайда $\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}$-сан шықса екінші жағдайда $\left[\left[\vec{a}\overleftarrow{b}\right]\vec{c}\right]$ вектор шығады. Біріншісін векторлық скалярлық (немесе аралас) көбейту, екіншісін қос векторлық көбейту дейді.

Бұл екеуіне жеке-жеке тоқталамыз.

5.2. **Үш вектордың аралас көбейтіндісі.** Жоғарыда айтқандай үш вектордың аралас көбейтіндісі деп, ол үш вектордың екеуін векторлы көбейтіп, одан шыққан векторды үшінші векторға скаляр көбейтуді айтады, оны ($\vec{a},\vec{в},\vec{c}$) деп белгілейді. Сонымен ($\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$)=$\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}$ (5.1)

Үш вектордың аралас көбейтіндісінің геометриялық мәнін ашу үшін бір О нүктеден $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{в}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ векторларды өлшеп салып, оны қырлары осы векторлар болатын параллелепипедке дейін толықтырайық. (19-сурет) Сонда $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ вектор $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{в}$, векторлар жатқан жатқан жазықтыққа, яғни параллелепипед табандарына перпендикуляр болар еді және үстіңгі табанына қарай бағытталар еді. Оның үстіңгі табанымен қиылысу нүктесін Д дейік. Сонда СД $\perp$ ОД болады да ОД кесіндісі бұл параллелепипедтің биіктігі болады және ол $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ вектордың $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ вектордағы проэкциясы болады.

ОД=Пр$\vec{C}$ $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ (5-2)



19-сурет

Сонда (3-2), (3-4) формулалар бойынша (5-1)-ден үш вектордың аралас көбейтіндісі мынадай болып шығады:

$(\vec{a},\vec{в},\vec{c})=\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}=\ \left|\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right|\ \text{Пр}\vec{C}\ \left[\vec{a}\vec{b}\right]$ (5-3)

Бұрынғы бапта айтқанымыздай $\left|\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right|$ қабырғалары $\left|\vec{a}\right|,\left|\vec{в}\right|$ болатын параллелограмның ауданына тең болатындықтан, ол салынған параллелепипедтің табанының ауданына тең болады, ал $\text{Пр}\vec{C}\ \left[\vec{a}\vec{b}\right]$=ОД сол параллелепипедтің биіктігіне тең болады. Сондықтан (5-3) тең үш вектордың аралас көбейтіндісі қырлары $(\vec{a},\vec{в},\vec{c})$ болатын параллелепипедтің көлеміне тең болатыны шығады.

Ол көлем $\angle$ СОД бұрышы сүйір болса оң доғал, болса теріс болады.

Сонымен $(\vec{a},\vec{в},\vec{c})=\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}=\pm V$ (5-4) болады.

Сөйтіп кез келген үш вектордың аралас көбейтіндісі қырлары сол векторларды кескіндейтін параллелепипедтің көлеміне сан жағынан тең болады екен.

$\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c},\ \left[\vec{b}\vec{c}\right]\vec{a},\ \left[\vec{c}\vec{a}\right]\vec{b}$ Бір ғана параллелепипедтің көлеміне тең болатындықтан $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ векторлардың орнын айналмалы ауыстырғаннан олардың аралас көбейтіндісі өзгермейді, яғни

$\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}=\left[\vec{b}\vec{c}\right]\vec{a}=\left[\vec{c}\vec{a}\right]\vec{b}$ (5-5)

Егер үш вектордың біреуін орнынан қозғалмай, қалған екеуінің орындарын ауыстырса басқа үштік шығады да векторлардың аралас көбейтіндісі таңбасын кері ауыстырады, яғни $(\vec{a},\vec{в},\vec{c})=-(\vec{a}\vec{c}\vec{b})=-(\vec{c}\vec{b}\vec{a})=-(\vec{b}\vec{a}\vec{c})$ (5-6) яғни $\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}=-\left[\vec{a}\vec{c}\right]\vec{b}=-\left[\vec{b}\vec{a}\right]\vec{c}=-\left[\vec{c}\vec{b}\right]\vec{a}$ (5-7)

5.3. <u>Үш вектордың компланар болу белгісі.</u> Үш вектор $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ компланар болса, онда ол үшеуі бір жазықтыққа параллель болады. Сондықтан оларды параллель жылжыту арқылы бір жазықтыққа көшіруге болады. Олар бір жазықтықта жатқандықтан қырлары сол векторларды кескіндейтін параллелепипедтің көлемі 0-ге тең болады.

Демек компланар үш вектордың аралас көбейтіндісі 0 болады.

$(\vec{a},\vec{в},\vec{c})=\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}=0$ (5-8)

Енді керісінше $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ үш вектордың аралас көбейтіндісі 0-ге тең болсын, (5-8) орындалсын. Онда (5-8)-ден $\left[\vec{a}\vec{b}\right]\perp\vec{c}$ болар еді. Ал векторлы көбейту анықтамасы бойынша $\left[\vec{a}\vec{b}\right]\perp\vec{c}\ \left[\vec{a}\vec{b}\right]\perp\vec{b}$ болатындықтан $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ векторлардың үшеуі де $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ векторға ортогонал болады. Сондықтан ол үш вектор $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$-ға перпендикуляр болатын жазықтыққа параллель болады.

Ал бұл $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ векторлар компланар болады деген сөз.

Сонымен (5-8) үш вектордың компланар болу шарты болып табылады.

Сонымен үш вектор компланар болу үшін олардың аралас көбейтіндісі 0-ге тең болуы қажетті және жеткілікті.

5.4. Үш вектордың аралас көбейтіндісін сол векторлардың координаталары арқылы өрнектеу. Ортонормаланған $(\vec{\imath}\,\vec{j}\,\vec{\kappa})$ базисте $\vec{a} = a_1\vec{\imath} + \overrightarrow{a_2}\,\vec{j} + a_3\vec{k}, \vec{b} = b_1\vec{\imath} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}, \vec{c} = c_1\vec{\imath} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ үш вектор берілсін.

(4-13) формула бойынша $\left[\vec{a}\vec{b}\right] = \left\{ \begin{vmatrix} a_2a_3 \\ b_2b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3a_1 \\ в_3в_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1a_2 \\ в_1в_2 \end{vmatrix} \right\}$

болу керек. Мұны $\vec{c}$ векторға скаляр көбейтсек (3-10) формула бойынша

$$\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c} = \begin{vmatrix} a_2a_3 \\ в_2в_3 \end{vmatrix} c_1 + \begin{vmatrix} a_3a_1 \\ в_3в_1 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1a_2 \\ в_1в_2 \end{vmatrix} c_3 = \begin{vmatrix} a_1a_2a_3 \\ в_1в_2в_3 \\ c_1c_2c_3 \end{vmatrix}$$

Сонымен, үш вектордың аралас көбейтіндісі ол векторлардың координаталары арқылы былайша өрнектеледі:

$$(\vec{a},\vec{в},\vec{c})\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1a_2a_3 \\ в_1в_2в_3 \\ c_1c_2c_3 \end{vmatrix} \quad (5\text{-}9)$$

Сонда қырлары $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{в} = \{в_1, в_2, в_3\}$, $\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$ векторларды кескіндейтін параллелепипедтің көлемі

$$V=\mathrm{mod}\begin{vmatrix} a_1a_2a_3 \\ в_1в_2в_3 \\ c_1c_2c_3 \end{vmatrix} \quad (5\text{-}10) \text{ формуламен,}$$

ал, бір төбеден шығатын қырлары $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ векторларды кескіндейтін тетраэдрдің (үшбұрышты пирамиданың) көлемі

$$V_{\text{тет}}=\mathrm{mod}\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1a_2a_3 \\ в_1в_2в_3 \\ c_1c_2c_3 \end{vmatrix} \quad (5\text{-}11) \text{ формуламен,}$$

табылады. Параллелепипедтің көлемі оның бір төбесінен шығатын қырларынан жасалған тетраэдр көлемінен 6 есе көп болатынын мектеп геометрия негізінде дәлелдеуге болады.

Демек үш вектордың компланар болу белгісі (5-8), (5-9) формулалар бойынша мынадай болады.

$$\begin{vmatrix} a_1a_2a_3 \\ в_1в_2в_3 \\ c_1c_2c_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5\text{-}12)$$

1-мысал. $\vec{x}=\{1,-1,3\}$, $\vec{y}=\{-2,21\}$, $\vec{z}=\{3,-2,5\}$, векторлардың аралас көбейтіндісін табыңдар.

Шешуі: (5-9) бойынша $\vec{x}\vec{y}\vec{z}=\begin{vmatrix}1,-1,3\\-2,2,1\\3,-2,5\end{vmatrix}=10+12-2-18+2-10=-7$

Мұны $\vec{x}\vec{y}\vec{z}=[\vec{x}\vec{y}]\vec{z}$ формуламен шығарсақ

$[\vec{x}\vec{y}]=\left\{\begin{vmatrix}-1,3\\2,1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3,1\\1,-2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1,-1\\-2,2\end{vmatrix}\right\}=\{-1-6,-6-1,2-2\}=\{-7,-7,0\}$

Сонда $\vec{x}\vec{y}\vec{z}=[\vec{x}\vec{y}]\vec{z}=-7\cdot 3+7\cdot 2+0.5=-21+14+0=-7$

2-мысал. Бір нүктеден $\vec{a}=\{0,1,2\}$, $\vec{b}=\{2,-1,1\}$, $\vec{c}=\{1,1,1\}$, векторлар шығып жатыр.

а). Бұл векторлар компланар ма, жоқ па?

Компланар болу үшін (5-12) бойынша мына анықтауыш 0-ге тең болу керек. $\begin{vmatrix}a_1a_2a_3\\в_1в_2в_3\\c_1c_2c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0,1,2\\2,-1,1\\1,1,1\end{vmatrix}=0+4+1+2-2-2=5$ Ол 0 болмады.

Сондықтан компланар емес.

б) Қырлары $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ болатын параллелепипед көлемі неге тең?

V=mod$\begin{vmatrix}a_1a_2a_3\\в_1в_2в_3\\c_1c_2c_3\end{vmatrix}=\left\|\begin{matrix}0,1,2\\2,-1,1\\1,1,1\end{matrix}\right\|=5$ Кубтық өлшем.

в) Қырлары $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ болатын тетраэдрдің көлемі

V=mod$\frac{1}{6}\begin{vmatrix}a_1a_2a_3\\в_1в_2в_3\\c_1c_2c_3\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\cdot 5=\frac{5}{6}$ кубтың өлшем

5.5 <u>Үш вектордың қос векторлық көбейтіндісі.</u>

$\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ үш вектор беріліп оның екеуін векторлық көбейтсе вектор шығады, мысалы $[\vec{a}\vec{в}]$ болсын. Мұны үшінші векторға тағы да векторлық көбейтсе тағы да вектор шығады $[[\vec{a}\vec{в}]\vec{c}]$

Векторлық көбейтіндінің анықтамасы брйынша бұл вектор $[\vec{a}\vec{в}]$ векторға да $\vec{c}$ векторға ортогонал болады, ал $[\vec{a}\vec{в}]$ вектор $\vec{a}$-ға да, $\vec{в}$-ға да ортагонал болады. Сондықтан $[[\vec{a}\vec{в}]\vec{c}],\vec{a}$, $\vec{в}$ векторлар компланар болады. Компланар векторлардың бірі қалған екеуіне тек бір жолмен жіктеледі (2,1 теорема): $[[\vec{a}\vec{в}]\vec{c}]=\alpha\vec{a}+\beta\vec{в}$, Мұндағы $\alpha=-(\vec{в}\vec{c}),\beta=(\vec{a}\vec{c})$ болатынын дәлелдеуге болады.

Сонымен $[[\vec{a}\vec{в}]\vec{c}]=-(\vec{в}\vec{c})\vec{a}+(\vec{a}\vec{c})\vec{c}$ (5-13)

Қайталау сұрақтары мен есептері.

1. Үш векторды өзара неше түрлі көбейтуге болады, қорытынды да не шығады?
2. Үш вектордың аралас көбейтіндісі деген не?
3. Үш вектордың аралас көбейтіндісінің геометриялық мәні қандай?
4. Үш вектордың компланар болу шарты қандай?
5. Үш вектордың аралас көбейтіндісі қандай жағдайда нөл болады?
6. Векторлардың аралас көбейтіндісінің қасиеттері қандай?
7. $\vec{a}=\vec{в}$ болса $[[\vec{a}\vec{в}]\vec{c}]$ неге тең, себебі қандай?
8. Үш вектордан жасалған қос векторлық көбейтінді деген не, не себепті $[[\vec{a}\vec{в}]\vec{c}]$ векторлар компланар болады?
9. $\vec{a} \| \vec{в}$ болса $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ векторлардың аралас көбейтіндісі неге тең?
10. $|\vec{a}\vec{в}\vec{c}| \le |\vec{a}||\vec{в}||\vec{c}|$ өрнекте теңдік қандай жағдайда орындалады?
11. Амалды орындаңдар: а) $(\vec{x}(\vec{y}+\vec{z})(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}))$
    б) $(\vec{x}(\vec{y}+\vec{z})(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}))$
12. Қырлары $\vec{x}=\vec{a}+\vec{в}-\vec{c},\ \vec{y}=\vec{a}+\vec{в}-\vec{c},\ \vec{z}=\vec{a}-\vec{в}-\vec{c},$ болатын параллелепипедтің көлемі неге тең?
13. $2\vec{x}+\vec{y}-3\vec{z},\quad 3\vec{x}-2\vec{y}+2\vec{z},\quad \vec{x}-4\vec{y}+\vec{z},$ векторлар компланар ма, жоқ па?
14. Векторлардың аралас көбейтіндісін табыңдар: а) $\vec{a}=\{1,4,-2\},$ $\vec{в}=\{1,-1,1\},\quad \vec{c}=\{5,2,-3\},$ б) $\vec{x}=\{1,-3,1\},\quad \vec{y}=\{1,2,1\},\quad \vec{z}=\{2,1,-3\ \}$
15. Векторлардың компланар болар болмасын ажыратыңдар: а) $\vec{a}=\{1,9,-11\},\ \vec{в}=\{1,-1,3\},\ \vec{c}=\{2,3,-1\},$
    б) $\vec{a}=\{2,1,2\},\quad \vec{в}=\{3,-2,1\},\quad \vec{c}=\{3,-1,-2\},$
16. Бір төбеден шығатын қырлары $\vec{a}=\{1,4,-2\},\ \vec{в}=\{2,0,1\},\ \vec{c}=\{3,9,0\},$ болатын тетраэдрдің көлемін табыңдар?
17. Бір төбеден шығатын қырлары $\vec{a}=\{-2,-1,-2\},\quad \vec{в}=\{4,3,0\},\quad \vec{c}=\{3,2,-5\},$ болатын параллелепипедтің көлемін табыңдар?

II тарау. Жазықтықтағы аналитикалық геометрия.

6. Жазықтықтағы координаталар жүйесі

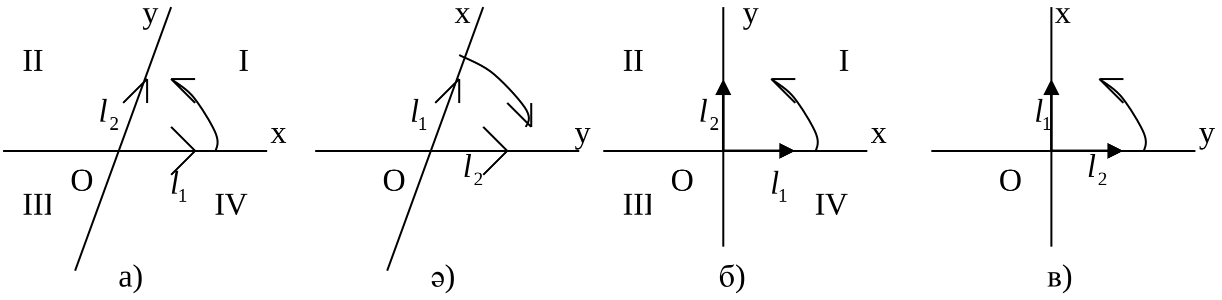
6.1. Координаттық әдіс. Аналитикалық геометрия пәні алгебралық талдаулар жәрдемімен геометриялық формаларды зерттеу. Элементар математиканың түрлі салаларында алгебра көптеген геометриялық мәселелерді шешуге табыспен қолданылады. Мысалы, геометрияда сан жәрдемімен кесінділер мен доғалардың ұзындықтары, бұрыштардың шамалары, түрлі фигуралардың аудандары, әртүрлі денелердің беттерімен көлемдері анықталады. Математиканын бұл салаларында алгебралық талдау жәрдемімен геометриялық формалардың өлшемдері анықталса, аналитикалық геометрияда сандар жәрдемімен геометриялық формалардың ерекше қасиеттері болып табылатын, олардың жазықтықтағы, кеністіктегі орындары, пішіні сипатталып, олар анықталады.

Геометриялық формалардың орнын анықтайтын сандарды ол форманың **координаттары** дейді, ал ол орынды анықтауға мүмкіндік беретін әдісті **координаттық әдіс** дейді. Табиғаттағы геометриялық формалардың түрлерін анықтау үшін ол формаларды құрайтын біреуін негізгі, алғашқы форма үшін алу керек. Ондай алғашқы форма ретінде геометриялық нүктені алған жөн. Өйткені басқа геометриялық фигуралардың барлығы осы нүктелердің түрліше орналасқан жиыны болып табылады. Сөйтіп, алғашқы элемент үшін нүктені алған соң, енді оның орнын сандар арқылы қалай анықтауға болады деген мәселемен айналысуымыз керек және ол формалардың түрлі геометриялық қасиеттері, онда жатқан нүкте координатасына қалайша әсер ететіндігін анықтау керек.

6.2 Аффиндік және тік бұрышты декарттық координаталар жүйесі. Бір жазықтықта параллель емес векторлар жиынын векторлық кеністіктің **екі өлшемді ішкі кеністігі** дейді. Ондай кеністіктін базисі үшін кезкелген коллинеар емес екі векторды алуға болатыны айтылған.

Жазықтықтағы аффиндік координаталар жүйесі деп кезкелген бір *O* нүкте және $\left(\vec{l_1},\vec{l_2}\right)$ базистен тұратын геометриялық құрылымды айтады (20-*а,ә* сурет).

Бағыты бірінші базистік вектор l_1 мен дәл келетін және оны баса жүргізілген өсті



а) ә) б) в)

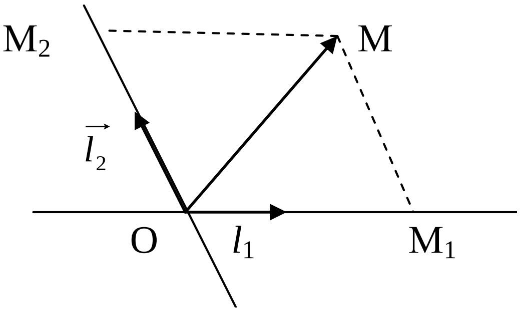
20-сурет

абцисса өсі дейді де x пен белгілейді, бағыты екінші базистік векторы l_2 мен анықталатын және оны баса жүргізілген өсті **ордината** өсі дейді (он бағыты көрсетілген түзуді өс дейді). *O* нүктені координата жүйесінің **басы (бас нүктесі)**, ал *x* пен *y*-ты **координат өстері** дейді.

Базистік векторлар $\vec{l_1}$ мен $\vec{l_2}$-нің бағыты оң бағытты, оларға кері бағыт – теріс бағыты көрсетеді.

Координата жүйесін *Oxy* немесе $O\vec{l_1},\vec{l_2}$ арқылы белгілейді. Базистік $\vec{l_1},\vec{l_2}$ векторларды **координаттық векторлар** дейді. Олардың ұзындықтары $\vec{l_1},\vec{l_2}$ бағыттар бойынша бірлік өлшем үшін алынады. *X* осін *У* осіне беттестіру үшін бұратын кіші бұрыш бағыты сағат тілі қозғалысына кері болса (20-*а* сурет), **координата жүйесі оң,** сағат тілі қозғалысы бағытындай болса **сол координата** жүйесі делінеді (20 – *б* сурет). Біз оң координаталра жүйесін пайдаланылатын боламыз. *X* және *У* остері *O* нүктеде қиылысып жазықтықты 4-ке бөледі. Оларды **ширек** немесе **координаттық бұрыштар** дейді. Координаттық векторлар $\vec{l_1}$ мен $\vec{l_2}$-нің екеуі де оң бағытта болатын ширекті 1 – координаттық бұрыш (ширек) дейді, қалғандарың бұл ширектен сағат тілі қозғалысына кері бағытты нөмірлейді. Олар 2-3-4-ширек болады.

Жазықтықта кезкелген *M* нүкте және *Oxy* аффиндік координаты жүйесі берілсін (21-сурет).



21-сурет

Вектор $\overrightarrow{OM}$ - ды *M* нүктенің **радиус-векторы** дейді. *M* нүктеден *x,y* остеріне параллель етіп жүргізілген түзулер олармен M_1, M_2 нүктелерде қиылыссын. Сонда $\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2}$ бағытталған кесінділер $\overrightarrow{OM}$ вектордын, сәйкесінше, абцисса, ордината остеріндегі прокциялары болады. Олардың, сәйкесінше, $\vec{l_1}$ мен $\vec{l_2}$ мен өлшенетіндігі ұзындықтары *x,y* болсын, яғни $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{l_1}, \overrightarrow{OM_2} = y\vec{l_2}$ болсын. Векторларды қосу ережесі бойынша $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = x\vec{l_1} + y\vec{l_2}$ болар еді. Осы жіктелудегі базистік векторлардың коэффициенттері *x,y* сандарын $\overrightarrow{OM}$ вектордың $(\vec{l_1},\vec{l_2})$ **базистегі координаталары** деген едік және оны $\overrightarrow{OM} = \{x, y\}$ деп жазғанбыз. Жазықтықтағы *M* нүкте мен $\overrightarrow{OM}$ векторы өзара бір мәнді сәйкестікте болады. *M* нүкте берілсе $\overrightarrow{OM}$ вектор берілгені. $\overrightarrow{OM}$ вектор берілсе оның ұшы *M* нүктенің берілгені. Сондықтан $\overrightarrow{OM}$ вектордың координаталары *(x,y)* сандарын *M* нүктенін координаты үшін алады да, оны *M(x,y)* деп жазады. *M* нүктенін 1-координаты *x*-ты *M* нүктенің абциссасы, 2-координаты *y*-ты *M* нүктенің ординаты дейді олар жоғарыда айтқанымыздай $\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2}$ бағытталған кесінділердің $\vec{l_1},\vec{l_2}$-мен өлшегендегі ұзындықтары және $x>o$ болады, егер $\overrightarrow{OM_1} \uparrow\uparrow \vec{l_1}$ болса, $x<o$ болады, егер $\overrightarrow{OM_1} \uparrow\downarrow \vec{l_1}$ болса. Осы сияқты $y>o$ болу үшін $\overrightarrow{OM_2} \uparrow\uparrow \vec{l_1}$, $y<o$ болу үшін $\overrightarrow{OM_2} \uparrow\downarrow \vec{l_1}$ болуы керек.

Сондықтан M нүктенің координаталарын әр ширектегі таңбасы да әртүрлі болады. Ол мына таблицадағыдай болады.

Ширек	I	II	III	IV
x	+	-	-	+
y	+	+	-	-

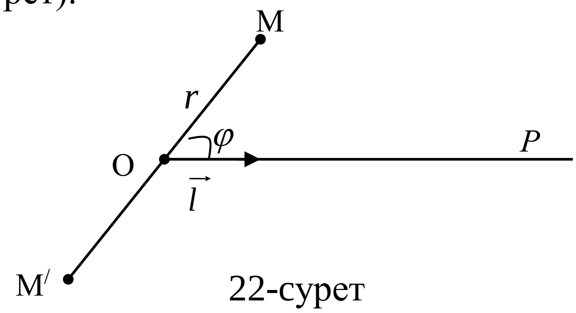
Егер нүкте абцисса өсінде жатса $y=0$, ордината өсінде $x=0,$ ал координат басымен берілсе $x=0, y=0$ болады.

Егер базистік векторлар бірлік векторлар болса және өзара ортоганал болса, яғни $|\vec{l_1}|=|\vec{l_2}|=1, \ \vec{l_1}\perp\vec{l_2}$ болса онда Oxy координаталар жүйесі **тік бұрышты декарттық координаталар жүйесі** немесе жай ғана тік бұрышты координаталар жүйесі делінеді (20-*б,в* сурет). Бұл кезде $MM_1 \perp OX, \ MM_2 \perp OУ$ болады.

Біз негізінен тікбұрышты координаталар жүйесін пайдаланамыз.

6.3. Поляр координаталар жүйесі. Жазықтықта аффиндік, тікбұрышты координаталар жүйесінен басқа поляр координаталар жүйесі де көп қолданылады.

Ол O нүкте және ол нүктеден шығатын бірлік вектордан тұрады. Бірлік векторы $\vec{l}$ дейік. Сонда O нүкте мен $\vec{l}$ вектордан тұратын геометриялық құрылымды жазықтықтағы **поляр координата жүйесі** дейді. Оны $O\vec{l}$ деп белгілейді. O нүктені **полюс,** ол нүктеден $\vec{l}$ бағытта жүргізілген P өсін **поляр өсі** дейді (22-сурет).



22-сурет

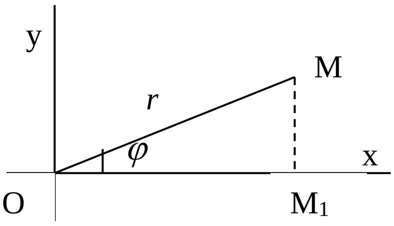
Жазықтықта M нүктесі берілген. Ол нүктенің полюстің қашықтығын $OM=r,$ ал OM-нің поляр өсімен жасайтын бұрышын φ десек, онда r мен φ берілген. M нүктені бір мәнді анықтайды. Өйткені O дан қашықтығы r –ге тен және P мен φ бұрышы жасайтын бір ғана M нүкте болады. r мен φ өзгергенде M нүктенің орны да өзгереді, яғни басқа нүкте шығады. Сондықтан r мен φ ды M нүктенің **поляр координаталары** дейді де $M(r,\varphi)$ деп белгілейді. r-ді M нүктенің поляр радиусы, φ -ды поляр бұрышы дейді. r –ді әруақытта 1-орынға, φ -ды 2-орынға жазады. Поляр радиусы $0\le r<\infty$ аралықта, поляр бұрышы $0 \le \varphi < \pi$ аралықта өзгереді.

Сонымен $0\le\varphi<\pi 0\le r<\infty$ (6-1).

Осы шартты қанағаттандыратын φ болса, ол нүкте үшін $\varphi+2k\pi$ да поляр бұрышы болады.

Анықтама бойынша r тек оң сан болуы керек, бұл практикалық жұмыстарда бір шама қиындықтарға душар етеді. Мысалы, поляр координаталары $\left(-5,\pi/3\right)$ болатын нүкте болмайды. Сондықтан r кез-келген нақты сан болатындай етіп поляр координаталарын былайша жалпылайды. Егер $r\geq 0$ болса, онда ол $M(r,\varphi)$ нүктені анықтайды, ал $r<0$ болса, онда ол $M(|r|,\varphi)$ нүктеге полюске қарағанда симметриялы болатын M' нүктені анықтайды деп есептейді (22-сурет). Поляр координаталарын осылайша жалпылау нәтижесінде кез-келген екі нақты сан нүктенің поляр координаталары болатын болады. Мұны **жалпыланған поляр координаталары** дейді. M' нүктенін поляр координаталарын $(-r,\varphi)$ деуге де $(r,-(180-\varphi))$ деуге де болады.

Жазықтықтағы нүктенің поляр координаталары (r,φ) мен тікбұрышты декарттық координаталары арасында белгілі қатынас болады. $O\vec{l}$ поляр координата жүйесі берілсін. O координата басы, $\overline{P}$ абсцисса өсі болатын Oxy тікбұрышты координаталар жүйесін жүргізейік (23-сурет). M нүктенің поляр координаталары (r,φ), декарттық координаталары (x,y) болсын. Онда $\angle MOM_1=\varphi,\ OO\ =r,\ MM_1=y,\ OM_1=x$ болар еді, ΔOM_1M-нен: $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$ (6-2). $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $tg\,\varphi=\frac{y}{x}$ және $\sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (6-3) болар еді. (6-2) бойынша M нүктенің поляр координаталары (r,φ) арқылы, оның декарттық координаталары (x,y) –ке көшуге болады. Ал, (6-3) формула бойынша керісінше декарттық координаталарынан поляр координатасына көшуге болады.



23-сурет

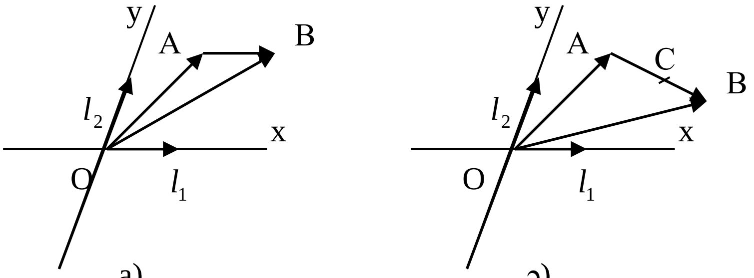
6.4. Жазықтықтағы кейбір қарапайым есептер.

1-есеп. Аффиндік немесе тікбұрышты $O\vec{l_1}\vec{l_2}$ (немесе Oxy) координата жүйесінде $A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2)$ нүктелер берілген. $\overrightarrow{AB}$ вектордың координаталарын табындар (24-*а* сурет).

Шешуі. A,B нүктелердің радиус векторлары $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$-ны және $\overrightarrow{AB}$ жүргізсек ΔABO шығады. Вектор айырымының анықтамасы бойынша $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ (*). Ал, A мен B нүктенің координаталары олардың радиус-векторларының да, координаталары болатындықтан $\overrightarrow{OA}=\{x_1,y_1\},\ \overrightarrow{OB}=\{x_2,y_2\}$.

Вектор координаталарының қасиеті бойынша $\overrightarrow{AB}$ның координаты (*) бойынша $\overrightarrow{OB}$ мен $\overrightarrow{OA}$-ның сәйкес координаталарының айырымына тең болу керек. $\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1, y_2-y_1\}$ (6-4).

Сонымен шеткі нүктелерінің координаталары белгілі вектор координаталары соңғы нүкте координатынан алғашқы нүкте координатын шегергендегі айырымға тең болады.



а) ә)

24-сурет

2-есеп. $A=\{x_1,y_1\}$, $B=\{x_2,y_2\}$ нүктелерді жалғайтын AB кесіндіні C нүктесі λ қатынаста болсын, яғни $\frac{\overrightarrow{AC}}{CB}=\lambda$ (**) болсын. Сол C нүктенің координаталары *(x,y)*-ты табу керек (24-*б* сурет).

Шешуі. (**) дан $\overrightarrow{AC}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CB}$ болса, λ *>0* болады. Бұлай болу үшін *C* нүкте *A* мен *B* ның арасында жатуы керек. Бұл кезде *C* нүкте *AB* кесіндіні **іштей бөледі** делінеді. Сонда (**) дан $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$. Бұдан вектор координаталарының қасиеті және (6-4) бойынша $x-x_1=\lambda(x_2-x)$, $y-y_1=\lambda(y_2-y)$. Бұдан $x+\lambda x=x_1+\lambda x_2$, $y+\lambda y=y_1+\lambda y_2$ және $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$ (6-5), яғни $\lambda\neq-1$ керек.

Егер (**)да $\overrightarrow{AC}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CB}$ болса, онда $\lambda<0$ болады. Бұлай болу үшін *C* нүкте *AB* кесіндінінің созындысында жатуы керек. Бұл кезде *C* нүкте *AB* кесіндіні **сырттай бөледі** делінеді. (6-5). Кесіндіні λ қатынаста бөлу формуласы делінеді. Егер *C* нүкте *AB* кесіндісін қақ ортасы болса, онда (**) ден λ *=1* болады да (6-5) формула мына түрге келеді

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2} \quad (6\text{-}6)$$

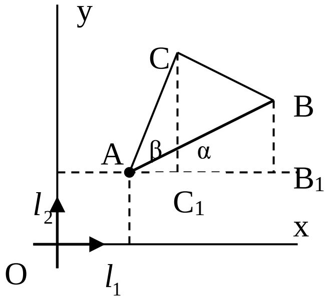
Мұны **кесіндіні қақ бөлу** формуласы дейді.

3-есеп. Тікбұрышты *Oxy(O*$\vec{l_1}\vec{l_2}$*)* координата жүйесінде $A(x_1,x_2)$, $B(x_2,y_2)$ екі нүкте берілсін. *AB* кесіндінің ұзындығын табу керек.

Шешуі. *AB* кесіндінің ұзындығы $\overrightarrow{AB}$ вектордың ұзындығына тең $|\overrightarrow{AB}|$-ға тең болады. Ал, (6-4) бойынша $\overrightarrow{AB}$ вектор координаталары $\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1, y_2-y_1\}$ болады. Сонда вектор ұзындығын табу формуласы (3-11) бойынша $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ (6-7).

Кесінді ұзындығын табу үшін соңғы нүктенің координаталарынан алғашқы нүктенің сәйкес координаталарын алып, квадраттап қосып, квадрат түбір табу керек.

4-есеп. Тікбұрышты $Oxy(O\vec{l_1}\vec{l_2})$ координата жүйесінде $A(x_1,x_2)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ нүктелері берілген. ABC үшбұрыштың ауданын табу керек (25-сурет).



25-сурет

Шешуі. AB –ның Ox өсімен жасайтын бұрышын α, $\overrightarrow{AC}$ -ның Ox өсімен жасайтын бұрышын β дейік: $\angle C_1 AC=\beta,\ \angle B_1 AB=\alpha.$ Суреттен $BB_1=AB\sin\alpha$, $CC_1=AC\sin\beta,\ AA_1=AB\cos\alpha,\ AA_1=AC\cos\alpha.$ Ал, $BB_1=y_2-y_1,\ CC_1=y_3-y_1$ $AB_1=x_2-x_1,\ AA_1=x_3-x_1$.

Сөйтіп бұл теңдіктерден $BB_1=y_2-y_1=AB\sin\alpha,\ CC_1=y_3-y_1=AC\sin\beta$ $AB_1=x_2-x_1=AB\cos\alpha,\ AA_1=x_3-x_1=AC\sin\beta$.

Ал, мектептен белгілі формула бойынша ΔABC -ның ауданы $S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot AB\sin A=\frac{1}{2}AC\cdot AB\sin(\beta-\alpha)=\frac{1}{2}AC\cdot AB(\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha)=\frac{1}{2}[(AC\sin\beta)\cdot$ $\cdot(AB\cos\alpha)-(AC\cdot\cos\beta)(AB\sin\alpha)]=\frac{1}{2}[(y_3-y_1)(x_2-x_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)]=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{matrix}\right\|$

$=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\|.$ Сонымен $A(x_1,x_2)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ төбелі үшбұрыш ауданы

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\|. \quad (6\text{-}8)$$

формуламен табылады.

1-мысал. Тікбұрышпен координаталар жүйесінде *A(3,2), B(-1,-1), C(11,-6)* нүктелер берілген.

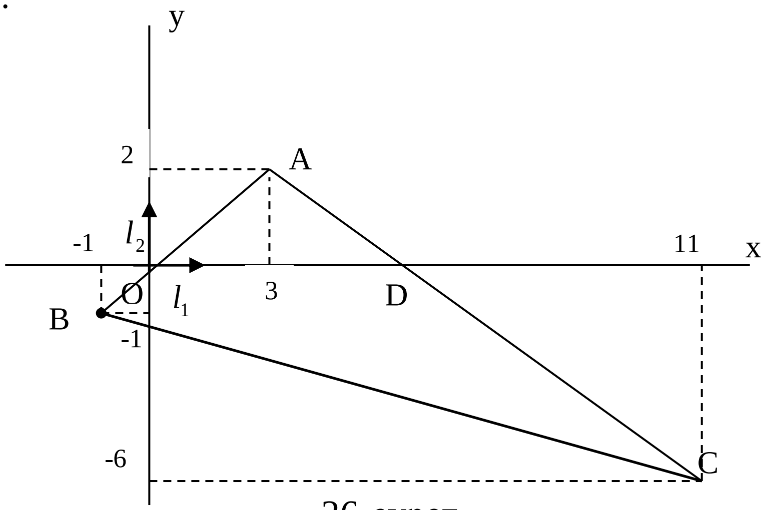
Мыналарды анықтаңдар.

1. *A, B, C* нүктелер қай ширекте жатыр?

A бірінші ширекте жатыр, өйткені екі координаты да оң сандар. *B* үшінші ширекте жатыр, өйткені екі координаты да теріс сандар. *C* нүкте төртінші ширекте жатыр, себебі бірінші коордиатасы оң, екінші координаты теріс сандар.

2. *ABC* үшбұрышын салыңдар.

26-суреттегідей *(3,2)* координаталары бойынша *A*, *(-1,-1)* координаталары бойынша *B* және *(11,-6)* бойынша *C* нүктесін салып, оларды қосамыз.



26-сурет

3. *A, B, C* нүктелрдің радиус-векторларының координаталарын табыңдар.

Олар сәйкесінше $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ векторлар. Олардың координаталары бұлардың ұштары *A, B, C* нүктелердің координаталары мен бірдей болады:

$$\overrightarrow{OA}=\{3,2\},\overrightarrow{OB}=\{-1,-1\},\overrightarrow{OC}=\{11,6\} .$$

4. *A, B, C* нүктелердің радиус – векторларының ұзындығы неге тең?

$$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13},\quad \left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2},\quad \left|\overrightarrow{OC}\right|=\sqrt{11^2+(-6)^2}=\sqrt{121+36}=\sqrt{157}$$

5. Үшбұрыштың қабырғаларының ұзындығын таыңдар. Ұзындық (6-7) формуламен табылады

$$AB=\sqrt{(-1-3)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{16+9}=5;\quad AA=\sqrt{(11-3)^2+(-6-2)^2}=\sqrt{64+64}=8\sqrt{2}$$

$$BC=\sqrt{(11+1)^2+(-6+1)^2}=\sqrt{144+25}=13 .$$

6. *ABC* үшбұрыштың ауданын табыңдар.

(6-8) формула бойынша $S_\Delta=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 11 & -6 & 1\end{vmatrix}=\dfrac{1}{2}(-3+6+22+11+18+2)=28$.

7. *AC* қабырғаны *Ox* өсі қандай қатыста бөледі.

AC мен *Ox* өсінен қиылысу нүктесін *Д* десек (26-сурет). Ол нүктенің ординатасы *y=0* болады. Сонда (6-5) формуласы бойынша $y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$ дан

$0=\frac{2+\lambda(-6)}{1+\lambda}$ бұдан $2-6\lambda=0$ $\lambda=\frac{1}{3}$. Сонымен *АД:ДС=1:3* болады, яғни *АС*-ны *Д* нүкте $\frac{1}{3}$ қатыста бөледі екен.

8. *AC* мен *Ox* өсінен қиылысу нүктенің координаталарын табыңдар.

$AC\cap Ox=\text{Д}$ болады алғашқы есеп бойынша *Д(x,0)* және 7 есепте көргендей $\lambda=\frac{1}{3}$.

Сонда $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$ бойынша $x=\frac{3+\frac{1}{3}\cdot 11}{1+\frac{1}{3}}=\frac{9+11}{3+1}=5$. Сонымен *Д(5,0)* екен.

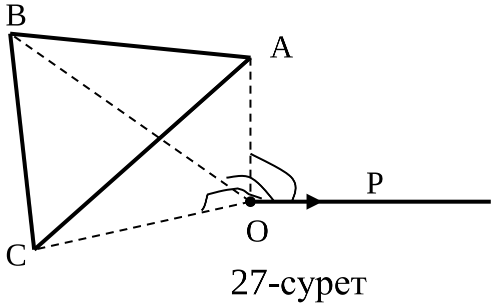
9. Үшбұрыштың *A* нүктеден жүргізілген биіктігнің ұзындығын табыңдар.

$S=\frac{1}{2}h\cdot BC,\ \ 28=\frac{1}{2}h\cdot 13.$ Бұдан $h=\frac{56}{13}=4\frac{4}{13}$.

2-мысал. Поляр координата жүйесінде $A\left(5;\frac{\pi}{2}\right),\ B\left(8;\frac{5\pi}{6}\right),\ C\left(3;\frac{7\pi}{6}\right)$ нүктелер берілген.

1. Нүктелерді салыңдар (27-сурет).

O нүктесін және одан шығатын *P* өсін салып *P* өсімен $\frac{\pi}{2}=90^0,\ \frac{5\pi}{6}=150^0,\ \frac{7\pi}{6}=210^0$ жасайтын үш түзу саламыз. Олардың бойына *O* нүктеден *OA=5; OB=8; OC=3* кесінді өлшеп саламыз. Сонда *A, B, C* салынады.



27-сурет

2. *AB* кесіндінін ұзындығын табыңдар.

ΔOBA - дан косинус теоремасы бойынан

$AB^2=OA^2+OB^2-2\cdot OA\cdot OB\cos(150-90)=5^2+8^2-2\cdot 5\cdot 8\cos 60^0=25+64-2\cdot 5\cdot 8\cdot\frac{1}{2}=89-40=$

$=49\ \ AA=\sqrt{49}=7$

3. ΔABC - ның түрін ажыратыңдар.

Ол үшін үш қабырғасының ұзындығын табамыз $AB=7$

$AC=\sqrt{OA^2+OC^2-2\cdot OA\cdot OC\cos(210-90)}=\sqrt{25+64-2\cdot 5\cdot 8\cos 120^0}=\sqrt{89-80\sin 30^0}=\sqrt{49}=7$

$BC=\sqrt{OB^2+OC^2-2\cdot OB\cdot OC\cos(210-150)}=\sqrt{64+9-2\cdot 8\cdot 3\cos 60^0}=\sqrt{73-24}=\sqrt{49}=7$.

Сонымен $AB=BC=AC$. Демек үшбұрыш тең қабырғалы үшбұрыш.

4. *A, B, C* нүктелердің декарттық координаталарын табындар.

Поляр координаталары (r,φ) бойынша декарт координаталары *(x,y)* $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ формуламен табылады ((6-2)формула). Сонымен *A* нүкте үшін $x = 5\cos\frac{\pi}{2} = 5\cdot 0 = 0;\ y = 5\sin 90^0 = 5\cdot 1 = 5$. Сонымен *A(0;5)*

B нүкте үшін $x = 8\cos\frac{5\pi}{6} = 8\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -8\cos\frac{\pi}{6} = -8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -4\sqrt{3}$ $y = 8\sin\frac{5\pi}{6} = 8\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = 8\sin\frac{\pi}{6} = 8\cdot\frac{1}{2} = 4$. Сонымен $B(\ -4\sqrt{3};4)$.

C нүкте үшін $x = 3\cos\frac{7\pi}{6} = 3\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -3\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ $y = 3\sin\frac{7\pi}{6} = 3\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -3\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{3}{2}$. Сонымен $C\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

3-мысал. $A(3,-4),\ B(-1,1),\ C(0,2)$ нүктелердің поляр координаталарын табыңдар.

Бұл (6-3) формула бойынша табылады $r = \sqrt{x^2 + y^2},\ tt\,\varphi = arctg\frac{y}{x}$

A нүкте үшін $r = \sqrt{9+16} = 5,\ tt\,\varphi = arctg(\frac{y}{x}) = arctg(\frac{-4}{3})$

B нүкте үшін $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},\ tt\,\varphi = arctg(\frac{y}{x}) = arctg\ (\frac{1}{-1})$немесе $\varphi = 135^0$.

C нүкте үшін $r = \sqrt{0+4} = 2,\ tt\,\varphi = arctg(\frac{y}{x}) = arctg(\frac{2}{0})\ \ \varphi = 90^0$

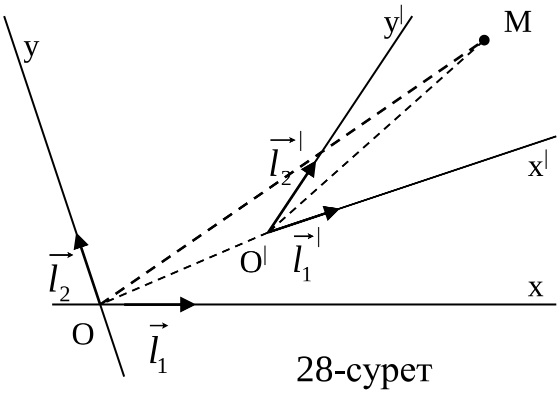
6.5. Координаталарды түрлендіру. Жазықтықтағы нүктенің орны оның координаталары арқылы анықталады. Нүктенің орны өзгерсе координаталары өзгереді. Координаталар өзгерсе нүкте орныла өзгереді. Әр түрлі координата жүйесінде берілген нүктелердің координаталары арасындағы байланысты білудің практикалық қажеттілігі бар. Координаталарды түрлендірудің мақсаты нүктенің бір координата жүйесіндегі координаталары арқылы сол нүктенің басқа координата жүйесіндегі координаталарын табу болып табылады. Бұл мақсат орындалу үшін бұл координаталар жүйесінің бірінің элементтерінің екінші координата жүйесіндегі координаттары берілуі керек.

1. Аффиндік координаталар жүйесін түрлендіру. Жазықтықта екі $O\vec{l_1},\vec{l_2}$ және $O'\vec{l_1}',\vec{l_2}'$ аффиндік координаталар жүйесі берілсін. Екінші жүйенін элементтерінің бірінші жүйеге қарағандағы координаталары белгілі болсын: $O'(x_0,y_0),\ \vec{l_1}' = \{C_{11},C_{21}\},\ \ \vec{l_2}' = \{C_{12},C_{22}\}$. *M* нүктенің бұл жүйелердегі координаталары $(x,y),\ (x',y')$ болсын. Мақсат осыларды байланыстыратын формуланы табу (28-сурет).

$\Delta OO'M$ - нен $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ (*).

Ал,
$\overrightarrow{OO'} = x_0\vec{l_1} + y_0\vec{l_2},\ \overrightarrow{OM} = x\vec{l_1} + y\vec{l_2},\ \overrightarrow{O'M} = x'\vec{l_1'} + y'\vec{l_2'}\quad \vec{l_1'} = C_{11}\vec{l_1} + C_{21}\vec{l_2},\ \vec{l_2'} = C_{12}\vec{l_1} + C_{22}\vec{l_2}$
болатындықтан $\overrightarrow{OM} = x\vec{l_1} + y\vec{l_2} = x_0\vec{l_1} + y_0\vec{l_2} + x'\left(C_{11}\vec{l_1} + C_{21}\vec{l_2}\right) + y'\left(C_{12}\vec{l_1} + C_{22}\vec{l_2}\right) =$
$= \left(C_{11}x' + C_{12}y' + x_0\right)\vec{l_1} + \left(C_{21}x' + C_{22}y' + y_0\right)\vec{l_2}$ болғандықтан

$$\begin{cases} x = C_{11}x' + C_{12}y' + x_0 \\ y = C_{21}x' + C_{22}y' + y_0 \end{cases} \quad (6\text{-}9)$$



28-сурет

Міне бұл аффиндік координана жүйесін түрлендіру формуласы болады. Мұның матрицасы $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$ (6-10) болады. Мұны ($\vec{l_1}, \vec{l_2}$) базистен ($\vec{l_1'}, \vec{l_2'}$) базиске көшу матрицасы дейді. Оның анықтаушы $|C| = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \neq 0$ (6-10 *а*) болады. Өйткені $\vec{l_1'}, \vec{l_2'}$ - тер базистік векторлар болғандықтан сызықтық тәуелсіз болады. $|C| = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \neq 0$ болғандықтан (6-9) $\left(x', y'\right)$ бір мәнді табылады. Ол мынаған тең болады.

$$x' = \frac{C_{22}(x - x_0) - C_{12}(y - y_0)}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}};\quad y' = \frac{C_{11}(y - y_0) - C_{21}(x - x_0)}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}} \quad (6\text{-}11).$$

(6-9) формула аффиндік $O\vec{l_1}, \vec{l_2}$ координата жүйесінде берілген *M* нүктенің координаталарының $O'\vec{l_1'}, \vec{l_2'}$ жүйедегі координаталары арқылы табуға, ал (6-11) формула керісінше *Oxy*-тегі координаталары арқылы $O'x'y'$ - тегі координаталарын табуға мүмкіндік береді.

Координата жүйесін түрлендірудің дербес жағдайлары

а) Параллель жылжыту. $O'x'y'$ координата жүйесі *Oxy* координаты жүйесін өзіне-өзін параллель жылжыту нәтижесінде шыққан. Онда $\vec{l_1'} = \vec{l_1} = \{1.0\},\ \vec{l_2'} = \vec{l_2} = \{0.1\}$ болады. Сондықтан (6-9), (6-11) мына күйге келеді.

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases} \quad (6\text{-}9a) \qquad\qquad \begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases} \quad (6\text{-}11a)$$

б) Бұру. $O^{'}x^{'}y^{'}$ координата жүйесі *Oxy* координата жүйесін координата басы O нүктеден бұру арқылы шықсын. Онда $x_0=0,\ y_0=0$ яғни $O\equiv O^{'}(0.0)$ болады да (6-9), (6-11) мына күйге келеді.

$$\begin{cases} x=C_{11}x^{'}+C_{12}y^{'} \\ y=C_{21}x^{'}+C_{22}y^{'} \end{cases} \text{(6-9}б\text{)} \qquad \begin{cases} x^{'}=\dfrac{C_{22}}{C_{11}C_{22}-C_{12}C_{21}}x-\dfrac{C_{12}}{C_{11}C_{22}-_{12}C_{21}}y \\ y^{'}=\dfrac{C_{11}}{C_{11}C_{22}-C_{12}C_{21}}y-\dfrac{C_{21}}{C_{11}C_{22}-C_{12}C_{21}}x \end{cases} \text{(6-11}б\text{)}$$

Сонымен (6-9), (6-11) – аффиндік координата жүйесін жалпы түрлендіру, (6-9*а*), (6-11*а*) – параллель жылжыту, (6-9*б*), (6-11*б*) координата бойынан бұру арқылы түрлендіру формулалары қорытып шығарылады.

2. Тікбұрышты координаталар жүйесін түрлендіру. Жазықтықта $O\vec{l_1},\vec{l_2}$ және $O^{'}\vec{l_1},\vec{l_2}$ екі тікбұрышты координаталар жүйесі берілсін. Екінші жүйе элементтері 1 – жүйеге қарағанда анықталған болсын: $O^{'}(x_0,y_0),\ \vec{l_1}^{'}=\{C_{11},C_{21}\},\ \vec{l_2}^{'}=\{C_{12},C_{22}\}$ $O^{'}x^{'}$ өсімен *Ox* өсі арасындағы бұрыш ($\vec{l_1^{'}}\,\widehat{\ }\,\vec{l_2^{'}}$)$=\alpha$ болсын. M нүктенің бұл жүйедегі координаталары $(x,y),\ (x^{'},y^{'})$ болсын. Мақсат осы екеуін байланыстыратын формуланы қорытып шығару.

Мұны қорыту барысында (3-19) формуланы: егер $\vec{a}=\{a_1,a_2\}$ болса, онда $a_1=|\vec{a}|\cos\left(\vec{a}\,\widehat{\ }\,\vec{l_1}\right),\quad a_2=|\vec{a}|\cos\left(\vec{a_1}\,\widehat{\ }\,\vec{l_2}\right)$ (*) болатынын пайдаланамыз.

Екі жағдайды да қарастырамыз.

1-жағдай. *Oxy,* $O^{'}x^{'}y^{'}$ координата жүйелері бірдей бағдарланған (29-*а* сурет) болсын. Бұл кезде (*) формула бойынан

$$C_{11}=|\vec{l_1}|\cos\left(\vec{l_1^{'}}\,\widehat{\ }\,\vec{l_1}\right)=1\cdot\cos(-\alpha)=\cos\alpha, \qquad C_{21}=|\vec{l_1^{'}}|\cos\left(\vec{l_1^{'}}\,\widehat{\ }\,\vec{l_2}\right)=1\cdot\cos(90-\alpha)=\sin\alpha,$$

$$C_{12}=|\vec{l_2^{'}}|\cos\left(\vec{l_2^{'}}\,\widehat{\ }\,\vec{l_1}\right)=1\cdot\cos(270-\alpha)=-\sin\alpha, \qquad C_{22}=|\vec{l_2^{'}}|\cos\left(\vec{l_2^{'}}\,\widehat{\ }\,\vec{l_2}\right)=1\cdot\cos(-\alpha)=\cos\alpha.$$

Сонымен бұл жағдайда $\vec{l_1}^{'}=\{\cos\alpha,\sin\alpha\},\ \vec{l_2}^{'}=\{-\sin\alpha,\cos\alpha\}$. Бұларды (6-9), (6-9*а*), (6-9*б*) формулаларға қойсақ *Oxy* пен $O^{'}x^{'}y^{'}$ бірдей бағдарланған жағдайдағы координатаны түрлендірудің жалпы жағдайдағы параллель жылжытудағы, бұрудағы формулаларын аламыз. Олар сәйкесінше $\begin{cases} x=x^{'}cos\alpha-y^{'}\sin\alpha+x_0 \\ y=x^{'}\sin\alpha+y^{'}\cos\alpha+y_0 \end{cases}$ (6-12), $\begin{cases} x=x^{'}+x_0 \\ y=y^{'}+y_0 \end{cases}$ (6-12*а*). Себебі, паралель жылжытқанда $\alpha=0^0$ болады да $\cos\alpha=1,\ \sin\alpha=0$ болады.

$\begin{cases} x=x^{'}cos\alpha-y^{'}\sin\alpha \\ y=x^{'}\sin\alpha+y^{'}\cos\alpha \end{cases}$ (6-12*б*). Себебі, бұрғанда $x_0=0,\ y_0=0$. Бұларда $\begin{vmatrix} cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1\neq 0$ болғандықтан, олардың $(x^{'},y^{'})$-ті бір мәнді табуға болады. (6-12) ден $\begin{cases} x^{'} = (x - x_0)cos\alpha + (y - y_0)\sin\alpha \\ y = -(x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha \end{cases}$ (6-13). (6-12*а*) ден $\begin{cases} x^{'} = x - x_0 \\ y^{'} = y - y_0 \end{cases}$ (6-13*б*); (6-12*б*)-дан $\begin{cases} x^{'} = xccoa\alpha + y\sin\alpha \\ y^{'} = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$ (6-13*б*).

2-жағдай. *Oxy* және $O^{'}x^{'}y^{'}$ координата жүйелері әртүрлі бағдарланған (29-*б* сурет) болсын. Бұл кезде (*) формула бойынша $C_{11} = \left|\vec{l_1}\right|\cos\left(\vec{l_1^{'}}\,\hat{}\,\vec{l_1}\right) = 1\cdot\cos(-\alpha) = \cos\alpha,$ $C_{21} = \left|\vec{l_1^{'}}\right|\cos\left(\vec{l_1^{'}}\,\hat{}\,\vec{l_2}\right) = 1\cdot\cos(90-\alpha) = \sin\alpha,$

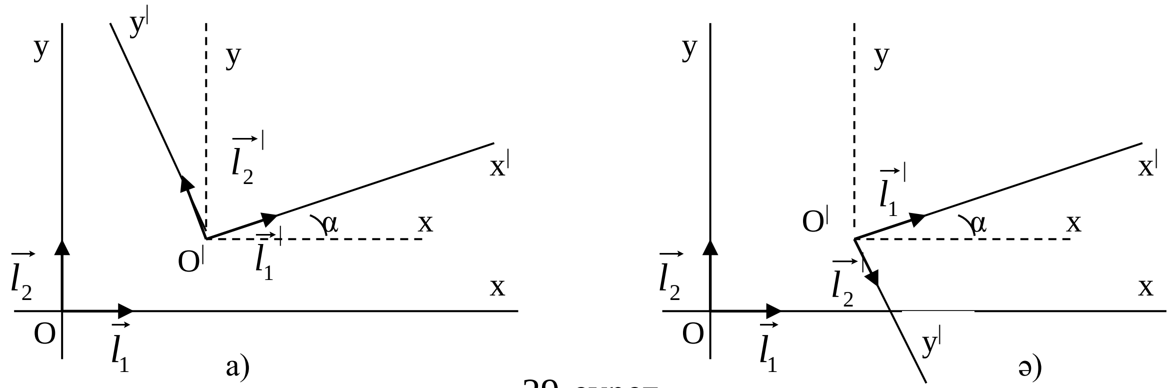
Сондықтан $\vec{l_1^{'}} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$ $C_{12} = \left|\vec{l_2^{'}}\right|\cos\left(\vec{l_2^{'}}\,\hat{}\,\vec{l_1}\right) = 1\cdot\cos(90-\alpha) = \sin\alpha,$

$C_{22} = \left|\vec{l_2^{'}}\right|\cos\left(\vec{l_2^{'}}\,\hat{}\,\vec{l_2}\right) = 1\cdot\cos(180-\alpha) = -\cos\alpha$. Сондықтан $\vec{l_2^{'}} = \{-\sin\alpha, \cos\alpha\}$.

Бұларды (6-9)-ға қойсақ $\begin{cases} x = x^{'}cos\alpha + y^{'}\sin\alpha + x_0 \\ y = x^{'}\sin\alpha - y^{'}\cos\alpha + y_0 \end{cases}$ (6-14). (6-12) мен (6-14) ті біріктіріп былай жазуға болады

$$\begin{cases} x = x^{'}cos\alpha - Ey^{'}\sin\alpha + x_0 \\ y = x^{'}\sin\alpha + Ey^{'}\cos\alpha + y_0 \end{cases} \quad (6\text{-}15)$$

Бұл *E=1* болғанда бірдей бағдарланған, *E=-1*болғанда әр түрлі бағдарланған тікбұрышты координата жүйесін түрлендіру формуласын, яғни (6-12) мен (6-14)-ті береді.



29-сурет

4-мысал. $O\vec{l_1},\vec{l_2}$ және $O^{'}\vec{l_1},\vec{l_2}$ аффиндік координаталар жүйесі берілген және 2-жүйенің элементтері 1-жүйеге қарағанда былайша анықталған: $O^{'}(3,-1)$, $\vec{l_1^{'}} = \{4,3\}$, $\vec{l_2^{'}} = \{2,5\}$. Кординатаны түрлендіру формуласы қандай болады.

Шешуі. Бұл формула (6-9) түрінді болады. $x^{'}$-тың коэфициенттері $\vec{l_1^{'}}$ тің, $y^{'}$ тың коэффициенттері $\vec{l_2^{'}}$ -тен координаталарына тең болады. Сонда *Oxy* –ты $O^{'}x^{'}y^{'}$-ке түрлендіру формуласы $\begin{cases} x = 4x^{'} + 2y^{'} + 3 \\ y = 3x^{'} + 5y^{'} - 1 \end{cases}$ болады. Ал, мұның анықтаушы $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 6 = 14 \neq 0$ болғандықтан бұл жүйеден $\left(x^{'}, y^{'}\right)$-ті бір мәнді табылады. Оны былайша жазып $\begin{cases} x^{'} = \dfrac{5}{14}x - \dfrac{1}{7}y - \dfrac{17}{14} \\ y^{'} = -\dfrac{3}{14}x + \dfrac{2}{7}y + \dfrac{13}{14} \end{cases}$.

5-мысал. *Oxy* координата жүйесінде *M(2,3)* нүкте берілген. *Oxy* жүйені параллель жылжытып $O^{'}\left(5, \sqrt{2}\right)$ нүктеге көшірген.

а) Координатаны (6-9*а*) түрінде болады $\begin{cases} x = x^{'} + x_0 \\ y = y^{'} + y_0 \end{cases}$. Мысалыда $x_0 = 5,\ y_0 = \sqrt{2}$. Сондықтан іздеген түрлендіру формуласы $\begin{cases} x = x^{'} + 5 \\ y = y^{'} + \sqrt{2} \end{cases}$ (*) болады.

б) Осы түрлендіруде *M(2,3)* нүктенің жаңа координаты неге тең болады. (*) бойынша $\begin{cases} 2 = x^{'} + 5 \\ 3 = y^{'} + \sqrt{2} \end{cases}$. Бұдан $x^{'} = -5,\ y^{'} = 3 - \sqrt{5}$. Сонымен $M\left(-5; 3 - \sqrt{5}\right)$

.

6-мысал. *Oxy* тік бұрышты координата жүйесін *O* нүктеден $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ бұрышқа бұрғанда $Ox^{'}y^{'}$ координата жүйесі шыққан.

а) Осы бұру түрлендіруінің формуласы қандай болады.

б) *M(3,-2)* нүктенің $Ox^{'}y^{'}$ дегі координаты неге тең болады.

в) *A(1,3)* $Ox^{'}y^{'}$ -те берілген, оның *Oxy* – тегі координаты неге тең.

Шешуі. а) *Oxy* –ты *O* нүктеден α бұрышқа бұрса бұл жүйенің түрлену формуласы $\begin{cases} x = x^{'}cos\alpha - y^{'}\sin\alpha \\ y = x^{'}\sin\alpha + y^{'}\cos\alpha \end{cases}$ болатын (6-12*б* формула). Бізде $\alpha = \dfrac{\pi}{6},\ \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2};\ \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ болатындықтан іздеген түрлендіру формуласы $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x^{'} - \dfrac{1}{2}y^{'} \\ y = \dfrac{1}{2}x^{'} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y^{'} \end{cases}$ (*) болады.

в) *A(1,3)* $Ox^{'}y^{'}$ -те берілген. Демек $x^{'} = 1,\ y^{'} = 3$.

Сонда $\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1 - \dfrac{1}{2}\cdot 3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{1}{2}\cdot 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \end{array}$. Сонымен $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

б) *M(3,2)* нүкте *Oxy*-те берілген. (*) дан $\begin{cases} 3 = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' \\ 2 = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \end{cases}$. Бұдан $\begin{cases} 3\sqrt{3} = \frac{3}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' \\ 2 = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \end{cases}$. Бұдан $3\sqrt{3} + 2 = 2x'$, $3 - 2\sqrt{3} = -2y'$, $x' = \frac{3\sqrt{3}+2}{2}$; $y' = \frac{2\sqrt{3}-3}{2}$.

7-мысал. $O\vec{l_1},\vec{l_2}$ координата жүйесінде сызық тең теңдеуі $x - 2y + 5 = 0$ болса, онда $O'\vec{l_1}',\vec{l_2}'$ координатадағы теңдеуі қандай болады, егер $O'(1,2)$, $\vec{l_1}' = \{1,-3\}$, $\vec{l_2}' = \{4,4\}$ болса.

Шешуі. Түрлендіру формуласы (6-9) формула бойынша $\begin{cases} x = x' + 4y' + 1 \\ y = -3x' + 4y' + 2 \end{cases}$ болады. Мұны берілген теңдеуге қойсақ $x' + 4y' + 1 - 2(-3x' + 4y' + 2) + 5 = 0$. Бұдан $7x' - 4y' + 2 = 0$ іздеген теңдеу болады.

Қайталау сұрақтары мен есептер.

1. Аффиндік координата жүйесі дегеніміз не?
2. Тікбұрышты декарттық координата жүйесі дегеніміз не?
3. Нүктенің координаты деген не, оны қалай табады.
4. Координаттары белгілі нүктені қалай салады.
5. Нүктенің радиус-векторы деген не?
6. Координаттық бұрыш (ширек) деген не, ол қалай нөмірленеді.
7. Әр ширектегі нүкте координаталарының таңбасы қалай болады, ол таңба қалай анықталады.
8. *A(0,5), B(3,0), C(1,2), Д(-2,1), E(1,-2), F(-1,-1)* нүктелердің орналасу тәртібі қалай?
9. Екі нүктесі белгілі вектор координаты қалай табылады.
10. Екі нүкте арасын табу формуласы қандай?
11. Нүкте кесіндіні іштей, сырттай бөледі деген не?
12. Кесіндіні берілген қатыста бөлу формуласы қандай?
13. Кесіндіні қақ бөлу формуласы қандай?
14. Үшбұрыштың ауданын оның төбелерінің координаталары арқылы табу формуласы қандай?
15. Поляр координата жүйесі қандай болады.
16. Нүктенің поляр координаталары мен декарттық координаталары арасында қандай қатыс бар.
17. Нүктенің поляр координаларының өзгеру аралығы қандай?
18. Жалпыланған поляр координата жүйесі деп нені айтады.
19. Жазықтықта координатаны түрлендіру қандай мақсат үшін жүргізіледі.
20. Аффиндік координата жүйесін түрлендіру формуласы қандай: а) Жалпы жағдай б) параллель жылжыту, в) бұру

21. Тікбұрышты координата жүйесін түрлендіру формуласы: а) Жалпы жағдай б) параллель жылжыту, в) бұру (базистік векторлар бірдей бағдарланған және әртүрлі бағдарланған жағдай).
22. $O\vec{l_1},\vec{l_2}$ аффиндік координаталар жүйесін түрлендіру арқылы $O'\vec{l_1},\vec{l_2}$ координата жүйесі шыққан және $O\vec{l_1},\vec{l_2}$-ге қарағанда: а) $O'(0,-5)$, $\vec{l_1'}=\{-1,0\}$, $\vec{l_2'}=\{0,1\}$ б) $O'(2,5)$, $\vec{l_1'}=\{0,5\}$, $\vec{l_2'}=\{4,-1\}$ болса, онда
    а) Координатаны түрлендірудің формуласы қандай?
    б) $O\vec{l_1},\vec{l_2}$ жүйедегі *A(3,4), B(2,0), C(0,-3)* нүктелердің $O'\vec{l_1},\vec{l_2}$ жүйелері координаталары қандай болады.
    в) *Д, E, F* нүктенің $O\vec{l_1},\vec{l_2}$ координата жүйесіндегі координаты неге тең болады, егер олардың $O'\vec{l_1},\vec{l_2}$ жүйедегі координаталары *Д(-1,1), E(2,-1), F(3,4)* болса.
23. *Oxy* координата жүйесінде *A(3,1), B(-1,5), C(-3,-1)* нүктелер берілген бұл нүктелердің а) -45^0 , б) 90^0 , в) 60^0 қа бұрылған кездегі координата жүйесіндегі координаталары неге тең болады.
24. Координатаны түрлендіру формуласы мынадай болса а) $\begin{cases} x=\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}y' \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y' \end{cases}$, б) $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y' \\ y=-\frac{1}{2}x'+\frac{\sqrt{3}}{2}y' \end{cases}$ *Oxy* координата өстері қандай бұрышқа бұрылған.
25. *M(x,y)* нүкте қай ширекте жатуы мүмкін, егер а) $xy>0$, б) $xy<0$, в) $x-y=0$, г) $x+y=0$, д) $x+y>0$, ж) $x+y<0$, е) $x-y>0$, ё) $x-y<0$ болса.
26. *A(2,-1)* нүктеге а) Координата басынан б) *x* өсіне в) *y* өсіне г) 1-3-ширек биссектрисасына д) 2-4-ширек биссектрисасына қарағанда симметриялы нүкте координаталарын табыңдар.
27. *A(-3,2), B(1,-5), C(6,2)* нүктелердің *Ox, Oy* өсіне түскен проекциясының координаталарын табыңдар, бұл нүктелер координа басынын, *x, y* өстерінен қандай қашықтықта тұр.
28. *A(3,3), B(4,5), C(1,-1). а*) нүктелер бір түзуде жатады ма, жоқпа б) бір түзуде жатса оның әрқайсысы қалған екеуін анықтайтын кесіндіні қандай қатыста бөледі.
29. *A(-2,14), B(4,-2), C(6,-2), Д(6,10)* нүктелер төртбұрыш жасайды. а) Диаганолдарының қиылысу нүктесін табыңдар б) ауданын табыңдар.
30. *A(5,4), C(-2,-1)* берілсе *AC* кесіндісін *x,y* өстері 2-ге бөледі ме, бөлсе қандай қатынаста

7. Жазықтықта түзудің берілу тәсілдері мен теңдеулері.

Координаттық әдістің негізгі бір міндеті фигураның теңдеуін құрып, сол теңдеуді зерттеу арқылы ол фигураның қасиеттерін анықтау. Аналитикалық геометрияда фигураларды нүктелердің геометриялық орны ретінде, яғни бәріне ортақ шарттарды қанағаттандыратын нүктелердің жиыны ретінде қарастырылады.

Берілген фигурада жататын нүктелердің координаталары қанағаттандыратын, ал онда жатбайтын нүктелердің координаталары қанағаттандырмайтын теңдеу мен теңсіздік және олардың жүйелері сол **фигураның теңдеу** делінеді.

Фигуранын берліген координата жүйесіндегі теңдеуін құру үшін ол фигуранын бойынан кез-келегн бір нүктесін алады (оны ағымдық нүкте дейді), оның координаталарын әдетте *(x,y)* арқылы белгілейді (оны нүктенін ағымдық координаталары дейді). Фигуранын барлық нүктелері бағынатын ортақ қасиетіне сүйене отырып, *x,y*-ты берілген шамалармен байланыстыратын теңдеу құрады. Ол фигураның теңдеуі болады. Біз бұл бапта түздің теңдеуін құру мен айналысамыз.

7.1. Түздің бұрыштық коэффициенті. Түзуге параллель векторды ол түздің **бағыттаушы векторы** дейді. Егерде *Oxy* (немесе $O\vec{l_1},\vec{l_2}$) тікбұрышты координаталар жүйесінде l түзуі берілсе, $\vec{a}=\{a_1,a_2\}$ оның бағыттаушы векторы болса, мына санды

$$k=\frac{a_2}{a_1} \quad (7\text{-}1)$$

Сол түзудің **бұрыштық коэффициенті** дейді. Мұнда $a_1 \neq 0$ болу керек, егер $a_1=0$ болса $\vec{a}=a_1\vec{l_1}+a_2\vec{l_2}=0\cdot\vec{l_1}+a_2\vec{l_2}=a_2\vec{l_2}$ болатындықтан $\vec{a}\backslash\backslash\vec{l_2}$ болады, яғни $\vec{a}$ вектор *Oy* өсіне параллель болады. Демек, *Oy* өсіне параллель түзудің бұрыштық коэффициенті болмайды.

Егер $a_2=0$ болса $\vec{a}\backslash\backslash\vec{l_1}$ болады, $k=0$ болады. Демек, *Ox* өсіне параллель түзудің бұрыштық коэффициенті 0-ге тең болады.

Егер l_1 мен l_2 түзулердің бағыттаушы векторлары $\vec{a}=\{a_1,a_2\}$, $\vec{b}=\{b_1,b_2\}$ өзара коллинеар болса, яғни $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ болса. Мұны $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ деуге болады. Сондықтан (7-1) бщйынша $k_1=k_2$ (7-2) болады. Демек, параллель түзулердің бұрыштық коэффициенттері өзара тең болады. l бағытаушы векторы $\vec{a}=\{a_1,a_2\}$ болсын. Онда $a_1=|\vec{a}|\cos\left(\overrightarrow{a_1}\,\hat{}\,\overrightarrow{l_2}\right)$, $a_2=|\vec{a}|\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\overrightarrow{l_2}\right)$ болатындықтан $k=\frac{a_2}{a_1}=\frac{|\vec{a}|\cos\left(\overrightarrow{a_1}{}'\,\overrightarrow{l_2}\right)}{|\vec{a}|\cos\left(\overrightarrow{a_1}{}'\,\overrightarrow{l_1}\right)}=\frac{\cos\left(\vec{a}{}'\,\hat{}\,\overrightarrow{l_2}\right)}{\cos\left(\overrightarrow{a_1}{}'\,\overrightarrow{l_1}\right)}=\frac{\cos\left(90^0-\left(\vec{a}{}'\,\hat{}\,\overrightarrow{l_1}\right)\right)}{\cos\left(\overrightarrow{a_1}{}'\,\overrightarrow{l_1}\right)}=\frac{\sin\left(\overrightarrow{a_1}\overrightarrow{l_1}\right)}{\cos\left(\overrightarrow{a_1}\overrightarrow{l_1}\right)}=tg\left(\vec{a}{}'\,\hat{}\,\overrightarrow{l_1}\right)$. Егер $\vec{a}$ вектордың *Ox* өсінен оң бағытымен жасайтын бұрышын, яғни $\left(\vec{a}\,\hat{}\,\overrightarrow{l_1}\right)=\alpha$ десек

$$k=tg\alpha \quad (7\text{-}3)$$

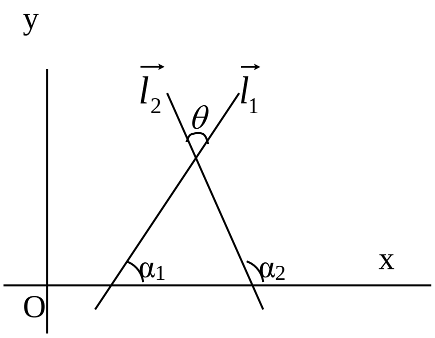
блып шығады. Сонымен түзудің бұрыштық коэффициенті сол түзудің абцисса өсінен оң бағытымен жасайтын бұрышының тангенсына тең болады. (7-3)тен егер α сүйір болса $k > 0$, доғал болса $k < 0$ болатыны шығады.

Егер l түзуі өзінің екі нүктесі $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$-мен берілсе, онда $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$ векторды ол түзудің бағыттаушы векторы үшін алуға болады. Сондықтан бұрыштық коэффициенті бұл кезде (7-1) бойынша былай анықталады.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (7\text{-}4)$$

Oxy тікбұрышты координата жүйесінде, бұрыштық коэффициентері $k_1 = tg\alpha_1$, $k_2 = tg\alpha_2$ болатын l_1, l_2 екі түзу болсын (30-сурет). Ол түзулер арасындағы бұрыш θ болсын. Соны табайық. Суреттен $\alpha_2 = \alpha_1 + \theta$. Бұдан $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$.екі жағында тангенс алсақ $tg\theta = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 tg\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$. Сонымен екі түзу арасындағы бұрыш ол түзулердің бұрыштық коэффициенттері арқылы мына формуламен

$$tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \text{ табылады.}$$



30-сурет

Егер түзулер параллель болса $\theta = 0$не $\theta = 180^0$ болады. Ал, $tg0^0 = 0,\ tt180^0 = 0$ болатындықтан бұл кезде (7-5) тен $k_2 - k_1 = 0$ $k_2 = k_1$ болып шығады, ал түзулер перпендикуляр болса, онда ол түзулердің бағыттаушы векторлары $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ ортогонал болады. Яғни $\vec{a}\vec{b} = 0$ болады. Бұдан $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$. Бұдан $\frac{a_2}{a_1} = -\frac{b_2}{b_1} = \frac{-1}{b_2 / b_1}$ немесе $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ немесе $k_1 k_2 = -1$. Сонымен түзулер параллель болса $k_1 = k_2$ перпендикуляр болса $k_1 k_2 = -1$ болады. Сөйтіп $k_1 = k_2$, $k_1 k_2 = -1$ (7-6). Бұлар сәйкесінше түзулердің параллель және перпендикуляр болу белгілері болып табылады.

7.2. Түзудің берілу тәсілдері. Егер жазықтықта түзудің орны белгілі болса, яғни ол түзу жазықтықта берілсе, онда ол түзуді жазықтықтың басқа түзулерінен ажыратып алуға болады. Түзу жазықтықта мына жағдайларда берілген деп есептеледі.

1. Егер түзудің бір нүктесі мен бағыты белгілі болса. Өйткені бір нүктеден берілген бағытта бір, тек бір түзу өтеді.

2. Егер түзудің екі нүктесі белгілі болса, өйткені берілген екі нүктені басын бір, тек бір түзу өтеді.
3. Егер түзудің бір нүктесі және ол түзуге перпендикуляр болатын бір вектор белгілі болса. Бұл кезде де берілген нүктеден берілген векторға перпендикуляр болатын бір, тек бір түзу болады.

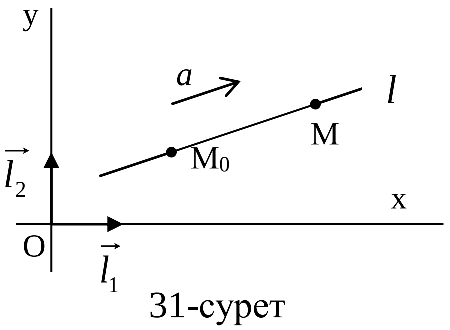
7.3. Түзудің теңдеулері. Жоғарыда айтылған түзудің берілуінің үш тәсіліне сай, ол түзудің теңдеуін құруға болады. Түзудің теңдеуін құру деген ол түзу бойындағы барлық нүктелердің координаталары қанағаттандыратын, ал түзуден тыс жатқан бірде-бір нүктенің координаталары қанағаттандырмайтын теңдеу құру деген сөз.

1. Берілген нүктеден берілген бағытта өтетін түзу теңдеуі.

Тікбұрышты Oxy координата жүйесінде $M_0(x_0, y_0)$ нүкте және $\vec{a} = \{a_1, a_2\}$ вектор берілсін. Онда M_0 нүктені басып өтетін және $\vec{a}$ векторға параллель болатын бір, тек бір l түзу болады. Сол l түзудің теңдеудін құру үшін оның бойынан кез-келген бір нүкте алады (Оны түзудің ағымдық нүктесі дейді). Ол M нүктесі болсын, оның ағымдық координаталарын *(x,y)* дейік (31-сурет). M нүктені l түзудің қай жерінен алсада $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ вектор $\vec{a} = \{a_1, a_2\}$ вектормен коолинеар болады. Сондықтан t саны табылып $\overrightarrow{M_0M} = \vec{a}t$ (*1) болады. Бұдан координатаға көшсек (векторлар тең болса сәйкес координаталарыда тең болады).

$$x - x_0 = a_1 t,\ y - y_0 = a_2 t\ .$$

Бұдан $x = x_0 + a_1 t,\ y = y_0 + a_2 t$ (7-7), $\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2}$ (7-8) немесе $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = 0$ (7-9) (*1) теңдікті тек l түзу бойында жататын нүктелер ғана қанағаттандырады. Сондықтан (7-7), (7-8), (7-9) теңдеулерді тек l түзуі бойында жататын нүктелер координаталары қанағаттандырады, онда жатбайтын нүкте координаталары қанағаттандырмайды. Сондықтан ол теңдеулер M_0 нүктеден $\vec{a}$ векторға параллель етіп жүргізілген түзудің теңдеулері болады. Әдетте (7-7)-ні түзудің параметрлік теңдеуі (*t*-параметр), (7-8)-ді түзудің канондық (жай) теңдеуі дейді. (7-8) теңдеуді былайша жазса $y - y_0 = \dfrac{a_2}{a_1}(x - x_0)$ (7-1) формула бойынша мұны $y - y_0 = k(x - x_0)$ (7-10) деп жазуға болады. Бұрыштық коэффициентік түзу бағытын көрсететіндіктен (7-10) берілген бағытта өтетін түзу теңдеуі болады.



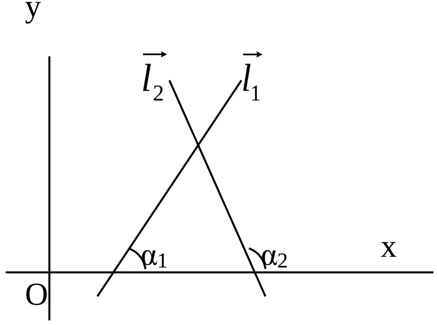
31-сурет

Абцисса өсін *O(0,0)* нүктеден $\vec{l_1}=\{1{,}0\}$ вектор бағытында өтетін түзу деп қарастыруға болады. Сонда абцисса өсінен теңдеуі (7-10) бойынша $a_2=0,\ a_1=1,\ y_0=0,\ x_0=0$ болғандықтан $y=0$ (7-11) болады. Дәл осы сияқты ордината өсін *O(0,0)* нүктеден $\vec{l_2}=\{0{,}1\}$ векторға параллель етіп жүргізілген түзу ретінде қарастыруға болады. Оның теңдеуі $x=0$ (7-12) болады.

X өсінен *b* қашықтықта оған параллель етіп жүргізілген түзу ордината өсін *B(0,b)* нүктеде қиады. Сондықтан оның теңдеуін *B(0,b)* нүктеден өтетін $\vec{l_1}=\{1{,}0\}$ векторға параллель болатын түзу ретінде (7-9) бойынша $\begin{vmatrix} x-a & y-0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=0$. Бұдан $x-a=0$ немесе $x=a$ (7-14). Сонымен түзудің бір нүктесі мен бағыты белгілі болса, ол түзудің теңдеуін әр уақытта құруға болады екен. Олар $x=x_0+a_1t,\ y=y_0+a_2t$ (7-7), $\dfrac{x-x_0}{a_1}=\dfrac{y-y_0}{a_2}$ (7-8), $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}=0$ (7-9), $y-y_0=k(x-x_0)$ (7-10), $y=0$ (7-11), $x=0$ (7-12), $y=b$ (7-13), $x=a$ (7-14) түрінде болады.

2. Екі нүктесі берілген түзу теңдеуі.

Oxy тікбұрышты координаталар жүйесінде $M_1(x_1,y_1),\ M_2(x_2,y_2)$ екі нүкте берілсін. Онда M_1M_2 түзудің теңдеуін $M_1(x_1,y_1)$ немесе $M_2(x_2,y_2)$ нүктеден және $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1\}$ векторға параллель болатын түзу ретінде (7-8) формуланы пайдаланып құруға болады. Сонда $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ немесе $\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}=\dfrac{y-y_2}{y_1-y_2}$ (7-15) екі нүктесі белгілі түзу теңдеуі болады. Егер $x_1=x_2$ бо[illegible] онда түзу ордината өсіне параллель болады да



30-сурет

(7-15) бойынша $\dfrac{x-x_1}{0}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ болады. Мұны $x-x_1=0$ немесе $x-x_2=0$ (7-16) деуге болады. Егер $y_1=y_2$ болса, онда түзу абцисса өсіне параллель болады $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{0}$. Ал, мұны $y-y_1=0$ немесе $y-y_2=0$ (7-17) деп жазуға болады.

Егерде түзу абцисса өсін координата басынан *а*-ға тең қашықтықтағы нүктеде, ордината өсін *b*-ға тең қашықтықтағы нүктеде қиып өтетін болса, онда ол түзудің теңдеуін *A(a,0), B(0,b)* нүктелерден өтетін түзу теңдеуі ретінде құруға болады. Сонда (7-15) бойынша $\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0}$ бұдан $\frac{x}{-a}+\frac{-a}{-a}=\frac{y}{b}$ немесе $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (7-18). Мұны түзудің кесіндідегі (кесінділік) теңдеуі дейді. Енді бұрыштық коэффициенті k бар болатын түзу берілсін. Онда бұл түзу ордината өсіне параллель болмайды. Сондықтан оны қандайда бір нүктеде қиады. Мысалы, *B(0,b)* нүкте де қисын. Сонда бұл түзудің теңдеуін (7-15)-ті пайдаланып құруға болады. Шынында да (7-15)-ті былайша жазуға болады. $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$, мұндағы $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k$ түзудің бұрыштық коэффициенті ((7-4) формула).

Сонда біз іздеген бұрыштық коэффициенті k болатын *B(0,b)* нүктеден өтетін түзу теңдеуі: $y-b=k(x-0)$. Бұдан $y=kx+b$ (7-19). Мұны бұрыштық коэффициентті түзудің теңдеуі дейді.

3. Берілген нүктеден берілген векторға перпендикуляр етіп жүргізілген түзу теңдеуі.

Тікбұрышты координата жүйесінде $M_0(x_0,y_0)$ нүкте және $\vec{a}=\{a_1,a_2\}$ вектор берілсін. Онда M_0 нүктеден өтетін және $\vec{a}$ векторға перпендикуляр болатын бір ғана түзу болады. Оның теңдеуін құру үшін түзу бойынан оның ағымдық *M(x,y)* нүктесін алайық. Сонда бұл нүктені ол түзудің қай жерінен алса да $\vec{a}$ мен $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,y-y_0\}$ векторлар өзара ортоганал болады. Сондықтан олардың скаляр көбейтіндісі 0-ге тең болады.

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{a}=0 .$$

Мұны координаталар арқылы жазсақ

$$(x-x_0)a_1+(y-y_0)a_2=0 . \quad (7\text{-}20)$$

Осы іздеген теңдеу болады.

4. Түзудің жалпы теңдеуі.

Жоғарыда қарастырып шығарылған түзудің (7-7) – (7-20) теңдеулерінің барлығыда *x,y* - ке қарағанда бір дәрежелі екі белгісізді сызықтық теңдеулер. Ондай теңдеулердің жалпы түрі мынадай

$$Ax+By+C=0 . \quad (7\text{-}21)$$

болады. Енді мұндай теңдеулердің кез-келгені түзудің теңдеуі бола береді ма, жоқ па деген мәселені қарастырайық. (7-21) екі белгісізді сызықтық теңдеу болу үшін *A* мен *B* –ның біреуі немесе екеуі де 0-ге тең болмау керек. Мысалы, $A\neq 0$ дейік, онда (7-21) былайша жазуға болады.

$\begin{vmatrix} x+\frac{C}{A} & y \\ -B & A \end{vmatrix} = 0$. Мұны ашсақ (7-21) шығады.

Ал, бұл теңдеу түзудің (7-9) теңдеуімен бірдей болып шықты, яғни бұл $M_0\left(-\frac{C}{A},0\right)$ нүктеден өтетін $\vec{a}=\{-B,A\}$ векторға параллель болатын түзудің теңдеуі болады. Сондықтан (7-21) бағыттаушы векторы $\vec{a}=\{-B,A\}$ болатын түзудің теңдеу екен. Оны түзудің жалпы теңдеуі дейді. Ол түзудің бағыттаушы векторы $\vec{a}=\{-B,A\}$ - ға мына вектор $\vec{N}=\{A,B\}$ ортогонал, себебі

$$\vec{a}\vec{N}=-B\cdot A+AB=0 \ .$$

Сондықтан $\vec{N}=\{A,B\}$ векторды (7-21) теңдеумен анықтадатын түзудің **нормал векторы** немесе нормалы дейді.

5. Түзудің толымсыз теңдеулері.

Түзудің (7-21) жалпы теңдеуіндегі үш коэффициенттің ең болмағанда біреуі 0-ге тең болса, онда ол **түзудің толымсыз теңдеуі** делінеді.

Мынадай жағдайлар болуы мүмкін:

а) $C=0$. Онда теңдеу $Ax+By=0$ (7-22 *а*) түрге келеді. Мұны координата жүйесінің басынан координаталары $(0,0)$ қанағаттандырады. Сондықтан (7-22 *а*) координата басынан өтетін түзудің теңдеуі болады.

б) $B=0$ болсын, онда теңдеу $Ax+C=0$ (7-22*б*) түрге келеді. Мұның бағыттаушы векторы $\vec{a}=\{0,A\}$ болғандықтан $\vec{l_2}=\{0,1\}$ векторға коолинеар. Демек (7-22*б*) ордината **өсіне параллель** түзудің теңдеуі.

в) Дәл осы сияқты $A=0$ болса $By+C=0$ (7-22*в*) шығады. Мұның бағыттаушы векторы $\vec{a}=\{B,0\}$ болады. Ол $\vec{l_1}=\{1,0\}$ векторға параллель. Сондықтан (7-22*в*) **абцисса өсіне параллель** түзудің теңдеуі.

г) Енді екі коэффициент 0-ге тең болып: $C=0,\ B=0$ болсын. Теңдеу $Ax=0$ (7-22 *г*) түрге келеді. Бұл ордината өсінін теңдеуі. Ал, $C=0,\ A=0$ болса теңдеу $By=0$ (7-22*д*) түрге келеді. Бұл абцисса өсінін теңдеуі болады.

$B=A=0$ болса $C=0$ болады да (7-21) теңдеу болмай қалады. Сонымен толымсыз теңдеу ордината басынан өтетін, координата өстеріне параллел болатын түзулердің және координата өстерінің теңдеуі болады екен.

6. Түзудің нормал теңдеуі.

а) Егер түзудің (7-21) жалпы теңдеуіндегі айнымалылардың коэффициенттерінің квадраттарының қосындысы 1-ге тең болса, яғни

$$A^2+B^2=1 \text{ (7-23) болса,}$$

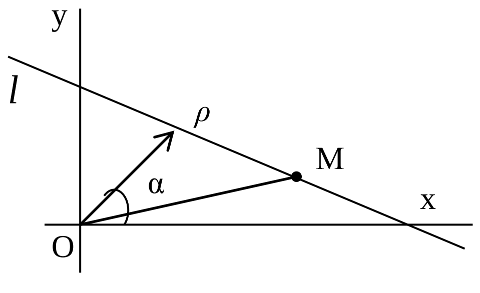
онда ол теңдеу **түзудің нормал** теңдеуі делінеді.

Түзудің теңдеуі $Ax+By+C=0$. (7-21) нормал түрде болмаса, оны нормал түрге келтіруге болады. Ол үшін теңдеуді 0-ге тең емес β санына көбейтеді: $A\beta x+B\beta y+C\beta=0$. Көбейткенде $(\ A\beta\ )^2+(\ B\mu\ )^2=1$ болатын β санына көбейтеді. Бұдан $\beta=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ (7-24).

Осыған (7-21)-ді көбейтсе $\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$ (7-25) теңдеу шығады және бұл түзудің нормал теңдеуі болады. Өйткені,
$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2+\left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2=\frac{A^2}{A^2+B^2}+\frac{B^2}{A^2+B^2}=\frac{A^2+B^2}{A^2+B^2}=1$ болып шығады. Сондықтан (7-24)-ті нормалдаушы көбейткіш дейді. (7-25) түзудің нормал түрге келтірілген түзу теңдеуі болады.

б) Түзудің нормал теңдеуін былайша құруға болады. Түзу l координата басынан P қашықтықта өтсін және оның нормалы Ox өсімен α бұрыш жасайтын (32-сурет). Шарт бойынша $O\rho \perp l, \left(Ox^{\wedge}O\rho\right)=\alpha, O\rho = P$. Осылайша орналасқан l түзудің теңдеуін құру үшін l – дің бойынан *M(x,y)* ағымдық нүкте алайық. $\overrightarrow{O\rho}$ -ны түзудің нормалы үшін алуға болады. Оның барлық векторын $\vec{n}$ дейік. Оның координаттары $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ болады. Себебі, $\vec{n}$ бірлік вектор болғандықтан $\vec{n}=\{n_1,n_2\}$ десек $n_1=\left|\vec{n}\right|\cos\left(\vec{n}^{\wedge}\vec{l_1}\right)=\cos\alpha,$
$n_2=\left|\vec{n}\right|\cos\left(\vec{n}^{\wedge}\vec{l_2}\right)=1\cdot\cos(90-\alpha)=\sin\alpha$ болады. Сонымен $\vec{n}=\{\cos\alpha, \sin\alpha\}$. Суреттен $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{O\rho}=\overrightarrow{\rho M}$. Мұны $\vec{n}$ - ге көбейтсек $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{n}-\overrightarrow{O\rho}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{\rho M}\cdot\vec{n}$, ал $\overrightarrow{OM}=\{x,y\}$, $\vec{n}=\{\cos\alpha, \sin\alpha\}$болғандықтан $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{n}=x\cos\alpha+y\sin\alpha,$
$\overrightarrow{O\rho}\cdot\vec{n}=\left|\overrightarrow{O\rho}\right|\left|\vec{n}\right|\cos 0^0=\rho\cdot 1\cdot 1=\rho$ және $\overrightarrow{\rho M}\perp\vec{n}$ болғандықтан $\overrightarrow{\rho M}\cdot\vec{n}=0$ болады. Бұларды орнына қойсақ $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ (7-26) теңдеуі шығады. Мұндағы $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ болатындықтан (7-26) түзудің нормал теңдеуі болады.

Егер (7-25) пен (7-26) бір түзудің теңдеулері десек
$\cos\alpha=\frac{A}{A^2+B^2}$, $\sin\alpha=\frac{B}{A^2+B^2}$, $p=-\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ (7-27) болар еді.



32-сурет

7. Түзулер шоғының теңдеуі.

Тікбұрышты *Oxy* координата жүйесінде $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ теңдеулермен екі түзу берілсін. Олар өзара қиылысатын түзулердің теңдеулері болсын. Түзулер қиылысатындықтан олардың бағыттаушы векторлары коллинеар болмайды, яғни $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$ болуы керек.

Мынадай теңдеу құрайық ($\lambda \neq 0$ кез-келген сан). $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$ (7-28). Мұны қайта топтасақ $(A_1+\lambda A_2)x+(B_1+\lambda B_2)y+(C_1+\lambda C_2)=0$ (*). Мұндағы $A_1+\lambda A_2$ мен $B_1+\lambda B_2$ қатарынан 0-ге тең болмайды. Өйткені, қатарынан 0-ге тең болады десек $A_1+\lambda A_2=0;\ B_1+\lambda B_2=0$ болғандықтан $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ болып берілген екі түзу қиылысады деген шартқа қайшы болады.

x пен *y* тың коэффициенттері қатарынан *0* емес болғандықтан (*) түзудің теңдеуі болады. Сондықтан (7-28) де түзудің теңдеуі болады.

Берілген түзулер $M_0(x_0,y_0)$ нүктеде қиылысатын болса $A_1x_0+B_1y_0+C_1=0$, $A_2x_0+B_2y_0+C_2=0$ болғандықтан $A_1x_0+B_1y_0+C_1+\lambda(A_2x_0+B_2y_0+C_2)=0$ болады, яғни берілген түзулердің қиылысу нүктесінің координаталары (7-28)ді де қанағаттандырады екен. Олай болса (7-28) берілген түзулерлердің қиылысу нүктесінен өтетін түзудің теңдеуі болады. Ондағы λ - ға түрлі мән беріп қиылысу нүктеден өтетін барлық түзулердің теңдеулерін шығарып алуға болады. Ал, бұл нүктеден өтетін жазықтық түзулерінің жиынын жазықтығы түзулер шоғы дейді. Сондықтан (7-28)-ді түзулер шоғының теңдеуі дейді.

а. Түзуге қатысты кейбір есептер.

1. Жазықтықта екі түзудің өзара орналасуы.

Тікбұрышты *Oxy* координата жүйесінде $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ теңдеулермен екі түзу берілсін. Осы түзулердің өзара орналасу мүмкіндіктерін және солай орналасу шарттарын қарастырайық.

а) Берілген екі түзу беттессін. Онда берілген теңдеулер бір-бірінен бір сан көбейткішке өзгешеленеді, яғни $A_2=\lambda A_1,\ B_2=\lambda B_1,\ C_2=\lambda C_1$ болады. Бұдан $\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}$ (7-29 *а*). Енді керісінше берілген теңдеулердің коэффициенттері пропорционал болып, яғни (7-29 *а*) орындалсын. Онда теңдеулер $A_1x+B_1y+C_1=0,\ \lambda A_1x+\lambda B_1y+\lambda C_1=0$ түрде болады. Сондықтан мұның 1-сін координаттары қанағаттандыратын кез-келген нүкте екеншісінде қанағаттандырады, мұның керісіде дұрыс. Олай болса, бұл кезде екі түзу беттеседі.

Сонымен (7-29*а*) екі түзудің беттесу белгісі болып табылады. Ол берілген теңдеулердің бір түзуді анықтау шарты да болады.

б) Екі түзу параллель болсын. Онда ол түзулердің бағыттаушы векторлары $\overrightarrow{a_1}=\{-B_1,A_1\}$ мен $\vec{a}_2=\{-B_2,A_2\}$ өзара коллинеар болады. Сондықтан олардың координаталары пропорционал болады $\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}$.

Керісінше $\overrightarrow{a_1}$ мен $\vec{a}_2$ коллинеар болса, оларға бағыттас түзулер параллель болады. Сонымен

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}\neq\frac{C_2}{C_1} \quad (7\text{-}29\ б).$$

Екі түзудің параллель болу белгісі және берілген екі түзудің параллель теңдеулері болу шарты.

в) Екі түзу қиылысатын. Екі түзу қиылысса, олардың бағыттаушы векторлары коллинеар болмайды. Сондықтан

$$\frac{A_2}{A_1}\neq\frac{B_2}{B_1} \quad (7\text{-}29\ в).$$

Керісінше (7-29 *в*) орындалса онда $\overrightarrow{a_1}$ мен $\vec{a}_2$ коллинеар емес. Сондықтан түзулер параллель емес. Демек, олар қиылысады. Сонымен (7-29 *в*) екі түзудің қиылысу немесе екі теңдеудің қиылысатын түзулерді анықтау белгісі болады.

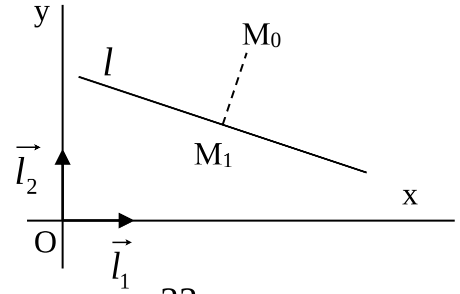
2. Екі түзу арасындағы бұрыш. Тікбұрышпен *Oxy* координата жүйесінде $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ теңдеулермен екі түзу берілсін, $\overrightarrow{a_1}=\{-B_1,A_1\}$, $\vec{a}_2=\{-B_2,A_2\}$. Олардың бағыттаушы векторлары болады.

Жазықтықта екі түзу қиылысса 4 бұрыш шығады. Соның бірі ол түзулердің бағыттаушы векторлары арасындағы бұрышқа тең болады. Ол бұрыш (3-13) формула бойынша анықталады:

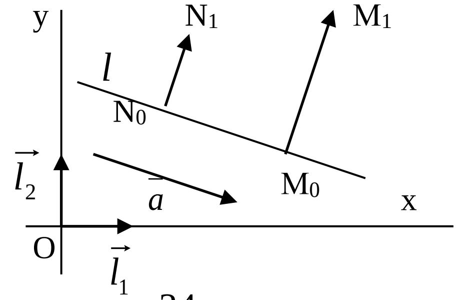
$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{a_1}\overrightarrow{a_2}}{\left|\overrightarrow{a_1}\right|\left|\overrightarrow{a_2}\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^{\ 2}+B_1^{\ 2}}\sqrt{A_2^{\ 2}+B_2^{\ 2}}} \quad (7\text{-}30).$$

Бұдан егер түзулер перпендикуляр болса $\varphi=90,\cos 90=0$ болатындықтан (7-30)дан $A_1A_2+B_1B_2=0$ (7-31 *а*) болады. Ал, түзулер параллель болса, бағыттаушы векторлар коолинеар болатындықтан $\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}$ немесе $A_2B_1-A_1B_2=0$ (7-31 *б*).

3. Нүктенің түзуден қашықтығы. Тікбұрышпен *Oxy* координата жүйесінде $Ax+By+C=0$түзу және онда жатпайтын $M_0(x_0,y_0)$ нүкте берілсін (33-сурет). Ол нүктеден *l* түзуге M_0M_1 перпендикулярын түсірсек $d=\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|$ іздеген қашықтық болады.



33-сурет



34-сурет

Түзудеге нормал векторы $\vec{\mathrm{N}}=\{A,B\}$ болады және ол $\overrightarrow{M_1M_0}$ вектормен коллинеар болады. Сонда $\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\vec{N}=\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|\left|\vec{N}\right|\cos\left(\overrightarrow{M_1M_0}\,{}^{\wedge}\,\vec{N}\right)=\left(\overrightarrow{M_1M_0},\vec{N}\right)$

бұрыш не 0^0 не 180^0 болады. Ал, $\cos 0^0 = 1, \cos 180^0 = -1$ болатындықтан $\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{N} = d\left|\vec{N}\right|(\pm 1)$. Бұдан $d = \pm \frac{\overrightarrow{M_1M_0}}{\left|\vec{N}\right|}$.

Егер M_1 дің координаттарын (x_1, y_1) десек, M_1 нүкте l түзуде жатқандықтан $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ болады. Бұдан $C = -(A_1x + B_1y)$. Сонда $\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{N} = (x_0 - x_1)A + (y_0 - y)B = Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1) = Ax_0 + By_0 + C$. Ал, $\vec{N} = \sqrt{A^2 + B^2}$ болғандықтан

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| \quad (7\text{-}32).$$

Сонымен нүктенің түзуден қашықтығы табу үшін алдымен ол түзудің теңдеуін нормаль түрге келтіріп, одан кейін *x,y*-ті нүкте координаты (x_0, y_0) мен алмастыру керек.

Егер түзу теңдеуі нормаль түрде (7-26) теңдеумен берілсе, онда *(x,y)*-ті нүкте координаты (x_0, y_0) мен алмастыра салу керек. Сонда $d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p|$ (7-33) іздеген қашықтықты табу формуласы болады.

7.5. $\delta = A_1x + B_1y + C_1$ үшмүшелік таңбасының геометриялық мәні.

Oxy координата жүйесінде координаталары $Ax + By + C = 0$ теңдеуді қанағаттандыратын нүктелердің барлығы осы теңдеумен анықталатын түзу бойында жатады. Оның бағыттаушы векторы $\vec{a} = \{-B, A\}$ болады. $\vec{\mathrm{N}} = \{A, B\}$ вектор бұл түзуге перпендикуляр болатындықтан, оны түзудің N_0 нүктесінен өлшеп салсақ $\overrightarrow{N_0N} = \vec{\mathrm{N}} = \{A, B\}$ болатын N нүкте $Ax + By + C = 0$ түзумен анықталатын екі жазықтықтың бірінде жатажы (34-сурет). Сол жарты жазықтықтан $M_1(x_1, y_1)$ нүкте алып $NN_0 \backslash\backslash M_1M_0$ жүргізсек, $M_0(x_0, y_0)$ десек $\overrightarrow{M_0M_1} = t\vec{N}$ (*) болар еді және *t>0* болғанда $\overrightarrow{M_0M_1} \uparrow\uparrow \vec{N}, t < 0$ болғанда $\overrightarrow{M_0M_1} \uparrow\downarrow \vec{N}, t < 0$ болар еді.

(*)-дан $x_1 - x_0 = tA,\ y_1 - y_0 = tB$, бұдан $x_1 = x_0 + At,\ y_1 = y_0 + Bt$. Сонда $\partial = Ax_1 + By_1 + C = A(x_0 + At) + B(y_0 + Bt) + C = Ax_0 + By_0 + C + t(A^2 + B^2) = 0 + (A^2 + B^2)t = (A^2 + B^2)t$ Сөйтіп $\partial = Ax_1 + By_1 + C$ үшмүшеліктің таңбасы *t*-ның таңбасына байланысты болды екен және *t>0* болғанда $\partial = Ax_1 + By_1 + C > 0$ және $\overrightarrow{M_0M_1} \uparrow\uparrow \vec{N}$ болғандықтан M_1 нүкте $\vec{N}$ бағытталған жарты жазықтықта жатады екен. Егер *t<0* болса, онда $\partial = Ax_1 + By_1 + C < 0$ және $\overrightarrow{M_0M_1} \uparrow\downarrow \vec{N}$ болғандықтан M_1 нүкте $\vec{N}$ бағытталған жарты жазықыққа қарсы жарты жазықтықта жатады екен.

Бұдан салдар ретінде $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ екі нүкте $Ax + By + C = 0$ түзудің бір жағында жатса, онда

$$(Ax_1 + By_1 + C)(Ax_2 + By_2 + C) > 0 \quad (7\text{-}34a)$$

екеуі екі жағында жатса

$$(Ax_1 + By_1 + C)(Ax_2 + By_2 + C) < 0 \quad (7\text{-}34б)$$

болатыны шығады.

Мысал. $6x - 3y + 5 = 0$ түзу берілген.

Мыналарды анықтаңдар:

1. Түзу координата басынан өтеді ме?

Жауабы: өтбейді, себебі, бос мүшесі бар.

2. $M_1(2,\text{-}1)$ нүкте бұл түзуде жатады ма, жоқпа.

Жауабы: M_1-дің координаталарын теңдеуге қоямыз, оны қанағаттандырса, яғни *0* болып шықса жатады, *0* болмаса жатбайды: $6x - 3y + 5 = 6 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) + 5 = 12 + 3 + 5 \neq 0$. Сондықтан M_1 нүкте түзуде жатбайды.

3. Түзудің бағыттаушы векторын табындар.

Жауабы: $\vec{a} = \{-B, A\} = \{3,6\}$ болады.

4. Түзудің нормал векторын табындар.

Жауабы: $\vec{N} = \{A, B\}$. Демек $\vec{N} = \{6,-3\}$.

5. Түзудің бағыттаушы векторы мен нормал векторы арасында қандай қатыс болады.

Жауабы: түзуге бағыттаушы вектор $\vec{a} = \{3,6\}$ параллель, нормал вектор $\vec{N} = \{6,-3\}$ перпендикуляр болатындықтан $\vec{a}$ мен $\vec{N}$ ортогонал болады. Сондықтан олардың скаляр көбейтіндісі 0-ге тең болу керек.

Тексерейік: $\vec{a}\,\vec{N} = 3 \cdot 6 + 6 \cdot (-3) = 18 - 18 = 0$. Дұрыс екен.

6. Түзудің бұрыштық коэффициентті неге тең.

Түзудің бұрыштық коэффициентті оның бағыттаушы векторының 2-координатасының 1-координатасына қатысына тең болады. Демек, $k = \frac{+A}{-B} = \frac{6}{3} = 2$.

Оны былайда табуға болады. Берілген теңдеуден *y*-ты табады. Сонда *x*-тың коэффициентті бұрыштық коэффициент болады. $6x - 3y + 5 = 0$ ден $3y = 6x + 5$. Бұдан $y = \frac{6}{3}x + \frac{5}{3} = 2x + \frac{5}{3}$. Демек бұрыштық коэффициент $k = 2$.

7. Берілген түзу *Ox* өсінен оң бағытымен сүйір бұрыш жасай ма, доғал бұрыш жасай ма?

Бізде $k = tg = 2 > 0$. Сондықтан α-сүйір болады. Егер $k = tg < 0$ болса α доғал болар еді.

8. Түзу *Ox, Oy* өстерімен қай нүктеде қиылысады.

Түзу теңдеуі $6x - 3y + 5 = 0$ еді. Түзу *Ox* өсімен қиылысса ол нүктенің ординатасы 0 болады. Сондықтан теңдеудегі *y=0* десек $x = -\frac{5}{6}$. Демек түзу абцисса өсін $A\left(-\frac{5}{6}, 0\right)$ нүктеде қияды. *x=0* десек теңдеуден $y = \frac{5}{3}$. Демек түзу ордината өсін $B\left(0, \frac{5}{3}\right)$ нүктеде қияды.

9. Түзу *Ox, Oy* өстерімен қандай бұрыш жасайды.

Жауабы: Түзудің *Ox* өінін оң бағытымен жасайтын бұрышының тангенсі сол түзудің бұрыштық коэффициентіне тең болады. Біздің мысалы, $k = tg = 2$. Сондықтан $\alpha = arctg2$.

Сонда y өсімен $90 - arctg2$ бұрыш жасайды.

10. *M(-2,3)* нүктеден берілген түзуге параллель етіп жүргізілген түзудің теңдеуі қандай болады.

Жауабы: Іздеген түзудің бұрыштық коэффициентті тең болады, яғни $k = 2$ болады. Себебі, олар параллель. Сонда түзу теңдеуі $y - y_0 = k(x - x_0)$ формула бойынша $y - 3 = 2(x + 2)$. Бұдан $2x - y + 7 = 0$.

Тапқан теңдеудің дұрыс қатесін анықтау үшін екі түзудің параллель болу белгісі $A_2B_1 - A_1B_2 = 0$ тексерейік. $2 \cdot (-3) - 6 \cdot (-1) = -6 + 6 = 0$ тапқанымыз дұрыс екен.

11. Берілген түзуге а) параллель б) перпендикуляр болатын түзудің теңдеуін құрыңдар. Ол түзу теңдеуі $Ax + By + C = 0$ болсын.

Бұл түзу берілген $6x - 3y + 5 = 0$ түзуге параллель болу үшін $6B - (-3)A = 0$ (*) перпендикуляр болу үшін $6A + (-3)B = 0$ болу керек. A-ға ойдан мән берсек: $A = \pm 1$ (*) дан $6B + 3 \cdot 1 = 0$. Бұдан $B = -\frac{1}{2}$.

Сонымен $x - \frac{1}{2}y + C = 0$. Бұдан $2x - y + C = 0$ берілген түзуге параллель болады. (**) дан $6 \cdot 1 - 3B = 0$ $B = 2$. Сонда $x + 2y + C = 0$ берілген түзуге перпендикуляр болады. Мұндағы C –ның орнына кез-келген нақты санды қоюға болады.

2-мысал. *A(2,1), B(-1,-1), C(3,2)* нүктелер берілген.

Мыналарды анықтаңдар.

1. *AB* түзудің теңдеуін құрыңдар.

Мұны екі нүктесі белгілі түзу теңдеуіне саламыз $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Сонда $\frac{x - 2}{-1 - 2} = \frac{y - 1}{-1 - 1}$. Бұдан $\frac{x - 2}{-3} = \frac{y - 1}{-2}$, $-2x + 4 = -3y + 3$. Бұдан $2x - 3y - 1 = 0$.

2. *BC* түзудің бұрыштық коэффициентті неге тең.

Бұл $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ формула бойынша $k_{BC} = \frac{2 - (-1)}{3 - (-1)} = \frac{3}{4}$, $k_{BC} = \frac{3}{4}$.

3. *AC* түзудің бір бағыттаушы векторын табыңдар.

Ол вектор үшін $\overrightarrow{AC}$ векторды алуға болады. Сонда $\overrightarrow{AC}$ - ның координаттары $\{x_C - x_A, y_C - y_A\}$ болатындықтан $x_C - x_A = 3 - 2 = 1;$ $y_C - y_A = 2 - 1 = 1$. Сонымен $\overrightarrow{AC} = \{1,1\}$.

4. ΔABC - ның ауданын табыңдар.

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-2-2+3+3-4+1) = -\frac{1}{2} \qquad S_\Delta = \left|\frac{1}{2}\right| .$$

5. *АВ* мен *АС* түзулері арасындағы бұрышты табыңдар.

АВ-ның теңдеуі $2x-3y-1=0$. *АС*-ның теңдеуі $\frac{x-2}{3-2}=\frac{y-1}{2-1}$. Бұдан $x-y-1=0$.

Бұл екі түзу арасындағы бұрыш $\cos\varphi = \frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^{\ 2}+B_1^{\ 2}}\sqrt{A_2^{\ 2}+B_2^{\ 2}}}$ формула бойынша $\cos\varphi = \frac{2\cdot 1+(-3)(-1)}{\sqrt{2^2+(-3)^2}\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{2+3}{\sqrt{13}\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{26}} \qquad \varphi = \arccos\frac{5}{\sqrt{26}}$.

6. *АС* түзудің *В* нүктеден қашықтығын табыңдар.

$$d = \left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| = \left|\frac{1\cdot(-1)-1\cdot(-1)-1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\right| = \left|\frac{-1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

Қайталау сұрақтары мен есептер.

1. Фигураның теңдеуі деп нені айтады.
2. Түзудің бұрыштық коэффициенттері деген не, оны табу формулалары қандай?
3. қалай жүргізілген түзудің бұрыштық коэффициентті оң, теріс болады және болмайды.
4. Түзулер арасындағы бұрышты бұрыштық коэффициент арқылы қалай табуға болады.
5. Екі түзудің параллельдік, перпендикулярлық белгілерін бұрыштық коэффициент арқылы өрнектеу.
6. Түзудің берілу тәсілдері қандай?
7. Түзудің теңдеуін құру схемасы қандай?
8. Түзудің теңдеуін құру үшін нелер белгілі болуы керек.
9. Түзудің әртүрлі теңдеулері және олардың айтылуы.
10. Түзудің теңдеуі бойынша оның бағыттаушы векторын, бұрыштық коэффициентін, нормал векторын қалай табуға болады.
11. Түзудің толымсыз теңдеулері. Толымсыз теңдеулері бойынша ол түзудің координата өстеріне қарағанда орналасуын ажырату.
12. Нормал теңдеу, нормалдаушы көбейткіш деген не?
13. Түзулер шоғы және оның теңдеуі.
14. Түзулердің өзара орналаму жағдайлары, олар арасындағы бұрыш, параллель және перпендикуляр болу белгілері қандай?
15. Нүктенің түзуден қашықтығын, параллель түзулердің арақашықтығын қалай табады.
16. Түзудің кесіндіні қиып өту, қимау шарттары қандай?
17. Түзу теңдеуін нормал түрге қалай келтіреді.
18. $(a+2)x+(a^2-9)y+3a^2-8a+5=0$ түзуі *a*-ның қандай мәнінде а) абцисса, б) ордината өсіне параллель болады б) координата басынан өтеді.

19. $x+2y-5=0,\quad 3x-2y+1=0$ түзулердің қиылысу нүктесінен өтетін және а) *A(3,-1)* нүктеден өтетін б) координата басынан өтетін в) *O x* өске параллель болатын г) перпендикуляр болатын түзу теңдеуі қандай болады.

20. $4x+3y+5=0$ түзуіне параллель болатын б) $2x+3y+7=0$ түзуіне перпендикуляр болатын түзу теңдеулерін құрындар.

21. $3x-4y+12=0$ түзу *Ox, Oy* өстерінен қандай кесінділер қияды.

22. $3x-4y-10=0$, $6x-8y+5=0$ түзулер арасының қашықтығын табыңдар.

III тарау. Екінші ретті сызықтар.

Сызық алгебралық сызық делінеді, егерде оның қандайда бір бір аффиндік координаталар жүйесіндегі теңдеуі алгебралық теңдеу, яғни $ax^m y^n$ түрдегі мүшелердің қосындысынан тұратын көпмүшелік болса. Ол көпмүшеліктің дәрежесі, яғни $m+n$ сандарының ең үлкені ол сызықтың ретті делінеді. Сызықтың алгебралық сызық болар-болмасы және оның яғни координаталар жүйесін түрлендіру арқылы алгебралық сызықты алгебралық емес сызыққа айналдыруға, оның ретін өзгертуге болмайды.

Аналитикалық геометрия екінші ретті алгебралық сызықтарды қарастырады.

Қандайда бір аффиндік координата жүйесінде теңдеуі екі дәрежелі алгебралық теңдеу болатын сызықты екінші ретті алгебралық сызық дейді. Екінші ретті алгебралық сызықтың жалпы теңдеуі мынадай болады.

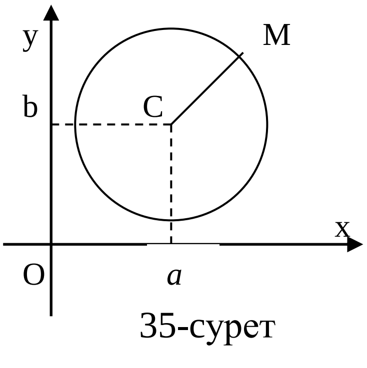
$$Ax^2+By^2+Cxy+Ex+Fy+D=0$$

Бұл тарауда осындай теңдеулермен анықталатын сызықтар. Олардың қасиеттері мен формулаларын анықтау көзделеді.

8. Екінші ретті сызықтардың канондық теңдеулері.

8.1. Шеңбер. Жазықтықта центр деп аталатын оның бір нүктесінен теңдей қашықтықтарда жататын нүктелерінің жиынтығын шеңбер дейді.

Тікбұрышты *Oxy* координаталар жүйесінде *C(a,в)* центрлі. *r* радиусты шеңбердің қарастырайық (35-сурет). Осы шеңбердің теңдеуін құру үшін оның бойынан ағымдық *M(x,y)* нүктесін алып, оның координаталары *(x,y)*-ты берілген параметрлер *a,в,r* –лермен байланыстыратын формуланы анықтау керек.



35-сурет

M нүктені шеңбердің жазықтың қай жерінен алсада *CM=r* теңдік орындалады. Мұны екі нүкте арасын табу формуласың былайша жазуға болады $\sqrt{(x-a)^2+(y-в)^2}=r$. Бұдан $(x-a)^2+(y-в)^2=r^2$ (8-1).

Міне осы өрнек шеңбердің теңдеуі болады. Өйткені оны тек шеңбер бойында жатқан нүктелердің координаталары ғана қанағаттандырады. Нүкте шеңберде жатбаса *CM=r* болмайды не *CM>r* , не *CM<r* болады. Сондықтан (8-1)де ондай нүктелер үшін орындалмайды.

Егер жақшаны ашсақ $x^2+y^2-2ax-2вy+a^2+в^2-r^2=0$ теңдеуі шығады. Бұл 2-дәрежелі теңдеу. Демек шеңбер 2-ретті сызық болады.

Егер шеңбер центрі координаталар басымен беттессін, онда $a=0$, $в=0$ болады да шеңбер теңдеуі мына түрге келеді.

$$x^2+y^2=r^2 \quad (8\text{-}2)$$

Әдетте (8-1)-ді шеңбердің жалпы , (8-2)-ні канондық теңдеуі дейді.

1-мысал. Центрі *C(-3,5)* нүкте болатын, радиусы *r=4* болатын шеңбердің жалпы теңдеуі қандай болады.

Шешуі: (8-1) формула бойынша теңдеу мынадай болады $(x+3)^2+(y-5)^2=4^2$, $x^2+6x+9+y^2-10y+25-16=0,\quad x^2+y^2+6x-10y+18=0$.

2-мысал. $x^2+y^2-10x+12y-3=0$ теңдеумен шеңбер берілген. Мыналарды анықтаңдар:

а) Шеңбердің центрі мен радиусын табыңдар.

Ол үшін шеңбер теңдеуін канондық түрге келтіру керек. ол үшін *x*-тарды бір бөлек, *y*-тарды бір бөлек топтап, оларды толық квадратқа толтыру керек $\left(x^2-10x\right)+\left(y^2+12y\right)=3$. $\left(x^2-2x\cdot5+5^2\right)+\left(y^2+2y\cdot6+6^2\right)=3+5^2+6^2$ $(x-5)^2+(y+6)^2=64$. Демек центр *C(5,-6),* радиус $r=\sqrt{64}=8$.

б) *A(2,7)* нүкте шеңберге қарағанда қалай орналасқан? Анықтау үшін *A* нүкте координталарын шеңбер теңдеуіне қойып тексереміз $(x-5)^2+(y+6)^2=(2-5)^2+(7+6)^2=9+169=178>64$. Демек нүкте шеңберден тыс жатыр.

в) $4x-3y+3=0$ түзу шеңбермен қалай орналасқан. Оны анықтау үшін бұл түзудің шеңбер центрінен қашықтығын анықтайды.

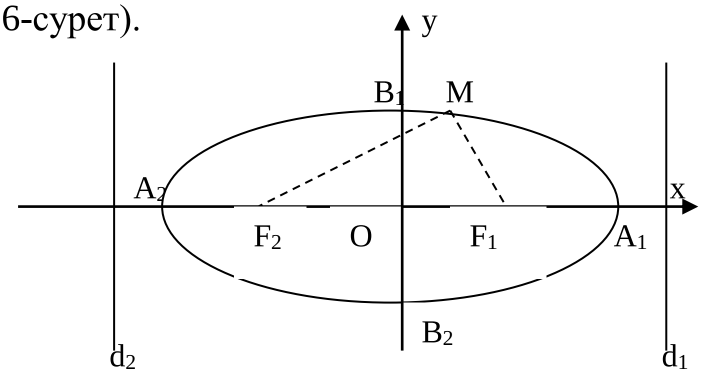
$d=\left|\dfrac{4\cdot5-3\cdot(-6)+2}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}\right|=\left|\dfrac{40}{5}\right|=8$. Бұл радиуске $r=8$ тең болады. Сондықтан түзу шеңберге жанасады. Егер *d<r* болса қиылысар, *d>r* болса қиылыспас еді.

г) Шеңбердің диаметрі неге тең.

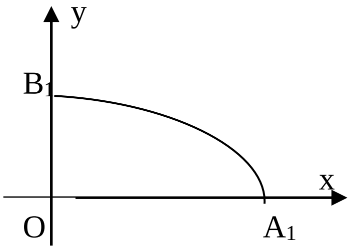
Диаметр *D=2r* болатындықтан шеңбер диаметрі $8\cdot2=16$ - ға тең болады.

8.2. Эллипс. Жазықтықта фокустары деп аталатын екі нүктеден қашықтықтарының қосындысы тұрақты болатын және ол фокустар аралығынан артық болатын жазықтық нүктелерінің жиынын эллипс дейді. Фокустарды $F_1,F_2,$ олар арасын $F_1F_2=2c$ дейік. *M* нүкте эллипс жатса анықтама бойынша F_1M+F_2M тұрақты болу керек, оны *2a* дейік $F_1M+F_2M=2a$ және $2a>2C$ (*1).

1) Осы эллипстін теңдеуін құрайық. Ол үшін тікбұрышты координата жүйесін былайша алайық: Фокустарды басып өтетін түзуді абцисса деп үшін, ал F_1F_2 кесіді ортасын координата жүйесінің бас нүктесі деп алайық (36-сурет).



36-сурет



37-сурет

Бұл жүйеде $F_1(c,0), F_2(-c,0)$ болар еді. *M(x,y)* дейік. Сонда $F_1M=\sqrt{(x-c)^2+(y-c)^2}$, $F_2M=\sqrt{(x+c)^2+(y-c)^2}$ болады. Бұларды (*1) ге қойсақ эллипистің теңдеуін аламыз: $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$ (8-3). Бұдан $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, мұны квадраттасақ $(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$ жақшаны ашып ұқсас мүшелерді біріктірсек $a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$. Теңдіктің екі жағын тағыда квадраттасақ $a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4+2a^2cx+c^2x^2$, $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$. $a>c$ болғандықтан $a^2-c^2=в^2$ (*2) деуге болады. Сонда бұдан

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=1 \quad \text{(8-4) шығады.}$$

Бұл теңдеу эллипстің (8-3) теңдеуінен оны 2 рет квадраттау арқылы алдық. Бұл эллипстін теңдеуі болуы үшін координаталары (8-4)-ті қанағаттандыратын нүкте эллипсте жататының, яғни ол нүктенің фокустан қашықтықтарының қосындысы *2а*-ға тең болатындығын дәлелдеу керек.

Тексерейік $M_1(x_1,y_1)$ нүктенің координаталары (8-4) теңдеуді қанағаттандырсын $\frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{в^2}=1$ болсын. Бұдан $y_1{}^2=в^2\left(1-\frac{x_1{}^2}{a^2}\right)$. Сонда

$$F_1M_1=\sqrt{(x_1-c_1)^2+y_1{}^2}=\sqrt{(x_1-c_1)^2+в^2\left(1-\frac{x_1{}^2}{a^2}\right)}=\sqrt{x_1{}^2-2c_1x_1+c_1{}^2+в^2-\frac{в^2}{a^2}x_1{}^2}=$$

$$=\sqrt{x_1{}^2\left(1-\frac{в^2}{a^2}\right)+c^2+в^2-2cx_1}=\sqrt{\frac{a^2-в^2}{a^2}x_1{}^2+c^2+в^2-2cx_1}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x_1{}^2+a^2-2cx_1}=\sqrt{\left(a-\frac{c}{a}x_1\right)^2}$$

. Ал, $|x_1|\le a,\ c<a$ болатындықтан $\frac{aa-cx_1}{a}>0$ болады. Сондықтан $a-\frac{c}{a}x_1>0$ болады. Демек, $F_1M_1=a-\frac{c}{a}x_1$ болады. Осы сияқты $F_2M_1=a+\frac{c}{a}x_1$ болады.

$F_1M_1 + F_2M_1 = \left(a - \frac{c}{a}x_1\right) + \left(a + \frac{c}{a}x_1\right) = 2a$. Сөйтіп координаталары (8-4) теңдеуді қанағаттандыратын M_1 нүктесі эллипсте жатады екен. Сондықтан (8-4)-те эллипстің теңдеуі болады. Оны эллипстің канондық жай теңдеуі дейді. (8-4) тен $в^2x^2 + a^2y^2 - a^2в^2 = 0$. Бұл 2 дәрежелі теңдеу. Олай болса эллипс екінші ретті сызық болады.

2) Енді эллипстің канондық теңдеуі (8-4)-ті зерттеу арқылы эллипстің формасын, қасиеттерін анықтайық. 1-ден, (8-4) теңдеуге *x*-та, *y*-те квадрат (жұп) дәрежел енген. Сондықтан координаталары *(x,y)* болатын нүкте эллипсте жатса координаталары *(-x,y), (x,-y), (-x,-y)* болатын нүктелерде осы эллипсте жатады. Ал, бұл эллипс абцисса, ордината өстеріне және координата басына қарағанда симметриялы болатын фигура деген сөз. Ол өстерді, яғни *Ox, Oy* өстерін эллипстің өстері, *O* нүктені эллипстің центрі дейді.

2-ден, (8-4) бойынша $|x| \le a,\ |y| \le в$ болады. Мұны былайша $-a \le x \le a,\ -в \le y \le в$ жазуға болады. Демек эллипстің барлық нүктелері центрі *O* нүкте, қабырғалары *2a,2в* болатын тік төртбұрыштың ішіне орналасады. Сондықтан эллипс шектелген фигура болады.

3-ден (8-4)-тен *x=0* болса $y = \pm в,\ y = 0$ болса $x = \pm a$ болады. Демек, эллипс абцисса өсін екі $A_1(a,0),\ A_2(-a,0)$ ордината өсін екі $B_1(0,в),\ B_2(0,-в)$ нүктеде қияды. Бұл нүктелерді эллипстің төбелері дейді. $A_1A_2 = 2a$ эллипстің үлкен өсі, $B_1B_2 = 2в$ кіші өсі, *a* мен *в* үлкен және кіші жарты өсі делінеді.

4-ден, (8-4)-тен $y = \frac{в}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ болғандықтан *x* шама *0*-ден *a*-ға дейін өскенде *y* шама *в*-дан *0*-ге дейін кемиді. Сондықтан эллипстің 1-ширектегі формасы 37-суреттегідей болады. Эллипстің қалған ширектегі бөлігі *x* және *y* өстеріне қарағанда осы сызыққа симметриялы болады. Сондықтан эллипстің толық формасы 36-суреттегідей болады.

3) Эллипстің эксцентриситеті. Эллипстің екі фокус арасынын үлкен өсіне қатынасын оның эксцентриситеті дейді:

$$E = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a};\ E = \frac{c}{a} \quad (8\text{-}5)$$

Эллипс анықтамасына сай *c<a*. Сондықтан эллипс эксцентриситеті 1-ден кем болады: $E = \frac{c}{a} < 1.$ $a^2 - c^2 = в^2$ еді. Бұдан $\frac{a^2}{a^2} - \frac{c^2}{a^2} = \frac{в^2}{a^2},\ 1 - E^2 = \left(\frac{в}{a}\right)^2$.

Сонымен $E = \sqrt{1 - \left(\frac{в}{a}\right)^2}$ және $\frac{в}{a} = \sqrt{1 - E^2}$. Бұдан $E \to 0$, онда $в \to a : E \to 1$, онда $в \to 0$. Демек, эксцентриситет көбейген сайын эллипс жіңішкеріп, сопақтана түседі. Ал, эксцентриситет азайған сайын ол жұмырлана бастайды. *E=0* болғанда *a=в* болып, эллипс шеңберге айналады.

Сөйтіп шеңбер эллипстің дербес түрі болады, оның эксцентриситеті 0-ге тең болады.

4) **Эллипстің фокустық радиустері.** Эллипстің анықтамасы бойынша $F_1M + F_2M = 2a$. Мұндағы $F_1M = r_1$, $F_2M = r_2$ эллипстің M нүктесінің фокустық радиус-векторы делінеді. $r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ еді. Бұларды квадраттап, алсақ $r_2{}^2 - r_1{}^2 = 4cx$, ал $(r_2 + r_1)(r_2 - r_1) = 4cx,\ r_2 + r_1 = 2a$ болғандықтан $r_2 - r_1 = 2\frac{c}{a}x = 2Ex$.

Сонымен $\begin{cases} r_1 + r_2 = 2a \\ r_2 - r_1 = 2Ex \end{cases}$. Бұл жүйеден $\left. \begin{matrix} r_1 = a - Ex \\ r_2 = a + Ex \end{matrix} \right\}$ (8-6).

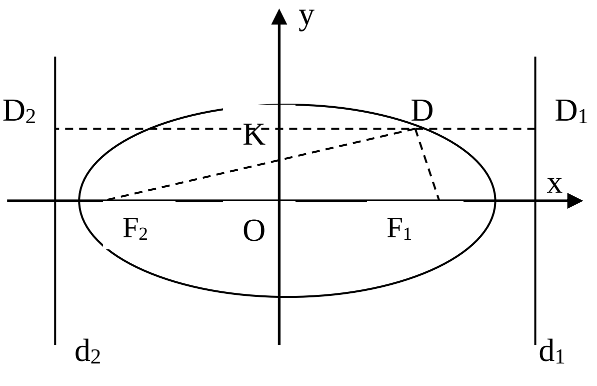
5) **Эллипстің директрисалары.** Эллипстің центрінен $\frac{a}{E}$ қашықтықта, оның фокустарын басып өтпейтін өсіне параллель етіп жүргізілген түзуді эллипстің директрисасы дейді. Оның теңдеуі $x = \frac{a}{E},\ x = -\frac{a}{E}$ (8-7) болады. Эллипс үшін *E<1* болатындықтан $x = \frac{a}{E} > a$ болады. Сондықтан эллипстің директрисасы эллипстің екі жағына, одан тыс орналасады (36-суреттегі d_1, d_2 түзулер).

Теорема. Эллипстің кез-келген нүктесінен фокусқа дейінгі қашықтығының сол фокус жатқан жағындағы директрисаға дейінгі қашықтығына қатынасы тұрақты болады және ол эллипс эксцентриситетіне тең болады. 38-суретте эллипсте жатқан *D* нүктесі берліген. Мақсат $\frac{DF_1}{DD_1} = \frac{DF_2}{DD_2} = E$ болатындығын дәлелдеу. *D* нүктенің координаталары *D(x,y)* болсын. Сонда $DD_1 = KD_1 - KD = \frac{a}{E} - x,\quad D\ {}_1 = r_1 = a - Ex\ \ xx\ {}_2 = DK + KD_2 = x + \frac{a}{E}$, $DF_2 = r_2 = a + Ex$. Сонда

$$\frac{DF_1}{DD_1} = \frac{a - Ex}{\frac{a}{E} - x} = \frac{E\left(\frac{a}{E} - x\right)}{\frac{a}{E} - x} = E; \quad \frac{DF_2}{DD_2} = \frac{a + Ex}{\frac{a}{E} + x} = \frac{E(a + Ex)}{a + Ex} = E$$

Басқа нүктелер үшінде осындай болады.

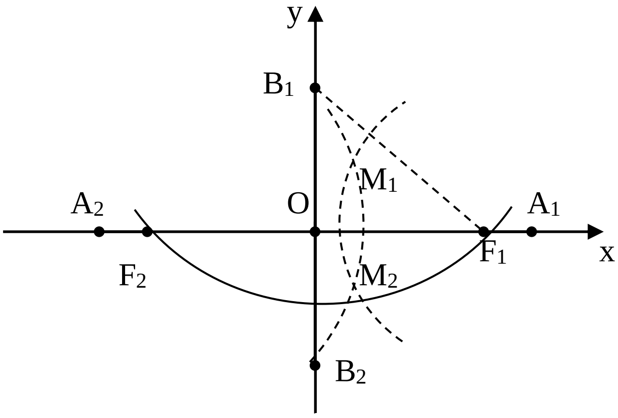
6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{в^2} = 1$ эллипсті салу керек. Салудың бірнеше тәсілдері бар.



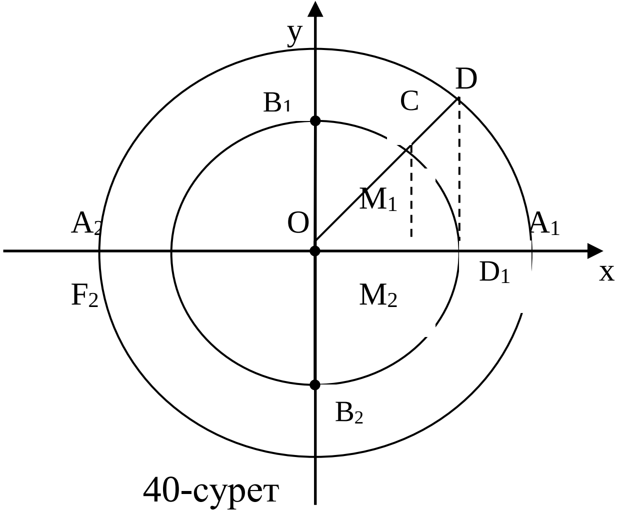
38-сурет

1-тәсіл. Эллипс анықтпмасына сүйеніп салу. Мұнда $Ox \perp Oy$ өстерін жүргізіп $OA_1 = OA_2 = a,\ OO_1 = OB_2 = в$ салып A_1, A_2, B_1, B_2 нүктелерді табады (39-сурет). *B*-ны центр етіп *a* радиуспен *x* өсін қияды. Табылған нүктелер F_1, F_2 фокус нүктелері болады. Өйткені салу бойынша $F_1B_1 + F_2B_1 = 2a$. Одан соң F_1-ді центр етіп кез-келген r_1 радиуспен бір шеңбер, F_2-ні центр етіп $r_2 = 2a - r_1$ радиуспен екінші шеңбер сызады. Олардың қиылысу нүктелері M_1, M_2 эллипс нүктелері болады. Өйткені $M_1F_1 + M_2F_2 = r_1 + 2a - r_1 = 2a$ болады. Осы әдіспен r_1 - ді сәл өзгертіп эллипстің басқа нүктелерін тауып, оларды жататын сызықпен қосады. Сонда іздеген эллипс салынады.

2-тәсіл. $Ox \perp Oy$ өстерін жүргізіп $OD = a,\ OO = в$ радиуспен концентрлі шеңберлер жүргіземіз. *D*-дан *x* өсіне перпендикуляр. *C*-дан параллель жүргізсек, олардың қиылысу нүктесі *M* эллипстің нүктесі болады (40-сурет).



39-сурет



40-сурет

Өйткені оның координаталарын *M(x,y)* десек және $\angle DOA_1 = \varphi$ десек. $y = CC_1 = OC\sin\varphi = b\sin\varphi,\ x = OD_1 = OD\cos\varphi = a\cos\varphi$ болар еді. Бұлардан $\frac{y}{b} = \sin\varphi,\ \frac{x}{a} = \cos\varphi$ (*). Бұларды квадраттап қоссақ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{в^2} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ болып эллипстің теңдеуі шығады. Олай болса *M* эллипсте жатады. Осы әдіспен *N,K* т.б. көптеген нүктелерді тауып жатық сызықпен қоссақ төбелері A_1, A_2, B_1, B_2 өстері $B_1B_2, A_1A_2,$ болатын эллипс шығады. (*) дан $x = a\cos\varphi,\ y = b\sin\varphi$ (8-8).

Бұл теңдеулерде эллипс теңдеуі болады. Мұны эллипстің параметрлік теңдеуі дейді.

3-мысал. Төмендегі мәліметтер бойынша эллипстің теңдеуін құру керек.

а) жарты өстері 4 және 3 болсын

Шешімі: (8-4) бойынша іздеген теңдеу $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} == 1$ болады. $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$.

б) Фокус арасы 8. үлкен жарты өсі 5 болсын.

Мұнда *2с=8, а=5. с=4* ал $b^2=a^2-c^2=25-16=9$. Сонда теңдеу $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, $9x^2+25y^2-225=0$.

в) Үлкен жарты өсі 10, эксцентриситеті 0,8 болсын.

Мұнда *а=10 Е=0,8* ал $c=Ea=0{,}8\cdot 10=8$. $b^2=a^2-c^2=100-64=36$. Сондықтан $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$, $36x^2+100y^2-3600=0$, $9x^2+25y^2-900=0$.

г) Кіші өсі 6, эксцентриситеті $E=\sqrt{2}/2$ болсын.

Мұнда *2в=6*, $E=\sqrt{2}/2$. Демек *в=3*, $c=Ea=a\sqrt{2}/2$. Сонда $a^2-\text{в}^2=c^2$ $a^2-9=\frac{1}{2}a^2$ $\frac{1}{2}a^2=9$ $a^2=18$. Демек теңдеу $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$, $x^2+2y^2-18=0$.

д) Кіші өсі 8, директрисасы $x=\pm 8$ болса.

Мұнда *2в=8*, директриса $\frac{a}{E}=\pm 8,$ $\frac{a}{\frac{c}{a}}=\pm 8,$ $\frac{a^2}{c}=\pm 8$. Ал, $a^2-c^2=\text{в}^2$

$8c-c^2=16,$ $c^2-8c+16=0$. Бұдан $c=4\pm\sqrt{16-16}=4$. Сонда $a^2=8\cdot 4=32$.

Сонымен $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{16}=1$, $16x^2+32y^2-512=0$ немесе $x^2+2y^2-32=0$.

4-мысал. $25x^2+169y^2-4225=0$ эллипстің теңдеуі берілген. Мыналарды табыңдар:

а) эллипстің жарты өстерін табу керек.

4225 ке бөлеміз $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$. Демек $a=\sqrt{169}=13,$ $\text{в}=\sqrt{25}=5$.

б) Фокустың координаталарын табу керек.

$c=\sqrt{a^2-\text{в}^2}=\sqrt{169+25}=\sqrt{144}=12$. Демек $F_1(12{,}0),$ $F_2(-12{,}0)$.

в) эллипстің эксцентриситетін анықтаңдар.

$$E=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-\text{в}^2}}{a}=\frac{\sqrt{169-25}}{13}=\frac{12}{13}$$

г) Директрисасының теңдеуін анықтау керек.

Директриса теңдеуі $x=\pm\frac{a}{E}=\pm\frac{13}{\frac{12}{13}}=\pm\frac{169}{12}$ немесе $12x\pm 169=0$.

д) *М(0,6)* нүкте эллипске қарағанда қалай орналасқан?

Тексереміз $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=\frac{0}{169}+\frac{36}{25}=\frac{36}{25}>1$. Демек *М(0,6)* нүкте эллипстен тыс жатады.

е) *Д(0,5)* нүктенің фокустық радиустарын табу керек.

$$r_1=a-Ex=13-\frac{12}{13}\cdot 0=13; \quad r_2=a+Ex=13+\frac{12}{13}\cdot 5=\frac{169+60}{13}=\frac{229}{13}.$$

8.3. Гипербола. Жазықтықта фокустар деп аталатын екі нүктеден қашықтықтарының айырымы тұрақты болатын және фокус аралығынан кем болатын жазықтық нүктелерінің жиынын гипербола дейді. Фокустарды

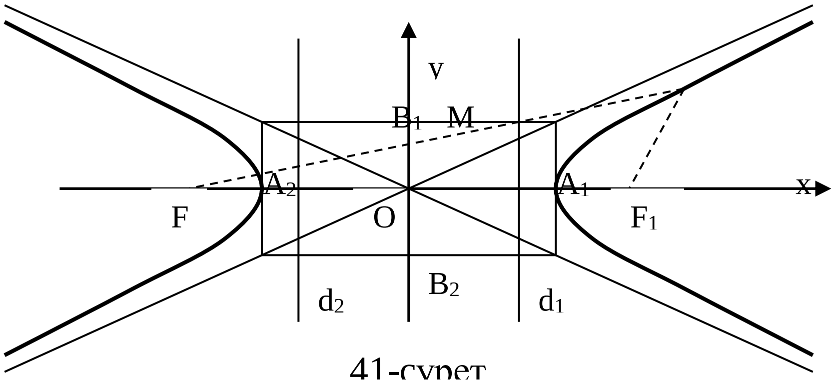
F_1, F_2, болады олар аралығын $F_1, F_2 = 2c$ дейік. M нүкте эллипсте жатса анықтама бойынша $F_2M - F_1M$ тұрақты болу керек, оны *2a* дейік. Сонда $F_2M - F_1M = \pm 2a$ және $2a < 2c$ (*3) болады.

1) Гипербола теңдеуі. Гипербола теңдеуін құру үшін тікбұрышты координата жүйесінің абцисса өсі үшін F_1F_2 түзуді, ал F_1F_2 кесіндінің ортасын координата басы етіп алайық (41-сурет). Бұл координата жүйесінде фокустар $F_1(c,0), F_2(-c,0)$ болады. *M(x,y)* гиперболаның дейік. Сонда $F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, $F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ болады. Бұларды (*3) ке қойсақ гипербола теңдеуін аламыз:

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$ (8-9).

Мұны ықшамдау үшін екі жағын квадраттасақ $(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$. Мұның ұқсас мүшелерін біріктіріп тағы да квадраттасақ $(c^2 - a^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$ Гипербола үшін $a<c$ болғандықтан $c^2 > a^2$ болады. $c^2 - a^2 = в^2$ (*4) дейік, сонда

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{в^2} = 1 \quad (8\text{-}10).$$



41-сурет

Гипербола теңдеуі (8-9) теңдеуінен оны 2 рет квадраттау нәтижесінде шыққан (8-10) теңдеуін де гипербола теңдеуі екеніне көз жеткізу үшін (8-10)-ды координаталары қанағаттандыратын нүктенің гиперболалардың жататының, яғни ол нүктенің фокустан қашықтықтарының айырымы *2a*-ға тең болатынын дәлелдеу керек. $M_1(x_1, y_1)$ нүкте (8-10) теңдеуді қанағаттандырсын, яғни $\frac{x_1^{\,2}}{a^2} - \frac{y_1^{\,2}}{в^2} = 1$ болсын. Бұдан $y_1^{\,2} = в^2\left(\frac{x_1^{\,2}}{a^2} - 1\right)$. Сонда

$$F_1M_1 = \sqrt{(x_1-c)^2 + y_1^{\,2}} = \sqrt{(x_1-c)^2 + в^2\left(\frac{x_1^{\,2}}{a^2} - 1\right)} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x_1^{\,2} - 2cx_1 + a^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x_1 - a\right)^2}.$$

$$F_2M_1 = \sqrt{(x_1+c)^2 + y_1^{\,2}} = \sqrt{(x_1+c)^2 + в^2\left(\frac{x_1^{\,2}}{a^2} - 1\right)} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x_1^{\,2} + 2cx_1 + a^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x_1 + a\right)^2}.$$ Ал,

(8-10)-нан $|x| \geq a$ болатыны шығады. Гипербола анықтамасы бойынша $c>a$. Осыларды ескерсек $\frac{c}{a}x_1 - a > 0$, $\frac{c}{a}x_1 + a > 0$. Сондықтан $F_1M_1 = \frac{c}{a}x_1 - a$,

$F_2M_1=\frac{c}{a}x_1+a$ болады да $F_2M_1-F_1M_1=\left(\frac{c}{a}x_1+a\right)-\left(\frac{c}{a}x_1-a\right)=2a$. Ал, бұлн M_1 нүкте шынында да гиперболада жатады деген сөз. Сондықтан (8-10) теңдеуде гипербола теңдеуі болады. Оны гиперболаның канондық жай теңдеуі дейді. Ол екінші дәрежелі теңдеу. Демек гипербола екінші ретті сызық болады.

2) Гипербола формасы мен қасиеттері. Гиперболаның канондық теңдеуін зерттеу арқылы оның кейбір қасиеттерін және формасын айқындауға болады.

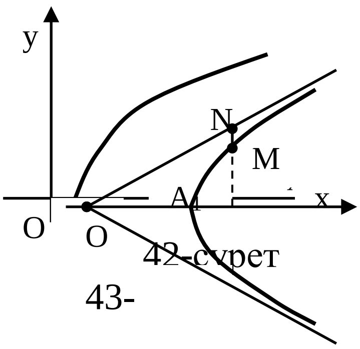
(8-10) теңдеуді зерттейік.

а) (8-10) теңдеуге *x, y* тек жұп дәрежеде енген. Сондықтан координаталары *(x,y)* болатын нүкте гиперболада жатса, онда координаталары *(-x,y), (x,-y), (-x,-y)* болатын нүктелерде сол гиперболада жатады. Демек, гипербола абцисса, ордината өстері және координата басына қарағанда симметриялы орналасқан фигура болады. Ол *x, y* өстерін гипербола өстері, *O* нүктені гипербола центрі дейді.

б)(8-10) теңдеуде $y=0$ болса $x=\pm a$ болып шығады. Ал, $x=0$ болса $y=\sqrt{-в^2}$ болады. Сондықтан гипербола абцисса өсін екі $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$ нүктеде қиылысады. Ал, ордината өсімен қиылыспайды. A_1A_2 нүктелерді гипербола төбелері дейді. Гиперболамен қиылысатын *x* өсін оның нақты өсі, гиперболамен қиылыспайтын *y* өсін оның жорамал өсі дейді.

в) (8-10) теңдеуден $\frac{x^2}{a^2}\geq 1$ болу керектігі шығады. Бұдан $|x|\geq a$. Демек, *x=-a, x=a* болатын жолақта гиперболаның нүктелері болмайды. Гипербола *x=a* бтүзуінің оң жағында, *x=-a* түзуінің сол жағында орналасады. Демек, гипербола екі бөліктен тұрады. Оны гиперболаның оң және сол тармақтары дейді.

г) (8-10)-нан $y=\pm\frac{в}{a}\sqrt{x^2-a^2}$. Бұдан *x* айнымалы *a* – дан ∞ - ге дейін өссе *y* айнымалы *0* ден ∞ - ге дейін өсетіні шығады. Сонымен гипербола екі тармақтан тұратын шектелмеген фигура болады. Сөйтіп гиперболаның бірінші ширектегі формасы 42-суреттегідей болады. Гиперболаның қалған ширектегі бөліктері. Осы сызыққа *Ox, Oy* өстеріне қарағанда симметриялы болады. Сондықтан оның толық формасы 41-суреттегідей болады.



42-сурет

43-

3) Гипербола эксцентриситеті. Гиперболаның фокустарының аралығының $F_1F_2=2c$ оның төбелері $A_1A_2=2a$ аралығына қатынасын гиперболаның эксцентриситеті дейді:

$$E=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a};\; E=\frac{c}{a} \quad (8\text{-}11)$$

Гипербола анықтамасында *2c>2a* болатыны айтылған. Сондықтан гипербола эксцентриситеті 1-ден үлкен, $E=\frac{c}{a}>1.$ болады. Эксцентриситет гипербола формасын сипаттайды. $c^2=a^2+в^2,\; \frac{c^2}{a^2}=1+\frac{в^2}{a^2},\; E^2=1+\left(\frac{в}{a}\right)^2,$ $E=\sqrt{1+\left(\frac{в}{a}\right)^2}$ $\frac{в}{a}=\sqrt{E^2-1}$ болатындықтан эксцентриситет артқан сайын гипербола кеңи береді, эксцентриситет азайған сайын гипербола тарылады.

4) Гипербола асимптоталар. *x,y* –ті оң деп гиперболаны шешсек $y=\frac{в}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ болады. Мұны центрден өтетін $y=\frac{в}{a}x$ түзуімен салыстырайық. Олардың бір ғана абциссаға сай келетін ординаталарын y_1, y_2 дейік. *М*-ның ординатасы y_1, *N* – нің ординатасы y_2 болсын (43-сурет). Сонда

$$MN=y_2-y_1=\frac{в}{a}x-\frac{в}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{в}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)=\frac{в}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}=$$

$$\frac{в\left(x^2-x^2+a^2\right)}{a\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)}=\frac{a^2в}{a\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)}=\frac{aв}{x+\sqrt{x^2+a^2}}$$

Бұдан *x* көбейсе *MN* азаяды екен, яғни нүкте координата басынан қашықтаған сайын $y=\frac{в}{a}x$ түзуі гипербола тармағына жақындай түседі екен. Бірақ олар беттеспейді, себебі қатынас *0*-ге айналмайды симметрия заңына сай үшінші ширектерде де сүйтеді. Ал, екінші және төртінші ширекте $y=-\frac{в}{a}x$ түзуі мен гипербола жақындайды.

Гипербола центрінен өтетін және *x* артқан сайын (8-10) гипербола тармақтарына жақындай түсетін, бірақ онымен беттеспейтін

$$y=\frac{в}{a}x\,,\; y=-\frac{в}{a}x \quad (8\text{-}12)$$

Түзулерді гиперболаның асимптоталары дейді.

Бұл асимптоталардың бұрыштық коэффициенттері $k_1=\frac{в}{a}$, $k_2=-\frac{в}{a}$ болады. Егер центрі *О* нүкте болатын қабырғалары *2а, 2в* болатын тіктөртбұрыш салсақ, оның диагоналы центрден өтер еді және бұрыштық коэффиценті $k=\frac{в}{a}$, $k=-\frac{в}{a}$ болар еді. Сондықтан ол диагоналдар асимтоталармен беттеседі. Сөйтіп гипербола асимптоталары қабырғалары *2а, 2в* болатын центрі гипербола центрі болатын тіктөртбұрыштың диагоналдары болады екен. Гиперболаны жазықтықта салғанда осы тіктөрбұрышты салып, оның диагоналдарын жүргізіп, содан кейін гиперболаны салған жөн болады.

5) Тең қабырғалы гипербола. Егер гиперболада оның жарты өстері өзара тең болса *а=в* оны тең қабырғалы (тең бүйірлі) гипербола дейді. Оның теңдеуі $x^2 - y^2 = a^2$ (8-13) болады. Мұның асимптоталары $y = \pm x$ болады. Бұрыштық коэффициенттері $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ болады. Сондықтан асимптоталары өзара перпендикуляр болады және координаттық бұрыштардың биссектрисалары болады.

6) Түйіндес гипербола. Теңдеулері $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{в^2} = 1$ және $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{в^2} = -1$ болатын гиперболаларды өзара түйіндес дейді. Алғашқыда нақты өсі *x* болса, соңғы да нақты өсі *y* болады.

Олардың суреттері, сәйкесінше 44-*а,б* суреттегідей болады.

а)

ә)

43-сурет

7) **Гиперболаның фокустық радиустері.** Гиперболаның фокустық радиустері гиперболаның *M* нүктесі мен фокус аралықтары $F_1M = r_1$, $F_2M = r_2$ *M* нүктенің фокустық радиустері делінеді. *M* нүкте оң тармақта жатса онда $MF_2 > MF_1$ болады да $MF_2 - MF_1 = r_2 - r_1 = 2a$ болады, ал М сол жақтағы тармақта жатса $r_2 - r_1 = -2a$ болады. $r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ болатындықтан $r_2^{\,2} - r_1^{\,2} = 4cx$, немесе $(r_2 + r_1)(r_2 - r_1) = 4cx,$ $(\ r_2 + r_1\ )2a = 4cx$ болып $r_2 + r_1 = 2\frac{c}{a}x = 2Ex$ болады. Ал, сол тармақ үшін $r_1 + r_2 = -2Ex$ болады.

Сонымен оң тармақ үшін $\begin{cases} r_1 + r_2 = 2Ex \\ r_2 - r_1 = 2a \end{cases}$. Бұдан $\left. \begin{matrix} r_1 = -a + Ex \\ r_2 = a + Ex \end{matrix} \right\}$ (8-14 *а*).

Сол тармақ үшін $\begin{cases} r_1 + r_2 = -2Ex \\ r_2 - r_1 = -2a \end{cases}$. Бұдан $\left. \begin{matrix} r_1 = a - Ex \\ r_2 = -a - Ex \end{matrix} \right\}$ (8-14 *б*).

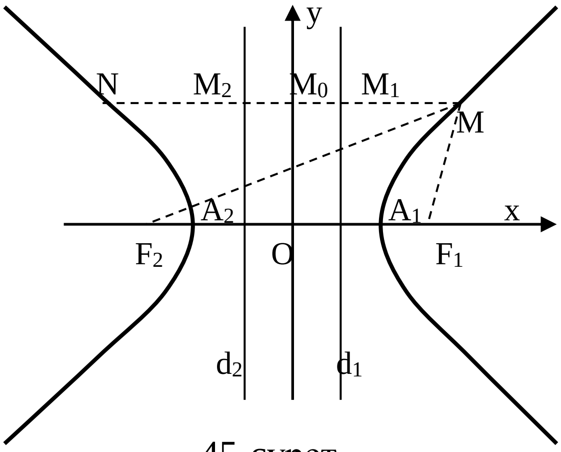
5) **Гипербола директрисасы.** Гипербола центрінен $\frac{a}{E}$ қашықтықта, фокустері жатпайтын өске параллель етіп жүргізілген түзуді гиперболаның директрисалары дейді. Оның теңдеуі $x = \frac{a}{E}$, $x = -\frac{a}{E}$ (8-15) болады. Гипербола үшін *E>1* болатындықтан $\frac{a}{E} < a$ болады. Сондықтан гипербол

директрисалары гипербола төбелерінің арасына орналасады (41-суреттегі d_1, d_2 түзулер).

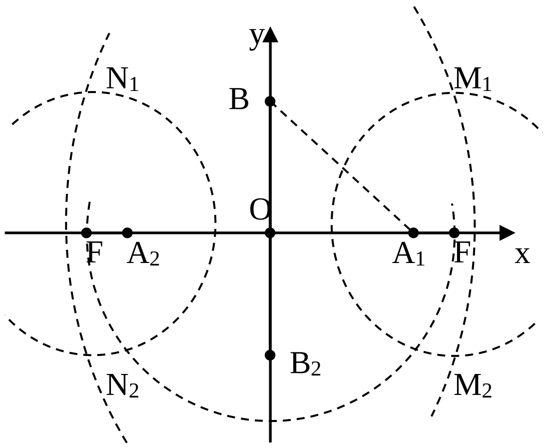
Теорема. Гиперболаның кез-келген нүктесінен фокусқа дейінгі қашықтығының сол фокус жатқан жағындағы директрисаға дейінгі қашықтығына қатынасы тұрақты болады және ол сол гипербола эксцентриситетіне тең болады (45-сурет) *M* нүкте координаталары *(x,y)* болсын. Сонда $\frac{MF_1}{MM_1}=\frac{-a+Ex}{x-\frac{a}{E}}=\frac{E(Ex-a)}{Ex-a}=E;\quad \frac{MF_2}{MM_2}=\frac{a+Ex}{x+\frac{a}{E}}=\frac{E(a+Ex)}{a+Ex}=E$

Егер нүкте сол жақ тармақта жатса. Мысалы, *N* нүктесі болсын. Мұнда *N(-x,y)* болады. $\frac{NF_1}{NM_1}=\frac{a-Ex}{-x+\frac{a}{E}}=\frac{E(a-Ex)}{-Ex+a}=E;\quad \frac{NF_2}{NM_2}=\frac{-a-Ex}{-x-\frac{a}{E}}=\frac{E(-a-Ex)}{-Ex-a}=E$

теорема дәлелденді.



45-сурет



46-сурет

9) Гиперболаны салу. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{в^2}=1$ гиперболаны салу керек болсын. Өзара перпендикуляр түзу (не *Ox, Oy* өстерін) жүргізіп $OA_1=OA_2=a,$ *OB₁=OB₂=b* өлшеп саламыз (46-сурет) $c=\sqrt{a^2+в^2}$ радиуспен *O* нүктені центр етіп шеңбер жүргізу арқылы F_1, F_2 нүктені табамыз.

F_1-ді центр етіп кез-келген r_1 радиуспен және F_2-ні центр етіп $r_2=2a+r_1$ екі шеңбер жүргіземіз. Олардың қиылысу нүктелері M_1, M_2 гиперболада жатады. Себебі $M_1F_2-M_1F_1=r_1+2a-r_1=2a$ болады. r_1 - ді сәл өзгерту арқылы бірнеше нүкте тауып, оларды жатық сызықпен қосса гипербола салынады. Дәл осы әдіспен $F_2(r_1),\ F_2(2a+r_1)$ шеңберлер сызып N_1, N_2 нүктелерді тауып гиперболаның сол жақ тармағын салуға болады.

5-мысал. Мына жағдайлардағы гипербола теңдеуін құрыңдар.

а) Жарты өстері 5 және 4 берілсе.

Шешімі: іздеген теңдеу $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$, $4x^2-5y^2-20=0$ болады.

б) Төбелер арасы 8, фокустар арасы 10 болса.

Мұнда *2с=10,* $A_1A_2=2a=8$. Сондықтан *а=4, с=5* $в=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{25-16}=3$ Сонда гипербола теңдеуі $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, $9x^2-16y^2-144=0$.

в) Нақты жарты өсі 5 болатын, төбесі центр мен фокус ортасында жататын болса.

Мұнда *а=5 А* нүкте *OF* тың ортасы. Сонда $OF=5\cdot 2=10$ болады. Демек $b^2=a^2-c^2=100-25=75$. Сонда теңдеу $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{75}=1$, $3x^2-y^2-75=0$.

г) Гипербола *M(9,-4)* нүктеден өтеді және нақты өсі 6 болса.

Демек, *2а=6,а=3.* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{в^2}=1$, $\frac{81}{9}-\frac{16}{в^2}=1$, $8=\frac{16}{в^2}$, $в^2=2$.

Демек теңдеу $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{2}=1$, $2x^2-9y^2-18=0$.

д) Гипербола $E_1(-5,2)$, $E_2\left(2\sqrt{5},\sqrt{2}\right)$ нүктелерден өтеді.

$\frac{25}{a^2}-\frac{4}{в^2}=1$, $\frac{20}{a^2}-\frac{2}{в^2}=1$, $-\begin{cases}\frac{25}{a^2}-\frac{4}{в^2}=1,\\ \frac{40}{a^2}-\frac{4}{в^2}=2\end{cases}$ $-\frac{15}{a^2}=-1$, $a^2=15$. Сонда $\frac{25}{15}-\frac{4}{в^2}=1$, $\frac{4}{в^2}=\frac{25}{15}-1=\frac{10}{15}$, $в^2=\frac{4\cdot 15}{10}=6$. Демек теңдеу $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1$, $2x^2-5y^2-30=0$.

е) Асимптоты $y=\pm 1$ болатын және $M\left(12,3\sqrt{3}\right)$ нүктеден өтетін.

Мұнда $\frac{в}{a}=\frac{1}{2}$; $\frac{144}{a^2}-\frac{27}{в^2}=1$, екеуінің

$\frac{144}{4в^2}-\frac{27}{в^2}=1$, $в^2=\frac{144}{4}-27=36-27=9$, $a^2=2в^2=18$. Сонда теңдеу $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{9}=1$, $x^2-2y^2-18=0$.

6-мысал. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ гипербола берілген. Мыналарды анықтау керек.

а) Гиперболаның жарты өстері неге тең

Мұнда $a^2=9$, $в^2=16$. Сондықтан $a=3$, $в=4$.

б) Гипербола фокустарының координаталары неге тең

$c=\sqrt{a^2-в^2}=\sqrt{9+16}=5$. Сондықтан $F_1(5,0)$, $F_2(-5,0)$.

в) Гиперболаның эксцентриситеті неге тең

$$E=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-в^2}}{a}=\frac{5}{3}$$

г) Асимтотаның теңдеуі қандай болады.

$y=\pm\frac{в}{a}x$ бойынша $y=\pm\frac{4}{3}x$.

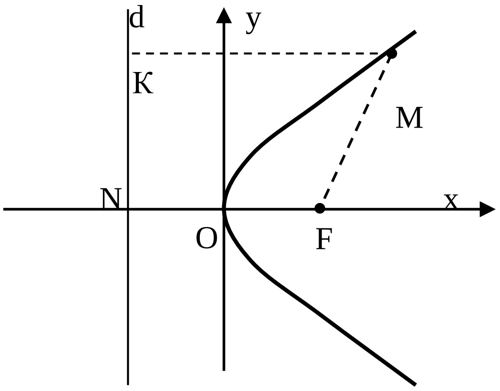
д) Директриса теңдеуі қандай болады.

$x=\pm\frac{a}{E}$ еді. $x=\pm\frac{3}{\frac{5}{3}}=\pm\frac{9}{5}$. Сонымен $5x\pm 9=0$.

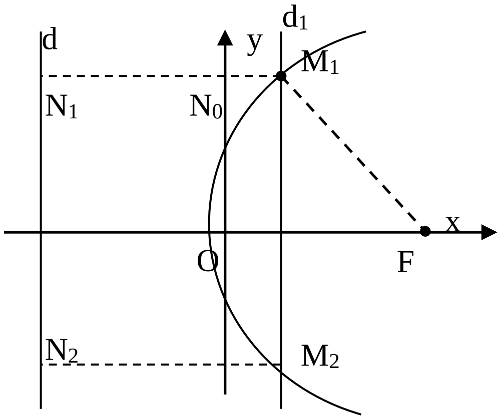
е) Бұл гиперболаға түйіндес гипербола теңдеі қандай болады.

Оның теңдеуі $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{в^2}=-1$бойынша $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$, $16x^2-9y^2+144=0$.

8.4. Парабола. Жазықтықта фокус деп аталатын бір нүкте мен директриса деп аталатын бір түзуден теңдей қашықтықта жататын нүктелер жиынын парабола дейді. *F* нүкте және *d* түзуі (директриса) берілсін. Парабола теңдеуін құру үшін *F*-тен *d*-ға жүргізілген перпендикуляр түзуді абцисса өсі деп, ал директриса мен фокус арасының қақ ортасы *O* нүктені координата басы деп алайық (47-сурет).



47-сурет



48-сурет

Фокус пен директрса арасы *p* болсын. *M(x,y)* нүкте парабола нүктесі болсын. Алынған координата жүйесінде $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, ал одан директрисаға жүргізілген перпендикулярдың табаны $N\left(-\frac{p}{2},0\right)$ болар еді.

Парабола анықтамасы бойынша *MF=MK* (*) болуы керек. $K\left(-\frac{p}{2},y\right)$ болады. Себебі, $KN\perp OX$, $MK\ \backslash\backslash OX$. Сонда $\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}$

$MF=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+(y-0)^2}$, $MM=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}$ болар еді де $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}$ болу керек. Бұдан $x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$ немесе

$$y^2=2px \quad (8\text{-}16).$$

Мұны параболаның канондық теңдеуі дейді, *p*-ны парабола параметрі дейді.

Теңдеуді зерттейік:

1-ден, теңдеуге *x* бір, *y* екі (жұп) дәрежеде енген. Сондықтан *(x,y)* нүкте параболада жатса *(x,-y)* нүктеде сол параболада жатады. Демек парабола *Ox* өсіне симметриялы болып орналасатын фигура болады. Ол *Ox* (абцисса) өсін параболаның өсі дейді.

2-ден, (8-16) да *x=0* болса, *y=0* болады. Демек координата жүйесінің бас нүктесі *O(0,0)* параболада жатады. Ол нүктені параболаның төбесі дейді.

3-ден, (8-16) дан $x = \frac{y^2}{2p}$. Сондықтан *p* оң сан болса $x \geq 0$ болады. Демек, *p>0* болған кезде параболаның барлық нүктелері ордината өсінің оң жағында (яғни 1 және 4 ширектерде) жатады.

4-ден, (8-16) бойынша *x* айнымалы *0* ден ∞ ге дейін өскенде *y*-те *0* ден ∞ ге дейін өседі, яғни парабола шектелмеген фигура болады және парабола формасы 47-суреттегідей болады.

Парабола теңдеуіндегі *p*-ны парабола параметрі дейтін болдық. Ол парабола формасын сипаттайды: *p*-артқан сайын *y* көбейеді де парабола кеңи береді.

Эллипстің, гиперболаның кез-келген нүктесінен оның фокусқа дейінгі қашықтығының директрисаға дейінгі қашықтығына қатынасы тұрақты болатыны және оның эксцентриситетке тең болатыны дәлелденеді. Параболаның нүктесінен фокусқа дейінгі және директрисаға дейінгі қашықтықтар тең болатындықтан олардың қатынастарыда тұрақты болады және ол 1-ге тең болады. Сондықтан параболаның эксцентриситеті *E=1* болады. Парабола директрисасының теңдеуі $x = -\frac{p}{2}, \quad x + \frac{p}{2} = 0$ (8-17) болады.

Параболаны салу.

$y^2 = 2px$ параболаны салу үшін *Ox, Oy* өстерін жүргізіп координата басынан $\frac{p}{2}$ қашықтықта $x = -\frac{p}{2}$ түзуін және $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ нүктесін салады (48-сурет). Директриса *d* түзуінен кез-келген r_1 қашықтықта d_1 түзуін *d* – ға параллель етіп салады, *F* нүктені центр етіп r_1 радиуспен шеңбер сызады. Ол d_1 мен M_1, M_2 нүктеде қиылыссын. Сонда олар параболаның нүктелері болады. Өйткені $M_1F = M_1N_1,\ M_2F = M_2N_2$. Енді r_1 ді өзгертіп осы жолмен M_3, M_4 нүктелерді табады. Осылайша r_1, r_2 - лерді өзгертіп параболаның бірнеше нүктелерін тауып, оларды жатық сызықпен қосса парабола салынып шығады. Оның төбесі *O* болады. Фокустық радиусы дейді. 48-суретте $FM_1 = M_1N_0 + N_0N_1 = x_1 + \frac{p}{2}$ болады, бір кез-келген нүкте үшінде дұрыс. Сонда *M(x,y)* нүктенің фокустық радиусы мына формуламен анықталады

$$r = x + \frac{p}{2} \quad (8\text{-}18).$$

7-мысал. Төмендегі жағдайларда парабола теңдеуі қандай болады.

а) Парабола *y* өсіне симетриялы және фокусы $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$ болса.

Мұнда *x* пен *y* алмасады да $x^2 = 2py$ болады. Мұнда да парабола төбесі *O* нүктеде жатуы керек.

б) Фокус пен парабола төбесінің арасы $\frac{p}{2}$ ге тең болады. Сондықтан $\frac{p}{2} = 5,\ p = 10$. Сонда теңдеу $y^2 = 20x$.

в) Парабола *M(1,-4)* нүктеден өтетін болса.

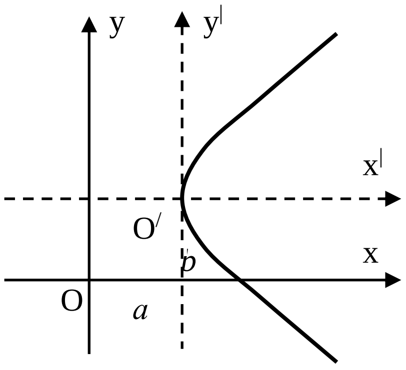
Бұл кезде *M* нүкте парабола теңдеуі $y^2 = 2px$ ты қанағаттандыруы керек: $(-4)^2 = 2p \cdot 1$. Бұдан $p = 8$. Сонда теңдеу $y^2 = 16x$.

г) Парабола координата бойынан өтсе және *y* өсіне симметриялы болса, фокусы *F(0,3)* болса.

Бұл кезде парабола теңдеуі $x^2 = 2py$ болады және $\frac{p}{2} = 3$ болғандықтан $p = 6$ болады. Сонда $x^2 = 12y$.

д) Төбесі *A(a,в)* нүкте, параметрі *p* болатын, симметрия өсі *Ox* өсімен бағыттас болатын парабола теңдеуі қандай болады.

Шешуі: $y^2 = 2px$ парабола жатқан координата жүйесінің төбесі *O* нүктеден *A(a,в)* нүктеге параллель көшірілген. Сонда жаңа координата жүйесі $O'x'y'$ болсын (49-сурет). Жаңа жүйеде парабола теңдеуі $y'^2 = 2px'$ болады. Ал, координатаны түрлендіру формуласы $x = x' + a,\ y = y^{э} + в$. Бұдан $x = x' - a,\ y = y^{э} - в$. Орнына қойсақ $(y - в)^2 = 2p(x - a)$. Іздеген теңдеу болады. Егер *x* өсі мен x' өсі бір-біріне кері бағытталса теңдеу $(y - в)^2 = -2p(x - a)$ болады.



49-сурет

8-мысал. $y^2 = 24x$ параболасы берілген. Мыналарды анықтаңдар:

а) Параболаны параметрін табыңдар. Парабола теңдеуі $y^2 = 2px$ болатындықтан $2p = 2y,\ p = 12$ болады.

б) Парабола фокусының координаталары неге тең.

Фокус координаталары $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ еді. Демек *F(6,0)*.

в) Парабола директрисасының теңдеуі қандай болады.

Директриса теңдеуі $x = -\frac{p}{2}$ еді. Сонда $x = -6,\ x + 6 = 0$.

г) Парабола төбесінің координаталары неге тең.

Теңдеу $y^2 = 2px$ болғанда парабола төбесі координата басымен беттеседі. Демек *A(0,0)* болады.

3) $M\left(1,2\sqrt{6}\right)$ нүктенің фокустық радиусы неге тең.

Фокустық радиус $r = x + \frac{p}{2}$ болатыны. Демек $r = 1 + 6 = 7$.

Ескетру. Шеңбер, эллипс, гипербола, параболаны төртеуінде дөңгелек конусты жазықтық пен қию арқылы алуға болады. Егер жазықтық конус табанына параллель болса қимада шеңбер, параллель болмай барлық жасаушыларын қиатын болса қимада эллипс шығады. Егер жазықтық конустың тең бір жасаушысына параллель болса қимада парабола, ал екі жасаушысына параллель болса қимада гипербола шығады. Сондықтан шеңбер, эллипс, гипербола, параболаны конустық қималары депте атайды.

8.5. Конустық қиманың жанамалары. Сызықты кемінде екі нүктеде қиатын түзуді қиюшы, ал беттескен екі нүктеде қиятын түзуді жанама дейді. Математикалық талдау пәнінде $y = f(x)$ сызығына оның $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінен жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті $y = f(x)$ - дан x арқылы алынған туындысының $M_0(x_0, y_0)$ нүктедегі мәнінде тең болатындығы дәлелденеді.

$$k = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{M_0} = \frac{dy_0}{dx_0} \quad \text{(8-19).}$$

Сонда сызыққа оның $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінің жүргізілген жанама теңдеуі $y - y_0 = \frac{dy_0}{dx_0}(x - x_0)$ (8-20) болады.

Осы формулаларды пайдаланып конустық қималардың олардың $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінен жүргізілген жанамаларының теңдеулерін қорытып шығарайық.

а) Шеңбер $x^2 + y^2 = r^2$ (8-2) теңдеумен берілсіг. Туынды алсақ $2xdx + 2ydy = 0,\ \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. Бұрыштық коэффициент $k = -\frac{x_0}{y_0}$ (8-21). Сонда жанама теңдеуі $y - y_0 = -\frac{y_0}{x_0}(x - x_0)$ болады. Бұдан $y_0 y - y_0{}^2 = -x_0 x + x_0{}^2$, . Сонымен шеңбер жанамасының теңдеуі $x_0 x + y_0 y = r^2$ (8-22*а*). егер шеңбер нормал теңдеумен (8-1) түрде берілсе, онда жанама теңдеуі $(x - a)(x_0 - a) + (y - в)(y_0 - в) = r^2$ (8-22*б*) болады.

б) Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{в^2} = 1$ теңдеумен берілсін. Туынды алсақ $\frac{2xdx}{a^2} + \frac{2ydy}{в^2} = 0$. Бұдан $\frac{dy}{dx} = -\frac{в^2 x}{a^2 y}$. Сонда эллипстің жанамасының бұрыштық коэффициенті $k = -\frac{в^2 x_0}{a^2 y_0}$ (8-23). Сонда жанама теңдеуі $y - y_0 = -\frac{в^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0)$

$a^2y_0y-a^2y_0^{\ 2}=-в^2x_0x+в^2x_0^{\ 2},\ в^2x_0x+a^2y_0y=в^2x_0^{\ 2}+a^2y_0^{\ 2}\backslash :a^2в^2$. Бұдан $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{в^2}=\frac{x_0^{\ 2}}{a^2}+\frac{y_0^{\ 2}}{в^2}=1$. Сонымен жанама $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{в^2}=1$ (8-24).

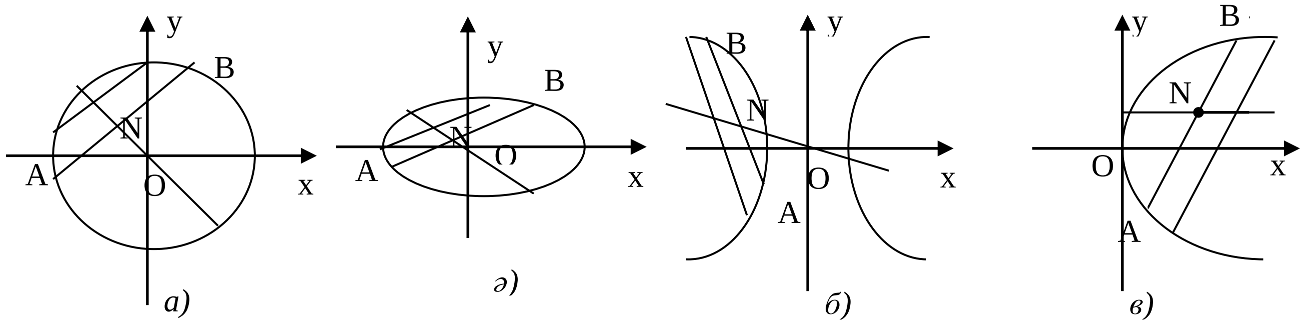
в) Гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{в^2}=1$ теңдеумен берілсін. Туынды алсақ $\frac{2xdx}{a^2}-\frac{2ydy}{в^2}=0$. Бұдан $\frac{dy}{dx}=\frac{в^2x}{a^2y}$. Сонда гипербола жанамасының бұрыштық коэффициенті $k=\frac{в^2x_0}{a^2y_0}$ (8-25). Болады да, жанама теңдеуі $y-y_0=\frac{в^2y_0}{a^2x_0}(x-x_0)$

$a^2y_0y-a^2y_0^{\ 2}=в^2x_0x-в^2x_0^{\ 2},\ в^2x_0x-a^2y_0y=в^2x_0^{\ 2}-a^2y_0^{\ 2}\backslash :a^2в^2$. Бұдан $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{в^2}=\frac{x_0^{\ 2}}{a^2}-\frac{y_0^{\ 2}}{в^2}=1$. Сонымен гипербола жанамасының теңдеуі $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{в^2}=1$ (8-26).

г) Парабола $y^2=2px$ теңдеумен берілсін. Туынды алсақ $2ydy=2pdx$. Бұдан $\frac{dy}{dx}=\frac{p}{y}$. Сонда парабола жанамасының бұрыштық коэффициенті $k=\frac{p}{y_0}$ (8-27) болып, жанама теңдеуі $y-y_0=\frac{p}{y_0}(x-x_0)$, $y_0y-y_0^{\ 2}=px-px_0,\ y_0y=px-px_0+2px_0=px+px_0=p(x+x_0)$ болады. Сонымен парабола жанамасының теңдеуі $y_0y=p(x+x_0)$ (8-28) болады.

8.6. Конустық қиманың диаметрлері. Конустық қиманың диаметрі деп олардың параллель хордаларының қақ орталарының жиынын айтады.

Теорема. Конустық қиманың қақ орталарының жиыны түзу болады (50-сурет).



а) *ә)* *б)* *в)*

50-сурет

AB параллель хордалар берілсін: $A(x_1,x_2)$, $B(x_2,y_2)$ болсын. *AB*-ның қақ ортасы $N(x_0,y_0)$ дейік. Сонда $\frac{x_1+x_2}{2}=x_0,\ \frac{y_1+y_2}{2}=y_0,\ k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (*) болады.

A, B нүктелер берілген конустық қималарда жатқандықтан

Шеңбер	Эллипс	Гипербола	Парабола
$x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}=r^2$ $x_1^{\ 2}+y^{\ 2}=r^2$	$\frac{x_2^{\ 2}}{a^2}+\frac{y_2^{\ 2}}{в^2}=1$,	$\frac{x_2^{\ 2}}{a^2}-\frac{y_2^{\ 2}}{в^2}=1$,	$y_2^{\ 2}=2px_2$ $y_1^{\ 2}=2px_1$

<table>
<tr><td></td><td>$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{в^2}=1$</td><td>$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{в^2}=1$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Бұларды бір-бірінен алып жіктесек</td></tr>
<tr><td>$(x_2-x_1)(y_2+y_1)=$
$=-(y_2-y_1)(y_2+y_1)$</td><td>$\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{a^2}=$
$=-\frac{(y_2-y_1)(y_2+y_1)}{в^2}$</td><td>$\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{a^2}=$
$=\frac{(y_2-y_1)(y_2+y_1)}{в^2}$</td><td>$(y_2-y_1)(y_2+y_1)=$
$=2p(x_2-x_1)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Бұларға (*) мәндерді қойып қысқартсақ</td></tr>
<tr><td>$\frac{x_0}{y_0}=-k_1$</td><td>$\frac{x_0}{y_0}=-\frac{k_1a^2}{в^2}$</td><td>$\frac{x_0}{y_0}=\frac{k_1a^2}{в^2}$</td><td>$y_0=\frac{p}{k_1}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Бұлардан параллель хордалардың қақ орталары ((x_0,y_0) нүкте) хорданың қай жерден, қалай жүргізілгеніне байланысты болмайтыны, ол тек параллель хордалардың бұрыштық коэффициенті мен конустық қиманың параметріне ғана байланысты болатыны көрінеді. Сондықтан олар бір түзудің бойында жатады. Ол түзудің теңдеуі</td></tr>
<tr><td>$y=-\frac{1}{k_1}x$</td><td>$y=-\frac{в^2}{k_1a^2}x.$</td><td>$y=\frac{в^2}{k_1a^2}x$</td><td>$y=\frac{p}{k_1}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">(8-30)</td></tr>
</table>

Анықтама бойынша осы түзу диаметр болады.бұл теңдеулерден шеңбер, эллипс, гипербола диаметрлері координата басынан өтетіндігі, ал парабола диаметрі *Ox* өсіне параллель болатыны көрінеді. Бұл диаметрлер бұл диаметрді жасаған параллель хордаларға түйіндес делінеді. Бір диаметрге параллель хордалар жүргізсе олардың қақа орталарының жиыны сол диаметрге түйіндес диаметрлер береді. Егер диаметрдің бұрыштық коэффициенттін k_2 десек жоғарыдағы теңдеуден:

Шеңбер үшін $k_2=-\frac{1}{k_1}$. Бұдан $k_1k_2=-1$ (8-31*a*).

Эллипс үшін $k_2=-\frac{в^2}{k_1a^2}$. Бұдан $k_1k_2=-\frac{в^2}{a^2}$ (8-31*б*).

Гипербола үшін $k_2=\frac{в^2}{k_1a^2}$. Бұдан $k_1k_2=\frac{в^2}{a^2}$ (8-31*в*).

Парабола диаметрінің бұрыштық коэффициентті $k_2=0$.

Бұлар (8-31*а,б,в*) түйіндестік шарты болып табылады. Параболада түйіндес диаметр болмайды. Егер екі диаметр әрі түйіндес, әрі өзара перпендикуляр болса оларды басты диаметр дейді. Шеңберде әрбір түйіндес диаметрі басты диаметр болады, яғни өзара перпендикуляр болады. Эллипс пен гиперболада тек бір пар басты диаметр болады (ол олардың симметрия өстері болады).

9-мысал. $x^2+y^2=50$ шеңберге $M_0(7,1)$ нүктеден жүргізілген жанама мен диаметрдің теңдеуі қандай болады.

Шешуі: Алдымен M_0 нүктенің берілген шеңберде жатар-жатбасын анықтау керек. ол үшін нүкте координаталарын теңдеуге қойып тексереміз: $x^2+y^2=7^2+1^2=50,\ 50=50$ болады. Демек, M_0 нүкте шеңберде жатады. Сондықтан бұл нүктеден жүргізілген жанама теңдеуі (8-22*а*) бойынша $7x+1\cdot y=50,\ 7x+y-50=0$. Бұдан $y=-7x+50$ болатындықтан жанаманың бұрыштық коэффициентті $k_1=-7$ болады. Сонда бұл жанаманың шеңберге жанасу нүктесінен жүргізілген диаметрінің теңдеуі, $k_1k_2=-1$ бойынша $k_2=-\frac{1}{k_1}=\frac{1}{7}$ болғандықтан, $y=\frac{1}{7}x$ болады немесе $x-7y=0$.

10-мысал. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ эллипске $M_0(2.-3)$ нүктеден жүргізілген жанама мен диаметрдің теңдеуі қандай болады.

Шешуі: Алдымен M_0 нүктенің эллипсте жатар-жатбасын тексереміз: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=\frac{4}{16}+\frac{9}{12}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$. Демек, M_0 нүкте эллипсте жатады. Сондықтан ол нүктеден жүргізілген жанама теңдеуі (8-24) бойынша $\frac{2x}{16}+\frac{-3y}{12}=1,$ $\frac{x}{8}-\frac{y}{4}=1,\ x-2y-8=0$. Мұның бұрыштық коэффициентті $y=\frac{1}{2}x-4$ бойынша $k_1=\frac{1}{2}$. Сонда эллипстің $M_0(2.-3)$ нүктеден өтетін диаметрі (8-30*б*) бойынша $y=-\frac{\text{в}^2}{k_1a^2}x,\ y=-\frac{12}{\frac{1}{2}\cdot 16}x,\ y=\frac{3}{2}x$ немесе $3x-2y=0$ болады.

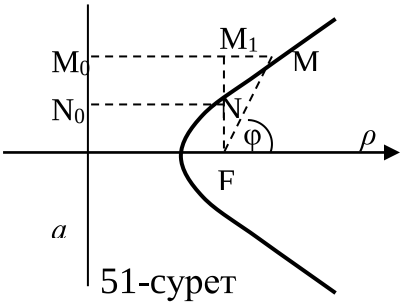
11-мысал. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{9}=1$ гиперболаға $M_0(4,3)$ нүктеден жүргізілген жанама мен диаметрдің теңдеуі қандай болады.

Шешуі. Тексереміз: $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{9}=\frac{(-4)^2}{8}-\frac{3^2}{9}=2-1=1$. Демек, M_0 нүкте гиперболада жатады. Сондықтан ол нүктеден жүргізілген жанама теңдеуі (8-24) бойынша $\frac{-4x}{8}-\frac{3y}{9}=1,\quad -\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1,\ 3x+2y+6=0$ болады. Мұның бұрыштық коэффициентті $y=-\frac{3}{2}x-3$ бойынша $k_1=-\frac{3}{2}$. Сонда гиперболаның M_0 нүктеден жүргізілген диаметрі (8-30*в*) бойынша $y=-\frac{9}{\left(\frac{-3}{2}\right)\cdot 8}x,\ y=-\frac{3}{4}x$ немесе $3x+4y=0$ болады.

12-мысал. $y^2=12px$ *параболаға* $M_0(6,3)$ нүктеден жүргізілген жанама мен диаметрдің теңдеуі қандай болады.

Мұнда *12=2p, p=6.* Жанама теңдеуі $y_0y=p(x+x_0)$ (8-28) еді нүкте координаталары парабола теңдеуін қанағаттандырады. Сондықтан (8-28)-ды пайдалануға болады. $3y=6(x+6)$, $3y=6x+36$, $y-2x-12=0$ жанама теңдеуі болады. Мұның бұрыштық коэффициентті $k_1=2$ сонда диаметр теңдеуі (8-30*б*) бойынша $y=\frac{6}{2}=3$. Демек теңдеу $y-3=0$.

8.7. Конустық қиманың поляр координатадағы теңдеуі. Полюсі *F* нүкте директрисасы *a* түзуі болатын конустық қима (эллипс, гипербола, парабола) берілсін (51-сурет). Оның экцентриситеті *E* болсын. Конустық қиманың фокус жатқан өсін поляр өсі үшін, фокусты полюс үшін алып, осы поляр координата жүйесіндегі конустық қиманың теңдеуін құрайық.



51-сурет

Конустық қимада жатқан *M* нүктенің поляр координаталары $M(r,\varphi)$ болсын. Фокус (полюс) *F* нүктеден поляр өсіне жүргізілген перпендикулярдың сызыққа дейінгі қашықтықты *FN=q* дейік, оны конустық қиманың фокустық параметрі дейді. Мақсат (r,φ) мен *E,q* –ды байланыстыратын теңдеу құру. Конустық қиманың қасиеті бойынша бұл сызық мейлі эллипс, мейлі гипербол, мейлі парабола болсын $\frac{FM}{MM_0}=E$ болады. Мұндағы *FM=r,* $MM_0=MM_1+M_1M_0$, $MM_1=FM\sin(90-\varphi)=r\cos\varphi$ ал, $\frac{NF}{NN_0}=E$ болғандықтан $NF=q$ болғандықтан. Соңғы теңдіктен $NN_0=\frac{NF}{E}=\frac{q}{E}$. Сонымен $MM_0=\frac{q}{E}+r\cos\varphi$ екен. Орындарына қойсақ $\frac{r}{\frac{q}{E}+r\cos\varphi}=E$. Бұдан $\frac{r}{q+Er\cos\varphi}=1$ және $r=q+Er\cos\varphi,\ r(1-E\cos\varphi)=q,\ r=\frac{q}{1-E\cos\varphi}$ (8-32). Міне осы конустық қиманың поляр координатасындағы теңдеуі болады және *E<1* болса эллипстің, *E=1* болса параболаның, *E>1* болса гиперболаның поляр координатасындағы теңдеуі болады.

(8-32) параболаны анықтасын. Оның декарт координата жүйесіндегі теңдеуі $y^2=2px$ еді. Парабола үшін *E=1.* сондықтан $N_0N=NF$, ал N_0N -бұл фокус пен директриса арасы. Демек, $N_0N=p,\ FF=q$, ал $N_0N=NF$ болғандықтан *q=p*. Сонымен (8-32)-тегі *q* парабола болғанда *p*-ға тең болады екен.

(8-32) эллипсті анықтасын. Бұл кезде *F* сол жақтағы оның фокусы болар еді. Демек, *N*-нің координаталары *(-c,q)* болар еді және бұл эллипсте жатқандықтан $\frac{c^2}{a^2}+\frac{q^2}{в^2}=1$ болады. Бұдан $q^2=в^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)=\frac{в^2\left(a^2-c^2\right)}{a^2}=\frac{в^4}{a^2}$ $q=\frac{в^2}{a}$ Сонымен конустық қима $q=\frac{в^2}{a}$ болады екен.

Енді конустық қима гипербола болсын. Онда F оның оң жақтағы фокусы болады да $M_0(c,q)$ болады. Мұны гипербола теңдеуіне қойсақ $\frac{c^2}{a^2}-\frac{q^2}{в^2}=1$ болады. Бұдан $q^2=в^2\left(\frac{c^2}{a^2}-1\right)=\frac{в^2\left(c^2-a^2\right)}{a^2}=\frac{в^4}{a^2}$ болып, тағыда $q=\frac{в^2}{a}$ болады.

Сонымен эллипс, гипербол, парабола поляр координата жүйесінде бір ғана теңдеумен (8-32) анықталады екен және фокустық параметр эллипс және гипербола болғанда $q=\frac{в^2}{a}$, парабола болғанда $q=p$ болады екен.

13-мысал. Конустық қиманың поляр координатасындағы теңдеуі $r=\frac{3\sqrt{2}}{2-\cos\varphi}$.

1) Бұл қандай сызықты анықтайды.

Оны анықтау үшін бұл теңдеуді (8-32) түріне келтіру керек. ол үшін бөлшектін алымын да, бөлімін де 2-ге бөлеміз. Сонда $r=\frac{3\sqrt{2}/2}{1-\frac{1}{2}\cos\varphi}$ болады.

Мұнда E (конустың коэффициенттреі) $E=\frac{1}{2}<1$. Демек берілген теңдеу эллипстің теңдеуі болады.

2) Жарты өстерін, фокус аралығын табыңдар.

Мұнда $q=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Ол эллипс үшін $q=\frac{в^2}{a}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ болады. Ал, $E=\frac{1}{2}$ бұл $E=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$ $a=2c,\ в^2=a^2-c^2=4c^2-c^2=3c^2=\frac{3a^2}{4}$. Сонымен

$\frac{3a^2}{4a}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $a=\frac{4\cdot3\sqrt{2}}{2\cdot3}=2\sqrt{2}$, $a^2=8$, $a=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $в^2=\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot2\sqrt{2}=6$, $в=\sqrt{6}$.

3) Фокус арасы неге тең?

Фокус арасы $2c=2\sqrt{a^2-в^2}=2\sqrt{8-6}=2\sqrt{2}$.

13-мысал. $r=\frac{1}{3-3\cos\varphi}$ берілген.

1) Бұл қандай сызықты анықтайды.

Теңдеуден $r=\frac{1}{3-3\cos\varphi}=\frac{1/3}{1-\cos\varphi}$. Демек, $E=1,\ q=\frac{1}{3}$. Сондықтан бұл параболаның теңдеуі.

2) Парабола параметрі неге тең. *p=q* еді. Мысалы, $q=\frac{1}{3}$. Демек, $p=\frac{1}{3}$.

3) Параболаның декарттық координатадағы теңдеуі қандай болады. Парабола теңдеуі $y^2=2px$ болғандықтан $y^2=\frac{2}{3}x$ болады.

9. Екінші ретті сызықтың жалпы теориясы.

Тік бұрышты *Oxy* координаталар жүйесінде мынадай теңдеумен (мұнда $a_{ij}=a_{ji}$ деп есептеледі) $2F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xy+2a_{33}y+a_{33}=0$ (9-1) анықталатын сызықты 2-ретті алгербралық сызық дейді. Мұны былай жазуға болады: $2F=(x,y)\ (x,y)=(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})x+(a_{21}x+a_{22}y+a_{23})y+(a_{31}x+a_{32}y+a_{33})=0$ 1-жақша (9-1)ден *x* арқылы, 2-жақша *y* арқылы туынды алғанда шығады. $F_1(x,y),\ F_2(x,y),\ F_3(x,y)$ десек (9-1) былайша жазылады $F(x,y)=F_1(x,y)x+F_2(x,y)y+F_3(x,y)=0$ (9-1*a*). Егер (9-1) де $a_{11}=\frac{1}{a^2},\ a_{22}=\frac{1}{в^2},\ a_{33}=-1$ қалғандары *0* болса, ол теңдеу эллипсті, $a_{11}=\frac{1}{a^2},\ a_{22}=-\frac{1}{в^2},\ a_{33}=-1$ болса гиперболаны, $a_{22}=1,\ a_{33}=-p$ болса параболаны, $a_{11}=a_{22}=1,\ a_{33}=-r^2$ болса шеңберді анықтайды. Мақсат (9-1) мен тағы қандай сызықтар анықталатынын анықтау.

9.1. Екінші ретті сызықтың теңдеуін ықшамдау. (9-1) теңдеуді зерттеу және оның қандай сызықтарды анықтауы мүмкін екенін ажырату үшін координата жүйесін түрлендіру арқылы оны ықшамдау керек.

Координата жүйесін параллель жылжыту және өстерді бұру арқылы түрлендіреді.

1. Екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуін координаталар жүйесінің өстерін бұру арқылы ықшамдау. Екінші ретті α сызығы тікбұрышты *Oxy* координата жүйесінде (9-1) теңдеумен берілсін. Координата өстерін оның бас нүктесінен α бұрышқа бұрайық. Сонда $Ox'y'$ тікбұрышты координа жүйесі шықсын.

Сызық бойындағы *M* нүктенің *Oxy* координата жүйесіндегі координаталары *(x,y)* , ал $Ox'y'$ жүйедегі координаталары (x',y') болса. Бұл екеуінің арасында мынадай байланыс болатын

$$\left.\begin{aligned} x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha \\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha \end{aligned}\right\}\ (9\text{-}2).$$

Мұны (9-1)дегі орнына қойсақ. Берілген 2-ретті сызықтың жаңа $Ox'y'$ координа жүйесіндегі теңдеуі шығады:

$$a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}{}^2y'^2+2a'_{13}x'+2a'_{23}y'+a'_{33}=0\ (9\text{-}3)$$

Мұндағы
$$\left.\begin{aligned}
a'_{11} &= a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\sin^2\alpha \\
a'_{12} &= -a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + a_{21}\cos^2\alpha - a_{12}\sin^2\alpha + a_{22}\sin\alpha\cos\alpha \\
a'_{22} &= a_{11}\sin^2\alpha - 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\cos^2\alpha \\
a'_{13} &= a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha \\
a'_{23} &= -a_{13}\sin\alpha + a_{23}\cos\alpha \\
a'_{33} &= a_{33}
\end{aligned}\right\} \text{(9-4)}$$

Бұдан көрініп тұрғандай координата өстерін α бұрышқа бұрғанда тек бос мүше ғана өз күйінше өзгермей қалады екен. Қалған коэффициенттердің барлығы өзгеріп кетеді.

Тікелей есептеу (тексеру) арқылы мына өрнектердің де өзгермей қалатынына көз жеткізуге болады.

$$a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22} = J_1$$

$$a'_{11}a'_{22} - {a'_{12}}^2 = a_{11}\cdot a_{22} - {a_{12}}^2 = J_2$$

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = J_3$$

Сонымен координата жүйесін бұрғанда a_{33}, J_1, J_2, J_3 өзгермейді екен. Оларды бұру түрлендіруінің инвариантары дейді. Ендігі мақсат бұру бұрышы α - ні таңдап алу арқылы a'_{12} коэффициентті *0*-ге айналдырып жіберуге болатынын дәлелдеу. Ондай α бұрыш бар болса, онда (9-4) тегі $a'_{12} = -a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + a_{21}\cos^2\alpha - a_{12}\sin^2\alpha + a_{22}\sin\alpha\cos\alpha = 0$ болады. Бұдан $\dfrac{a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{a_{21}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha}{\sin\alpha} = S$ (*) дейік, бұдан $\begin{cases} (a_{11} - S)\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = 0 \\ a_{21}\cos\alpha + (a_{22} - S)\sin\alpha = 0 \end{cases}$. Бұл жүйенің $\sin\alpha, \cos\alpha$ -ге қарағанда мына анықтауыш $\begin{vmatrix} a_{11} - S & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - S \end{vmatrix} = 0$ болғанда ғана болады. Бұдан $S^2 - (a_{11} + a_{22})S + a_{11}a_{22} - {a_{12}}^2 = 0$ немесе $S^2 - J_1S + J_2 = 0$ (9-5). Мұны берілген 2-ретті сызықтың характеристикалық теңдеуі дейді. Оның дискриминанты оң болғандықтан шешімі әруақытта болады және $S_1 \neq S_2$ болады. Виет формуласы бойынша

$$J_1 = S_1 + S_2 = a_{11} + a_{22}, \quad J_2 = S_1\cdot S_2 = a_{11}a_{22} - {a_{12}}^2$$

(*) дан $S = S_1$, $S = S_2$ десек $tg\alpha_1 = \dfrac{S_1 - a_{11}}{a_{12}} = \dfrac{a_{21}}{S_1 - a_{22}}$, $tg\alpha_2 = \dfrac{S_1 - a_{11}}{a_{12}} = \dfrac{a_{21}}{S_2 - a_{22}}$ (9-6).

Ал,

$$tg\alpha_1\cdot tg\alpha_2 = \frac{S_1 - a_{11}}{a_{12}}\cdot\frac{S_2 - a_{21}}{a_{12}} = \frac{S_1S_2 - a_{11}S_2 - a_{11}S_1 + {a_{11}}^2}{{a_{12}}^2} = \frac{a_{11}a_{22} - {a_{12}}^2 - a_{11}(a_{11} + a_{22}) + {a_{11}}^2}{{a_{12}}^2} = -1$$

$tg\alpha_1\cdot tg\alpha_2 = -1$. Демек бұрыштық коэффициенттері $k_1 = tg\alpha_1$, $k_2 = tg\alpha_2$ болатын түзулер өзара перпендикуляр болады екен. Бұл түзулер бағытын берілген сызыққа қарағанда басты бағыт дейді. Егер $k_1 = tg\alpha_1$ бағытын Ox' өсінің, $k_2 = tg\alpha_2$ бағытын Oy' өсінің бағыты үшін алсақ, жаңа пайда болған $Ox'y'$ координата жүйесінде $a'_{12} = 0,\ a'_{11} = S_1,\ a'_{22} = S_2$ болып шығады. Өйткені (*) ны ескерсек

$$a'_{11} = (a_{11}\cos\alpha_1 + a_{12}\sin\alpha_1)\cos\alpha_1 + (a_{21}\cos\alpha_1 + a_{22}\sin\alpha_1)\sin\alpha_1 = (S_1\cos\alpha_1)\cos\alpha_1 + (S_1\sin\alpha_1)\sin\alpha_1 =$$

$$= S_1(\cos^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_1) = S_1$$

$$a'_{12} = -(a_{11}\cos\alpha_1 + a_{12}\sin\alpha_1)\sin\alpha_1 + (a_{21}\cos\alpha_1 + a_{22}\sin\alpha_1)\cos\alpha_1 = -(S_1\cos\alpha_1)\sin\alpha_1 +$$

$$+ (S_1\sin\alpha_1)\cos\alpha_1 = 0$$

Ал, $a'_{11} + a'_{22} = S_1 + S_2$ жәнe $a'_{11} = S_1$ болғандықтан $a'_{22} = S_2$ болады. Сонымен Oxy координата жүйесінің өстерін (9-6) дан табылатын α бұрышқа бұрсақ $a'_{12} = 0,\ a'_{11} = S_1,\ a'_{22} = S_2$ болып, (9-3) теңдеуі мына түрге келеді.

$$S_1x'^2 + S_2y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0 \quad (9\text{-}7).$$

2. Екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуін координата жүйесін параллель жылжыту арқылы ықшамдау. Координата жүйесін бұру арқылы (9-1) теңдеуді (9-7) түрге келтірдік. Оны одан әрі ықшамдау үшін $Ox'y'$ координата жүйесін жаңа орынға параллель жылжыту керек.

Мына жағдайларды жеке-жеке қарастырамыз.

1-жағдай. (9-7) теңдеуде $S_1 \neq 0,\ S_2 \neq 0$ болсын. Бұл кезде $S_1 \cdot S_2 = J_2 \neq 0$ болады. (9-7)-ні былайша жазуға болады.

$S_1\left(x' + \dfrac{a'_{13}}{S_1}\right)^2 + S_2\left(y' + \dfrac{a'_{23}}{S_2}\right)^2 + \left(a_{33} - \dfrac{a'^2_{13}}{S_1} - \dfrac{a'^2_{23}}{S_2}\right) = 0$. Былайша тексерейік

$x' + \dfrac{a'_{13}}{S_1} = x'',\ y' + \dfrac{a'_{23}}{S_2} = y'',\ a_{33} - \dfrac{a'^2_{13}}{S_1} - \dfrac{a'^2_{23}}{S_2} = a''_{33}$. Сонда

$x' = x'' + \left(-\dfrac{a'_{13}}{S_1}\right),\ y' = y'' + \left(-\dfrac{a'_{23}}{S_2}\right)$. Бұл координата жүйесін $O'\left(-\dfrac{a'_{13}}{S_1}, -\dfrac{a'_{23}}{S_2}\right)$ нүктеге параллель жылжыту $Ox'y'$ координата жүйесі $Ox''y''$ координата жүйесіне көшеді және бұл жүйеде (9-7) мына түрге келеді.

$$S_1x''^2 + S_2y''^2 + a''_{33} = 0 \quad (9\text{-}8).$$

Мұны былай жазуға болады $\dfrac{x''^2}{-\dfrac{a''_{33}}{S_1}} + \dfrac{y''^2}{\dfrac{a''_{33}}{S_2}} = 1$ (9-8*a*). Бұл теңдеумен S_1, S_2, a''_{33} -тің таңбаларына сай мынадай сызықтар анықталады.

	S_1	S_2	a''_{33}	Сызық аты	Сызықтың осындай болу белгісі
1	$\pm$	$\pm$	$\mp$	Нақты эллипс	$J_2 > 0,\ J_1 \cdot J_3 < 0$
2	$\pm$	$\pm$	$\pm$	Жорымал эллипс	$J_2 > 0,\ J_1 \cdot J_3 > 0$
3	$\pm$	$\pm$	0	Нүкте	$J_2 > 0,\ J_3 = 0$
4	$\pm$	$\mp$	0	Гипербола	$J_2 < 0,\ J_3 \neq 0$

5	±	∓	0	Екі қиылысатын түзу	$J_2 < 0,\ J_3 = 0$

Сөйтіп 1-жағдайда осындай 5 түрлі сызық шығады. Оларды 1-типті сызықтар дейді. Сызық 1-типті болу үшін $J_2 \neq 0$ болу керек екен.

2-жағдай. $S_1 = 0,\ S_2 \neq 0$ және $a'_{13} \neq 0$ болсын.

Бұл кезде (9-7) теңдеуді былай жазуға болады:

$S_2\left(y'' + \frac{a'_{23}}{S_2}\right)^2 + 2a'_{13}\left(x'_{12} - \frac{\frac{a'^2_{23}}{S_2} - a_{33}}{2a'_{23}}\right) = 0.$ Мына формуламен $x' = x'' + \frac{\frac{a'^2_{23}}{S_2} - a_{33}}{2a'_{13}},\ y' = y'' + \left(-\frac{a'_{23}}{S_2}\right)$. $Ox'y'$ координата жүйесін $O'\left(\frac{\frac{a'^2_{23}}{S_2} - a_{33}}{2a'_{13}}, -\frac{a'_{23}}{S_2}\right)$ нүктеге параллель жылжытсақ $Ox''y''$ жүйе шығады және бұл жүйеде (9-7) мына түрге келеді.

$$S_2 y''^2 + 2a'_{13}x'' = 0 \ (9\text{-}9).$$

Бұл, $y''^2 = -2\frac{a'_{13}}{S_2}x''$ болғандықтан, параболаның теңдеуі болады. Сөйтіп, 2-жағдайда (9-7) теңдеумен тек парабола анықталады. Мұндай сызықты 2-типті сызық дейді. Сондықтан екінші типті сызық болу белгісі $J_2 = 0,\ J_3 \neq 0$.

3-жағдай. $S_1 = 0,\ S_2 \neq 0$, $a'_{13} = 0$ болсын.

Бұл кезде (9-7) теңдеуді былай жазуға болады:

$S_2\left(y' + \frac{a'_{23}}{S_2}\right)^2 + a_{33} - \frac{a'^2_{23}}{S_2} = 0$. $Ox'y'$ координата жүйесін $x' = x'',\ y' = y'' + \left(-\frac{a'_{23}}{S_2}\right)$ формуламен $O'\left(0, -\frac{a'_{23}}{S_2}\right)$ нүктеге параллель көшірсек $Ox''y''$ жүйе шығады. Ол жүйеде (9-7) мына түрге келеді.

$$S_2 y''^2 + a''_{33} = 0 \ (9\text{-}10).$$

S_2 мен a''_{33} - тің таңбаларына сай бұл теңдеумен төмендегі сызықтар анықталады.

1. Егер $\frac{a''_{33}}{S_2} < 0$ болса, онда (9-10) өзара параллель екі нақты түзуді анықтайды. Оның белгісі $J_2 = 0,\ J_3 = 0,\ k_1 < 0$.
2. Егер $\frac{a''_{33}}{S_2} > 0$ болса, онда (9-10) өзара параллель жорымал түзуді анықтайды. Оның белгісі $J_2 = 0,\ J_3 = 0,\ k_1 > 0$.
3. Егер $a''_{33} = 0$ болса, онда (9-10) екі беттесетін түзуді анықтайды. Оның белгісі $J_2 = 0,\ J_3 = 0,\ k_1 = 0$.

Сөйтіп 2-ретті сызықтың теңдеуін ықшамдауға болады екен. Сонда ол жоғарыда айтылған 9 түрлі екінші ретті сызықтарды анықтайды және үш типке бөлінеді екен. Ол типтің теңдеулері инварианттар арқылы былайша өрнектеледі екен.

І-типті сызықтың теңдеуі $S_1x^{''2} + S_2y^{''2} + \frac{J_3}{J_2} = 0$, белгісі $J_2 \neq 0$.

ІІ-типті сызықтың теңдеуі $J_1y^{''2} \pm 2\sqrt{-\frac{J_3}{J_1}}x^{''} = 0$, белгісі $J_2 = 0,\ J_3 \neq 0$.

ІІІ-типті сызықтың теңдеуі $J_1y^{''2} + \frac{k_1}{J_1} = 0$, белгісі $J_2 = 0,\ J_3 = 0$.

Мұндағы $k_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

9.2. Екінші ретті сызықтың түзумен қиылысуы.

Тікбұрышты *Oxy* координата жүйесінде 2-ретті сызық жалпы теңдеумен (9-1) берілсін және $M_0(x_0, y_0)$ нүктеден $\vec{p} = \{p_1, p_2\}$ бағытта өтетін $x = x_0 + p_1t,\ y = y_0 + p_2t$ (9-11) түзу алайық. Бұл екеуінің қиылысу нүктесін табу үшін оларды бір жүйеге салып шешу керек, яғни (9-11)-ді (9-1) ге қою керек. Қойсақ

$$At^2 + 2Bt + C = 0 \quad (9\text{-}12).$$

Квадрат теңдеу шығады. Мұндағы

$$A = a_{11}p_1^{\,2} + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^{\,2},$$

$$B = (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})p_1 + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})p_2 = F_1(x_0, y_0)p_1 + F_2(x_0, y_0)p_2 \ .$$

$$C = a_{11}x_0^{\,2} + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}^{\;2}y_0^{\;2} + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33} = F(x_0, y_0)$$

(9-12) ден $t_{1/2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} = \frac{-B \pm \sqrt{\partial}}{A},\quad \partial = B^2 - AC$. Сонда $\partial > 0$ болса, түзу мен сызық екі нүктеде қиылысады. $\partial = 0$ болса, бір нүктеде қиылысады. $\partial < 0$ болса, түзу мен сызық қиылыспайды.

9.3. Екінші ретті сызықтың асимптотикалық бағыты.

Егер түзу 2-ретті сызықта толығымен жатса не онымен тек бір нүктеде қиылысса, онда ол сол 2-ретті сызыққа қарағанда асимптотикалық бағытта делінеді.

(9-11) түзу (9-1) 2-ретті сызыққа қарағанда асимптотикалық бағытта болсын, онда *A=0* болу керек. Өйткені $A = 0,\ B \neq 0$ болса, түзу мен сызық бір нүктеде қиылысады, ал $A = 0,\ B = 0$ болса, түзу сызықта жатады.

Сөйтіп (9-11) түзуден (9-1) сызыққа қарағанда асимптотикалық бағытта болу белгісі $A = a_{11}p_1^{\,2} + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^{\,2}$ болу керек. Бұдан $a_{22}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 + 2a_{12}\frac{p_2}{p_1} + a_{11} = 0,\quad \frac{p_2}{p_1} = k$ (түзудің бұрыштық коэффициенті) десек

$a_{22}k^2 + 2a_{12}k + a_{11} = 0$ (9-132). Бұдан $k = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}{}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{22}} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-J_2}}{a_{22}}$.

Мұндағы $J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2$. Сонымен $J_2 > 0$ болса сызықтың асимптотикалық бағыты болмайды екен. Ондай сызықты эллипстік сызық дейді. $J_2 = 0$ болса сызықтың тек бір асимптотикалық бағыты болады. Ондай сызықты параболалық сызық дейді. $J_2 < 0$ болса сызықтың екі асимптотикалық бағыты болады. Ондай сызықты гиперболалық сызық дейді. Эллипс теңдеуі $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{в^2} = 1$ ден $a_{11} = \frac{1}{a^2}$, $a_{22} = \frac{1}{в^2}$, $a_{12} = 0$ болатындықтан $J_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{в^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2в^2} > 0$ болады. Демек, эллипстің асимптотикалық бағыты болмайды.

Гипербол үшін $J_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{в^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{a^2в^2} < 0$ болғандықтан, гиперболаның екі асимптотикалық бағыты болады.

Парабола үшін теңдеуі $y^2 = 2px$ теңдеуінен $a_{11} = 0,\ a_{22} = 1,\ a_{12} = 0$ болғандықтан $J_2 = 0$ болады. Демек, параболаның бір асимптотикалық бағыты болады.

9.4. Екінші ретті сызықтың центрі.

$M_0(x_0, y_0)$ нүкте 2-ретті сызықтың центрі делінеді, егер ол сол сызықтың симметрия центрі болса. $M_0(x_0, y_0)$ (9-1) 2-ретті сызықтың центрі болсын. Онда бұл нүктеден өтетін түзу, мысалы, (9-11) оны екі нүктеде қияды: $M_1(x_0 + p_1t_1, y_0 + p_2t_1)$, $M_2(x_0 + p_1t_2, y_0 + p_2t_2)$ және ол екі нүкте $M_0(x_0, y_0)$ нүктеге қарағанда симметриялы болуы керек. $x_0 = \frac{(x_0 + p_1t_1) + (x_0 + p_1t_2)}{2} = x_0 + \frac{p_1(t_1 + t_2)}{2}$ болып $t_1 + t_2 = 0$ болады. Ал, $t_1 + t_2 = 0$ болу үшін Виет теоремасы бойынша (9-12) ден $B = F_1(x_0, y_0)p_1 + F_2(x_0, y_0)p_2 = 0$ (9-14) болу керек. Егер $M_0(x_0, y_0)$ нүктеден $\vec{p} = \{p_1, p_2\}$, $\vec{q} = \{q_1, q_2\}$ бағытта екі хорда жүргізсек $F_1(x_0, y_0)p_1 + F_2(x_0, y_0)p_2 = 0$, $F_1(x_0, y_0)q_1 + F_2(x_0, y_0)q_2 = 0$ болу керек. Ал, $\vec{p}$ мен $\vec{q}$ коллинеар емес болғандықтан $F_1(x_0, y_0) = 0$, $F_2(x_0, y_0) = 0$ болу керек, яғни центр координаталары мына жүйені $\begin{cases} F_1(x, y) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ F_2(x, y) = a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}$ (9-15) қанағаттандыруы керек. демек, 2-ретті сызықтың центрі осы жүйеден табылады. Бұл жүйенің шешімі болу үшін

$J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ болуы керек. Егер $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}$ болса центр көп болады, яғни центр түзу болады. Ал, $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{a_{13}}{a_{23}}$ болса, центр болмайды. Эллипс үшін $a_{11} = \frac{1}{a^2}$, $a_{22} = \frac{1}{\text{в}^2}$, $a_{12} = 0$ болатындықтан $J_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\text{в}^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2\text{в}^2} \neq 0$,

Гипербола үшін Гипербол үшін $J_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\text{в}^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{a^2\text{в}^2} \neq 0$. Сондықтан бұлар центрлі сызық болады.

Парабола үшін $a_{11} = 0,\ a_{22} = 1,\ a_{12} = 0$ болғандықтан $J_2 = 0$ болады. Демек, парабола центрсіз сызық болады.

9.5. Екінші ретті сызықтың жанамасы.

(9-11) теңдеумен түзу, (9-1) теңдеумен екінші ретті сызық берілсін. Түзу сызыққа жанама делінеді, егер олар беттесетін екі нүктеде қиылысса.

Түзу (9-11) 2-ретті (9-1) сызыққа $M_0(x_0, y_0)$ нүктеде жанассын. Онда M_0 сызықта жатқандықтан $F(x_0, y_0) = 0$ болады. Сондықтан (9-12) теңдеу $At^2 + 2Bt = 0$ түрге келеді. Бұдан бұл теңдеу түбірлері өзара тең $t_1 = t_2$ болу үшін $B = 0,\ A \neq 0$ болуы керек, ал теңдеудің шексіз көп түбірі болуы үшін $B = 0,\ A = 0$ болуы керек. Сонымен (9-11) түзу (9-1) сызыққа жанама болу үшін

$$B = (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})p_1 + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})p_2 = 0 \quad (9\text{-}16)$$

болуы керек. Бұл кезде $M_0(x_0, y_0)$ центр болмайтындықтан $F_1(x_0, y_0)$ мен $F_2(x_0, y_0)$ қатарынан *0*-ге тең болмайды. Сондықтан (9-16) тек бір $\vec{p} = \{p_1, p_2\}$ векторды анықтайды. Ол вектор үшін $\vec{a} = \{F_2(x_0, y_0), -F_1(x_0, y_0)\}$ векторды алуға болады. Сонда $M_0(x_0, y_0)$ нүктеден жүргізілген жанама теңдеуі $y - y_0 = -\frac{F_1(x_0, y_0)}{F_2(x_0, y_0)}(x - x_0)$ болар еді. Бұдан $F_1(x_0, y_0)x + F_2(x_0, y_0)y + (-F_1(x_0, y_0)x_0 - F_2(x_0, y_0)y_0)$ болады, ал, $F(x_0, y_0) = 0$ болғандықтан (9-1*а*)-ден $F_1(x_0, y_0)x_0 + F_2(x_0, y_0)y_0 = -F_3(x_0, y_0)$ болады. Мұны алғашқы теңдікке қойсақ жанама теңдеуі мынадай болып шығады: $F_1(x_0, y_0)x_0 + F_2(x_0, y_0)y_0 + F_3(x_0, y_0) = 0$ немесе мұны толық жазсақ

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})y + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}) = 0 \quad (9\text{-}17).$$

Егер (9-1) шеңбер болса, $a_{11} = 1,\ a_{22} = 1,\ a_{33} = -r^2$, эллипс үшін $a_{11} = \frac{1}{a^2},\ a_{22} = \frac{1}{\text{в}^2},\ a_{33} = -1,$ гипербола болса $a_{11} = \frac{1}{a^2},\ a_{22} = -\frac{1}{\text{в}^2},\ a_{33} = -1,$

парабола болса $a_{22}=1,\ a_{13}=-p$ қалғандары *0* болады. Сонда бұл $M_0(x_0,y_0)$ нүктеде жанасатын жанама теңдеулері (9-17) бойынша.

Шеңбер болса $(1\cdot x_0+0\cdot y_0+0)x+(0\cdot x_0+1\cdot y_0+0)y+\left(0\cdot x_0+0\cdot y_0-r^2\right)=0$ болады да $x_0x+y_0y=r^2$ (9-18*а*).

Эллипс болса $\left(\frac{1}{a^2}\cdot x_0+0\cdot y_0+0\right)x+\left(0\cdot x_0+\frac{1}{в^2}\cdot y_0+0\right)y+(0\cdot x_0+0\cdot y_0-1)=0$ болады да $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{в^2}=1$ (9-18*б*).

Гипербола болса $\left(\frac{1}{a^2}\cdot x_0+0\cdot y_0+0\right)x+\left(0\cdot x_0-\frac{1}{в^2}\cdot y_0+0\right)y+(0\cdot x_0+0\cdot y_0-1)=0$ болады да $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{в^2}=1$ (9-18*в*).

Парабола болса $(0\cdot x_0+0\cdot y_0-p)x+(0\cdot x_0+1\cdot y_0+0)y+(-p\cdot x_0+0\cdot y_0+0)=0$ болады да $-px+y_0y-px_0=0\ \ y_0y=p(x+x_0)$ (9-18*г*).

Егер шеңбер $(x-a)^2+(y-в)^2=r^2$ теңдеумен берілсе жанама теңдеуі $(x-a)(x_0-a)+(y-в)(y_0-в)=r^2$ (9-18*д*) болады. Сонымен кез-келген сызық үшін жанама теңдеуі (9-17), шеңбер үшін (9-18*а,ә*), эллипс үшін (9-18*б*), гипербола үшін (9-18*в*), парабола үшін (9-18*г*) теңдеу болады.

9.6. Екінші ретті сызықтың диаметрі.

Екінші ретті сызыққа жүргізілген параллель хордалардың қақ орталарының жиынын ол сызықтың диаметрі дейді.

(9-1) екінші ретті сызық $\vec{p}=\{p_1,p_2\}$ оған қарағанда асимптотикалық емес бағыт болсын. Осы вектор бағытында жүргізілген паралель хордалардың қақ орталарының жиынын қарастырайық. *M(x,y)* сол жиын нүктесі болсын. *M(x,y)* нүкте хорданың орталары жасайтын жиынға кіру үшін $(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})p_1+(a_{21}x+a_{22}y+a_{23})p_2=0$ шарты орындалу керек. Бұдан $(a_{11}p_1+a_{12}p_2)x+(a_{21}p_1+a_{22}p_2)y+(a_{31}p_1+a_{32}p_2)=0$ (9-19). $\vec{p}$ асимптотикалық бағытта болмағандықтан, *x* пен *y* тың коэффициенттері қатарынан нөлге тең болалмайды. Демек бұл бір дәрежелі теңдеу. Сондықтан (9-19) түзудің теңдеуі болады. Демек 2-ретті сызықтың диаметрі түзу болады екен. Оны $\vec{p}=\{p_1,p_2\}$ бағытқа түйіндес диаметр дейді, (9-19) оның теңдеуі болады. Жанаманың бұрыштық коэффициенті $k=\frac{p_2}{p_1}$ - ді пайдаланып диаметр теңдеуін былай жазуға болады. (9-19)-ды p_1 - ге бөлсек.

$$\left(a_{11}+a_{12}\frac{p_2}{p_1}\right)x+\left(a_{21}+a_{22}\frac{p_2}{p_1}\right)y+\left(a_{31}+a_{32}\frac{p_2}{p_1}\right)=0 \text{ немесе}$$

$$(a_{11}+a_{12}k)x+(a_{21}+a_{22}k)y+(a_{31}+a_{32}k)=0 \text{ (9-19}a\text{)}.$$

Сөйтіп жанаманың бұрыштық коэффициентті *k* белгілі болса (9-19*a*) дан конустық қималардың диаметрлерін теңдеуін шығарып алуға болады.

Шеңбер $x^2+y^2=r^2$ теңдеуімен берілсе $a_{11}=1,\ a_{22}=1,\ a_{33}=-r^2$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=1$ эллипс берілсе $a_{11}=\frac{1}{a^2},\ a_{22}=\frac{1}{в^2},\ a_{33}=-1$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{в^2}=1$ гипербола берілсе $a_{11}=\frac{1}{a^2},\ a_{22}=-\frac{1}{в^2},\ a_{33}=-1$, $y^2=2px$ парабола берілсе $a_{22}=1,\ a_{13}=-p$ болар еді. Ал, қалған коэффициенттері *0* болады да бұлардың диаметрлерінің теңдеуі (9-19*а*) бойынша:

Шеңбер үшін $(1+0\cdot k)x+(0+1\cdot k)y+(0+0\cdot k)=0,\ x+ky=0,\ y=-\frac{1}{k}x$ (9-20*а*).

Эллипс үшін $\left(\frac{1}{a^2}+0k\right)x+\left(0+\frac{1}{в^2}k\right)y+(0+0k)=0$, $\frac{x}{a^2}+\frac{k}{в^2}y=0,\ y=-\frac{в^2}{a^2k}x$ (9-20*б*).

Гипербола үшін $\left(\frac{1}{a^2}+0k\right)x+\left(0-\frac{1}{в^2}k\right)y+(0+0k)=0$, $\frac{x}{a^2}-\frac{k}{в^2}y=0,\ y=\frac{в^2}{a^2k}x$ (9-20*в*).

Парабола үшін $(0+0k)x+(0+1\cdot k)y+(-p+0k)=0$, $ky-p=0,\ y=\frac{p}{k}$ (9-20*г*).

Бұл диаметрге параллель хордалардың қақ орталарының жиыны да диаматр болады. Екі диаметр өзара түйіндес делінеді, егер оның әрқайсысы екіншісіне параллель хордалардың қақа орталарының жиынтығынан тұрса.

Екі $\vec{p}=\{p_1,p_2\}$ және $\vec{q}=\{q_1,q_2\}$ векторлар бағыты (9-1) екінші ретті сызыққа қарағанда түйіндес делінеді, егер олардың координаталары мына шартты қанағаттандыратын болса

$$(a_{11}q_1+a_{12}q_2)p_1+(a_{21}q_1+a_{22}q_2)p_2=0 \text{ (9-21)}.$$

Ал, көрсетілген бағыттағы түзулердің бұрыштық коэффициенттері $k_1=\frac{p_2}{p_1}$, $k_2=\frac{q_2}{q_1}$ болғандықтан (9-21) ді p_1q_1 -ге бөлсек $a_{11}+a_{12}k_2+(a_{21}+a_{22}k_2)k_1=0$.

$$\text{Бұдан } k_2=-\frac{a_{11}+a_{12}k_1}{a_{21}+a_{22}k_1},\ k_1=-\frac{a_{11}+a_{12}k_2}{a_{21}+a_{22}k_2} \quad \text{(9-22)}$$

Бұл түйіндес диаметрлерді бұрыштық коэффициенттері арасындағы байланысты өрнектейтін формалар. Сонда $x^2+y^2=r^2$ шеңбер үшін $k_2=-\frac{1+0\cdot k_1}{0+1\cdot k_1}=-\frac{1}{k_1}$ $k_1k_2=-1$ (9-23*а*), $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=1$ эллипс үшін $k_2=-\frac{\frac{1}{a^2}+0\cdot k_1}{0+\frac{1}{в^2}\cdot k_1}=-\frac{в^2}{a^2k_1}$ $k_1k_2=-\frac{в^2}{a^2}$ (9-23*б*), $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{в^2}=1$ гипербола үшін

$k_2=-\dfrac{\dfrac{1}{a^2}+0\cdot k_1}{0-\dfrac{1}{в^2}\cdot k_1}=\dfrac{в^2}{a^2k_1}\quad k_1k_2=\dfrac{в^2}{a^2}$ (9-23*в*), парабола үшін $k_2=\dfrac{0+0\cdot k_1}{0+1\cdot k_1}\quad k_1k_2=0$ (9-23*г*). Сөйтіп парабола диаметріне түйіндес диаметр болмайды.

9.7. Екінші ретті сызықтың басты бағыты.

Егер $\vec{p}=\{p_1,p_2\}$ және $\vec{q}=\{q_1,q_2\}$ векторлар өзара ортогонал және екінші ретті (9-1) сызыққа қарағанда өзара түйіндес болса, онда ол венкторлар бағыты (9-1) сызыққа қарағанда басты бағыт делінеді.

Сөйтіп $\vec{p}$ мен $\vec{q}$ бағыттары болса перпендикуляр болатындықтан $p_1q_1+p_2q\ =0$ және түйіндес болғандықтан (9-21) бойынша $(a_{11}q_1+a_{12}q_2)p_1+(a_{21}q_1+a_{22}q_2)p_2=0$ болуы керек. $\dfrac{q_2}{q_1}=-\dfrac{p_1}{p_2}$ және $\left(a_{11}+a_{12}\dfrac{q_2}{q_1}\right)+\left(a_{21}+a_{22}\dfrac{q_2}{q_1}\right)\dfrac{p_2}{p_1}=0$ болады. Бұл екеуінен $\left(a_{11}-a_{12}\dfrac{p_1}{p_2}\right)+\left(a_{21}-a_{22}\dfrac{p_1}{p_2}\right)\dfrac{p_2}{p_1}=0$, $a_{11}-a_{12}\dfrac{p_1}{p_2}+a_{21}\dfrac{p_2}{p_1}-a_{22}=0$;

$a_{11}-\dfrac{a_{12}}{k}+a_{21}k-a_{22}=0$; $a_{21}k^2+(a_{11}-a_{22})k-a_{12}=0$ (9-24).

Бұл квадрат теңдеудің дискриминанты оң сан болады. Сондықтан теңдеудің екі шешімі болады. Ал, бұл екінші ретті сызықтың тек бір бас бағыты болады деген сөз.

1-мысал. Тікбұрышты *Oxy* координата жүйесінде $F(x,y)=3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0$ теңдеуімен екінші ретті сызық берілген.

Бұл есепте

$$a_{11}=3, a_{12}=a_{21}=\frac{10}{2}=5, a_{22}=3, a_{13}=\frac{-2}{2}=-1=a_{31}, a_{23}=\frac{-14}{2}=-7=a_{32}, a_{33}=-13\ .$$

Мыналарды анықтаңдар:

1) Негізгі инварианттарды табыңдар.

$$J_1=a_{11}+a_{22}=3+3=6,\quad J_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2=3\cdot3-5^2=-16$$

$$J_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}8 & 5 & -1\\ 5 & 3 & -7\\ -1 & -7 & -13\end{vmatrix}=-117+35+35-3+325-147=128.$$

2) Сызық қай типке жатады.

Егер сызық 1-типке жатса $J_2\neq0$ болу керек. Бұл кезде $J_2>0$ болса сызық эллипстік, $J_2=0$ болса сызық параболалық, $J_2<0$ болса гиперболалық делінеді. Сызық 2-типке жату үшін $y_2=0,\ y_3\neq0$ болу керек. сызық 3-типке жату үші $y_2=0,\ y_3=0$ болу керек. Біздің есепте $J_2=-16\neq0$. Сондықтан 1-

типке жатады $J_2 < 0$ болғандықтан гипербол64олық түрге жататын сызық болады.

3) 1-типке 5 түрлі сызық кіреді, бұл сонын қайсысы болады. Бұл гиперболалық сызық болды, яғни $y_2 < 0$ болды оның үстіне $J_3 = 128 \neq 0$. Сондықтан берілген сызық гипербола болады.

4) Сол гиперболаның теңдеуі қандай болады. Ол үшін а) алдымен сызықтың характеристикалық теңдеуін құрып, соны шешу керек. Характеристикалық теңдеу $S^2 - J_1 S + J_2 = 0$ болады. Біздің есеп бойынша ол $S^2 - 6S - 16 = 0$ болады. Мұны шешсек $S_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9+16} = 3 \pm 5,\ S_1 = 8,\ S_2 = -2$ болады.

б) 1-типті сызықтың келтірілген теңдеуін құрамыз. Ол мынадай еді $S_1 x^2 - S_2 y^2 + \frac{J_3}{J_2} = 0$. Біздің есеп бойынша $8x^2 - 2y^2 + \frac{128}{-16} = 0$, $8x^2 - 2y^2 = 8$. Бұдан $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$. Міне осы іздеген гиперболонының теңдеуі болады. Оның жарты өстері *а=1, в=2* екен.

5) *Oxy* координата жүйесінде берілген сызықты қандай α бұрышқа бұрып, координата басып қандай O' нүктеге параллель жылжытқанда оның теңдеуі $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$ болады.

Координата өсін бұратын α бұрыш мына формуламен анықталады $tg\alpha_1 = \frac{S_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{8-3}{5} = 1$. Сонымен *Ox* өсін $\alpha = 45^0$ қа бұру керек екен. Сонда $Ox'y'$ жүйе шығады. Мұны O' нүктеге параллель көшіргенде $Ox'y'$ жүйе шығады. O' -тің координаталары $O'\left(-\frac{a'_{13}}{S_1}, -\frac{a'_{23}}{S_2}\right)$ болады. Ал, $a'_{13} = a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha,\ a'_{23} = -a_{13}\sin\alpha + a_{23}\cos\alpha$ формуламен табылады. $\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Сонда $a'_{13} = -1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - 7\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{8}{\sqrt{2}} = -4\sqrt{2},\ a'_{23} = -(-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - 7\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-6}{\sqrt{2}} = -3\sqrt{2}$. Сонымен O'-тың координаталары $O'\left(-\frac{-4\sqrt{2}}{8}, -\frac{-3\sqrt{2}}{-2}\right) = O'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$. Сонда координата жүйесін бұру формуласы $\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha = x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha = x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\}$, ал координата жүйесін параллель жылжыту формуласы $\left.\begin{matrix} x^{'} = x + \left(-\dfrac{a^{'}{}_{13}}{S_1} \right) \\ y^{'} = y + \left(-\dfrac{a^{'}{}_{23}}{S_2} \right) \end{matrix}\right\}$

бойынша $\left.\begin{matrix} x^{'} = x + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y^{'} = y - \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \end{matrix}\right\}$ болады.

6. Сызықтың центрі болады ма, болса оны табыңдар. $J_2 \neq 0$ болғандықтан центрі болады, яғни берілген сызық центрлі сызық болады. Ол центрдің координаталары мына теңдеулер жүйесінен табылады: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}$ бізде $\begin{cases} 3x + 5y - 1 = 0 \\ 5x + 3y - 7 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 5x + 3y = 7 \end{cases}\begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix}$ $\begin{cases} 9x + 15y = 1 \\ 25x + 15y = 7 \end{cases}$. Бұдан $16x = 32 \quad x = 2$. Сонда $y = \dfrac{7 - 5x}{3} = \dfrac{7 - 10}{3} = -1$. Сонымен берілген сызық центрі *C(2,-1)* нүкте болады екен.

7. Сызықтың асимптотикалық бағыты бар ма жоқ па, бар болса, ол бағытты тыбыңдар.

Түзу бағыты берілген 2-ретті сызыққа қарағанда асимптотикалық бағытта делінеді, егер түзу сызыққа толығымен жатса, не онымен тек бір нүкте қиылысса $J_2 > 0$ болса сызықтың асимптотикалық бағыты болмайды. Сол сызық эллипстік болады (оны параболалық сызық дейді), $J_2 < 0$ болса екі асимптотикалық бағыты болады (оны гиперболалық сызық дейді). Біздің есепте $J_2 = -16 < 0$. Сондықтан сызықтың екі асиптотикалық бағыты болады. Ол бағыт $\vec{p} = \{p_1, p_2\}$ десек ($k_2 = \dfrac{p_2}{p_1}$ десек). Ол мына формуламен анықталады. $k = -\dfrac{a_{12} + \sqrt{-J_2}}{a_{22}}$. Сонда біздің есеп бойынша $k = \dfrac{-5 \pm \sqrt{16}}{3} = \dfrac{-5 \pm 4}{3}$, $k_1 = -\dfrac{1}{3}$, $k_2 = -3$.Сонымен бұыштық коэффициенті $-\dfrac{1}{3}$ және *-3* болатын түзулер асимптотикалық бағытта, болады.

2-мысал. $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$ теңдеумен екінші ретті сызық берілген.

Бұл есепте

$a_{11} = 4, a_{12} = -2, a_{22} = 1, a_{13} = -1, a_{23} = -7, a_{33} = 7$.

Сонда

$$J_1 = a_{11} + a_{22} = 4 + 1 = 5, \quad J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 = 4 \cdot 1 - (-2)^2 = 0$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -7 \\ -1 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 28 - 14 - 14 - 1 - 28 - 196 = -225.$$

Бұдан $J_2 = 0$, $J_3 = -225 \neq 0$ болғандықтан бұл 2-типті болады. Екінші типті сызық тек параболадан тұрады. Сол параболаның канондық теңдеуін табу үшін характеристикалық теңдеуді табу керек. Ол теңдеу $S^2 - J_1 S + J_2 = 0$ болады. Сонда $S^2 - 5S + 0 = 0$. Бұдан $S(S-5) = 0,\ S_1 = 0,\ S_2 = 5$. xy кіретін мүшеден арылу үшін Oxy координата жүйесін $tg\alpha_1 = \frac{S_1 - a_{11}}{a_{12}}$ шартты қанағаттандыратын α бұрышқа бұру керек. Сонда $tg\alpha_1 = \frac{0-4}{-2} = 2$. Бұдан $\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Осындай α бұрышқа бұрса теңдеу мына түрге келеді $S_1 x'^2 + S_2 y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0$. Мұнда $S_1 = 0, S_2 = 0, a_{33} = 7$ a'_{23} пен a'_{23} мына формуламен табылады $a'_{13} = -1 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - 7 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{-15}{\sqrt{5}} = -3\sqrt{5},\ a'_{23} = -(-1) \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - 7 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{-5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$. Сонда α бұрышқа бұрғанда теңдеу мына күйге келеді. $5y'^2 - 6\sqrt{5}x' + 2\sqrt{5}y' + 7 = 0$. Мұны былай жазуға болады

$5\left(y'^2 - 2y'\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5}\right) - 1 - 6\sqrt{5}x' + 7 = 0,\ 5\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 6\sqrt{5}\left(x' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0.$ Егер $y' - \frac{1}{\sqrt{5}} = y,\ x' - \frac{1}{\sqrt{5}} = x$ десек $y' = y + \frac{1}{\sqrt{5}},\ x' = x + \frac{1}{\sqrt{5}}$. Бұл $Ox'y'$ координата жүйесін $O'\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ нүктеге параллель жылжыту формуласы. Сонда $Ox'y'$ координата жүйесінде теңдеу мына түрге $5y^2 - 6\sqrt{5}x = 0$ келеді. Бұдан параболаның жақа жүйедегі $y^2 = \frac{6}{\sqrt{5}}x = 2\frac{3}{\sqrt{5}}x$ болады. Мұны бірден 2-типті сызықтын келтірілген теңдеуіне салып табуға да болатын еді. Ол теңдеу мынадай еді $S_2 y^2 + 2a'_{13}x = 0$. Бізде $S_2 = 5, a'_{13} = -3\sqrt{5}$. Сонда $5y^2 - 6\sqrt{5}x = 0$, $5y^2 = 6\sqrt{5}x$, $y^2 = \frac{6}{\sqrt{5}}x$. Сызықтың асимптотикалық бағыты болса, ол бағыттағы түзудің бұрыштық коэффициенті мына формуламен $a_{22}k^2 + a_{12}k + a_{11} = 0$ немесе $k_{1/2} = -\frac{a_{12} + \sqrt{-J_2}}{a_{22}}$. Сонда $k = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{1} = 2$. Сонда параболаның бір ғана асимптотикалық бағыты болады. Ол бағыттың бұрыштық коэффициенті *k=2* болады. $J_2 \neq 0$ болғандықтан центрі болмайды.

Параболаның диаметрін теңдеуі $y=\frac{p}{k}$ болатын. Сонда бұл парабола диаметрінің теңдеуі $y=\frac{3}{\sqrt{5}\cdot 2}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$ болады.

3-мысал. $3x^2+2xy+2y^2+3x-4y=0$ екінші ретті сызық теңдеумен берілсін.

Мұның коэффициенттері

$a_{11}=3, a_{12}=\frac{2}{2}=1=a_{21}, a_{22}=2, a_{13}=a_{31}=\frac{3}{2}, a_{23}=a_{32}=-\frac{4}{2}=-2, a_{33}=0$.

Мыналарды табыңдар:

1. Абцисасы x=-2 болатын сызық нүктесінен жүргізілген оның жанамасының теңдеуі қандай болады.

Жанасу нүктесін табайық. Ол үшін теңдеудегі x орнына -2 – ні қойып нүктесінің ординатасын табамыз $3\cdot 4-2\cdot 2y+2y^2-3\cdot 2-4y=0$ $2y^2-8y+6=0$ $y^2-4y+3=0$ $y_{1/2}=2\pm\sqrt{4-3}=2\pm 3$ $y_1=5,\ y_2=-1.$ Сонда $M_1(-2{,}5)$ $M_2(-2{,}-1)$ нүктелер сызықта жатады. $M_0(x_0,y_0)$ нүктеден жүргізілген жанама теңдеуі $(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13})x+(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23})y+(a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33})=0$. Орнына мәндерін қойсақ, M_1 нүктеден жүргізілген жанама теңдеуі $\left(3\cdot(-2)+1\cdot 5+\frac{3}{2}\right)x+\left(1\cdot(-2)+2\cdot 5-2\right)y+\left(\frac{3}{2}\cdot(-2)-2\cdot 5+0\right)=0$ $\frac{1}{2}x-6y-13=0$ $x-12y-26=0$ болады. M_2 нүктеден жүргізілген жанамада осылай анықталады.

$M_1(-2{,}5)$ нүктеден жүргізілген диаметрдің теңдеуі. Ол мына формуламен құрылады: $(a_{11}+a_{12}k)x+(a_{21}+a_{22}k)y+(a_{31}+a_{32}k)=0$. Мұндағы k бұл диаметрге түйіндес жанаманың бұрыштық коэффициенті. Ол жанама теңдеумен табылады $k=\frac{1}{12}$. Сонда диаметр теңдеуі $\left(3+1\cdot\frac{1}{12}\right)x+\left(1+2\cdot\frac{1}{12}\right)y+\left(\frac{3}{2}-2\cdot\frac{1}{12}\right)=0$, $\frac{37}{12}x+\frac{14}{12}y-\frac{16}{12}=0,$ $37x+14y-16=0$ болады.

Қайталау сұрақтары мен есептер.

1. Екінші ретті сызық деген не, қандай сызық 2-ретті алгебралық сызық делінеді, оның жалпы теңдеуі қандай болады.
2. Жалпы теңдеу қандай жағдайда шеңберді, эллипсті, гиперболаны, параболаны анықтайды.
3. Шеңбер деген не, оның теңдеулері қанадай болады.
4. Эллипс, гипербола, парабола деген не, оның теңдеулері қандай болады.
5. Эллипс, гипербола, параболаның эксцентристеті, директрисасы деген не, олардың қасиеттері қандай.

6. Неге шеңбер, эллипс, гипербол, параболаны конустық қима дейді. Қию тәртібі қандай?
7. Конустық қииманың нүктесінен радиус векторы деген не, оны табу.
8. Конустық қиманың жанамасы, диаметрі деген не, олардың теңдеулері қандай.
9. Конустық қималарды салу жолы қандай?
10. Конустық қиманың поляр координатадағы теңдеуі және оның декарт координатасындағы теңдеумен қатынасы қандай?
11. Екінші ретті сызық теңдеуін ықшамдау схемасы қандай?
12. Бұру арқылы қай мүшеден арылады.
13. Екінші ретті сызықтың қандай типтері бар. Сызықтың қай типке жататындығын қалай ажыратады.
14. Бұрудың инварианттары қандай, қайсы?
15. Екінші ретті сызық қандай жағдайда эллипстік, параболалық, гиперболалық сызық делінеді. Сызықтың мұның қайсысына жататындығын қалай ажыратады.
16. 1-типті сызыққа қандай түрдегі сызықтар жатады, оның әрқайсысына жату белгісі қандай?
17. 2-типті сызыққа қандай сызық жатады.
18. 3-типті сызыққа қандай сызықтар жатады. Олар неше түрлі. Сызықтың бұлардың қайсысына жататындығын қалай ажыратады.
19. Бірінші типті сызықтың келтірілген теңдеуі қандай?
20. Екінші типті сызықтың келтірілген теңдеуі қандай?
21. Үшінші типті сызықтың келтірілген теңдеуі қандай?
22. Екінші ретті сызықпен түзу өзара қиылысу, қиылыспау және жанасу шарттары қандай?
23. Түзу қандай жағдайда 2-ретті сызыққа қарағанда асимптотикалық бағытта делінеді.
24. Асимптотикалық бағытты табу формуласы қандай
25. Эллипс, гипербола, параболаның асимптотикалық бағыттары барма, болса қанша?
26. Екінші ретті сызықтың центрі деген не, центрінің болу белгісі қандай. Центр координаталарын қалай табады.
27. Қандай 2-ретті сызықтың центрі бір нүкте, көп нүкте (түзу) болады және центрі болмайды.
28. 2-ретті сызыққа жанама деген не, жанама теңдеуі қандай?
29. Шеңбер, эллипс, гипербола, параболаның бойындағы нүктеден жүргізілген жанаманың теңдеуі қандай болады.
30. Екінші ретті сызықтың диаметрі деген не, оның теңдеуі қандай?
31. Түйіндес диаметр деген не, екі диаметрдің түйіндес болу белгісі қандай?
32. Екінші ретті сызықтың басты бағыты деген не, оны қалай табады.
33. а) $x^2-2xy+2y^2-4x-6y+3=0$, б) $x^2-2xy-2y^2-4x-6y+3=0$ в) $x^2-2xy+y^2-4x-6y+3=0$ екінші ретті сызықтар. Бұлардың типтерін

ажыратындар, характеристикалық теңдеулерін құрып шешіңдер. Келтірілген теңдеулерін құрыңдар. Қандай сызықтар анықтайтынын ажыратыңдар. Асимптоикалық бағытын табыңдар.

IV тарау. Жазықтықтағы түрлендіру

§10 Жиындардың бейнелеулері мен түрлендірулері

10.1. Бейнелеу. Қандайда бір X элементтер жиынын $X=\{x\}$ арқылы белгілейік. Бос емес $X=\{x\}$, $Y=\{y\}$ жиындары беріліп, X жиынның әрбір х элементіне Y жиынның қандайда бір у элементін сәйкестендіретін ереже, не заң берілсе, онда X жиыны Y жиынына бейнелеу берілген делінеді. Егер ол бейнелеуді (заңды, ережені) f арқылы белгілесек, онда X жиыны Y жиынына бейнеленді дегенді $f:X\to Y$ деп жазатын боламыз. Егер f бейнелеуде $x\in X$ элементке $y\in Y$ элемент сәйкестенген болса, онда оны $y=f(x)$ деп жазады және у – ты х – тың бейнесі, х – ты у – тың түп нұсқасы дейді. Кейде $x\in X$ элемент $y\in Y$ элементке көшті депте айтуға болады.

$f:X\to Y$ бейнелеуі берілген:

а) Бұл бейнелеуде X жиынның бейнесі Y жиынмен беттессе яғни $f(X)=Y$ болса (ал бұл Y – тен әрбір элементі X – тың кемінде бір элементінің бейнесі болады деген сөз), онда $f-$ты **сюръективтік** бейнелеу немесе сюръекция дейді.

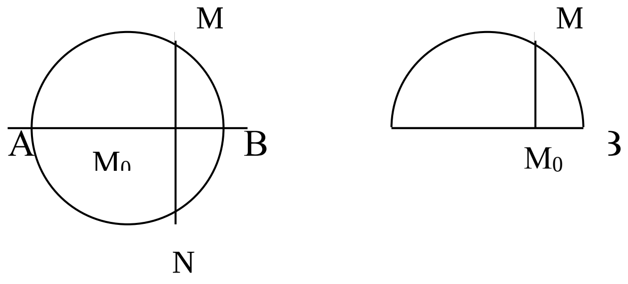
ә) Бұл бейнелеуде X – тың әртүрлі $x_1\neq x_2$ элементі У – тың әртүрлі элементтеріне $y_1=f(x_1)\neq f(x_2)=y_2$ бейнеленетін болса, онда $f-$ты **инъективтік** бейнелеу немесе инъекция дейді.

б) Егер бұл бейнелеу әрі сюръективтік, әрі инъективтік бейнелеу болса, онда $f-$ты **биективтік** бейнелеу немесе биекция дейді. Бұл кезде X – тың әрбір элементіне Y – тың бір элементі және керісінше Y – тың әрбір элементіне X – тың бір элементі сәйкестенеді. Сондықтан биекцияны **өзара бірмәнді бейнелеу** депте атайды.

Мысал. ω шеңбердің нүктелерін өзінің диаметрі АВ кесіндіге ортогонал проекциялау ω шеңберді $[AB]$ кесіндіге бейнелеу болады. Оны $f:\omega\to[AB]$ дейік (52 а–сурет).

Бұл бейнелеу сюръекция болады, өйткені шеңбердің бейнесі диаметрмен беттеседі. Бірақ ол инъекция болмайды. Өйткені шеңбердің әртүрлі $M\neq N$ нүктелерінің бейнелері бір ғана M_0 нүкте болады.

Егер шеңбері АВ диаметрі емес (АВ) түзуіне ортогонал проекциялау жолымен бейнелесек, онда $f:\omega\to(AB)$ сюръекцияда, инъекцияда болмайды. Өйткені шеңбердің бейнесі (АВ) түзуімен беттесбейді, оның бір бөлігі $[AB]$ кесіндімен ғана беттеседі және әртүрлі нүктенің бейнелері әртүрлі нүктелер емес, бір ғана нүкте болады.



а) *ә)*

52 – сурет

Егер жарты $\frac{\omega}{2}$ шеңберді өзінің диаметрі $[AB]$–ға ортогонал проекциялау жолымен бейнелесек, онда $f:\frac{\omega}{2}\to[AB]$ бейнелеу (52 б–сурет) әрі сюръекция, әрі инъекция болады. Сондықтан биекция (бір мәнді бейнелеу) болады.

Биекцияның ерекшелігі – оның кері бейнелеуі болады. Егер $f:X\to Y$ биекция болса, онда әрбір $x\in X$ элементке Y жиынның тек бір элементі у сәйкестенеді, сондықтан әрбір у – ке бір ғана х элемент сай келеді. Сондықтан бұл Y жиынды X жиынға бейнелеу болады. Бұл бейнелеуді $f:X\to Y$ бейнелеуге кері бейнелеу дейді де, оны $f^{-1}:Y\to X$ деп белгілейді.

Сөйтіп f биекция болса, онда $f(x)=y$ және $y=f^{-1}(x)$ болады.

10.2. Түрлендіру және түрлендірулер группасы

Кезкелген жиынды өзіне - өзін биективті бейнелеуді, ол жиынды түрлендіру дейді, бос емес G жиыны **группа** делінеді, егерде

1 – ден, ол жиында бір $*$ бинарлық амал анықталған болса, яғни G жиынында оның кезкелген екі элементіне сол жиынның үшінші элементтін сәйкестендіретін заң не ереже белгілі болса

2 – ден, ол амал ассоциативтік амал болса, яғни $\forall a,в,c\in G$ элементтер үшін $(a*в)*c=a*(в*c)$ болса

3 – ден, G - да ол жайында анықталған бинарлық $*$ амалға қарағанда бейтарап элемент болса, яғни $\forall a\in G$ элемент үшін $a*l=l*a=a$ болатын l элемент бар болса

4 – ден, G - ның әрбір элементіне симметриялы элементте G – да болатын болса, яғни $\forall a\in G$ элемент үшін $a*a^{-1}=a^{-1}*a=l$ болатын a^{-1} элемент G – да бар болса.

Геометрияда бинарлық $*$ амалды көбейту амалы дейді де «•» таңбамен белгіленді, ал бейтарап элементті бірлік элемент (группаның бірі) дейді.

Егер G жиыны группа болса, ал H бұл жиынның ішкі жиыны болса және мұның өзіде G - да анықталған амалға қарағанда группа болатын болса, онда бұл H группаны G группаның **ішкі группасы** дейді.

1–теорема. G группаның ішкі жиыны H сол группаның ішкі группасы (бөлік группасы) болу үшін:

1 – ден h_1,h_2 элементтер H жатса, онда ол элементтердің көбейтіндісі h_1h_2 сол H - та жатуы керек.

2 – ден, h элемент H - та жатса, онда оған кері h^{-1} элементте сол H жиында жатуы керек.

Дәлелі. 1 – ден G группа H оның ішкі жиыны болғандықтан G - дағы бинарлық амал H - қа да тиісті болады. Өйткені H жиыны G - ның элементтерінің бір бөлігінен тұрады. Сөйтіп, H - та бинарлық $*$ амал анықталған.

2 – ден бүкіл G жиынында $*$ бинарлық амал ассоциативтік амал болғандықтан, оның бір бөлігі H - та $*$ амал ассоциативтік амал болады. Сөйтіп H - тағы анықталған бинарлық амал ассоциативтік амал болады.

3 – ден, G группа болғандықтан оның барлық элементі l болады, енді H тада бірлік элемент болатынын дәлелдейік. $h \in H$ болсын, онда теореманың 2 – шарты бойынша $h^{-1} \in H$. Сонда теореманың 1 – шарты бойынша $h \in H,$ $h^{-1} \in H$ болатындықтан олардың көбейтіндісі $h \cdot h^{-1} \in H,$ яғни $l \in H$ жатуы керек.

4 – ден, теореманың шарты бойынша H - тың кезкелген h элементі үшін $hh^{-1} = l$ болатын, демек $h^{-1} \in H$.

Сөйтіп, H - та жиынның группасы болу үшін 4 шартыда орындалады екен. Демек H группа болады және ол G элементтерінің бір бөлігінен тұрғандықтан H группа G группаның ішкі (бөлік) группасы болады.

2–теорема. Е жиынды түрлендірулердің барлық жиыны G_{E} группа болады.

Дәлелі. Екі $h_1 h_2$ түрлендірулерді бірінен соң бірін тізбектей орындау нәтижесін ол **екі түрлендірудің көбейтіндісі** дейді.

Мысалы $f_1(a) = a_1$ яғни f_1 түрлендіруде a элемент a_1 –ге түрленсе, $f_2(a_1) = a_2,$ яғни a_1 элемент f_2 түрлендіру нәтижесінде a_2 элементке көшсе, онда a–ны тікелей a_2-ге көшіретін түрлендірулерді сол екі түрлендірулердің көбейтіндісі дейді де $f = f_1 f_2$ деп белгілейді. Сонда $(f_1 f_2)(a) = f_2(f_2(a))$ болады (алдымен алғашқы түрлендіру орындалады).

Түрлендірулерді көбейту амалын G_{E} жиынында анықталған бинарлық амал үшін алуға болады.

Е жиынның әрбір элементін сол элементтің өзіне сәйкестендіретін түрлендіруді Е жиынды **теңбе – тең түрлендіру** дейді. Түрлендірулер жиыны G_{E} теңбе – тең түрлендіруді алып бейтарап элементі үшін алуға болады.

Кезкелген түрлендіру биактивтік бейнелеу болатындықтан G_{E} әрбір f түрлендіруіне кері f^{-1} түрлендіру болады, $f(a) = a_1$ болса $f^{-1}(a_1) = a$ болады.

f_1, f_2, f_2 –тер G_{E}-нің түрлендірулері болсын және $f_1(a) = a_1, f_2(a_1) = a_2, f_3(a_2) = a_3$ болсын (көшірсін). Сонда $f_3(f_2 f_1)(a) = f_3(f_2(h(a))) = f_3(f_2(a_1)) = f_3(a_2) = a_3$ және $(f_3 f_2) f_1(a) = f_3 f_2(f_1(a)) = f_3 f_2(a_1) = f_3(f_2(a_1)) = f_3(a_2) = a_3$ болатындықтан $f_3(f_2 f_1) = (f_3 f_2) f_1$ болады.

Сонымен E жиынын түрліше түрлендіруге болады. Сол түрлендірулер жиыны G_{E} жиынның группа болуынан 4 шартында қанағаттандырады екен. Сондықтан E жиында түрлендірулердің барлық жиыны G_{E} группа болады. Ол группаны жиынды түрлендірулер группасы дейді. Ол группаның кезкелген ішкі группасын E жиынын түрлендіру группасы дейді.

Геометрияда жазықтықты түрлендіру мәселесі қарастырылады.

Жазықтықтың нүктелерін сол жазықтықтың нүктелеріне биективтік бейнелену (өзара бірмәнді бейнелеу) сол **жазықтықты түрлендіру** делінеді.

π жазықтық, f – оны түрлкендіру болса, оны $f:\pi \to \pi$ деп жазатын боламыз.

Жазықтық және онда анықталған кезкелген фигура, нүктелер жиыны ретінде қарастырылатындықтан, жоғарыда кезкелген жиындар туралы айтылған тұжырымдар жазықтық үшінде, кезкелген геометриялық фигура үшінде дұрыс болады.

Егер F' фигура F фигураны f түрлендіру нәтижесінде шыққан болса, яғни $f(F)=F'$ болса, онда бұл фигураларды f – эквивалентті дейді де $F \sim F'$ деп жазады.

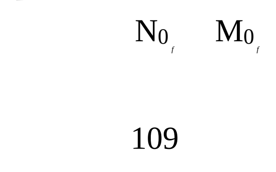
Біз жазықтықтарды түрліше түрлендіру мәселелерімен айналысамыз, оларға келесі бабтарда жеке – жеке тоқталамыз, мысалдар келтіреміз.

<u>1–мысал.</u> АВС үшбұрышы берілген. Осы үшбұрыштың АВ қабырғасын Вс қабырғасы бағытында АС қабырғаға проекциялау керек болсын (53 – сурет) бұл бейнелеу боладыма?

Бұл бейнелеу болады өйткені АВ–дан ВС–ға параллель етіп жүргізілген түзу АВ мен АС қабырғалар арасында сәйкестік орнатады, егер $M \in AB$, $MM_0 \| BC$, $M_0 = MM_0 \cap AC$ болса M мен M_0 сәйкестенеді $f(M) = M_0$ болады. Мұндағы f, АВ – ның нүктесінен ВС – ға параллель жүргізіп, оның АС мен қиылысу нүктесін тап дегенді білдіреді.

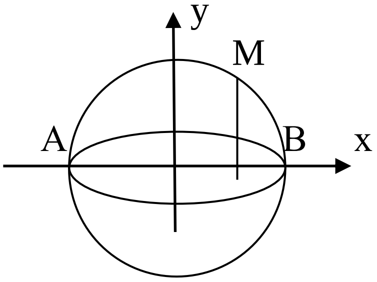
Бұл $f: AB \to AC$ бейнелеуі биекция, яғни өзара бірмәнді бейнелеу болады.

Өйткені $f(AB) = AC$ болады, яғни АВ – ның бейнесі АС мен беттеседі. Сондықтан f – сюръекция болады. Ал, параллель түзулер өзара қиылыспайтындықтан АВ – ның әртүрлі M, N нүктелерінен бейнелері де әртүрлі болады, яғни $M_0 \neq N_0$ болады. Сондықтан f бейнелеуі инъекция болады. Сонымен f әрі инъекция, әрі сюръекция болғандықтан ол биекция (өзара бірмәнді бейнелеу) болады.



53 – сурет

<u>2 – мысал.</u> $M(x,y)$ нүкте берілген, оны ол жатқан жазықтықтың $N(x,y)$ нүктесіне $X=x,\quad Y=ky$ формуласы сақталатындай етіп түрлендірейік. Мұндай түрлендіруді $k>1$ болған жағдайда жазықтықты X өсіне сығу, $k<1$ болғанда x өсінен сығу түрлендіруі дейді. Осындай $k=\frac{b}{a}$ түрлендіруде $x^2+y^2=a^2$ шеңбер эллипске айналады (54 – сурет).



54 – сурет

Өйткені $X=x,\quad Y=\frac{a}{b}y$ болатындықтан орнына қойсақ $x^2+\frac{a^2}{b^2}y^2=a^2$ бұдан $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, бұл эллипс теңдеуі.

§11 Жазықтықтың қозғалыстары

11.1. Қозғалыс және оның қасиеттері. Жазықтықтың қозғалысы немесе орын ауыстыруы деп жазықтықты оның кезкелген екі нүктесінің ара қашықтығы өзгермейтіндей етіп түрлендіруді айтады.

Егер $f:\pi\to\pi$ қозғалыс болса және бұл қозғалыста π жазықтықтың A,B нүктелері осы жазықтықтың A',B' нүктелеріне сәйкестенсе (көшсе) онда $AB=A'B'$ болады екен.

Қысқартып жазу мақсатымен: «f қозғалыста A,B,C нүктелер A',B',C' нүктелерге көшсін» - дегенді $f(A)=A',\quad f(B)=B',\quad f(C)=C'$ деу орнына, $f(A,B,C)=f(A',B',C')$ деп жазуға және «A,B,C нүктелері бір түзуде жатады және B нүкте A мен C нүктелердің арасында жатады» дегенді $\overline{ABC}$ деп жазуға келісейік.

Қозғалыстың қасиеттері

1°. Қозғалыста бір түзу бойында жататын (жатпайтын) нүктелердің бейнелеріде бір түзу бойында жатады (жатпайды).

Дәлелі $\overline{ABC}$ болсын және f қозғалыста $f(A,B,C)=A',B',C'$ көшсін. $\overline{ABC}$ болғандықтан $AB+BC=AC\quad(*)$ болады. Қозғалыс анықтамасы бойынша

$f(A,B,C)=A',B',C'$ болғандықтан $AB=A'B', BC=B'C', \quad AC=A'C'$ $\binom{*}{*}$ болады. Сонда $(*)$ мен $\binom{*}{*}$ дан $A'B'+B'C'=A'B'$ болады. Ал, бұл теңдік $\overline{A'B'C'}$ болған жағдайда ғана мүмкін. Сонымен f қозғалыста түзу бойында жататын нүктелер түзу бойында жататын нүктелерге көшеді екен және нүктелердің түзу бойындағы орналасу тәртібі сақталады екен.

Енді А,В,С нүктелер бір түзуде жатпасын. Онда үшбұрыш қабырғаларының қасиеті бойынша $AB+BC>AC$ болады. Сонда $\binom{*}{*}$ бойынша соңғы теңсіздіктен $A'B'+B'C'>A'C'$ болады. Ал, бұл A',B',C' нүктелер бір түзуде жатбайды деген сөз. Сөйтіп қозғалыс бір түзу бойында жататын нүктелерді түзу бойында жататын нүктелерге бір түзу бойында жатпайтын нүктелерді түзу бойында жатбайтын нүктелерге көшіреді екен.

2°. Қозғалыста «арасында жатады» қатысы сақталады. Шынында да А,В,С нүктелері бір түзуде жатады және олар әртүрлі нүктелер болса, онда олардың тек біреуі қалған екеуінен арасында жатады. Мысалы, $\overline{ABC}$ болса, $f(A,B,C)=A',B',C'$ болса, онда 1° қасиет бойынша A',B',C' болады. Демек екі нүктенің арасындағы жатқан нүктенің бейнесі сол нүктелердің бейнелерінің арасында жатады, яғни «арасында жату» қатысы сақталады.

3°. Қозғалыста үш нүктенің жәй қатынасы сақталады А,В,С нүктелер бір түзуде жатса онда $\lambda=\dfrac{AB}{BC}$ санын осы үш нүктенің жәй қатынасы дейді де, оны $\lambda=(AC,B)=\dfrac{AB}{BC}$. Сонда $\overline{ABC}$, $(AC,B)=\dfrac{AB}{BC}=\lambda$, $f(A,B,C)=A',B',C'$ болса, онда қозғалыс анықтамасы бойынша $AB=A'B', BC=B'C', \quad AC=A'C'$ болғандықтан $(AC,B)=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{A'B'}{B'C'}=(A'C',B')$ болады. Демек үш нүктенің жәй қатынасы сақталады.

4°. Қозғалыста түзу түзуге, параллель түзу параллель түзуге, қиылысатын түзу қиылысатын түзуге көшеді.

Дәлелі 1°, 2° қасиеттер бойынша түзу бойында жататын нүктелер түзу бойында жататын нүктелерге көшеді және олардың орналасу тәртібі сақталады, ал түзу бойында жатпайтын нүктенің бейнесі де түзу бойында жатпайды.

Демек түзу қозғалыста түзуге көшеді.

Енді а, в екі түзу берілген a',b' олардың бейнелері болсын. $a\|b$ болғанмен олардың бейнелері $a'\|b'$ болады дейік. Түзулер а мен в параллель болмағандықтан олар қиылысу керек, $a\cap b=M$ дейік. Түрлендіру биекция (өзара бірмәнді түрлендіру) болғандықтан М нүкте а түзуінде жатқандықтан оның бейнесі M' нүкте a' түзуінде жату керек, сол сияқты М нүкте в – да да жатқандықтан оның бейнесі M' нүкте b' түзуде жату керек. Сөйтіп $M'\in a', M'\in b'$. Сондықтан M' нүкте a',b' түзулердің қиылысу нүктесі болу керек, бірақ a' пен b' шарт бойынша параллель. Демек $a\|b$ болғанда $a'\|b'$

болады деген дұрыс емес екен. Сондықтан қиылысатын түзудің бейнесі де қиылысатын түзу болады.

Егер $a\|b$, бірақ $a'\|b'$десек, онда a' пен b' тың қиылысу нүктесінің түпнұсқасы а – да да, в – да да жатуы керек, яғни а мен в қиылысу керек. Бірақ олар шарт бойынша параллель. Демек параллель түзудің бейнелері де параллель болады.

5°. Қозғалыста бұрыш шамасы сақталады.

Дәлелі А,В,С үш нүкте бір түзуде жатпасын және $\angle ABC=\alpha$ болсын. Қозғалыста А,В,С нүктелер A',B',C' нүктеге көшсін, онда $AB=A'B', BC=B'C',\ \ AC=A'C'$ болар еді де $\Delta ABC=\Delta A'B'C'$ болар еді. Сондықтан $\angle\dot{A}\dot{B}\dot{C}=\angle ABC$ болады. Осы сияқты $\angle BCA=\angle B'C'A',\ \ \angle BAC=\angle B'A'C'$ болады, яғни бұрыш шамасы қозғалыста өзгермейді.

6°. Бұлардан салдар ретінде қозғалыста: тік бұрыш тік бұрыш болып, перпендикуляр түзулер перпендикуляр түзулер болып, кесінді өзіне тең кесінді болып, сәуле – сәуле болып, репер – репер болыр түрленетіні шығады.

Бір түзуде жатпайтын үш нүктеден жасалған фигураны репер дейді. Егер $R=(A,B,C)$ репер болса $\overrightarrow{AB}=l_1,\ \ \overrightarrow{AC}=l_2$ векторларды базис үшін алып, R реперді $(A,\vec{l_1},\vec{l_2})$ координата жүйесі ретінде қарастыруға болады. Жалпы геометрияда репер мен координата жүйесі бұл ұғым ретінде қолданылады.

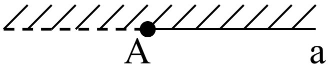
Қозғалыста бұрыш шамасы, кесінді ұзындығы сақталатындықтан репер реперге, тікбұрышты координата жүйесі (репері) тікбұрышты координата жүйесіне (реперге) көшеді.

7°. қозғалыстың негізгі теоремасы. π жазықтығында $R=(A,B,C)$ және $R'=(A',B',C')$ екі репер берілсе, онда R реперді R' реперге көшіретін тек бір қозғалыс болады және ол қозғалыста R репердегі координаталары (x,y) болатын М нүкте, R' репердегі координаталары дәл осындай (x,y) болатын M' нүктеге көшеді.

Дәллелі. Алдымен R ді R'ке көшіретін қозғалыстың болатынына көз жеткізейік. Ол үшін π жазықтықты өзіне - өзін бейнелеу $f:\pi\to\pi-$ді былайша алайық. R - дегі координаталары (x,y) болатын $M(x,y)_R$ нүктеге R' -тегі координаталары осыған тең болатын $M'(x,y)_{R'}$ нүктені сәйкестендірейік. Сонда бұл бейнелеуде $A(0,0)\to A'(0,0),\ B(1,0)\to B'(1,0),\ C(0,1)\to C'(0,1)$ нүктелерге көшер еді. Осылайша құрылған f бейнелеуде π жазықтығы өзіне-өзі бірмәнді бейнеленеді, $f-$биекция болады. Сондықтан f жазықтықты түрлендіру болады. Сонымен қатар f түрлендіруде $M_1(x_1,y_1)_R\to M_1'(x_1',y_1')_{R'}$ және $M_1(x_1,y_1)_R\to M_1'(x_1',y_1')_{R'}$ көшетін болса, координаталар тең болғандықтан $M_1M_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2}=M_1'M_2'$ болады. Демек f түрлендіруі қозғалыс болады.

Сөйтіп R ді R' ке көшіретін $f: R \to R'$ қозғалыс болады екен. Енлі осы қозғалыстың жалғыз – ақ болатынын дәлелдейік. Ол үшін $f: R \to R'$ көшіретін бұдан басқа $g: R \to R'$ қозғалыс бар дейік және $f \neq g$ болады дейік.

Мұндай жағдайда жазықтықта $f(D) = D'$, $g(D) = D''$ болатын D нүкте болады. Ал, $f(A, B, D) = A', B', D'$; $g(A, B, D) = A', B', D''$ болатындықтан $AD = A'D'$, $AD = A'D''$ болар еді. Ал, $A'D' = A'D''$ деген сөз, A' нүкте $D'D''$ кесіндінің екі ұшынан бірдей қашықтықта жатыр деген сөз. Дәл осы сияқты B', C' нүктелеріде $D'D''$ кесінді ұшынан бірдей қашықтықта жатады. Ал, бұл $R' = (A', B', C')$ репер дегенге қайшы. Сондықтан R ді R' ке көшіретін қозғалыс біреу – ақ болады және ол қозғалыста $M(x, y)_R$ нүкте $M'(x, y)_{R'}$ нүктеге көшеді.



55 – сурет

8°. А нүкте, ол нүктеден шығатын а сәуле және ол сәуле енетін түзу шегарасы болатын α жарты жазықтық берілсе (55–сурет), онда олардан тұратын (А,а,α) үштекті жалау дейді. (А,а,α) жалауды (В,в,β) жалауға көшіретін жалғыз қозғалыс болады.

11.2. Қозғалыстың аналитикалық өрнегі

π жазықтығына ортонормаланған $R = (O, E_1, E_2)$ репер ендірілсін, $\pi -$ге М(х,у) жатсын. f қозғалыс оларды $R' = (O', E_1', E_2')$ реперге және $M'(x', y')$ нүкте көшірсін. Негізгі теорема бойынша $M' -$тің $R' -$тегі координаталары (х,у) болу керек, яғни $M'(x, y)_{R'}$ болады.

$R = (O, E_1, E_2')$ реперде $R' -$тің элементтері былайша анықталсын $O'(x_0, y_0)$, $(OE_1; OE_2$ Сонда $M'(x, y)_{R'}$, $M'(x', y')_R$ болғандықтан (х,у) пен $(x', y') -$ты бір M' нүктенің әртүрлі екі R', R репердегі (тікбұрышты координата жүйесіндегі) координаталары деп қарастыруға болады.

Бір нүктенің әртүрлі екі тікбұрышты координаталар жүйесіндегі координаталары мынадай формуламен байланысады

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - \varepsilon y\sin\alpha + x_0 \\ y' = x\sin\alpha + \varepsilon y\cos\alpha + y_0, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\varepsilon\sin\alpha \\ \sin\alpha & \varepsilon\cos\alpha \end{vmatrix} = \varepsilon \neq 0 \qquad (11-1)$$

Егер $\left(\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2}\right)$ базис пен оның бейнесі $\left(\overrightarrow{O'E_1'}, \overrightarrow{O'E_2'}\right)$ базис бірдей бағдарланған болса $\varepsilon = +1$, әртүрлі бағдарланса $\varepsilon = -1$ болады. Бұл базистер бірдей (әртүрлі) бағдарланған болса R мен R' реперде бірдей (әртүрлі) бағдарланған делінеді.

Қозғалыста кез келген базиспен оның бейнесі бірдей (әртүрлі) бағдарланса онда ол қозғалыс жазықтық бағдарын сақтайды (кері ауыстырады) делінеді.

Тік бұрышты $R=(O,E_1,E_2)$ реперді тікбұрышты $R'=(O',E_1',E_2')$ реперге көшіретін f қозғалыста (11-1) формула М(х,у) нүкте мен оның бейнесі $M'(x',y')$ нүкте координаталарын байланыстырады.

Керісінше, егер тікбұрышты $R=(O,E_1,E_2)$ репер берілсе, онда (11-1) формула $f:\{M(x,y)\to M'(x',y')\}$ бейнелеуді анықтайды.

(11-1) дің анықтауышы 0 – ге тең емес болғандықтан ол формулаға әртүрлі (х,у) – ке әртүрлі (x',y') сай келеді. Демек әртүрлі М(х,у) нүктеге әртүрлі $M'(x',y')$ нүкте сай келеді және нүктелер арасы сақталады.

Демек (11-1) формуламен анықталатын f түрлендіру қозғалыс болады. Сондықтан ол формуланы қозғалыстың аналитикалық өрнегі дейді.

Ол формулада $\varepsilon=1$ болса, онда ол бірінші текті қозғалыс делінеді (жазықтық бағдарын өзгертпейді), яғни $\varepsilon=-1$ болса, онда ол 2 – текті қозғалыс делінеді (жазықтық бағдарын кері ауыстырады).

Теорема. Егер ортонормаланған базисте (реперде) f бейнелеудің аналитикалық өрнегі мынадай

$$\begin{cases} x'=a_1x+b_1x+c_1 \\ y'=a_2y+b_2y+c_2 \end{cases} \qquad (11-2)$$

болса және оның матрицасы $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ ортогонал матрица болса, яғни $a_1^2+a_2^2=1,\ \ b_1^2+b_2^2=1,\ \ a_1b_1+a_2b_2=0$ болса, онда f бейнелеу қозғалыс болады және $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=1$ болса ол бірінші текті, $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=-1$ болса екінші текті қозғалыс болады. Ортогонал матрицаның анықтауышы не +1, не -1 ге яғни $\varepsilon-$ге тең болады.

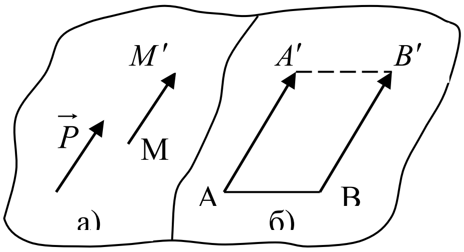
Бұл теоремадағы өрнекті (11-1) мен салыстырса $a_1=\cos\alpha,\ b_1=-\varepsilon\sin\alpha,\ a_2=\sin\alpha,\ b_2=\varepsilon\cos\alpha$, ал $a_1^2+a_2^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha,$ $b_1^2+b_2^2=\varepsilon^2\sin^2\alpha+\varepsilon^2\cos^2\alpha=\varepsilon^2,$ $a_1b_1+a_2b_2=-\varepsilon\cos\alpha\sin\alpha+\varepsilon\sin\alpha\cos\alpha$. Демек олар бірдей.

11.3. Қозғалыстың мысалдары

1°. Теңбе – тең түрлендіру. Жазықтықтың әрбір нүктесін өзіне - өзін сәйкестендіретін түрлендіруде сәйкес нүктелер арасы өзгермейді. Сондықтан жазықтықты бұлайша түрлендіру қозғалыс болады. Ондай түрлендіруді жазықтықты теңбе – тең түрлендіру дейді.

Теңбе – тең түрлендіруде кезкелген фигура өзіне - өзі көшеді.

2°. Жазықтықты параллель жылжыту. π жазықтығы және онда жатқан $\vec{P}$ векторы берілсін. Жазықтықтың кезкелген М нүктесін $\overrightarrow{MM'}=\vec{P}$ болатын M' нүктеге сәйкестендіретін $f:\pi\to\pi$ түрлендіру бейнелеу. Сол жазықтықты түрлендіру болады. Өйткені жазықтықтың әрбір нүктесі $\vec{P}$ бағытта $|\vec{P}|$ қашықтықтағы нүкте сәйкестенеді. Сондықтан бұлайша сәйкестендіру, жазықтықты өзіне - өзін бейнелеу биективті бейнелеу болады. Демек жазықтықты түрлендіру болады. Ондай түрлендіру жазықтықты $\vec{P}$ векторға параллель жылжыту делінеді (56 а – сурет).



56 – сурет

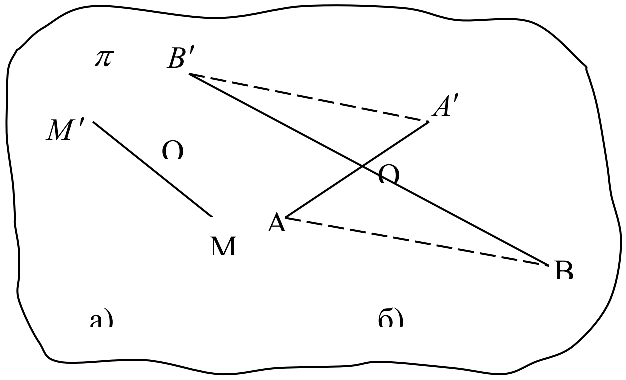
Жазықтықта А,В нүктелер берілсін, жазықтықты $\vec{P}$ векторға параллель жылжытқанда А,В нүктелер A', B' нүктелерге көшсін. Сонда $\overrightarrow{AA'} = \vec{P}, \quad \overrightarrow{BB'} = \vec{P}$ болады (56 б – сурет). $AA' \| BB'$, $AA' = BB'$ болғандықтан $ABB'A'$ параллелограм болады да $AB = A'B'$ болады. Сөйтіп параллель жылжытуда нүктелердің арақашықтығы сақталады екен. Олай болса жазықтықты параллель жылжыту қозғалыс болады.

Егер π жазықтығына $R = \left(O, \vec{l_1}, \vec{l_2}\right)$ репер ендірсек, ол реперде $\vec{P} = \{P_1, P_2\}$ болса және М(х,у) нүктенің параллель жылжытудағы бейнесі $M'(x', y')$ болса, онда $\overrightarrow{MM'} = \vec{P}$ болғандықтан $x' - x = P_1, \quad y' - y = P_2$ болар еді. Бұдан

$$\begin{cases} x' = x + P_1 \\ y' = y + P_2 \end{cases} \qquad 11-3$$

Бұл параллель жылжытудың аналитикалық өрнегі болады. Оны былайша түрлендірсек $\begin{cases} x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y + P_1 \\ y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y + P_2 \end{cases}$ оның анықтауышы $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ болып шығады. Олай болса параллель жылжыту бірінші текті қозғалыс болады екен.

3°. Нүктеге қарағандағы симметрия. π жазықтығында О нүкте берілсін. Жазықтықтың М нүктесіне 1 – ден, М,О,M' нүктелер бір түзуде жататын, 2 – ден, $\overline{OM'} = -\overline{OM'}$ болатын M' нүктені сәйкестендіретін $f : \pi \to \pi$ бейнелеу жазықтықты түрлендіру болады. Ол түрлендіруді нүктеге қарағандағы симметрия дейді. О нүкте симметрия центрі делінеді (57 а – сурет).



57 – сурет

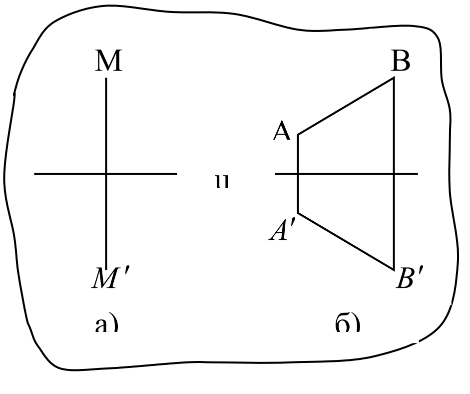
π жазықтықтан A,B нүктелер алайық, оларға O нүктеге қарағанда A',B' симметриялы нүктелер болсын. Сонда $\Delta OAB = \Delta OA'B'$ болатындықтан $A'B' = AB$ болады (57 б–сурет). Сөйтіп нүктелердің арақашықтығы сақталады. Сондықтан нүктеге қарағандағы симметрия қозғалыс болады. Егер π жазықтыққа $R = \left(O, \vec{l_1}, \vec{l_2}\right)$ тікбұрышты репер ендірсек, симметрия центрі үшін координата басын алсақ, онда M(x,y) нүктеге O нүктеге қарағандағы симметриялы нүкте $M'(+x',+y')$ болса, онда $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM'}$ болғандықтан

$$\left.\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y \end{aligned}\right\} \quad (11-4)$$

болады. Бұл нүктеге қарағандағы симметрияның аналитикалық өрнегі болады. (11-4) теңдікті былайша жазсақ $\begin{cases} x' = -1\cdot x + 0\cdot y + 0 \\ y' = 0\cdot x - 1\cdot y + 0 \end{cases}$ бұдан $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0$ болғандықтан нүктеге қарағандағы симметрия бірінші текті қозғалыс болатындығы шығады.

<u>4°. Өстік симметрия.</u> π жазықтығында u түзуі берілсін. Жазықтықтың M нүктесіне 1 – ден, $MM' \perp U$ болатын, 2 – ден $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \left|\overrightarrow{OM'}\right|$, $O = U \cap MM'$ болатын M' нүктені сәйкестендіретін $f : \pi \to \pi$ бейнелеу жазықтықты түрлендіру болады. Оны U өске қарағандағы симметрия дейді (58 а – сурет), U симметрия өсі делінеді.

A,B нүктелерге U өсіне қарағандағы симметриясы нүктелер A',B' болсын (58 б – сурет).



58 – сурет

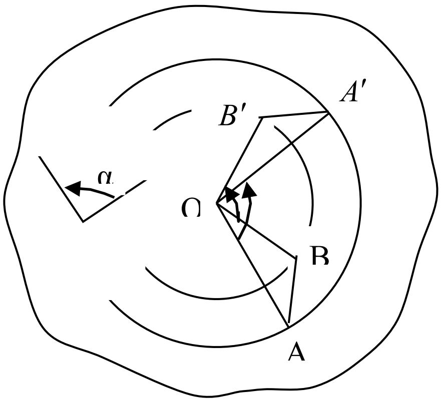
Онда $A'B' = AB$ болады. Демек өстік симметрия қозғалыс болады. Егер жазықтыққа тікбұрышты $R = \left(O, \vec{l_1}, \vec{l_2}\right)$ реперін, оның абсцисса өсі U өсімен беттесетіндей етіп ендірсек және М(х,у) нүкте бейнесі $M'(x', y')$ десек, онда

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \qquad (11-5)$$

болар еді. Бұл өстік симметрияның аналитикалық өрнегі болады. Мұны $\begin{cases} x' = 1\cdot x + 0\cdot y + 0 \\ y' = 0\cdot x - 1\cdot y + 0 \end{cases}$ деп жазсақ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0$ болар еді. Сондықтан өске қарағандағы симметрия екінші текті қозғалыс болады.

5°. Жазықтықты бұру. π жазықтығында О нүктесі және бағытталған α бұрышы берілсін.

Жазықтықтың А нүктесіне $OA = OA'$ және $\angle AOA' = \alpha$ болатын A' нүктесін сәйкестендірсе, бұл жазықтықты түрлендіру болады. Өйткені мұндай сәйкестік биекция болады (59 – сурет).



59 – сурет

Мұнда жазықтықты бұру түрлендіруі дейді. Егерде А,В нүктелер беріліп, оларды О нүктеден бұрғанда және $OA = OA',\ \ OB = OB'$ болатын A', B' нүктелерді алсақ $\Delta OAB = \Delta OA'B'$ болады. Себебі салу бойынша $OA = OA',\ \ OB = OB'$ және $\angle AOA' = \angle BOB' = \alpha$. Сондықтан $\Delta AOB = \Delta A'OB'$ бұл үшбұрыштардың теңдігінен $AB = A'B'$. Сондықтан жазықтықты бұру түрлендіруі қозғалыс болады.

Егер π жазықтыққа төбесі берілген О нүктемен беттесетін тікбұқрышты $R = \left(O, \vec{l_1}, \vec{l_2}\right)$ реперін ендірсек, ол реперде А(х,у) оның бейнесі $A'(x', y')$ болса, онда $\angle AOA' = \alpha,\ \ \left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OA'}\right|,\ \ \overrightarrow{OA} = \{x, y\},\ \ \overrightarrow{OA'} = \{x', y'\}$ болатындықтан $\cos\alpha = \dfrac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}\cdot\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \dfrac{xx' + yy'}{x^2 + y^2};\quad \sin\alpha = \dfrac{xy' - x'y}{\sqrt{x^2 + y^2}\cdot\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \dfrac{xy' - x'y}{x^2 + y^2}$. Егер $\sqrt{x^2 + y^2} = \rho$ десек, $\begin{cases} xx' + yy' = \rho^2\cos\alpha \\ xy' - x'y = \rho^2\sin\alpha \end{cases}$ болар еді.

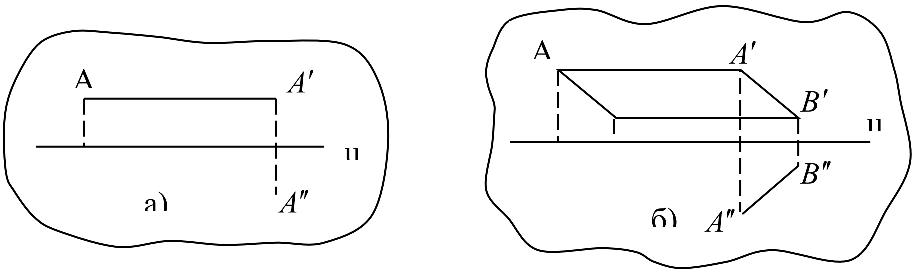
Бұдан

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \qquad (11-6)$$

Мұны жазықтықты α бұрышқа бұру түрлендіруінің аналитикалық өрнегі дейді. Мұнда $\Delta = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 > 0$ болатындықтан бұру түрлендіруі 1 – текті қозғалыс болады.

<u>6°. Сырғыма симметрия.</u> π жазықтығында u түзуі және оған параллель $\vec{P}$ векторы берілсін. u түзуіне параллель $\vec{P}$ векторға параллель жылжытумен u түзуіне қарағандағы симметрияның көбейтіндісін сырғымалы симметрия дейді.

Жазықтықтың а нүктесін u түзуге параллель бағытта $\vec{P}$ векторға жылжытқанда A' нүктесі шықсын, ал A' нүктеге U өске қарағандағы. Симметриялы нүкте A'' болсын (60 а – сурет).



60 – сурет

Сонда бұл екі түрлендірудің көбейтіндісі болатын түрленендіру А нүктесі A'' нүктеге көшіреді. A'' екі нүкте А нүктеге сырғымалы симметриялы нүкте делінеді.

Жазықтықта А,В нүктелер берілсе, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{P}$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec{P}$ салып A_1B_1 – қойсақ, A', B' оларға u қарағанда симметриялы нүктелер болса (60 б – сурет) онда $AB = A_1B_1$ және $A_1B_1 = A'B'$ болады. $A_1B_1 = A'B'$ болады, яғни нүкте арасы сырғымалы симметрияда сақталады. Демек ол қозғалыс болады. Егер π жазықтыққа абсциссасы U өсімен беттесетін $R = \left(O, \vec{l_1}, \vec{l_2}\right)$ тікбұрышты репер ендірсек, ол реперде А(x,y) $A'(x_1, y_1)$, $A''(x', y')$, $\vec{P} = \{P_1, 0\}$ болса, онда $\overrightarrow{AA'} = \vec{P}$ болғандықтан $x_1 - x = P$, $y_1 - y = 0$, ал A'' пен A' нүктелер абсцисса өсіне қарағанда симметриялы болғандықтан $x' = x_1$, $y' = -y_1$. Сөйтіп $A(x, y)$, $A'(x', y')$ нүктелер координаталары былайша байланысады

$$\begin{cases} x' = x + P_1 \\ y' = -y \end{cases} \qquad (11-7)$$

Бұл сырғымалы симметрияның аналитикалық өрнегі болады. Мұны $\begin{cases} x' = x + 0 \cdot y + P_1 \\ y' = 0 \cdot x - 1 \cdot y + 0 \end{cases}$ десек $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0$ болады. Демек сырғымалы симметрия екінші текті қозғалыс болады.

11.4. Жазықтық қозғалыстарының классификациясы

Жазықтық қозғалыстарында кейбір нүктелер, түзулер өзіне - өзі бейнеленеді. Ондай нүктелер мен түзулерді. Сол қозғалыстың инвариант (қозғалмайтын) нүктелері, түзулері дейді. Қозғалыстарды оның инвариант болатын нүктелеріне, түзулеріне қарап классификациялайды.

Егер қозғалыста инвариант нүкте бірден көп болса, онда қозғалыс не теңбе – тең түрлендіру, не өске қарағандағы симметрия болады.

Теңбе – тең түрленуде әрбір нүкте өзіне - өзі бейнелетіндіктен бұл кезде жазықтықтың барлық нүктесі қозғалмайтын (инвариант болатын) нүктелер болады. Ал, өске қарағандағы симметрияда өс бойында жатқан барлық нүкте өзіне - өзі бейнеленеді. Демек олардың барлығы инвариант (қозғалмайтын) нүктелер болады.

Егер қозғалыста инвариант нүкте тек біреу болса, онда қозғалыс бұру болады. Жазықтықты бір нүкте айналасынан бұрған кезде тек сол нүкте өзіне - өзі бейнеленеді. Жазықтықтың қалған нүктелері орын ауыстырады.

Егер қозғалыста инвариант нүкте мүлдем жоқ болса, онда ондай қозғалыс не параллель жылжыту, не сырғымалы симметрия болады. Өйткені бұл түрлендіруде жазықтықтың барлық нүктесі басқа нүктеге көшеді.

Сөйтіп жазықтық қозғалысының 4 түрі болады, олар мына таблицада келтірілген.

	1 – текті қозғалыс		
№	Қозғалыс аты	Инвариант нүктелері	Инвариант түзулері
1.	α бұрышқа бұру		
	а) $\alpha \neq 0, \alpha \neq \pm\pi$ болса	Бұру центрі	–
	б) $\alpha = 0$ теңбе – тең түрлендіру	Жазықтықтың барлық нүктелері	Жазықтықтың кезкелген түзуі
	в) $\alpha = \pm\pi$ центрлі симметрия	Симметрия центрі	Симметрия центрінен өтетін кезкелген түзу
2.	$\vec{P}$ векторға параллель жылжыту		
	а) $\vec{P} \neq \vec{0}$	Жоқ	$\vec{P}$ векторға параллель кезкелген түзу
	б) $\vec{P} = \vec{0}$	Жазықтықтың барлық нүктесі	Жазықтықтың барлық түзуі
	2 – текті қозғалыс		
3.	Өстік симметрия	Өстің барлық нүктелері	Өстің өзі және оған перпендикуляр түзулер
4.	Сырғымалы симметрия	Жоқ	Өсі

11.5. Жазықтық қозғалыстарының группасы және оның ішкі группалары

Түрлендірулер жиыны $F=\{f\}$ группа болу үшін бұл жиын төмендегі екі шартты қанағаттандыруы керек.

1°. F жиынға кіретін әрбір f түрлендіруге кері түрлендіру $f^{-1}-$де $F-$ке кіруі керек.

2°. F тен алынған кезкелген f_1, f_2 екі түрлендірудің көбейтіндісі $f=f_2 f_1-$де $F-$ке кіруі керек.

Осы тұжырымды басшылыққа ала отырып қозғалыстар группалары жайлы мынадай теоремаларды дәлелдеуге болады.

<u>1–теорема.</u> Жазықтық қозғалыстарының жиыны D группа болады.

Дәлелі $f \in D$ қозғалыс болсын. Егер ол А,В нүктелерді A', B' нүктелерге көшірсе, онда қозғалыс анықтамасы бойынша $AB=A'B'$ болу керек. Мұны былайша $A'B'=AB$ жазуға болады. Ал, бұл A', B' нүктелерді А,В нүктелерге көшіретін түрлендіруде қозғалыс болады деген сөз. Сөйтіп f қозғалысқа кері түрлендіруде қозғалыс болады екен.

Енді f_1, f_2 қозғалыстар берілсін. Онда олар жазықтықтың А,В нүктелерін $f_1(A,B)=A',B';\quad f_2(A',B')=A'',B''$ нүктелерге көшірер еді және $AB=A'B',\quad A'B'=A''B''$ болады. Сөйтіп f_1, f_2 қозғалыстардың көбейтіндісі $f=f_2 f_1$ нәтижесінде А,В нүкте A'', B'' нүктелерге көшеді және $AB=A''B''$ болады, яғни қозғалыстар көбейтіндісі нүктелер арақашықтығын сақтайды екен. Сондықтан қозғалыстар көбейтіндісі қозғалыс болады. Осы екі шарт орындалғандықтан қозғалыстар жиыны D группа болады. Оны қозғалыстар группасы дейді.

<u>2–теорема.</u> Бірінші текті қозғалыстар жиыны D_1 группа болады.

Дәлелі $f-$бірінші текті қозғалыс болса, онда ол қозғалыста жазықтық бағдары сақталады. Сондықтан оған кері f^{-1} түрлендіруде де жазықтық бағдарын өзгертпейді. Демек 1 – текті қозғалысқа кері f^{-1} түрлендіруде 1 – текті қозғалыс болады.

Егер f_1, f_2 1 – текті қозғалыстар болса, олардың әрқайсысы жазықтық бағдарын өзгертпейді. Демек олардың көбейтіндісі $f=f_2 f_1$ де жазықтық бағдарын өзгертпейді. Сондықтан $f_2 f_1=f$ түрлендіруі 1 – текті қозғалыс болады.

Жоғарыда айтылған екі шарт 1 – текті қозғалыстар жиыны D_1- де орындалады екен. Сондықтан 1 – текті қозғалыстар жиыны D_1 группа болады. Оны 1 – текті қозғалыстар группасы дейді. 1 – текті қозғалыс жалпы қозғалыстың бі р бөлігі болатындықтан 1 – текті қозғалыстар группасы D_1 жалпы қозғалыстар группасы $D-$ның ішкі группасы (бөлік группасы) болады.

3–теорема. Екінші текті қозғалыстар жиыны D_2 группа болмайды. Өйткені f_1, f_2 екінші текті қозғалыстар болса, онда f_1 жазықтық бағдарын кері ауыстырады, ал f_2 оның бағдарын тағыда кері ауыстыратындықтан жазықтық бұрынғы бағдарына ие болады. Сонымен екі 2 – текті қозғалыс көбейтіндісі 1 – текті қозғалыс болады.

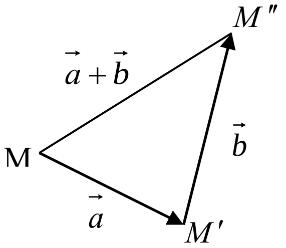
Сондықтан екінші текті қозғалыстар жиыны D_2 группа болмайды. Жазықтықта F фигура берілсін. Жазықтық қозғалысы нәтижесінде бұл фигура F' фигураға айналады және $F-$тен кейбір қасиеттері оның бейнесі $F'-$ке ешқандай өзгеріссіз өтсе, кейбір қасиеттері өзгеріп кетеді (қозғалыста сақталмайды). Фигураның барлық қозғалыстарда өзгермейтін қасиеттерін бұл фигураның қозғалыстар группасы D қарағандағы инварианттық қасиеттері дейді немесе қысқаша D группаның инварианттары дейді.

Мысалы фигураның екі нүктесінің арақашықтығы D группаға қарағанда инварианттық қасиет болады. Мұны D қозғалыстар группасының негізгі инварианты дейді. Фигураның кесінді , сәуле, түзу болу қасиеттері де D группаға қарағанда фигураның инварианттық қасиеттері болады. D группа үшін түзудегі үш нүктенің жай қатынасы, бұрыш өлшемі, репер бағдары фигура аудандарыда инварианттық қасиет болады.

Егер F' фигура F фигурадан қозғалыс нәтижесінде шыққан болса, онда оларды тең немесе конгруэнты дейді. Фигуралардың теңдігі эквиваленттік қатыста болады: 1 – ден $F = F_1$ кезкелген фигура өзіне - өзі тең болады. 2 – ден $F_1 = F_2$ болса, онда $F_2 = F_1$ болады. 3 – ден $F_1 = F_2, \quad F_2 = F_3$ болса, онда $F_1 = F_3$ болады. Екі фигураның тең екендігін ажытату үшін олардың бірі екіншісінен қозғалыс арқылы шыққанын дәлелдеу міндетті емес. Ол фигуралардың кейбір элементтерін салыстыра отырып олардың теңдігін анықтасада жеткілікті болады.

Мысалы үшбұрыштың қабырғалары мен бұрыштары тең болса, ол үшбұрыштар тең болады, радиустары теңдей дөңгелектер тең болады.

4–теорема. Жазықтықты параллель жылжытулар жиыны группа болады (61 – сурет).



61 – сурет

$f_a \quad \vec{a}-$ векторға, $f_b \quad \vec{b}-$векторға параллель жылжыту болсын. $f_a(M) = M', \quad f_b(M') = M''$.

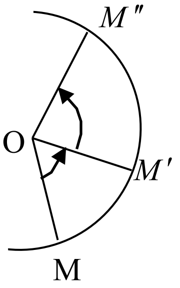
Сонда осы екі параллель жылжыту нәтижесінде яғни $f_b f_a = f_M$ параллель жылжытулар көбейтіндісінде М нүкте M'' нүктеге көшеді және

M'' нүкте М нүктені $\vec{a}+\vec{b}$ векторға жылжыту (61 – сурет) нәтижесінде шығады. Сөйтіп $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларға параллель жылжыту көбейтіндісі $\vec{a}+\vec{b}$ векторға параллель жылжыту болады екен.

Ал, f $\vec{a}-$ векторға жылжыту болса оған кері түрлендіру $-\vec{a}$ векторға параллель жылжыту болады.

Сөйтіп параллель жылжытулар жиынында жиынын группа болуының екі шарты да орындалады екен. Сондықтан параллель жылжытулар жиыны группа болады. Оны параллель жылжытулар группасы дейді. Ол 1 – текті қозғалыстар группасы, сондықтан қозғалыстар группасының ішкі (бөлік) группасы болады. Жылжыту бағыты параллель жылжытулар группасының инварианты болады.

5 – теорема. Жазықтықты бұрулар жиыны группа болады. Егер жазықтық бір нүктеден α және β бұрышқа бұрылса, онда бұл бұрулар көбейтіндісі жазықтықты $\alpha+\beta$ бұрышқа бұру болады. 62–суретте $f_\alpha(M)=M'$, $f_\beta(M')=M''$ болса $f_\alpha f_\beta(M)=M''$ болу үшін α,β бұрышқа бұру керектігі көрініп тұр. Оның үстіне $OM=OM'=OM''$.



62 – сурет

Жалпы әртүрлі екі центрден α және β бұрыштарға бұру көбейтіндісі не $\alpha+\beta$ бұрышқа бұру, не параллель жылжыту болатынын дәлелдеуге болады. Ол 1 – текті қозғалыстар группасы D_1-дің. Сондықтан қозғалыстар группасы $D-$ның ішкі группасы болады. Ол группаның инварианты бұру нүктесі және кезкелген нүкте мен бұру нүктесінің арасы болады. Сондықтан жазықтықты бір нүкте айналасынан барлық бұрулар жиыны группа болады.

Мыналар дұрыс болады.

6. Кезкелген 1 – текті қозғалыс не параллеь жылжыту, не бұру болады. (Мұны Шаль теоремасы дейді).

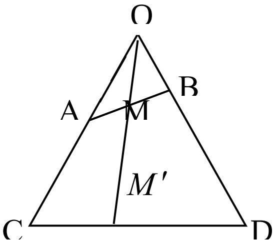
7. Кезкелген 2 – текті қозғалыстар жылжымасы симметрия түрінде өрнектеуге болады.

8. Бірінші текті кезкелген қозғалыс екі өстік симметрияның көбейтіндісі түрінде өрнектеуге болады.

Мысалдар қарастырайық:

1 – мысал. Жазықтықта АВ,СД кесінділері берілген. АВ – ны СД – ға бейнелейтін биективті бейнелеудің бар екенін дәлелдеңдер.

Шешуі: АВ мен СД кесінділердің ұштары АС мен ДВ ның қиылысу сызығы О нүктені тауып $M \in AB$ нүктеге $СД \cap OM = M'$ нүктені сәйкестендірсек бұл сәйкестік биекция болады (63 – сурет).



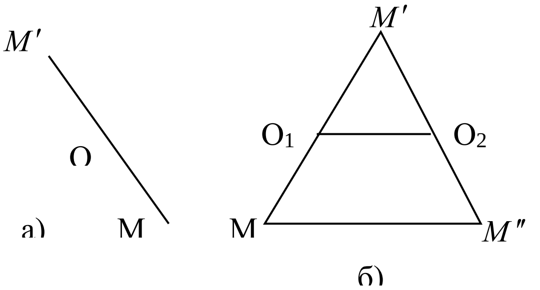
63 – сурет

АВ – ның әрбір нүктесінің СД – да бірғана бейнесі болады және әртүрлі нүктенің бейнесі де және әртүрлі және СД – да түп нұсқасы жоқ нүкте болмайды.

Егер $AB \| СД$, $AB = СД$ болса АС – ға параллель бағытта АВ – ны СД – ға проекциялау биекция болады.

<u>2–мысал.</u> Екі центрлі симметрияның көбейтіндісінің қандай түрлендіру болатынын анықтау керек.

Шешуі. а) Бір О нүктеге қарағандағы екі центрлік симметрия f_1 және f_2 берілсін. Жазықтықтың М нүктесін $f_1(M) = M'$ нүктеге, оны $f_2(M') = M''$ нүктеге көшірсін (64 а – сурет). Сонда центрлік симметрия анықтамасы бойынша $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OM'}$, $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM''}$ болу керек. Бұдан $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM''}$ болатындықтан M'' нүкте баста берілген М нүктемен беттеседі. Демек екі центрлі симметрияның көбейтіндісінде нүкте өзіне - өзі көшеді екен.



64 – сурет

Бұл бір нүктеге қарағандағы екі центрлі симметрияның көбейтіндісі теңбе – тең түрлендіру болады деген сөз. Сондықтан мұны $\vec{O}$ векторға параллель жылжыту деп қарастыруға болады. б) Енді O_1 нүктеге қарағандағы f_1, O_2 нүктеге қарағандағы f_2 екі центрлік симметрияны қарастырайық (64 б – сурет). $f_1(M) = M'$, $f_2(M') = M''$ болсын. Сонда бұл екі центрлі симметриялардың $f = f_2 f_1$ көбейтіндісі нәтижесінде М нүкте M'' нүктеге көшті. O_1 нүкте MM' – тен, O_2 нүкте $M'M''$ кесіндінің орталары болғандықтан O_1O_2 кесінді $\Delta MM'M''$ – тен орта сызығы болады. Сондықтан

$O_1O_2 = \frac{1}{2}MM''$. Сөйтіп $f(M) = M''$ ті М нүктені $2\overrightarrow{O_1O_2}$ векторға параллель жылжыту деп қарастыруға болады. Сөйтіп екі центрлі симметрия көбейтіндісі параллель жылжыту болады екен.

<u>3 – мысал.</u> Жазықтықтың А(1,-2), В(3,4) нүктелері өзара симметриялы болатын өстік симметрияның формуласын (аналитикалық өрнегін) анықтау керек.

Шешуі. алдымен А мен В нүктелер өзара симметриялы болатын өсті табайық. Ол АВ – ның қақ ортасынан оған перпендикуляр етіп жүргізілген түзу болады. АВ – ның қақ ортасының координаталары $x_0 = \frac{1+3}{2} = 3, \quad y_0 = \frac{-2+4}{2} = 1$ немесе (2,1) болады. АВ түзуініңбұрыштық коэффициенті $\kappa_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-(-2)}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$. Демек іздеген өстің бұрыштық коэффициенті $\kappa = -\frac{1}{\kappa_1} = -\frac{1}{3}$ болады.

Сонда өсь теңдеуі $y - 1 = -\frac{1}{3}(x-2), \quad 3y - 3 = -x + 2, \quad x + 3y - 5 = 0$ болады. Енді жазықтықтың кезкелген М(x,y) нүктесіне бұл өске қарағандағы симметриялы нүкте координаталары $M'(x', y')$ болады десек, онда берілген өс теңдеуін MM' кесіндінің қақ ортасының координаталары $\frac{x+x'}{2} + 3 \cdot \frac{y+y'}{2} - 5 = 0$ болу керек. Бұдан $x + x' + 3y + 3y' - 10 = 0,$ $x' + 3y' = -x - 3y + 10 \quad (*)$.

Ал, вектор $\overrightarrow{MM'} = \{x' - x, y' - y\}$ және өстен нормал векторы $\vec{n} = \{1{,}3\}$ өзара коллинар болатындықтан $\frac{x'-x}{1} = \frac{y'-y}{3}$. Бұдан $3x' - 3x = y' - y,$ $3x' - y' = 3x - y \quad (**)$. Сонда іздеген формуланы табу үшін $(*)$ мен $\binom{*}{*}$ ді бір жүйеге алу керек $\left\langle \begin{matrix} x' + 3y' = -x - 3y + 10 \\ 3x' - y' = 3x - y \end{matrix} \right|_3$. Бұдан $10x' = 8x - 6y + 10 \quad x' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 1$ $10y' = -6x - 8y + 30, \quad y' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 3$. Сонымен іздеген формула $\begin{cases} x' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 1 \\ y' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 3 \end{cases}$ болады. Мұның дұрыстыған тексерейік. Ол үшін (x,y) орнына А нүктенің координаталарын қою керек, сонда В нүктенің координаталары шығуы керек.

$$\begin{aligned} x' &= \frac{4}{5}\cdot 1 - \frac{3}{5}(-2) + 1 = \frac{4}{5} + \frac{6}{5} + 1 = \frac{4+6+5}{5} = 3 \\ y' &= -\frac{3}{5}\cdot 1 - \frac{4}{5}(-2) + 3 = -\frac{3}{5} + \frac{8}{5} + 3 = \frac{-3+8+15}{5} = 4 \end{aligned}$$

(3,4) болсын В нүктенің координаталары шықты.

<u>4 – мысал.</u> Ортонормаланған базисте түрлендіру f мына формуламен берілген

$$x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}$$
$$y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Түрлендіру қандай түрлендіру болады.

Шешуі. егер ортонормаланған базисте түрлендіру мынадай формуламен берілсе $\begin{matrix} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2 \end{matrix}$ және оның матрицасы $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ ортогонал матрица болса, яғни $a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2 = 1,\ \ a_1b_1 + a_2b_2 = 0$ болса, онда ол түрлендіру қозғалысты анықтайды және $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 1$ болса 1 – текті $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -1$ болса 2 – текті қозғалысты анықтайды дегенбіз.

Осыны тексереміз: Матрица $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ деп $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1,$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$ және $\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = 0$. Сондықтан берілген формуламен қозғалыс берілген және $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ болғандықтан ол 1 – текті қозғалыс болады.

Енді оның инвариант нүктесі бары – жоғын қарастырайық. Инвариант нүкте үшін $x' = x,\quad y' = y$ болу керек. Сондықтан

$$\begin{matrix} x = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix} \qquad \left\langle \begin{matrix} \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix} \right|^{-\sqrt{3}} \qquad \left(\frac{3}{2} - 1\right)y = 0 \quad y = 0$$. Сонда $x = 1$

Демек $M_0(1{,}0)$ нүкте бұл түрлендіруде өзіне - өзі көшеді, инвариант нүкте болады. ал, 1 – текті қозғалыс не параллель жылжыту, не бұру болады деген Шаль теоремасы бойынша берілген түрлендіру осы екеуінің біреуі болуы керек. Ал, бұруды бір инвариант нүкте (бұру центрі) болады, ал параллель жылжытуда инвариант нүкте болмайды. Сондықтан берілген түрлендіру $M_0(1{,}0)$ нүктеден бұру болады. Мұны бұру формуласы $\begin{matrix} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{matrix}$ мен салыстырсақ $\cos\alpha = \frac{1}{2},\quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ бұдан $\alpha = 60^\circ$.

Сонымен берілген түрлендіру формуласы $M_0(1{,}0)$ нүктеден жазықтықты $\alpha = 60^\circ$ қа бұру формуласы екен.

§12. Жазықтықты ұқсас түрлендіру

k – кезкелген оң нақты сан болсын. Жазықтықты, оның кезкелген екі нүктесі А мен В және оның бейнелері A', B' арасында мынадай қатынас

$$A'B' = k \cdot AB \qquad (12-1)$$

орнайтындай етіп, өзін - өзіне бірмәнді түрлендіруді жазықтықты ұқсас түрлендіру дейді. k – ұқсастық коэффициент делінеді. Ұқсастық коэффициенті к болатын ұқсас түрлендіруді қысқаша S_k деп белгілейік.

Егер (12-1) де $k=1$ болса $A'B' = AB$ болады да, жазықтық нүктелерінің арақашықтығы өзгермейді. Демек коэффициенті $k=1$ болатын ұқсас түрлендіру қозғалыс болады. Сөйтіп қозғалыс ұқсас түрлендірудің дербес түрі болады.

Ұқсас түрлендіруде фигура формасы сақталады, ал өлшемдері k есеге өзгереді (артады немесе кемиді).

12.1. Гоматетия және оның қасиеттері

Ұқсас түрлендірудің қозғалыстан өзге ерекше дербес түрінің бірі гоматетия болып табылады. Гоматетия – гректің гомос – ұқсас, тетия – орналасқан деген сөзінен алынған.

π жазықтығында О нүктесі берілсін, К кезкелген оң нақты сан болсын. Жазықтықтың кезкелген М нүктесіне

$$\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM} \qquad (12-2)$$

Болатындықтан оның M' нүктесін сәйкестендіретіндей етіп жазықтықты өзіне - өзін түрлендіруді гоматетия дейді. О гоматетия центрі, k гоматетия коэффициенті делінеді. О центрлі, k – коэффициентті гоматетияны қысқаша Γ_O^k деп белгілейік.

Гоматетияның қасиеттерін қарастырайық

1°. Гоматетия коэффициенті $k=1$ болса, онда (12-2) $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM}$ болады да М мен M' беттеседі. Демек Γ_O^1 гоматетия теңбе – тең түрлендіру болады.

2°. Гоматетия коэффициенті $k=-1$ болса, онда (12-2) ден $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$ болады да Γ_O^{-1} гоматетия О центрлі симметрия болады.

3°. Гоматетияда берілген нүкте, гоматетия ценрті және ол нүктенің бейнесі бір түзу бойында жатады.

Себебі (12-2) бойынша $\overrightarrow{OM'}$ және $\overrightarrow{OM}$ векторлары коллинеар векторлар және екеуі де О нүктеден шығады. Бір нүктеден шығатын векторлар коллинеар болу үшін ол векторлардың ұштары жатқан түзуде О нүктеде жатуы керек, жатпаса $\overrightarrow{OM}$ мен $\overrightarrow{OM'}$ коллинеар (параллель) болмайды .

4°. Гоматетияда бір түзуде жататын нүктелердің бейнелері де бір түзуде жатады, яғни нүктелердің коллинеарлығы сақталады.

Шынында да А,В,С нүктелер бір түзуде жатсын және Γ_O^k гоматетия оларды A', B', C' нүктелерге көшірсін. Сонда анықтама бойынша

$\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB'} = k \cdot \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OC'} = k \cdot \overrightarrow{OC}$ болатындықтан $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} =$ $= k \cdot \overrightarrow{OB} - k \cdot \overrightarrow{OA} = k\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = k \cdot \overrightarrow{AB}$ болады. Осы сияқты $\overrightarrow{A'C'} = k \cdot \overrightarrow{AC}$ болады. A,B,C нүктелер бір түзуде жатқандықтан, m саны табылсын $\overrightarrow{AC} = m \cdot \overrightarrow{AB}$ болады. Сонда $\overrightarrow{A'C'} = k \cdot \overrightarrow{AC} = k \cdot m \cdot \overrightarrow{AB} = m\left(k \cdot \overrightarrow{AB}\right) = m \cdot \overrightarrow{A'B'}$. Бұдан $\overrightarrow{A'C'}$, $\overrightarrow{A'B'}$ векторлардың коллинеарлығы шығады. Олар коллинеар болу үшін A', B', C' бір түзуде жатуы керек. Сонымен $\overline{ABC}$ болса $\overline{A'B'C'}$ болады екен.

5°. Γ_O^κ гоматетия ұқсас түрлендіру болады. Шынында да A,B жазықтықтың әртүрлі нүктелері болса Γ_O^k гоматетия оларды $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB'} = k \cdot \overrightarrow{OB}$ болатын A', B' нүктелерге көшіреді. Сонда $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OB} - k \cdot \overrightarrow{OA} = k\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = k \cdot \overrightarrow{AB}$ болады. Бұдан $\left|\overrightarrow{A'B'}\right| = |k| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|$ немесе $A'B' = |k| \cdot AB$. Сөйтіп Γ_O^k гоматетия $|k|$ коэффициентті ұқсас түрлендіру болады екен.

6°. Γ_O^k гоматетияда үш нүктенің жай қатынасы сақталады. Шынында да A,B,C нүктелер бір түзуде жатса, онда $\Gamma_O^k(A, B, C) = A'B'C'$ нүктелеріде бір түзуде жатады (4° бойынша) және 5° бойынша $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{B'C'} = k \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{A'C'} = k \cdot \overrightarrow{AC}$. Сонда A,B,C үш нүктенің жай қатынасы $\left(A'C_1'B'\right) = \dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{B'C'}} = \dfrac{k \cdot \overrightarrow{AB}}{k \cdot \overrightarrow{BC}} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}} = \left(AC_1B\right)$ өзара тең болып шығады.

7°. Гоматетияда бұрыш шамасы сақталады. Шынында да $\angle ABC$ берілсе, A,B,C әртүрлі нүктелер болады. Олар Γ_O^k гоматетияда A', B', C' көшсе, онда 5° бойынша $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{B'C'} = k \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{A'C'} = k \cdot \overrightarrow{AC}$ болады да $A'B' \| AB, \quad B'C' \| BC$ болады да қабырғалары параллель бұрыш қасиеті бойынша $\angle ABC = \angle A'B'C'$ болады.

8°. Гоматетия Γ_O^k берілсін. Жазықтыққа O нүкте төбесі болатын тікбұрышты $R = \left(O, \vec{l}_1, \vec{l}_2\right)$ репер ендірейік. Бұл реперде M(x,y) болатын нүктені гоматетия $M'(x', y')$ нүктеге көшірсін. Онда $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$ болатындықтан мұны координата арқылы жазса

$$\begin{matrix} x' = k \cdot x \\ y' = k \cdot y \end{matrix} \qquad (12-3)$$

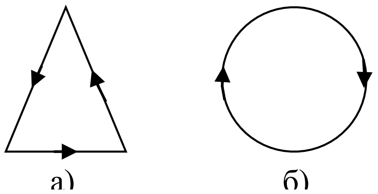
шығады. Мұны Γ_O^k гоматетияның аналитикалық өрнегі дейді. Мысалы Γ_O^k гоматетияда M(-2,3) нүкте $M'(-6{,}9)$ нүктеге көшеді.

9°. Коэффициенті $k \neq 1$ болатын Γ_O^k гоматетия гоматетия центрінен өтетін түзуді өзіне - өзін, центрден өтпейтін түзуді оған параллель түзуге көшіреді.

Дәлелі. Жазықтықта $Ax + By + C = 0$ теңдеу мен u түзуде берілсін. Мұндағы (x,y) – ты (12-3) пен анықталатын (x', y') пен алмастырсақ u түзудің бейнесі u' түзуін аламыз. Ол $Ax' + By' + k \cdot C = 0$ болады. Бұдан $C \neq 0$

болса $\frac{A}{A}=\frac{B}{B}\neq\frac{k\cdot C}{C}$ болатындықтан бұл екі түзу параллель болады. Ал u түзуі координата басынан өтсе $C=0$ болады да екі теңдеу бірдей болып шығады. Ол u мен u' беттеседі, яғни u түзуі өзіне - өзі көшеді деген сөз.

10°. Гоматетияда жазықтық бағдары өзгермейді. Жазықтық бағдарланған делінеді, егерде оның бойымен (мысалы үшбұрыш қабырғалары, шеңбер доғасы бойымен) қозғалу бағыты берілсе. Ол бағыт оң (теріс) делінеді, егер бағыт сағат тілі қозғалысы бағытымен бірдей (бағытына карама – қарсы болса). Мысалы 66 а – суретте оң, ал б – суретте теріс бағыт берілген.



66 – сурет

Түрлендіру жазықтық бағытын сақтайды дейді, егер ол түрлендіруде R репер мен оның бейнесі R' репер бірдей бағдарлы болса. R' репердің базистік векторлары $\left(\vec{l_1'},\vec{l_2'}\right)$ R репердің базистік векторлары $\left(\vec{l_1'},\vec{l_2'}\right)$ ге былайша жіктелсін:

$$\left.\begin{aligned}\vec{l_1'}&=a_{11}\vec{l_1}+a_{21}\vec{l_2}\\ \vec{l_2'}&=a_{12}\vec{l_1}+a_{22}\vec{l_2}\end{aligned}\right\}\qquad(12-4)$$

Мұның матрицасы$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$–ні $\left(\vec{l_1},\vec{l_2}\right)$ базистен $\left(\vec{l_1'},\vec{l_2'}\right)$ базиске көшу матрицасы дейді. Егер мұның анықтауышы $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$ $\Delta>0$ болса R мен R' бірдей, $\Delta<0$ болса қарама – қарсы бағдарланған делінеді.

Γ_O^k гоматетия үшін $\vec{l_1}=\{1,0\}$, $\vec{l_2}=\{0,1\}$, ал $\vec{l_1'}=\{k,0\}$, $\vec{l_2'}=\{0,k\}$ болатындықтан $\Delta=\begin{vmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{vmatrix}=k^2>0$. Демек Гоматетия Γ_O^k жазықтық бағдарын сақтайтын түрлендіру.

11°. Γ_O^k гоматетия M(x,y) нүктені $M'(x',y')$ нүктеге көшірсе $\overrightarrow{OM'}=k\cdot\overrightarrow{OM}$ болады. Бұдан $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{k}\overrightarrow{OM'}$. Олай болса Γ_O^k гоматетияға кері түрлендіруде гоматетия болады, оның коэффициенті k коэффициентке кері $\frac{1}{k}$ болады.

Енді О центрлі k_1,k_2 коэффициентті екі гоматетия $\Gamma_O^{k_1},\Gamma_O^{k_2}$ берілсін. Жазықтықтың М нүктесін $\Gamma_O^{k_1}(M)=M'$ нүктеге, мұны $\Gamma_O^{k_2}$ гоматетия $\Gamma_O^{k_2}(M')=M''$ нүктеге көшірсін. Онда анықтама бойынша $\overrightarrow{OM'}=k_1\cdot\overrightarrow{OM}$,

$\overrightarrow{OM''} = k_2 \cdot \overrightarrow{OM'}$ екеуінің $\overrightarrow{OM''} = k_2 k_1 \overrightarrow{OM}$. Демек $\Gamma_O^{k_1}$ және $\Gamma_O^{k_2}$ гоматетияның көбейтіндісі $k_1 \cdot k_2$ коэффициентті гоматетия болады екен.

Осы екі шарт орындалғандықтан гоматетиялар жиынтығы группа болады.

Егер F фигураны қандайда бір гоматетия F' фигураға айналдырса онда бұл екі фигураны бір – біріне гоматетиялы фигура дейді.

Берілген фигураға гоматетиялы фигураны салуға арналған пантограф деп аталатын құрал бар. Ол ОАВС шарнирлі ромбыдан тұрады. Қозғалмалы ДЕ планканы $OE : OA = k$ болатындай етіп орналастырып, О нүктені бекітіп қойса $OB' = k \cdot OB$ болады. B' нүктедегі штифті Φ' фигура бойынша қозғаса В нүктедегі штифт ол Ф фигураны сызып шығады $\Phi' = k \cdot \Phi$ болады.

12.2. Ұқсас түрлендіру қасиеттері

Жоғарыда айтқанымыздай қозғалыс пен гоматетия ұқсас түрлендірудің дербес түрлері болады.

Ұқсас түрлендірудің басқа қасиеттерін қарастырайық

1°. Ұқсас түрлендіруде бір түзу бойында жататын (жатпайтын) нүктелер бір түзуде жататын (жатпайтын) нүктелерге көшеді.

Дәлелі. А,В,С бір түзуде жатсын және В нүкте А мен С – ның арасында жатсын, онда $AB + BC = AC \quad (*)$ болады.

k коэффициенті S_k ұқсас түрлендіру бұл нүктелерді A', B', C' нүктелерге көшірсе, онда ұқсас түрлендіру анықтамасы бойынша $A'B' = k \cdot AB, \; B'C' = k \cdot BC, \; A'C' = k \cdot AC$ болады. Сонда $A'C' = k \cdot AC = = k(AB + BC) = k \cdot AB + k \cdot BC = A'B' + B'C'$ теңдігі шығады. Бұл теңдік A', B', C' нүктелер бір түзуде жатса және B' нүкте A' пен C' нүкте арасында жатса ғана орындалады. Демек түзу бойында жатқан нүктелер, ұқсаса түрлендіруде, түзу бойында жатқан нүктелерге көшеді және нүктелердің түзу бойында орналасу тәртібі сақталады.

Енді А,В,С бір түзуде жатпаса, онда $AB + BC > AC$ болады. Ал, $A'C' = k \cdot AC < k(AB + BC) = k \cdot AB + k \cdot BC = A'B' + B'C', \quad A'C' < A'B' + B'C'$ болатындықтан A', B', C' нүктелерде бір түзуде жатпайды.

2°. Ұқсас түрлендіруде бұрыш шамасы сақталады. А,В,С әртүрлі үш нүкте болсын, $\angle ABC = \alpha$ дейік. S_k ұқсас түрлендіруде бұл нүктелер A', B', C' нүктелерге көшсін. Онда $A'B' = k \cdot AB, \; B'C' = k \cdot BC, \; A'C' = k \cdot AC$ болғандықтан үшбұрыш АВС мен $A'B'C'$ ұқсас болады. сондықтан $\angle A'B'C' = \angle ABC = \alpha$ болады.

3°. Жазықтықты ұқсас түрлендірулер жиыны группа болады. S_k ұқсас түрлендіруде $S_k(A, B) = A', B'$ болса $A'B' = k \cdot AB$ болады. Мұны $A'B' = \frac{1}{k} \cdot AB$

түрінде жазуға болады. Демек S_k ға кері түрлендіру $\frac{1}{k}$ коэффициентті ұқсас түрлендіру болады. Енді S_{k_1}, S_{k_2} екі ұқсас түрлендіру берілсін. $S_{k_1}(A,B)=A',B',S_{k_2}(A',B')=A'',B''$ болсын. Онда $A'B'=k\cdot AB,$ $A''B''=k\cdot A'B'$ болғандықтан $A''B''=k_2\cdot k_1\cdot AB$ болады да $S_{k_2}\cdot S_{k_1}$ $k_1\cdot k_2$ коэффициентті ұқсас түрлендіру болады. Сонымен ұқсас түрлендіруге кері түрлендіруде ұқсас түрлендіру, екі ұқсас түрлендірудің көбейтіндісі де ұқсас түрлендіру болады екен. Демек барлық ұқсас түрлендірулер жиыны группа болады.

Егер F' фигура F фигурадан ұқсас түрлендіру арқылы шықса, оларды ұқсас фигуралар дейді де, $F_t \sim F'$ деп жазады. Егер екі фигураның ұқсас екендігін дәлелдеу үшін оның бірін ұқсас түрлендіріп екіншісін шығару міндетті емес. Олардың кейбір элементтері тең болған жағдайда олар ұқсас болуы мүмкін. Мысалы:

1. Сәйкес бұрыштары тең, ұқсас қабырғалары пропорционал үшбұрыштар ұқсас болады.
2. Эксцентриситтері тең эллипстер және, гиперболалар өзара ұқсас болады.
3. Кезкелген парабола өзара ұқсас болады.

3°.Теорема. k коэффициентті ұқсас түрлендіру S_k және k коэффициентті О центрлі Γ_O^k гоматетия берілсе, онда

$$S_k = f\cdot\Gamma_O^k \qquad (12-5)$$

болатын f қозғалыс болады және ол біреу – ақ болады.

Дәлелі. Мынандай $S_k\cdot\Gamma_O^{-k}$ $(*)$ түрлендіруді қарастырайық. Бұл екі ұқсас түрлендірудің көбейтіндісі ретінде ұқсас түрлендіру болады. оның ұқсастық коэффициенті $k\cdot\frac{1}{k}=1$ болатындықтан ол қозғалыс болады. $S_k\cdot\Gamma_O^{-k}=f$ дейік. Бұдан $\left(S_k\cdot\Gamma_O^{-k}\right)\Gamma_O^{+k}=f\cdot\Gamma_O^{+k},$ $f\cdot\Gamma_O^{+k}=S_k\left(\Gamma_O^{-k}\cdot\Gamma_O^{+k}\right).$ Сөйтіп $S_k=f\cdot\Gamma_O^{+k}$ болатын f қозғалыс болады екен. Енді бұл қозғалыстың жалғыздығын дәлелдейік. Ол үшін (12-5) орындалатын f қозғалыстан басқа f_1 қозғалыс бар дейік $S_k=f_1\cdot\Gamma_O^k$. Мұның екі жағын Γ_O^{-k} – ға көбейтсек $S_k\Gamma_O^{-k}=f_1\Gamma_O^k\Gamma_O^{-k}=f_1$ болсын, $f=f_1$ болар еді. Демек (12-5) шартты қанағаттандыратын тек бір ғана қозғлыс болады.

Сөйтіп ұқсас түрлендіру қозғалыс пен гоматетияның көбейтіндісіне жіктеледі екен.

Гоматетияда қозғалыстың барлық қасиеттері сақталатын. Сондықтан ол қасиеттер ұқсас түрлендіруде де сақталады.

Демек ұқсас түрлендіруде түзу түзуге, кесінді кесіндіге, сәуле сәулеге, параллель түзу параллель түзуге, қиылысатын түзу қиылысатын түзуге, жарты жазықтық жарты жазықтыққа, көпбұрыш онымен аттас көпбұрышқа көшеді.

5°. Ұқсас түрлендіруде жазықтық бағдары сақталуы да, кері ауысуы да мүмкін.

Ұқсас түрлендіру қозғалыс пен гоматетияның көбейтіндісіне тең болатын болады (4° бойынша). Гоматетия әруақытта жазықтық бағдарын сақтайды, ал қозғалыс 1–текті болса сақтайды, 2–текті болса кері ауыстыратын. Сондықтан ұқсас түрлендіруде жазықтық бағдарын сақтайды да, кері ауыстыруы да мүмкін.

Жазықтық бағдарын сақтайтын ұқсас түрлендіру 1–текті ұқсас түрлендіру, жазықтық бағдарын кері ауыстыратын ұқсас түрлендіру 2–текті ұқсас түрлендіру делінеді.

6°. Жазықтыққа тік бұрышты $R=\left(O,\vec{l_1},\vec{l_2}\right)$ репер ендірейік. M(x,y) жазықтық нүктесі болсын. 6°-те дәлелденген теорема бойынша $S_k=f_1\cdot\Gamma_k^O$. Гоматетия M(x,y) нүктені $M'(x',y')$ нүктеге көшірсін. Онда (11-1) формула бойынша $\begin{matrix} x'=\bar{x}\cos\alpha-\varepsilon\bar{y}\sin\alpha+x_0 \\ y'=\bar{x}\sin\alpha+\varepsilon\bar{y}\cos\alpha+y_0 \end{matrix}$ болады.

Сонда M(x,y) нүкте $f\cdot\Gamma_O^k=S_k$ ұқсас түрлендіру нәтижесінде координаталары (x',y') төмендегі формуламен анықталатын $M'(x',y')$ нүктеге көшеді:

$$\left.\begin{matrix} x'=kx\cos\alpha-\varepsilon ky\sin\alpha+x_0=(x\cos\alpha-\varepsilon y\sin\alpha)k+x_0 \\ y'=kx\sin\alpha+\varepsilon ky\cos\alpha+y_0=(x\sin\alpha+\varepsilon y\cos\alpha)k+y_0 \end{matrix}\right\} \qquad (12-6)$$

Мұны ұқсас түрлендірудің аналитикалық өрнегі дейді. Ол $\varepsilon=1(\varepsilon=-1)$ болғанда 1 – текті (2 – текті) ұқсас түрлендіруді анықтайды.

7°. Қозғалыстан өзге кезкелген ұқсас түрлекндіруде бірғана инвариант (өзгермейтін) нүкте болады. (12-6) да $x'=x,\quad y'=y$ десек $\begin{matrix} (1-k\cos\alpha)x+\varepsilon k\sin\alpha y=x_0 \\ -k\sin\alpha x+(1-\varepsilon k\cos\alpha)y=y_0 \end{matrix}$ шығады..

Бұдан $\varepsilon=1$ десек $\Delta=\begin{vmatrix} 1-k\cos\alpha & k\sin\alpha \\ -k\sin\alpha & 1-k\cos\alpha \end{vmatrix}=1-k^2\cos^2\alpha+k^2\sin^2\alpha-2k\cos\alpha=$ $=1-\cos^2\alpha+(\cos\alpha-k)^2=\sin^2\alpha+(\cos\alpha-k)^2$.

$\varepsilon=-1$ десек $\Delta=\begin{vmatrix} 1-k\cos\alpha & -k\sin\alpha \\ -k\sin\alpha & 1+k\cos\alpha \end{vmatrix}=1-k^2$. Егер $k\neq1$ болса $\Delta\neq0$ болады да жүйенің тек бір шешімі болады. Сондықтан қозғалмайтын бір нүкте болады.

Демек екі не одан көп қозғалмайтын нүктесі болатын ұқсас түрлендіру және қозғалмайтын нүктесі болмайтын ұқсас түрлендірулер қозғалыс болады.

1–мысал. R реперде $A(2,1)$, $B(3,-2)$, $C(1,0)$, $A'(-1,5)$, $B'(-3,1)$, $C'(1,-2)$ нүктелер берілген. ABC және $A'B'C'$ үшбұрыштардың гоматетиялы болатынын дәлелдеп, ол гоматетияның центрін, коэффициентін және түрлендіру формуласын табу керек.

Шешуі. Гоматетия анықтамасы бойынша, егер оның центрі $S(x_0, y_0)$, коэффициенті k болса ΔABC мен $\Delta A'B'C'$ гоматетиялы болу үшін $\overrightarrow{SA'} = k \cdot \overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{BS'} = k \cdot \overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC'} = k \cdot \overrightarrow{SC}$ $(*)$ болуы керек. Гоматетия центрі $S(x_0, y_0)$ AA', BB', CC' түзулердің қиылысу нүктесі болуы керек. AA' тен теңдеуі $\frac{x+1}{2+1} = \frac{y+5}{1+5}$ болады, яғни $2x - y - 3 = 0$ BB' – тің теңдеуі $\frac{x+3}{3+3} = \frac{y-1}{-2-1}$ немесе $x + 2y + 1 = 0$. Бұл екі теңдеуді бір жүйеге алып шешсек $\begin{cases} 2x + 2y + 1 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$ $x = 1, y = -1$ болады. Демек гоматетия центрі $S(1,-1)$ болады. Сонда $\overrightarrow{SA} = \{2-1 \;\; 1+1\} = \{1,2\}$, $\overrightarrow{SA'} = \{-1-1 \;\; -5+1\} = \{-2,4\}$. Бұдан $\overrightarrow{SA'} = -2 \cdot \overrightarrow{SA}$ $\overrightarrow{SB} = \{3-1 \;\; -2+1\} = \{2,-1\}$, $\overrightarrow{SB'} = \{-3-1 \;\; 1+1\} = \{-4,2\}$. Бұдан $\overrightarrow{SB'} = -2 \cdot \overrightarrow{SB}$ $\overrightarrow{SC} = \{1-1 \;\; 0+1\} = \{0,1\}$, $\overrightarrow{SC'} = \{1-1 \;\; -3+1\} = \{0,-2\}$. Бұдан $\overrightarrow{SC'} = -2 \cdot \overrightarrow{SC}$. Сонымен $(*)$ орындалады екен. Сондықтан ΔABC мен $\Delta A'B'C'$ гоматетиялы фигуралар болады және гоматетия коэффициенті $k = -2$ болады.

Енді осы гоматетияның формуласын (аналитикалық өрнектің), яғни кезкелген М(x,y) нүктеге гоматетиялы болатын $M'(x', y')$ нүкте координаталарын байланыстыратын формуланы анықтайық.

Γ_S^k гоматетия М(x,y) нүктені $M'(x', y')$ нүктеге көшіреді дейік, онда $\overrightarrow{SM'} = k \cdot \overrightarrow{SM}$ болуы керек. Мұны векторлардың координаталары арқылы жазса $x' - 1 = -2(x-1)$, $y' + 1 = -2(y+1)$ болады да, бұдан $x' = -2x + 3$, $y' = -2y - 3$ іздеген гоматетияның формуласы шығады. Мұндағы (x,y) орнына А(2,1) нүкте координаталарын қойсақ A' координаталары шығуы керек. Тексерейік $x' = -2 \cdot 2 + 3 = -1$, $y' = -2 \cdot 1 - 3 = -5$. Бұл A' – тің координаталары. Демек құрылған формула дұрыс.

Егер В,С нүктелердің координаталарын $x \cdot y$ орнына қойсақ, x', y' сандары B', C' нүктелердің координатына тең болып шығады.

Бұл гоматетияла қозғалмайтын (инвариант) болатын нүкте барма, жоқпа екенін анықтау үшін табылған формуладағы x', y' орнына $x \cdot y$ ты қойып, оны шешу керек.

Сонда $\begin{cases} x = -2x + 3 \\ y = -2y - 3 \end{cases}$ бұдан $x = 1$, $y = -1$. Сонымен координатасы (1,-1) болатын нүкте гоматетияда қозғалмайды екен, яғни өзіне - өзі бейнеленеді. Ол центр $S(1,-1)$ нүкте.

Одан басқа қозғалмайтын нүктесі жоқ екен. Өйткені теңдеу жүйесінен тек бір пар (x,y) табылады.

2–мысал. Ортонормаланған реперде $A(0,-3)$, $B(4,0)$, $C(1,-1)$, $A'(-6,-6)$, $B'(0,2)$, $C'\left(-\frac{26}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ нүктелер берілген. Үшбұрыштар ΔABC мен $\Delta A'B'C'$ тың ұқсас болатындығын дәлелдеп, ұқсастық формуласын жазу керек.

Шешуі. Бір фигура екіншісінен ұқсас түрлендіру арқылы шықса олар ұқсас болады. Сондықтан $A'B' = k \cdot AB, \quad B'C' = k \cdot BC, \quad A'C' = k \cdot AC$ болатын $k -$ ның бар екеніне көз жеткізу керек

$AB = \sqrt{(4-0)^2 + (0+3)^2} = 5, \quad A'B' = \sqrt{(0+6)^2 + (2+6)^2} = 10$. Демек $A'B' = 2 \cdot AB$

$BC = \sqrt{(1-4)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{10}, \quad B'C' = \sqrt{\left(-\frac{26}{5} - 0\right)^2 + \left(-\frac{8}{5} + 2\right)^2} = 2\sqrt{10}$. Демек

$B'C' = 2 \cdot BC$, $\quad AC = \sqrt{(1-0)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{5}, \quad A'C' = \sqrt{\left(-\frac{26}{5} + 6\right)^2 + \left(-\frac{8}{5} + 6\right)^2} = 2\sqrt{5}$.

Демек $A'C' = 2 \cdot AC$.

Берілген үшбұрыштар ұқсас екен. Өйткені $\Delta A'B'C'$ ΔABC- ны $k = 2$ есе ұлғайту нәтижесінде шығыпты.

Ұқсас түрлендірудің аналитикалық өрнегі мынадай еді:

$$\begin{matrix} x' = (x\cos\alpha - \varepsilon y \sin\alpha)k + x_0 \\ y' = (x\sin\alpha + \varepsilon y\cos\alpha)k + y_0 \end{matrix} \quad \text{бізде } k = 2. \text{ Демек } \quad \begin{matrix} x' = 2x\cos\alpha - 2\varepsilon y\sin\alpha + x_0 \\ y' = 2x\sin\alpha + 2\varepsilon y\cos\alpha + y_0 \end{matrix} \qquad (*)$$

Осындағы $\cos\alpha \cdot \sin\alpha, \quad x_0, y_0 \quad \varepsilon -$ ні тауып орнына қою керек.

$A \to A'$ үшін формула $\begin{matrix} -6 = 2 \cdot 0 \cdot \cos\alpha - 2 \cdot \varepsilon(-3)\sin\alpha + x_0 \\ -6 = 2 \cdot 0 \cdot \sin\alpha + 2 \cdot \varepsilon(-3)\cos\alpha + y_0 \end{matrix}$

$B \to B'$ үшін формула $\begin{matrix} 0 = 2 \cdot 4 \cdot \cos\alpha - 2\varepsilon \cdot 0\sin\alpha + x_0 \\ 2 = 2 \cdot 4 \cdot \sin\alpha + 2\varepsilon \cdot 0\cos\alpha + y_0 \end{matrix}$ Бұдан

$$\left.\begin{matrix} x_0 = -6 - 6\varepsilon\sin\alpha \\ y_0 = -6 + 6\varepsilon\cos\alpha \\ x_0 = -8\cos\alpha \\ y_0 = 2 - 8\sin\alpha \end{matrix}\right\} \left(\begin{smallmatrix} * \\ * \end{smallmatrix}\right)$$

$C \to C'$ үшін формула $\begin{matrix} -\frac{26}{5} = 2\cos\alpha - 2\varepsilon(-1)\sin\alpha + x_0 \\ -\frac{8}{5} = 2 \cdot 1\sin\alpha + 2\varepsilon(-1)\cos\alpha + y_0 \end{matrix}$ Бұдан

$$\begin{matrix} 2\cos\alpha + 2\varepsilon\sin\alpha + x_0 = -\frac{26}{5} \\ 2\sin\alpha - 2\varepsilon\cos\alpha + y_0 = -\frac{8}{5} \end{matrix}$$

Бұларға $x_0 = -8\cos\alpha, \quad y_0 = 2 - 8\sin\alpha$ мәндерін қойсақ $\begin{cases} \varepsilon\sin\alpha - 3\cos\alpha = -\frac{13}{5} \\ \varepsilon\cos\alpha + 3\sin\alpha = \frac{9}{5} \end{cases}$

Соңғыдан $\dfrac{\varepsilon\sin\alpha}{\varepsilon\cos\alpha} = \dfrac{-\frac{13}{5} + 3\cos\alpha}{\frac{9}{5} - 3\sin\alpha}$ $\quad \frac{9}{5}\sin\alpha - 3\sin^2\alpha = -\frac{13}{5}\cos\alpha + 3\cos^2\alpha,$

$\frac{9}{5}\sin\alpha + \frac{13}{5}\cos\alpha = 3$. $9\sin\alpha + 13\cos\alpha = 15 \quad \left(*^{*}_{*}\right)$. $(**)$ дан $\begin{cases} -6 - 6\varepsilon\sin\alpha = -8\cos\alpha \\ -6 + 6\varepsilon\cos\alpha = 2 - 8\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} 3\varepsilon \sin\alpha = -3 + 4\cos\alpha \\ 3\varepsilon\cos\alpha = 4 - 4\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{3\varepsilon\sin\alpha}{3\varepsilon\cos\alpha} = \frac{-3+4\cos\alpha}{4-4\cos\alpha}, \qquad 4\sin\alpha - 4\sin^2\alpha = -3\cos\alpha + 4\cos^2\alpha,$
$4\sin\alpha + 3\cos\alpha = 4.$

Мұнымен $\left(*_*^*\right)$ қосып шығарсақ $\begin{cases} 4\sin\alpha + 3\cos\alpha = 4 \\ 9\sin\alpha + 13\cos\alpha = 15 \end{cases}$ Бұдан $\cos\alpha = \frac{24}{25}$, $\sin\alpha = \frac{7}{25}$ $\varepsilon\cos\alpha + 3\sin\alpha = \frac{9}{5}$ тен $\varepsilon = \frac{\frac{9}{5} - 3\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{9}{5} - 3\cdot\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}} = \frac{45-21}{24} = \frac{24}{24} = 1$. Демек $\varepsilon = 1$ болғандықтан бұл ұқсас түрлендіру 1 – текті ұқсас түрлендіру болады.

Сонда $x_0 = -8\cos\alpha = -8\cdot\frac{24}{25} = -\frac{192}{25}$; $y_0 = 2 - 8\sin\alpha = 2 - 8\cdot\frac{7}{25} = \frac{50-56}{25} = -\frac{6}{25}$.
Сонымен ұқсас түрлендірудің формуласы

$$\left.\begin{aligned} x' &= 2x\cdot\frac{24}{25} - 2\cdot 1\cdot y\frac{7}{25} - \frac{192}{25} = \frac{48}{25}x - \frac{14}{25}y - \frac{192}{25} \\ y' &= 2x\cdot\frac{7}{25} + 2\cdot 1\cdot y\frac{24}{25} - \frac{6}{25} = \frac{14}{25}x + \frac{48}{25}y - \frac{6}{25} \end{aligned}\right\}$$

§13. Жазықтықты аффиндік түрлендіру

13.1. Аффиндік түрлендіру және оның қасиеттері. Жазықтықты өзіне - өзін бірмәнді түрлендіруде түзу бойындағы үш нүкте түзу бойындағы үш нүктеге көшсе және ол нүктелердің жай қатынасы сақталса, онда ол түрлендіруді аффиндік түрлендіру дейді.

Аффиндік түрлендірдің қасиеттері:

1°. Аффиндік түрлендіруде нүктелердің түзу түзу бойында орналасу тәртібі сақталады.

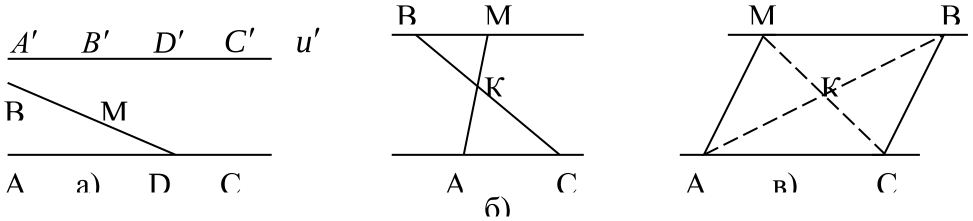
Дәлелі $\overline{ABC}$ болсын, онда $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$ болады. сондықтан бұл үш нүктенің жай қатынасы $(AC_1B) = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}} > 0$ болады. Егер аффиндік түрлендіру f бұл нүктелерді A', B', C' нүктелерге көшірсе, онда анықтама бойынша ол нүктелердің жай қатынасы өзара тең болуы керек: $(AC_1B) = (A'C_1'B')$. Демек $(A'C_1'B') > 0$ болады, ал бұл $\overrightarrow{A'B'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{B'C'}$ болғанда мүмкін бұлай болу үшін $\overline{A'B'C'}$ болуы керек. Сонымен $\overline{ABC}$ болса $\overline{A'B'C'}$ болады.

2°. Аффиндік түрлендіруде бір түзуде жатпайтын нүктелердің бейнелері де бір түзуде жатпайды.

Дәлелі. A,B,C нүктелер бір түзуде жатпасын. Олардың жазықтықты аффиндік түрлендіргендегі бейнелері A', B', C' бір u' түзуінде жатады дейік. B нүкте AC түзуінде жатпасын. Бұлардан тыс M нүктесін алайық. Сонда мынадай жағдайлар болуы мүмкін.

1–жағдай. BM түзуі AC түзуі мен қиылысады. $BM \cap AC = D$ дейік (68 а – сурет). B, M, D бір түзуде жатқандықтан олардың бейнелері де 1° бойынша бір түзуде жатуы керек. Ал, A', C' нүктелері u' түзуінде жатқандықтан $D' \in u'$

болады. Сонда B' пен D' нүктелер u' түзуінде жатқандықтан $M'\in u'$. Сонымен $BM\cap AC=D$ болса $M'\in u'$ болады екен.



68 – сурет

2–жағдай. $BM\|AC$ бірақ ВС мен МА параллель болмасын (68 б – сурет). Онда ВС мен МА бір К нүктеде қиылысады. Сонда $B'C'\in u'$ жатқандықтан $K'\in u'$. Ал, $A',K'\in u'-$те жатқандықтан $K\in MA$ жатқандықтан $M'\in u'$. Сөйтіп бұл кезде де М – ның бейнесі $M'\in u'$.

3–жағдай. $BM\|AC$, $MA\|BC$ болсын (68 в – сурет). АВСМ параллелограм болады. $MC\cap AB=K$ болсын $B'A'\in u'$. $BA\in K$ жататындықтан $K'\in u'$. Ал, $C',K'\in U'$ жататындықтан $M'\in u'$.

Сөйтіп жазықтықтың кезкелген нүктесінің бейнесі u' түзуінде жататын болып шықты. Бұл аффиндік түрлендіру анықтамасына қайшы. Демек А,В,С нүктелер бір түзуде жатпаса, онда олардың бейнелері A',B',C' тарда бір түзуде жатпайды.

3°. Аффиндік түрлендіруде түзу түзуге көшеді.

Дәлелі. u түзуі берілсін. $A,B\in U$ нүктелерді аффиндік f түрлендіру A',B' нүктелерге көшірсін. $A'B'$ түзуді u' дейік. М нүкте u түзудің кезкелген нүктесі болсын, онда аффиндік түрлендірудің анықтамасы бойынша оның бейнесі $M'\in u'$ керісінше N' нүкте $M'-$тің кезкелген нүктесі болсын, онда аффиндік түрлендіру өзара бірмәнді түрлендіру болатындықтан, $N'-$тен тұп нұсқасы болуы керек және ол А мен В жатқан u түзуінде жатуы керек. Сөйтіп u түзуінің әрбір нүктесі u' түздің қандай да бір нүктесіне бейнеленеді екен, ал u' түзуінің әрбір нүктесінің тұп нұсқасы u түзуінде жатады екен. Олай болса аффиндік түрлендіруде u түзуіне көшеді.

4°. Салдар ретінде мыналар шығады. Аффиндік түрлендіруде параллель түзулер параллель түзулерге, сәуле сәулеге, кесінді кесіндіге, кесінді ортасы кесінді ортасына, жарты жазықтық жарты жазықтыққа, көпбұрыш өзіне аттас көпбұрышқа көшеді.

5°. Егер f_1, f_2 екі аффиндік түрлендірулердің екеуі де А – ны A', В – ны B' нүктелерге көшірсе, онда АВ түзудің кезкелген М нүктесі үшін $f_1(M)=f_2(M)$ болады.

Дәлелі. АВ – ның М кезкелген нүктесі болсын және $f_1(M)=M'$, $f_2(M)=M''$ көшіреді. Онда аффиндік түрлендірудің анықтамасы бойынша $(AB,M)=(A'B',M')$, $(AB,M)=(A'B',M'')$ болу керек. Бұдан

$(A'B',M')=(A'B',M'')$ болып $M'=M''$ беттеседі. Сонымен $f_1(M)=M'=M''=f_2(M)$.

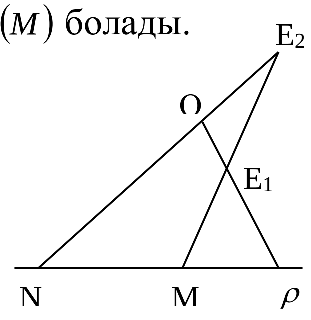
6°. Жазықтықта $R=(O,E_1,E_2)$, $R'=(O',E_1',E_2')$ екі репер берілсін. $R-$ді $R'-$ке көшіретін бір, тек бір аффиндік түрлендіру f болады және бұл түрлендіруде R репердегі координаталары (x,y) болатын $M(x,y)_R$ нүкте R' репердегі координаталары дәл осындай (x,y) болатын $M'(x,y)_{R'}$ нүктеге көшеді.

Дәлелі. Аффиндік f түрлендіруді былайша құрайық. Жазықтықтың R репердегі координаттары (x,y) болатын $M(x,y)_R$ нүктеге сол жазықтықтың R' репердегі координаталары (x,y) болатын $M'(x,y)_{R'}$ нүктені сәйкестендірейік.

Мұндай сәйкестік, өзара бірмәнді болатындықтан, жазықтықты түрлендіру болады. бұл түрлендіруде $O(0,0)_R \to O'(0,0)_{R'}$, $E_1(1,0)_R \to E_1'(1,0)_{R'}$, $E_2(0,1)_R \to E_2'(0,1)_{R'}$ көшетіндіктен $R=(O,E_1,E_2)$ репер $R'=(O',E_1',E_2')$ реперге көшеді.

Енді бұл f түрлендірудің аффиндік түрлендіру болатынын дәлелдейік. Кезкелген u түзуінен M_1,M_2,M үш нүкте алайық. Олардың R репердегі координаталары $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $M(x,y)$. Олардың бейнелерінің R' репердегі координаталары $M_1'(x_1,y_1)$, $M_2'(x_2,y_2)$, $M'(x,y)$ болады. үш нүктенің жай қатынасын $\lambda=(M_1M_2,M)$ десек, M_1M_2 кесіндіні М нүкте λ қатынаста болатындықтан $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$ болатындықтан $M_1'M_2'$ кесіндіні M' нүктеде дәл осындай қатынаста бөледі, яғни $(M_1'M_2',M')=\lambda$ болады. Демек $(M_1M_2,M)=(M_1'M_2',M')$ болады. ал, бұл f аффиндік түрлендіру болады деген сөз.

Енді $R-$ді $R'-$ке көшіретін $f(R)=R'$ аффиндік түрлендіруден басқа тағы да $\varphi(R)=R'$ аффиндік түрлендіру бар дейік. Кезкелген М нүкте алып ол арқылы OE_1,OE_2,E_1E_2 түзулердің екеуін қиатын түзу жүргізейік (69 – сурет). Ол түзу $N\rho$ болсын. Сонда 5° бойынша $f(O,A,B)=O',A',B'$, $\varphi(O,A,B)=O',A',B'$ болатындықтан $f(M)=\varphi(M)$ болады.



69 – сурет

Сөйтіп R реперді R' реперге көшіретін тек бір ғана аффиндік түрлендіру болады және бұл түрлендіруде $M(x,y)_R$ нүкте $M'(x,y)_{R'}$ нүктеге көшеді.

7°. Аффиндік түрлендіруде репер реперге көшеді.

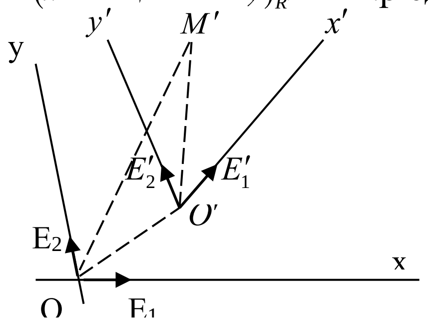
8°. Аффиндік түрлендіру f – бұл түзу бойында жатпайтын үш нүкте өзіне - өзі көшсе, яғни $f(A,B,C)=A,B,C$ болса, онда f теңбе – тең түрлендіру болады.

Дәлелі. f аффиндік түрлендіруде $f(A,B,C)=A,B,C$ болсын, ал l теңбе – тең түрлендіру болса, онда $l(A,B,C)=A,B,C$ болады. Демек 6° бойынша f теңбе – тең түрлендіру болады.

9°. Аффиндік түрленуде жазықтық бағдары өзгермеуі де, кері өзгеруі де мүмкін.

Жазықтық бағдарын өзгертпей оны аффинді түрлендірулерді 1 – текті бағдарын кері ауыстыратын аффиндік түрлендіруді 2 – текті аффиндік түрлендіру дейді.

10°. Жазықтықтан $R=(O,E_1,E_2)$ репер алайық. Жазықтықты f аффинді түрлендіру R реперді $R'=(O',E_1',E_2')$ реперге көшірсін. $R'-$тің элементтері R реперде мынадай болсын: $O'(x_0,y_0)$, $\overrightarrow{O'E_1'}=\vec{l_1}=\{a_{11},a_{21}\}$, $\overrightarrow{O'E_2'}=\vec{l_2}=\{a_{21},a_{22}\}$ $R'-$дегі M(x,y) нүкте бейнесі $M'(x',y')_R$ болсын, онда оның $R'-$тегі координаттары $M'(x,y)_{R'}$ болар еді (70–сурет). Сонда M' нүктенің R,R' репердегі координаталары $M'(x',y')_R$, $M'(x,y)_{R'}$ болар еді.



70 – сурет

70–сурет бойынша $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M'}$. Бұдан $x'\vec{l_1}+y'\vec{l_2}=x_0\vec{l_1}+y_0\vec{l_2}+$ $+x\vec{l_1'}+y\vec{l_2'}=x_0\vec{l_1}+y_0\vec{l_2}+x\left(a_{11}\vec{l_1}+a_{21}\vec{l_2}\right)+y\left(a_{12}\vec{l_1}+a_{22}\vec{l_2}\right)$. Мұндағы $\vec{l_1}=\overrightarrow{OE_1}$, $\vec{l_2}=\overrightarrow{OE_2}$. Теңдіктің екі жағын да $\vec{l_1},\vec{l_2}$ векторлардың коэффициенттерін теңестірсек

$$\left.\begin{array}{l} x'=a_{11}x+a_{12}y+x_0 \\ y'=a_{21}x+a_{22}y+y_0 \end{array}\right\} \quad (13-1)$$

және $\vec{l_1}$ мен $\vec{l_2}$ коллинеар еместіктен

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0 \qquad (13-2)$$

болады. (13-1) – ді аффиндік түрлендірудің аналитикалық өрнегі дейді. Егер $\Delta > 0$ болса аффиндік түрлендіру бірінші, $\Delta < 0$ екінші текті аффиндік түрлендіру делінеді.

Кезкелген түрлендіру (13-1) формуламен беріліп, (13-2) орындалса ол түрлендіру аффиндік түрлендіру болады.

11°. Аффиндік түрленулер жиыны группа болады.

1 – ден, кезкелген аффиндік түрлендіру f – ке кері түрлендіру f^{-1} де аффиндік түрлендіру болады. Өйткені $(AB,C) = (A'B',C')$ болса, онда $(A'B',C') = (AB,C)$ болады және A',B',C' нүктелер бір түзуде жатса, онда А,В,С нүктелерде бір түзуде жатады.

2 – ден, екі f_1, f_2 аффиндік түрлендірудің көбейтіндісі де аффиндік түрлендіру болады. Өйткені мұның екеуі де түзу бойындағы үш нүктені түзу бойындағы үш нүктеге бейнелейді және олардың жай қатынасын сақтайды.

Осы екі шарт орындалғандықтан аффиндік түрлендірулер жиыны группа болады. оны аффиндік түрлендірулер группасы дейді.

Сол сияқты 1 – текті аффиндік түрлендірулер жиыны да группа болады. 1 – текті аффиндік түрлендіру, ұқсас түрлендіру, қозғалыстың группалары аффиндік группаның ішкі (бөлік) группалары болады.

Егер F' фигура F фигураны аффиндік түрлендіруден шықса, онда ол екі үшбұрыш аффинді – эквивалентті болады. Ал, кезкелген $ABCD$, $A'B'C'D'$ екі төртбұрыш, олардың диагоналдары O, O' нүктелері де қиылысса. $(AC,O) = (A'C',O')$, $(BD,O) = (B'D',O')$ болған жағдайда ғана аффинді – эквивалентті болады.

13.2. Аффиндік түрлендіру мысалдары

Өткен баптарда айтылған қозғалыстар, ұқсас түрлендірулер, түзуді түзуге көшіретін және түзу бойындағы үш нүктенің жай қатынасын өзгертпейтін болады. Сондықтан ол түрлендірулер аффиндік түрлендірулерге мысалдар бола алмайды. Ұқсас түрлендірулерде, қозғалыста болмайтын кейбір аффиндік түрлендірулер де болады. олар мыналар.

1. Перспективті – аффиндік түрлендіру

Теңбе – тең түрлендіру болмайтын аффиндік түрлендіруде кемінде екі қозғалмайтын нүкте болса, онда ондай аффиндік түрлендіруді перспективті – аффиндік немесе тектік түрлендіру дейді.

Бұл түрлендірудің аналитикалық өрнегін шығару үшін $R = (O, E_1, E_2)$ реперді, оның О мен E_1 нүктелері перспективті – аффинді φ түрлендірудің қозғалмайтын нүктелері болатындай етіп алайық. Сонда φ түрлендіруі $R = (O, E_1, E_2)$ реперді $R' = (O, E_1, E_2')$ реперге көшірер еді. Егер E_2 нүктенің бейнесі E_2' – тің R реперде координаталары $E_2'(k_1, k_2)$ болса, онда φ перспективті – аффинді түрлендіруде $O(0,0) \to O(0,0)$, $E_1(1,0) \to E_1(1,0)$, $(k_1 k_2)$

нүктелерге көшер еді. Сонда аффиндік түрлендірудің аналитикалық өрнегі (13-1) формула перспективті – аффиндік түрлендіру үшін мына түрде болады

$$x' = x + k_1 y, \quad y' = k_2 y \qquad (13-3)$$

Бұл перспективті – аффиндік түрлендірудің аналитикалық өрнегі болады. Бұл формулаға сүйене отырып перспективті – аффиндік түрлендірудің кейбір қасиеттерін келтіруге болады.

1°. Перспективті – аффинді φ түрлендіруде бұл түрлендірудің қозғалмайтын екі нүктесінен өтетін түзудің барлық нүктелері қозғалмайтын нүктелер болады.

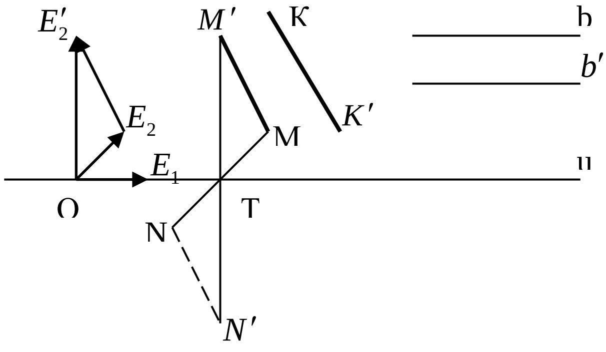
$R=(O,E_1,E_2)$ реперді таңдап алуымыз бойынша O_1E_1 нүктелерден өтетін түзу абсцисса болады да оның бойындағы нүкте координаталары (x,0) түрінде болады. мысалы М(x,0) болсын. Мұны (13-3) ке қойсақ $x'=x, \quad y=0$ болады да М – нің бейнесі $M'(x',y')=M'(x,0)$ болып M' пен М беттеседі, яғни М нүкте өзіне - өзі көшеді.

Мұндай кезкелген нүктесі қозғалмайтын нүктелер түзуі дейді. Ол түзу перспективті – аффиндік түрлендірудің өсі немесе тектік өсі делінеді.

Перспективті – аффиндік түрлендірудің барлық қозғалмайтын нүктелері оның өсінде жатады. Өйткені өстен тыс жататын қозғалмайтын нүктелі болады десек 8° бойынша түрлендіру теңбе – тең түрлендіру болып кетеді. Ал, теңбң – тең түрлендіру перспективті – аффиндік түрлендіру болмайды.

2°. Перспективті – аффинді түрлендіруде өсте жатпайтын сәйкес нүктелерді қосатын түзулер өзара параллель болады. 71 – суретте U өс, М онда жатпайтын нүкте болсын. $R=(O_1,E_1,E_2)$ репер $R'=(O_1,E_1,E_2')$ репер ге көшкен. R дегі М(x,y) нүкте $M'(x',y')$ нүктеге көшсін. Сонда (13-3) – ті ескерсек $\overrightarrow{MM'}=\{k_1y, \ (k_2-1)y\}$ болады, ал $\overrightarrow{E_2E_2'}=\{k_1, \ k_2-1\}$ болады. Сондықтан $\overrightarrow{MM'} \| \overrightarrow{E_2E_2'}$ болады. Сөйтіп нүкте мен оның бейнесін қосатын түзулер $\overrightarrow{E_2E_2'}$ векторына параллель болады екен. Сондықтан олар өзара да параллель болады, яғни $KK' \| MM'$ болады.

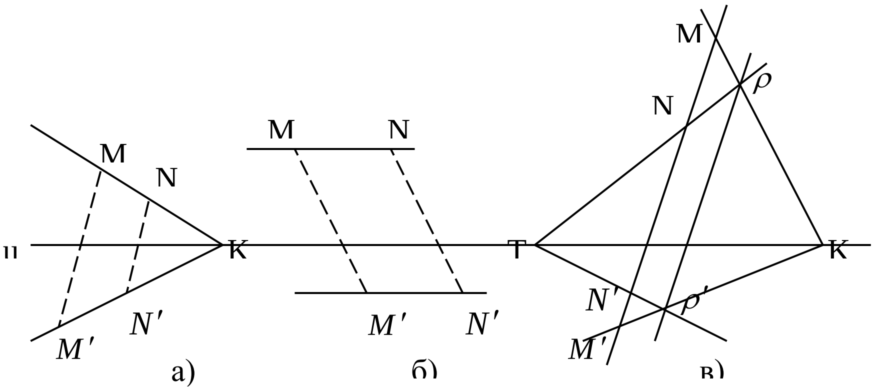
3°. Перспективті – аффинді түрлендіруде оның өсін қиып өтетін түзудің бейнесі де сол нүктеден өтеді, ал өске параллель түзудің бейнесі өске параллель болады (71 – сурет).



71 – сурет

Мысалы MT түзуі U өсті T қиып өтсін және M нүкте M' – ке көшсе, T өсте жатқандықтан ол өзіне - өзі көшеді. Сөйтіп MT түзуі $M'T$ түзуіне көшеді, яғни $U \cap MN = U \cap M'N' = T$ болады да $M'N' \cap MN = T$ болады.

Егер түзу өске параллель болса $b \| u$ болса, онда параллеь түзулер аффиндік түрлендіруде параллель түзулер болып түрленетіндіктен b – ның бейнесі b' болса, онда $b' \| u$ болады (72 – сурет).



72 – сурет

4°. Перспективті – аффинді түрлендіру өсі және бір пар сәйкес нүктелері арқылы толық анықталады.

Перспективті – аффинді түрлендірудің u өсі болсын, M нүкте бұл түрлендіруде M' нүктеге көшсін, N нүктенің бейнесін салу керек. (72 а – сурет). 2° бойынша N нүктенің бейнесі MM' түзуге параллеь түзуде жатуы керек. Сондықтан N нүктеден MM' параллель түзу жүргізіп, оның $MN \cap U = K$ нүктемен M' нүктені қосатын KM' түзу мен қиылысу нүктесі N' табу керек. Өйткені K өсте жатқандықтанол өзіне - өзі көшеді де MK түзуі $M'K$ түзуіне көшеді. $N \in MK$ да жатқандықтан $N' \in M'K$ да жатуы керек. Егер $MN \| u$ болса (яғни u өспен MN қиылыспаса). Онда 1 – ден MM' түзуін жүргіземіз, 2 – ден N мен MM' ке M' тен өске параллель жүргіземіз. Олардың қиылысу нүктесі N' болады. (72 б – сурет).

Егер N нүкте MM' жатса, онда кезкелген ρ нүктесін алып, оның бейнесі ρ' ті табамыз. Ол егер $M\rho \cap u = K$ болса, KM' пен ρ дан MM'ке жүргізілген параллель түзудің қиылысу нүктесі болады, яғни $KM' \cup \rho\rho' = \rho'$ болады.

Содан кейін $\rho N \cap uT$ нүктені тауып, $T\rho' \cap MN = N'$ табамыз. Сол іздеген N нүктенің бейнесі болады (72 в – сурет).

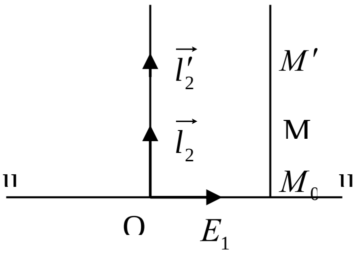
2. Сығу. Аффиндік – перспективті түрлендірудегі сәйкес нүктелерді қосатын түзулер u өсіне параллель болмаса, онда бұл түрлендіру жазықтықты қиғаш сығу делінеді. Ал, бұл параллель түзулер бағыты сығу бағыты делінеді.

Бұл кезде $R=(O,E_1,E_2)$ репердің O,E_1 нүктелерлерін өс бойынан алуға, E_2' –ті aE_2 түзуі бойынан алуға болады (73 – сурет). Сонда E_2' –тің координаталары $(0,k)$ болады десек сығудың аналитикалық өрнегі мынадай болады:

$$x'=x, \quad y'=ky \qquad (13-4)$$

Мұндағы $k \neq 1$ сығу коэффициенті делінеді. Сығуда М нүкте M' нүктеге көшсе, онда $\overrightarrow{M_0M'}=k\overrightarrow{M_0M}$ болады. Өйткені М(х,у) болса, $M_0(x,0)$, $M'(x,ky)$ болатындықтан $\overrightarrow{M_0M}=\{0,y\}$, $\overrightarrow{M_0M'}=\{0,ky\}$ болады да $\overrightarrow{M_0M'}=k\overrightarrow{M_0M}$ болады.

Сығуда түзу түзуге, параллель түзу параллель түзуге көшеді. Сығу өсін қиятын түзу бейнесі сол қиылысу нүктесінен өтетін түзу болады. Өске параллель түзудің бейнесі өске параллель түзу болады.



73 – сурет

Сығуда үш нүктенің жай қатынасы сақталады. Сондықтан ол аффиндік түрлендіру болады. Сығуда фигуралардың аудандарының қатынасы да өзгермейді, ол сығу коэффициентіне тең болады.

Егер сығу бағыты өске перпендикуляр болса, ал сығу коэффициенті $k>0$ оң сан болса, онда қиғаш сығуды жай ғана u өске сығу дейді.

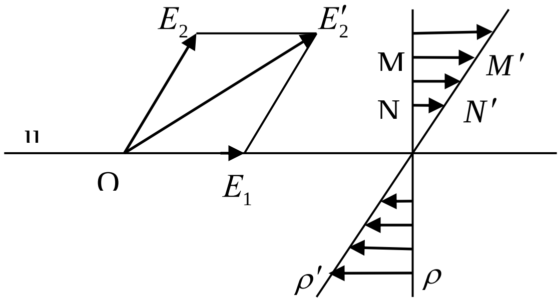
Бұл кезде $\overrightarrow{M_0M'}=k\overrightarrow{M_0M}$ болатындықтан $k<1$ болса жазықтық нүктелері өске жақындайды, $k>1$ болса одан алыстайды. Соңғы жағдайда сығылу **созылу** болады.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипс берілсін. Оның үлкен өсі $A_1A_2=2a$ –ны диаметр етіп шеңбер сызсақ, ол шеңберді A_1A_2 диаметріне $k=\frac{b}{a}$ коэффициентпен сықсақ нәтижеде берілген эллипсті аламыз. Өйткені бұл кезде (13-4) формула $x'=x, \quad y'=\frac{b}{a}y$ болады, ал шеңбер теңдеуі $x^2+y^2=a^2$ болады да $x=x', \quad y=\frac{b}{a}y'$ болғандықтан шеңбердің бейнесінің теңдеуі $x'^2+\frac{a^2}{b^2}y'^2=a^2$, бұдан $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ болып эллипс шығады.

Осы сияқты $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гипербола нақты өсі A_1A_2 болатын тек қабырғасы $x^2-y^2=a^2$ гиперболаның A_1A_2 өске $k=\frac{b}{a}$ коэффициентпен қысуынан шыққан фигура болады.

3. Ығысу. Егер перспективті – аффиндік түрлендіруде сәйкес нүктелерді қосатын параллель түзулер өске параллель болса, бұл түрлендіруді жазықтықтың ығысуы дейді.

Бұл кезде R реперді О мен E_1 нүктелер өсте жататындай, ал E_2' –ті оның координаталары $E_2'(1,1)$ болатындай етіп таңдап алу керек (74 – сурет).



74 – сурет

Бұл кезде аффиндік түрлендірудің аналитикалық өрнегі (13-1) мына түрге келеді

$$x'=x+y, \quad y'=y \qquad (13-5)$$

M, N нүктелер өстің бір жағында жатса $\overrightarrow{MM'}\uparrow\downarrow\overrightarrow{\rho\rho'}$ болады. Өйткені М(х,у) десек $M'(x+y\cdot y)$ болатындықтан $\overrightarrow{MM'}=\{y,0\}$ болады да $\overrightarrow{MM'}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OE_1}$ болады, $\overrightarrow{NN'}$ – те $\overrightarrow{OE_1}$ – мен бағыттас болады. Сөйтіп $\overrightarrow{MM'}\uparrow\uparrow\overrightarrow{NN'}$ болады.

Егер $\rho(x,-y)$ болса $\rho'(x-y,-y)$ болады да $\overrightarrow{\rho\rho'}=\{-y,0\}$ болсын, $\overrightarrow{\rho\rho'}\uparrow\downarrow\overrightarrow{OE_1}$ болып шығады. Демек $\overrightarrow{MM'}\uparrow\downarrow\overrightarrow{\rho\rho'}$ болады.

<u>1 – мысал.</u> Перспективті – аффинді түрлендіру үш пар нүктемен A,B,C және A', B', C' берілген.

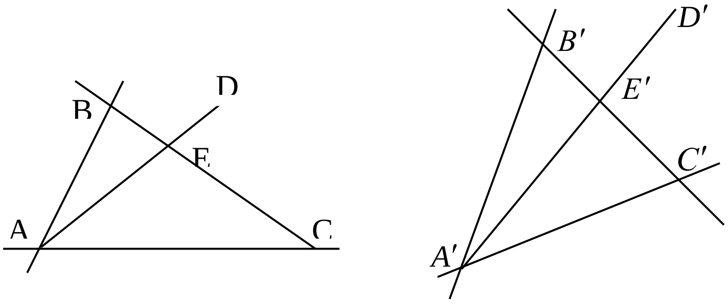
1. Оның өсін табайық. A,B,C және A', B', C' сәйкесінше перспективті – аффинді нүктелер болғандықтан $AA'\|BB'\|CC'$ болады. Өсті салу үшін оның екі нүктесін табу керек. $BC\cap B'C'=C_0$ және $BA\cap B'A'=A_0$ тапсақ $A_0C_0=u$ түзуі перспективті – аффиндік түрлендірудің өсі болады. A,B – ның перспективті – аффинді бейнелері A', B' болғандықтан AB – ның перспективті – аффинді бейнесі $A'B'$ болады. Сондықтан олардың қиылысу нүктесі A_0 екі түзуде жатқандықтан өзіне - өзі бейнеленеді. C_0 –да сөйтеді. Демек A_0C_0 перспективті – аффиндік түрлендірудің өсі болады.

2. Кезкелген Д нүктесінің бейнесін салу керек. Д – ның бейнесі $Д'$ нүкте АД түзудің бейнесі $А'Д'$ – те жатуы керек. Сондықтан АД түзудің бейнесін салу керек. Ол үшін $АД \cap u = Д_0$ табамыз. Сонда А нүкте A' нүктеге көшеді және $Д_0$ нүкте өзіне - өзі көшеді. Сондықтан $АД_0$ түзудің бейнесі $A'Д_0$ болады. Сондықтан Д да AA' – ке параллель жүргізіп, оның $A'Д_0$ мен қиылысу нүктесін тапсақ, ол Д – ның бейнесі болады. Ол $ДД' \cap A'Д_0 = Д'$ нүкте.

3. MN түзудің бейнесін салу керек болса, жоғарыда айтылған әдіспен M, N нүктелердің бейнелері M', N' туаып, оларды қосамыз. Сонда $M'N'$ түзуі берілген MN түзудің бейнесі болады.

4. $T_1'T_2'T_3'$ үшбұрыштың түп бейнесі $T_1T_2T_3$ үшбұрышты салу керек болса, жоғарыдағы әдіспен T_1', T_2', T_3' нүктелердің түп нұсқалары T_1, T_2, T_3 нүктелерді табамыз. Сонда $\Delta T_1T_2T_3$ іздеген үшбұрыш болады.

2 – мысал. Жалпы аффиндік түрлендіру сәйкес үш пар нүктелері А мен A', В мен B', С мен C' берілген. Д нүктеге аффинді сәйкес болатын $Д'$ нүктені салу керек (76 – сурет).



76 – сурет

Аффинді түрлендіруде нүктелердің коллинеарлығы, олардың жай қатынасы сақталады. $Д'$ нүктені осыларға сүйеніп аламыз. $АД \cap BC = E$ болсын. Е – нің бейнесі $B'C'$ – те жату керек және $(BC, E) = (B'C', E')$ болу керек. Осы теңдік бойынша $B'C'$ – тің бойынан E' нүктені табамыз. Сонда $A, E, Д$ бір түзуде жатқандықтан $Д' \in A'E'$ жату керек және $(АД, E) = (A'Д', E')$ болу керек. Бұл теңдікке сүйеніп $Д'$ ты табамыз. Егерде $АД \| BC$ болып ВС – мен қиылыспаса, онда ВД мен AC_0 немесе СД мен АВ түзулердің қиылысу нүктесін пайдаланамыз.

3 – мысал. Жазықтықта аффинді түрлендіру мынадай формуламен берілген $\begin{matrix} x' = x + 5y - 7 \\ y' = x - 4y + 1 \end{matrix}$. Төмендегілерді табу керек.

1. А(2,1) нүктенің бейнесінен координаталарын табыңдар. Ол үшін А нүкте координаталарына берілген формуладағы x, y орнына қойып x', y' – ты табамыз: $x' = 2 + 5 \cdot 1 - 7 = 0$ $y' = 2 - 4 \cdot 1 + 1 = -1$. Сонымен бұл аффиндік түрлендіруде А(2,1) нүкте $A'(0,-1)$ – ге көшеді екен.

2. $B'(-1{,}2)$ нүктенің түп нұсқасын табу керек. Ол үшін формуладағы $x', y'-$тың орнына $B'-$тің координаталарын қойып (x,y) – ты табамыз: $\begin{matrix} x+5y-7=-1 \\ x-4y+1=-2 \end{matrix} \quad \begin{cases} x+5y=6 \\ x-4y=-3 \end{cases}$ Бұдан $y=1, \quad x=1$. Сондықтан B(1,1).

3. Берілген аффиндік түрлендіруге кері түрлендірудің формуласын табыңдар.

Ол үшін берілген екі теңдіктің x, y ты $x', y'-$арқылы өрнектеу керек. Ондай өрнектеу мүмкін себебі $\delta=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=-4-5=-9\neq 0$ Сонда $\begin{cases} x+5y=x'+7 \\ x-4y=y'-1 \end{cases}$.

Теңдеу жүйесінен $9y=x'-y'+8$ $\quad y=\frac{1}{9}x'-\frac{1}{9}y'+\frac{8}{9}$ $\quad \left.\begin{matrix} 4x+20y=4x'+28 \\ 5x-20y=5y'-5 \end{matrix}\right\}$

$9x=4x'+5y'+23$ $\quad x=\frac{4}{9}x'+\frac{5}{9}y'+\frac{23}{9}$. Сонымен берілген түрлендіруге кері түрлендіру формуласы

$$\left.\begin{matrix} x=\frac{4}{9}x'+\frac{5}{9}y'+\frac{23}{9} \\ y=\frac{1}{9}x'-\frac{1}{9}y'+\frac{8}{4} \end{matrix}\right\} \quad (*)$$

болады.

4. $2x-y+3=0$ теңдеумен берілген түзудің бейнесінің теңдеуі қандай болады.

Ол үшін бұл теңдеудегі (x,y) орнына олардың $(*)$ дағы мәндерін қоямыз. Сонда $2\left(\frac{4}{9}x'+\frac{5}{9}y'+\frac{23}{9}\right)-\left(\frac{1}{9}x'-\frac{1}{9}y'+\frac{8}{9}\right)+3=0,$ $\quad 8x'+10y'+46-x'+y'-8+27=0$.

Бұдан $7x'+11y'+65=0$ іздеген түзу теңдігін аламыз.

<u>4 – мысал.</u> Аффиндік түрлендіру $\begin{matrix} x'=3x+2y-2 \\ y'=x-4y+17 \end{matrix}$ формуламен берілген. Осы аффиндік түрлендірудегі инвариант нүктені табу үшін:

Егер инвариант нүкте болса, онда $x'=x, \quad y'=y$ болу керек. Сондықтан $\begin{matrix} x=3x+2y-2 \\ y=x-4y+17 \end{matrix}$. Бұдан $\begin{cases} 2x+2y-2=0 \\ x-5y+17 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-5y+17=0 \end{cases}$. Бұдан $6y=18 \quad y=3, \quad x=-2$. Сонымен M(-2,3) өзіне - өзі көшетін нүкте болады.

§14. Инверсия

Бұған дейін қарастырылған түрлендірулердің барлығы да түзуді түзуге көшіретін. Ондай түрлендірулерді жалпы түрде коллинеация дейді. Енді коллинеацияға жатпайтын түрлендірулерді қарастырамыз. Ол түрлендіру XIX ғасырдың 30 жылдарынан бастап зерттеліп, сол кезге дейін белгілі әдістермен шешілмейтін (салынбайтын) есептерді шешуге қолданыла бастады.

14.1. Инверсия және оның қасиеттері

Жазықтықта центрі О нүктесі, радиусы r болатын шеңбер берілсін, оны қысқаша $\omega(O,r)$ деп белгілейік.

Жазықтықтың О нүктесінен басқа кезкелген М нүктесіне ОМ сәуледе жататын және

$$OM \cdot OM' = r^2 \qquad (14-1)$$

болатын M' нүктесін сәйкестендірейік. Мұндай сәйкестік өзара бірмәнді (биекция) болады. сондықтан ол жазықтықты түрлендіру болады. бұл түрлендіруді $\omega(O,r)$ шеңберге қарағандағы инверсия немесе жай ғана инверсия дейді. О нүктені инверсия центрі немесе полюсі, r^2 –ты инверсия дәрежесі, r инверсия радиусы, M' нүктені М нүктеге инвертті нүкте, ал $\omega(O,r)$ шеңберді инверсия шеңбері немесе инверсия базисі дейді.

Инверсияның қасиеттері:

1°. $OM \cdot OM' = r^2$ болса, онда былайша $OM' \cdot OM = r^2$ жазуға болады. Сондықтан M' нүкте М нүктеге инвертті болса, онда осы инверсияда М нүкте M' нүктеге инвертті болады. Сөйтіп, инверсия өзара қайтымды сәйкестікте болады.

2°. Егер инверсия F фигураны F' фигураға түрлендірсе, онда ол инверсия F' фигураны F фигураға түрлендіреді. Ол фигураларды бір – біріне инвертті дейді.

3°. Инверсия центріне инвертті нүкте болмайды, яғни инверсияда инверсия центрінің бейнесі болмайды.

4°. Шеңбер бойында жатқан нүктелер сол инверсия шеңберіне қарағанда өзіне - өзі инвертті болады. Өйткені М нүкте инверсия шеңберінде жатса, онда $OM \cdot OM = r^2$ болады.

5°. Инверсия шеңберінің ішінде жатқан нүктелерге инвертті нүкте шеңберден тыс жатады және шеңберден тыс жатқан нүктеге инвертті нүкте шеңбер ішінде жатады. Өйткені осындай жағжайда ғана $OM' \cdot OM = r^2$ болады. Егер М – де оған инвертті M' нүктеде шеңбер ішінде жатса $OM' \cdot OM < r^2$, ал екеуіде шеңберден тыс жатса $OM' \cdot OM > r^2$ болып (14-1) орындалмайды.

6°. Егер инвертті нүктелер парының бірі инверсия центрінен шексіз алыстаса, екіншісі центрге шексіз жақындайды. Өйткені ол екі қашықтықтың көбейтіндісі тұрақты r^2 –қа тең болуы керек.

7°. Инверсияда инверсия центрінен шығатын сәуле өзіне - өзі көшеді және сәуленің шеңбер ішіндегі бөлігі шеңбер сыртындағы бөлігіне бейнеленеді және керісінше болады.

14.2. Инверсияның аналитикалық өрнегі

Инверсияның аналитикалық өрнегін анықтау үшін инверсия центрін тікбұрышты координата жүйесінің бас нүктесі үшін алайық. Осылайша алынған $R = (O, E_1, E_2)$ реперде тікбұрышты координата жүйесінде М(x,y) нүктеге инвертті нүкте $M'(x', y')$ болсын. Сонда инверсия анықтамасы бойынша $\overrightarrow{OM'} = \lambda \cdot \overrightarrow{OM}$ болатындықтан, мұны координаталары арқылы жазсақ $x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y$. Ал, $\overrightarrow{OM} = \{x, y\}, \ \overrightarrow{OM'} = \{x', y'\}$ болатындықтан $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = xx' + yy' = r^2$ бұған x', y' мәнін қойсақ $\lambda x^2 + \lambda y^2 = r^2$. Бұдан

$$\lambda = \frac{r^2}{x^2 + y^2}, \quad x' = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2} \qquad (14-2)$$

Инверсия өзара қайтымды сәйкестікте болатындықтан

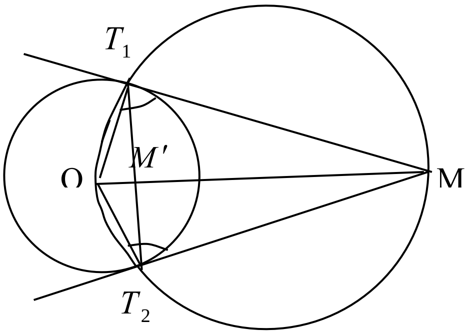
$$x = \frac{r^2 x'}{x'^2 + y'^2}, \quad y = \frac{r^2 y'}{x'^2 + y'^2} \qquad (14-3)$$

(14-2), (14-3) инверсияның аналитикалық өрнегі болады.

14.3. Инвертті фигураларды салу

1. Инверсия $\omega(O, r)$ шеңбермен берілген. Жазықтықтың М нүктесінің осы инверсиядағы бейнесін, яғни М нүктеге осы шеңберге қарағанда инвертті нүктені салу керек.

а) М нүкте шеңберден тыс жатсын (77 – сурет). Бұған инвертті M' нүктені былайша табады.



77 – сурет

1 – О мен М нүктені бастыра ОМ сәуле жүргізеді.

2 – ОМ кесінді диаметр болатындай етіп 2 шеңбер салады. Ол шеңбер берілген шеңбермен T_1, T_2 нүктелерде қиылыссын. Сонда $\angle OT_1M = \angle OT_2M = 90^\circ$ болады (диаметрге тірелген іштей сызылған бұрыш болғандықтан). Демек OT_1 радиус MT_1 –ге, OT_2 радиус MT_2 –ге T_1, T_2 нүктеде перпендикуляр болғандықтан MT_1, MT_2 шеңберге жанама болады.

Сөйтіп, бұл екі жағдайда М нүктеден $\omega(O, r)$ шеңберге жанамалар жүргізіп, жанасу нүктелері T_1 мен T_2 ні табу керек.

3 – T_1T_2 түзуін жүргізіп, оның ОМ мен қиылысу нүктесі M' ті табады. Осы M' нүкте М – ге инвертті нүкте болады..

Өйткені $OT_1 = OT_2, \quad MT_1 = MT_2$ болғандықтан T_1 мен T_2 нүктелер ОМ – ге қарағанда симметриялы болады да $TT_1 \perp OM$ болады. сондықтан тікбұрышты үшбұрыштың тік бұрышынан гипатенузасына түсірілген перпендикулярдың қасиеті бойынша, яғни $\Delta OMT_1 \sim \Delta OM'T_1$ болатындықтан $OM' : OT_1 = OT_1 : OM$ болады да $OM' \cdot OM = OT_1^2, \ OM' \cdot OM = r^2$ болады.

сондықтан инверсия анықтамасы бойынша M' нүкте М – ге инвертті болады.

б) M' нүкте инверсия шеңберінің ішінде жатса, оған инвертті нүктені былайша салады (77 – сурет).

1 – OM' түзуін жүргізеді.

2 – M' нүктеден OM' түзуге перпендикуляр жүргізіп, оның шеңбермен қиылысу нүктелері T_1 мен T_2 ні табады.

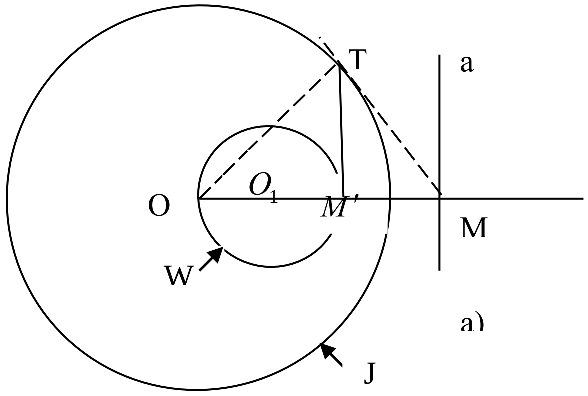
3 – T_1 немесе T_2 нүктеден шеңберге жанама жүргізеді. Ол үшін OT_1 ге T_1 нүктеден перпендикуляр жүргізеді.

4 – бұл перпендикулярдың OM' түзумен қиылысу нүктесі М – ді табады. Ол M' нүктеге инвертті болады. Өйткені $\Delta OMT_1 \sim \Delta OM'T_1$ болатындықтан $OM' \cdot OM = r^2$ болады.

в) Егер М нүкте инверсия шеңберінің бойында жатса оған сол нүктенің өзі инвертті болады. Өйткені $OM \cdot OM = r^2$ болады да М нүкте инверсия анықтамасын қанағаттандырады.

Сөйтіп J инверсияда инверсия шеңберінен тыс жатқан жазықтық нүктелері инверсия шеңбері ішіндегі жазықтық бөлігіне бейнеленсе, инверсия шеңбері ішіндегі нүктелер инверсия шеңберінен тыс жатқан жазықтық нүктелеріне бейнеленеді, ал шеңбер бойындағы нүктелер инвариант болады (қозғалмайды, өзіне - өзі бейнеленеді).

1 – теорема. Инверсия $\omega(O, r)$ шеңбермен берілсін. Бұл инверсияда инверсия центрінен өтетін түзу өзіне - өзі, ал инверсия центрінен өтпейтін түзу инверсия центрінен өтетін шеңберге түрленеді.



78 – сурет

Дәлелі. а) а – түзуі $Ax + By + C = 0$ теңдеумен берілсін және ол $J(0, r)$ инверсия шеңберінің центрінен өтпесін (78 а – сурет). Бұл а түзуінің теңдеуіндегі (x,y) – ты (14-3) – тегі мәндерімен алмастырсақ а түзуінің $J(0, r)$ инверсиядағы бейнесінің теңдеуін алар едік. $\frac{Ar^2x'}{x'^2 + y'^2} + \frac{Br^2y'}{x'^2 + y'^2} + C = 0$

$Ar^2x' + Br^2y' + C(x'^2 + y'^2) = 0$. Мұны былайша түрлендірейік

$$\left(x'+\frac{Ar^2}{2C}\right)^2+\left(y'+\frac{Br^2}{2C}\right)^2=\frac{r^4\left(A^2+B^2\right)}{4C^2} \qquad (*)$$

Ал, бұл центрі $O_1\left(-\frac{Ar^2}{2C},-\frac{Br^2}{2C}\right)$, радиусы $R=\frac{r^2\sqrt{A^2+B^2}}{2C}$ болатын шеңбердің теңдеуі және бұл шеңбер теңдеуі инверсия центрі O(0,0) нүктенің координаталарын қанағаттандырады. Сөйтіп $J(0,r)$ инверсияда инверсия центрінен өтпейтін түзу инверсия центрінен өтетін шеңберге бейнеленеді екен. Берілген а түзудің бағыттаушы векторы $\vec{a}=\{-B,A\}$, ал OO_1 түзуінің бағыттаушы векторы $\overrightarrow{OO_1}=\left\{-\frac{Ar^2}{2C},-\frac{Br}{2C}\right\}$ болатындықтан $\vec{a}\cdot\overrightarrow{OO_1}=\frac{ABr^2}{2C}-\frac{ABr^2}{2C}=0$ болады. сондықтан О мен шеңбер центрін қосатын түзу берілген а түзуіне перпендикуляр болады екен.

Сонымен инверсия центрінен өтпейтін түзудің бейнесі центрден өтетін шеңбер болатын болды. Ол шеңберді былайша салады: а) О нүктеден берілген а түзуге перпендикуляр жүргізеді, ал а түзуін М нүктеде қисын (78 а – сурет). б) М нүктеден инверсия шеңберіне жанама жүргізеді. Ол шеңбермен Т нүктеде жанассын. в) Т нүктеден ОМ түзуіне перпендикуляр жүргізіп, олардың қиылысу нүктесі $M'-$ті табады. Ол М нүктеге инвертті болады. г) $OM'-$ті диаметр етіп ω шеңбер сызамыз. Сол берілген а түзудің $J(0,r)$ инверсиядағы бейнесі болады. а – түзудің кезкелген х нүктесін О – ға қоссақ, оның ω шеңбермен қиылысу нүктесі x' пен х инвертті болады.

Егер а түзуі шеңбермен А,В екі нүктеде қиылысса, онда а – ға инвертті болатын шеңбер О,А,В нүктеден өтетін шеңбер болады. Өйткені бұл кезде А нүкте өзіне - өзі, В нүкте өзіне - өзі инвертті болатындықтан а түзуінің бейнесі болатын шеңберде жатуы керек, ол шеңбер дәлелдеуіміз бойынша центрден өту керек. Сөйтіп бұл кездегі а түзуіне инвертті шеңбер О,А,В нүктелерден өтеді. Ондай үш нүктені басып бір ғана шеңбер жүргізіледі (78 б – сурет).

Егер а түзуі инверсия шеңбері $J(0,r)$ ге М нүктеде жанасатын болса, онда М өзіне - өзі көшеді де а түзуіне инвертті шеңбер ОМ диаметрі болатын шеңбер болады. сөйтіп бұл шеңбер инверсия шеңберіне М нүктеде іштей жанасады. (78 в – сурет).

а түзуі инверсия центрінен өтсе, онда оның теңдеуін де $C=0$ болады. Сондықтан $Ax+By=0$ ке (14-3) ті қойсақ $\frac{Ar^2x'}{x'^2+y'^2}+\frac{Br^2y'}{x'^2+y'^2}=0$ болады да, бұдан $Ax'+By'=0$ болады. Бұл центрден өтетін түзудің теңдеуі және ол а түзу теңдеуі мен бірдей. Демек а түзуі өзіне - өзі көшеді.

<u>2 – теорема.</u> $J(0,r)$ инверсия центрі болсын. Бұл инверсия центрінен өтетін шеңбердің бейнесі центрден өтпейтін түзу болады, ал инверсия центрінен өтетін шеңбердің бейнесі центрден өтпейтін шеңбер болады және О нүкте шеңберлердің центрлік сызығында жатады.

Дәлелі. ω_E шеңбер $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ $(2*)$ теңдеумен берілсін. Мұны былайша жазсақ $\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4}$ берілген шеңбердің центрі $O_1\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$, радиусы $R=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4C}$ болатыны байқалады. Енді осы шеңбердің $J(0,r)$ инверсия центріне қарағанда бейнесі не болатынын қарастырайық. Ол үшін бұл теңдеудегі (x,y) – ті (14-3) формула бойынша (x',y') пен алмастыру керек: $\frac{r^4x'^2}{(x'^2+y'^2)^2}+\frac{r^4y'^2}{(x'^2+y'^2)^2}+\frac{Ar^2x'}{x'^2+y'^2}+\frac{Br^2y'}{x'^2+y'^2}+C=0$. Мұны ықшамдасақ $C(x'^2+y'^2)+Ar^2x'+Br^2y'+r^4=0$ $(3*)$. Сонымен $(2*)$ теңдеумен анықталатын шеңбер теңдеуі $(3*)$ болатын фигураға бейнеленеті екен.

Егер $(2*)$ шеңбер инверсия центрінен өтсе $C=0$ болу керек. Осыны ескерсек $(3*)$ мына түрге келеді $Ax'+By'+r^2=0$. Ал, бұл $r^2\neq 0$ болғандықтан центрден өтпейтін түзудің теңдеуі.

Сөйтіп инверсияда инверсия центрінен өтетін шеңбер инверсия центрінен өтпейтін түзуге бейнеленеді екен.

Егер $(2*)$ шеңбер инверсия центрінен өтсе $C=0$ болады. Бұл кезде $(3*)$ ны былайша жазуға болады

$$x'^2+2\frac{Ar^2}{2C}x'+\frac{A^2r^4}{4C^2}+y'^2+2\frac{Br^2}{2C}y'+\frac{Br^4}{4C^2}=\frac{Ar^4}{4C^2}+\frac{Br^2}{4C^2}-\frac{r^4}{C}$$

немесе

$$\left(x'+\frac{Ar^2}{2C}\right)^2+\left(y'+\frac{Br^2}{2C}\right)^2=\frac{r^4\left(A^2+B^2-4C\right)}{4C^2} \quad (4*).$$

Ал, бұл центрі $O_2\left(-\frac{Ar^2}{2C},-\frac{Br^2}{2C}\right)$, радиусы $R=\frac{r^2\sqrt{A^2+B^2}}{2C}$ болатын шеңбердің теңдеуі. Олай болсаинверсия центрінен өтпейтін шеңбер инверсия центрінен өтпейтін шеңберге бейнеленеді, өйткені О(0,0) нүкте координатасын $(4*)$ теңдеуді қанағаттандырмайды.

О(0,0) мен $O_1\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ нүктелерді басып өтетін түзу теңдеуі де, О(0,0) мен $O_2\left(-\frac{Ar^2}{2C},-\frac{Br^2}{2C}\right)$ нүктелерді басып өтетін түзу теңдеуі де $Bx-Ay=0$ болады. олай болса инверсия центрі О, берілген шеңбер центрі O_1 ол шеңбердің бейнесінің центрі O_2 бір түзуде жатады.

<u>3–теорема.</u> Егер ω_1 шеңбер немесе түзу болып, ал ω_2 шеңберге инверсия центрінен өзге Т нүктеде жанасатын болса, онда ω_1 мен ω_2 нің бейнелері ω_1' пен ω_2' сол Т нүктеге инвертті T' нүктеде жанасады.

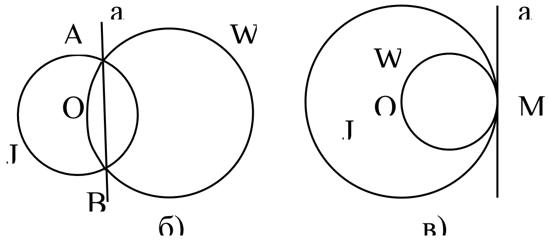
Өйткені ω_1 мен ω_2 фигура Т нүктеде жанасса, онда оған инвертті T' нүкте ω_1' ке де, ω_2 ке де жалғыз ортақ нүкте болады. демек олар сол T' нүктеде жанасады.

Мыналардың білгеннің зияны жоқ.

<u>4–теорема.</u> ω_1 мен ω_2 сызықтардың (олар шеңбер, түзуі болуы мүмкін) M нүктедегі олар арасындағы бұрышы, бұл фигуралардың бейнелері ω_1' пен ω_2' тің M нүктенің бейнесі M' нүктедегі олар арасындағы бұрышқа тең болады.

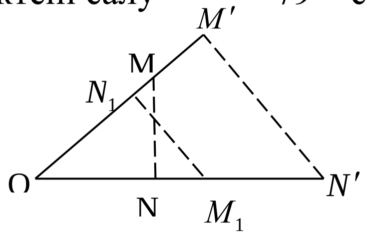
- Сызықтардың (шеңбер, түзу) жанасу нүктесіндегі олар арасындағы бұрышы 0 – ге тең болады.
- Инвертті шеңберлердің центрлері инвертті болмайды.
- Инверсия шеңбері центрі болатын шеңбер инверсия шеңберіне көпцентрлі шеңберге түрленеді.
- Инверсия шеңберіне жанасатын шеңбер сол нүктеде жанасатын шеңберге көшеді.
- Инверсия шеңберіне ортогонал шеңбер өзіне түрленеді.
- Инвертті екі пар A, A' пен B, B' нүктелерден өтетін шеңбер инверсия шеңберіне ортогонал болады.

<u>1 – мысал.</u> $J(0,r)$ инверсияда M нүктесі M' нүктеге көшсе N нүктесі қай нүктеге көшеді.



78 – сурет

Шешуі. O – инверсия центрі болсын, M мен M' өзара инвертті нүктелер. N' - ге инвертті нүктені салу ´79 – сурет).



79 – сурет

O, M, M' бір түзуде жатуы керек және $OM \cdot OM' = r^2$ болуы керек. ON түзуін жүргізіп, оның бойына $OM = OM_1$ болатын M' нүктесін саламыз, ал $ON = ON_1$ болатын N' нүктені OM бойына саламыз. Сөйтіп, M' нүктеден N_1M_1 – ге параллель жүргізсек, оның ол түзумен қиылысу нүктесі N' берілген N нүктеге инвертті болады.

Дәлелі. $N_1M_1 \| M'N'$ болғандықтан $\Delta ON_1M \sim \Delta OM'N'$. Сондықтан $OM_1 : ON_1 = ON' : OM'$. Бұдан $OM_1 \cdot OM' = ON_1 \cdot ON'$, $OM = OM_1$, $ON = ON_1$ екенін ескерсек $ON \cdot ON' = OM \cdot OM'$, ал $OM \cdot OM' = r^2$ демек $ON \cdot ON' = r^2$ яғни N' пен N инвертті.

Егер N нүкте ОМ түзуінің бойында жатса, онда $ON \cdot ON' = OM \cdot OM'$ болатындықтан, бұдан $OM : ON = ON' : OM'$ болатындықтан $OM : ON = t$ десек ОМ сәуле бойына $ON' = t \cdot OM'$ болатын N' нүктені салу керек.

<u>2–мысал.</u> Бір төбесі $J(0,r)$ инверсия центрінде, оған қарсы төбесі инверсия шеңберінде жататын квадраттың $J(0,r)$ инверсияға қарағандағы бейнесін табу керек.

Шешуі. ОА, ОС түзулері центрден өтеді. Сондықтан олар бұл инверсияда өздеріне - өздері көшеді. ОАВС квадтар болғандықтан $\angle OBC = 90^\circ$ В нүктеден шеңберге жүргізілген жанама $A'C'$ болса $\angle ABA' = 45^\circ$, $\angle CBC' = 45^\circ$ болғандықтан А нүкте OA', С нүктесі OC' тің ғана ортасы болады.

Центрден өтпейтін түзу центрден өтетін шеңберге бейнеленетіндіктен АВ – ға $A'B$, ВС – ға BC' доға сәйкестенеді.

Сонда квадраттың ішкі нүктелері OA' түзуі, АВ және BC' доғалармен және OC' түзуі мен шектелген жазықтық бөлігіне бейнеленеді. А нүктеге A', С нүктеге C' инвертті болғандықтан ОА кесінді A' тен әрі қарай ОС кесінді C' тен әрі қарай бейнеленеді.

<u>3–теорема.</u> $J(0,r)$ инверсияда М(1,3) нүктеге инвертті болатын нүкте координаталарын табу керек.

Шешуі. Инверсияның аналитикалық өрнегі $x' = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2}$, $y' = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2}$ еді. Бұдан мысалды $r = 2$, $x = 1$, $y = 3$. Сонда М(1,3) нүктеге инвертті нүкте координаталары $x' = \frac{2^2 \cdot 1}{1^2 + 3^2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, $y' = \frac{2^2 \cdot 3}{1^2 + 3^2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$. Сонымен $M'(0{,}4;1{,}2)$.

Қайталау сұрақтары мен есептері

1. Жиынды жиынға бейнелеу деген не. Элементтің бейнесі, түп нұсқасы дегендер не.
2. Жиынжы жиынға бейнелеу қандай кезде сюръекция, инъекция, биекция делінеді. Мысал.
3. Түрлендіру деген не, оның бейнелеуден өзгешелігі не.
4. Теңбе – тең түрлендіру деген не.
5. Өзара бірмәнді түрлендіру (биективті түрлендіру) деген не, кері түрлендіру деген не. Мысал.
6. Түрлендірулер көбейтіндісі деген не. Мысал.
7. Жиын қандай жағдайда группа делінеді. Группаның ішкі группасы деген не.
8. Түрлендірулер жиынының группасы мен ішкі группасы. Түрлендір жиыны группа болу үшін қандай шартты қанағаттандырса жеткілікті.
9. Жазықтықты түрлендіру деген не, фигураны геометриялық түрлендіру деген не.

10. Геометриялық түрлендірудің ассоциативтігі деген не.
11. Қозғалыс деген не, оның негізгі қасиеттері қандай.
12. Қозғалыстың аналитикалық өрнегі қандай, аналитикалық өрнек деген не.
13. Жазықтық бағдары деген не, ол қалай бағдарланады және оң, сол (теріс) бағдар қалай келісілген.
14. Қозғалыстың мысалдары
    а) параллель жылжыту
    б) нүктеге қарағандағы симметрия
    в) өске қарағандағы симметрия
    г) бұру дегендер не және қалай анықталады.
15. Қозғалыстың екі түрі: 1 – текті және 2 – текті қозғалыстар. Олардың аналитикалық өрнегіндегі айырмашылық.
16. қозғалыстар группасы және оның ішкі группалары.
17. Репер. Қозғалыстың негізгі теоремасы.
18. Гоматетия қасиеттері, аналитикалық өрнегі.
19. Ұқсас түрлендіру. Қозғалыс, гоматетия, ұқсас түрлендірулердің дербес түрі екендігі.
20. Ұқсас түрлендірудің аналитикалық өрнегі, түрлері.
21. Ұқсас түрлендірудің қозғалыс пен гоматетия көбейтіндісінен тұратындығы.
22. Аффиндік түрлендіру. Қасиеттері. Аналитикалық өрнегі.
23. Аффиндік түрлендірулер группасы және оның ішкі группасы.
24. Инверсия және оның қасиеттері.
25. Инверсияның аффиндік түрлендіруден негізгі ерекшелігі қандай.
26. Инверсия центрінен өтетін, өтпейтін, инверсия шеңберіне жанасатын түзу, шеңбер бейнелері.
27. Үшбұрыш, көпбұрыштардың теңдік және ұқсастық белгілері.
28. Параллель жылжыту арқылы трапецияның табандарының қиындысы диагональдарының қосындысынан кем, айырымынан артық болатынын дәлелдеңдер.
29. Тікбұрышты координата жүйесінде
    а) $\vec{a}=\{-3,5\}$ векторға параллель жылжытудың аналитикалық өрнегін анықтаңдар
    б) $S(-2,5)$ нүктеге қарағандағы центрлік симметрияның аналитикалық өрнегін анықтаңдар
    в) $C(-1,3)$ нүктеден $\varphi=-\frac{\pi}{3}$ бұрышқа бұрғандағы түрлендірудің аналитикалық өрнегін анықтаңдар
    г) $x-y+4=0$ түзуге қарағандағы симметрияның аналитикалық өрнегін анықтаңдар
    д) $2x-y+1=0$ өске және $\vec{a}=\{2,4\}$ векторға қарағандағы жылжымалы симметрияның аналитикалық өрнегін анықтаңдар

е) коэффициенті $k=3$, центрі $S(-2,-1)$ болатын гоматетияның аналитикалық өрнегін анықтаңдар

ж) центрі $S(-1,3)$ нүкте болатын, инверсия радиусы $r=2$ болатын инверсияның аналитикалық өрнегі қандай болады.

30. Аффиндік түрлендіру $\begin{cases} x' = x + 4y - 7 \\ y' = x + 3y + 1 \end{cases}$ формуламен берілген. Осы түрлендірудегі

а) A(3,2) нүктенің бейнесін табыңдар

б) B(-1,6) нүктенің түп нұсқасын табыңдар

в) $x+2y-1=0$ түзудің бейнесінің теңдеуін құрыңдар

г) $x+2y-1=0$ түзудің тұп нұс қасының теңдеуін құрыңдар

д) қозғалмайтын нүктесін табыңдар.

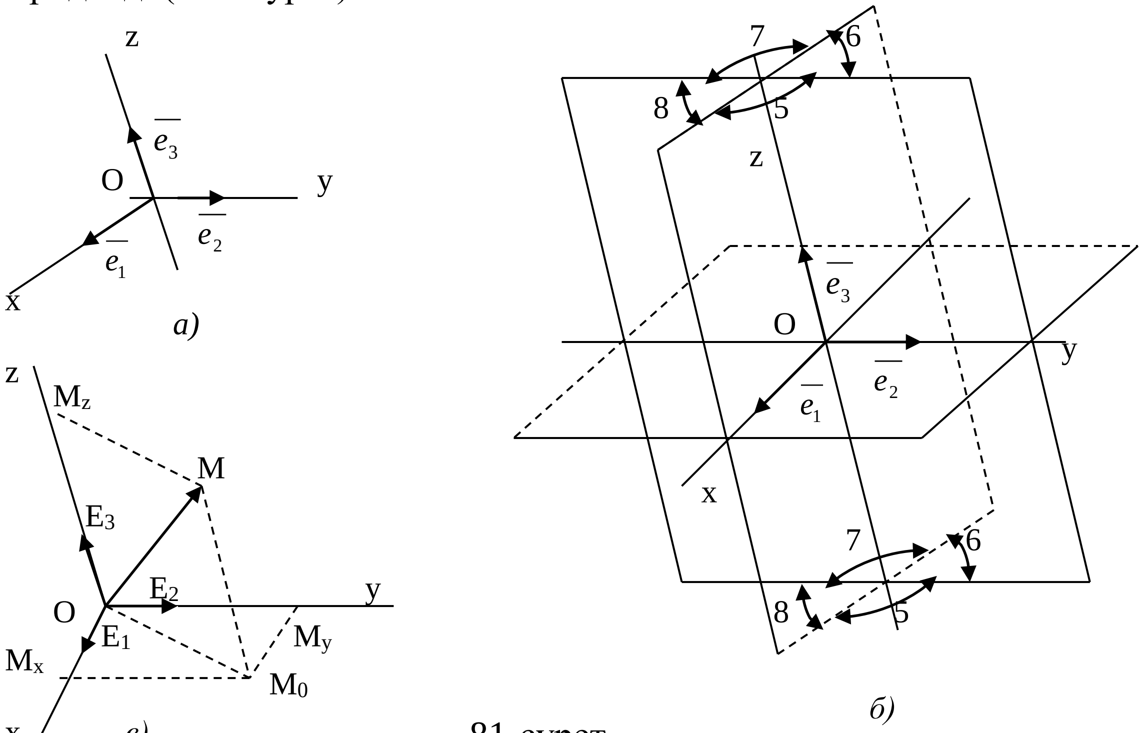
V тарау. Кеңістіктегі аналитикалық геометрия

§15 Кеңістіктегі координаталар жүйесі

15.1 Аффиндік және тікбұрышты координаталар жүйесі

Кезкелген сызықтық тәуелсіз, яғни компланар емес үш вектор үш өлшемді кеңістіктің базисі болады.

О нүкте және $\left(\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}, \overrightarrow{l_3}\right)$ базистен тұратын төрттікті (геометриялық құрылымды) кеңістіктегі аффиндік координаталар жүйесі дейді. О нүктені координаталар жүйесінің басы $\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}, \overrightarrow{l_3}$- векторларды сәйкесінше 1–, 2–, 3– координаттық векторлар дейді. Бірінші координаттық $\overrightarrow{l_1}$ вектормен бағыттас және оны басып өтетін түзуді абсцисса өсі, $\overrightarrow{l_2}$ –мен бағыттас және оны басып өтетін түзуді ордината өсі, $\overrightarrow{l_3}$ –пен бағыттас және оны басып өтетін түзуді апликата өсі дейді және оларды сәйкесіншк x, y, z арқылы белгілейді. Ол өстерді x, y, z өстері деп те атайды. Жалпы түрде бұл өстерді координата өстері дейді (81 – сурет).



81-сурет

Бұл үш өсті қос-қостан басып Oxy, Oxz, Oyz үш жазықтық өтеді. Оларды координата жазықтықтары дейді (81 б – сурет). Ол үш жазықтықтық қиылысып, кеңістікті 8 бөлікке бөледі, оларды октанталар дейді. Оның төртеуі Oxy жазықтықтың үстінгі жағында, ал қалған төртеуі астыңғы жағында жатады. Координаттық векторлар $\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}, \overrightarrow{l_3}$ тің үшуіде оң бағыттас болатын октантаны 1 – октанта дейді, қалғандарын сағат тілі қозғалысы бойынша кері бағыттас 2–, 3–, 4– октанта деп белгілейді.

Бұл 1–2–3–4 октантаның Oxy жазықтықтың астыңғы жағында жатқан бөлігін сәйкесінше 5,6,7,8 октанта дейді (81 б–суретте октанта нөмірленген).

Осы геометриялық құрылымның жәрдемімен кеңістіктің кезкелген нүктесіне оның координаталары деп аталатын үш санды бірмәнді сәйкестендіруге болады. Біз координаттық векторлар үшін оң базисті падаланамыз. Ол үшін $\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}, \overrightarrow{l_3}$ векторлардың ұштарын қосатын үшбұрыш бойынша $\overrightarrow{l_1}$ ден шығып, $\overrightarrow{l_2}$ $-$ге одан $\overrightarrow{l_3}$ $-$ке, одан қайтадан $\overrightarrow{l_1}$ке жүріп өту қозғалысы бағыты О нүктеден сағат тілі қозғалысына кері бағытта болып көріну керек. Мұндай кезде координаталар жүйесі де оң делінеді, кері жағдайда сол (теріс) делінеді. Координата жүйесін Оx, y, z немесе О$\overrightarrow{l_1}\,\overrightarrow{l_2}\,\overrightarrow{l_3}$ деп, кейде $OE_1E_2E_3$ (мұндағы $\overrightarrow{OE_1} = \overrightarrow{l_1}$, $\overrightarrow{OE_2} = \overrightarrow{l_2}$, $\overrightarrow{OE_3} = \overrightarrow{l_3}$) деп те белгіленеді.

Кеңістікте $\mathrm{OE_1E_2E_3}$ аффиндік координата жүйесі берілсін. Кеңістікте М нүктесін алсақ. $\overrightarrow{OM}$ векторды, бұрын айтқандай, М нүктенің радиус – векторы дейді. Ол базистік (координаттық) векторларға бірмәнді жіктелетін

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{l_1} + y\,\overrightarrow{l_2} + z\,\overrightarrow{l_3} \qquad (15-1)$$

Осы жіктелудегі координаттық векторлардың коэффициенттері x, y, z сандарын $\overrightarrow{OM}$ вектордың координаталары деп атап былайша $\overrightarrow{OM} = \{x, y, z\}$ белгілегенбіз.

Радиус – вектор $\overrightarrow{OM}$ мен оның ұшы М нүкте бір – бірімен өзара бірмәнді сәйкестікте болады: М нүкте берілсе, онда $\overrightarrow{OM}$ векторда берілгені, керісінше $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ вектор берілсе, оның ұшы М нүктеде берілгені. Сондықтан $\overrightarrow{OM}$ радиус – вектордың координаталарын М нүктенің координаталары үшін қабылдап $M(x, y, z)$ деп жазады.

81 – в суретте $\overrightarrow{OM}$ вектордың $\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}, \overrightarrow{l_3}$ векторларға жіктелуі көрсетілген $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} + \overrightarrow{OM_z} = x\,\overrightarrow{l_1} + y\,\overrightarrow{l_2} + z\,\overrightarrow{l_3}$. Демек М нүктенің координаталары $\overrightarrow{OM_x}, \overrightarrow{OM_y}, \overrightarrow{OM_z}$ векторлардың сәйкесінше $\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}, \overrightarrow{l_3}$ векторлармен өлшегендегі ұзындығының шамасын көрсетеді. Ол шама, мысалы x шама $\overrightarrow{OM_x}$ пен $\overrightarrow{l_1}$ вектор бағыттас болғанда оң, қарама – қарсы бағытта болғанда теріс болады. y, z терде солай анықталады. Олардың бағыттас, қарама – қарсы бағытта болуы М нүктенің қай октантада жатуына байланысты.

Әр октантадағы $M(x, y, z)$ нүктенің координаталарының таңбасы төмендегі таблицадағыдай болады.

Октанталар	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x – тың таңбасы	+	-	-	+	+	-	-	+
y – тың таңбасы	+	+	-	-	+	+	-	-
z – тың таңбасы	+	+	+	+	-	-	-	-

Егер нүкте абсцисса өсінде жатса $y = 0$, $z = 0$, ордината өсінде жатса $x = 0$, $z = 0$, апликата өсінде жатса $x = 0$, $y = 0$ болады. Сол сияқты егер нүкте Оху координата жазықтығында жатса $z = 0$, Oxz −те жатса $y = 0$, Oyz −те жатса $x = 0$ болады.

Сонымен кеңістікте берілген М нүктенің координаталарын табу үшін М нүктеден z өсіне параллель жүргізіп, оның Оху жазықтықпен қиылысу нүктесі M_0 нүктені табу керек. Одан соң бұл нүктеден Ох, Оу өстеріне параллельдер жүргізу арқылы M_x, M_y нүктелерді табады, $M_0M = OM_2$ нүктені салады да $\overrightarrow{OM_x}, \overrightarrow{OM_y}, \overrightarrow{OM_z}$ векторлардың $\vec{l_1}, \vec{l_2}, \vec{l_3}$ векторлар мен өлшегендегі ұзындықтары (x, y, z) −ті табады.

OM_x, M_xM_0, M_0M −ді М нүктенің координаттық сызықтары дейді, OM_xM_0M- координаттық сынық сызық делінеді.

Егер нүктенің координаталары x, y, z берілсе, онда $\overrightarrow{OM_x} = x\,\vec{l_1}$, $\overrightarrow{OM_y} = y\,\vec{l_2}$, $\overrightarrow{M_0M} = z\,\vec{l_3}$ векторларды салады. Сонда М нүктенің кеңістіктегі орны табылады.

Егер координаттық векторлар бірлік вектор болса және қос – қостан ортогонал болса (яғни базистік векторлар ортономаланған болса) онда координата жүйесін тікбұрышты декарт – координата жүйесі немесе жай ғана тікбұрышты координата жүйесі дейді.

Әдетте тікбұрышты координаталар жүйесінің координаттық векторларын $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ әріптерімен белгілейді. Бұл кезде $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$, $\vec{\jmath} \perp \vec{k}$, $\vec{k} \perp \vec{\imath}$ және $|\vec{\imath}| = |\vec{\jmath}| = |\vec{k}| = 1$ болу керек. Кеңістікте аффиндік, тікбұрышты координатадлар жүйесінен басқа да координаталар жүйесі қолданылады. Олар цилиндрлік, сфералық координаталар жүйелері.

15.2 Цилиндрлік координаталар жүйесі

Цилиндрлік координата жүйесі былайша ендіріледі.

π жазықтығынан О нүктесі, Ох, Оу өстері және ол жазықтыққа перпендикуляр Oz өсін алады (82 – сурет). М – кеңістіктің кезкелген нүктесі болсын, оның Оху жазықтықтағы проекциясы M_0 болсын, M_0 дан х және у өстеріне параллель етіп жүргізілген түзулер оларды M_x, M_y нүктелерде қисын, $M_0M = OM_z$ болсын.

М нүктенің цилиндрлік координаталары деп r, ϕ, z сандарын айтады да, оларды осы ретте $M(r, \phi, z)$ деп жазады. Мұндағы $r = OM_0$, ϕ −деген OM_0 −дың Ох өсімен жасайтын бұрышы $z = M_0M$ (r мен ϕ сандарын M_0 нүктенің поляр координаталары деуге болады).

Егер $r = const$ тұрақты болса М нүкте өсі Oz болатын цилиндр жасайды. Сондықтанда бұл координаталарды цилиндрлік координата дейді, ал құрылған координаталар жүйесін цилиндрлік координаталар жүйесі дейді.

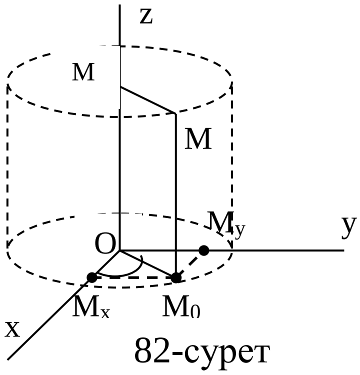
Егер Ох, Oz өстеріне О нүктеде перпендикуляр болатын Оу өсін жүргізсек Оxyz тікбұрышты координаталар жүйесі шығады. Ол координата жүйесінде М нүктенің декарттық координаталары $M(x, y, z)$ болсын. Сонда М нүктенің цилиндрлік координаталары (r, ϕ, z) пен декарттық координаталары (x, y, z) −арасында мынадай қатыстар болады

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi, \quad z = z \qquad (15-2)$$

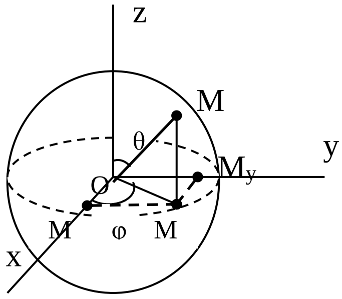
Мұндағы $0 \le r < \infty, \quad 0 \le \phi \le 2\pi, \quad -\infty \le z < \infty$ аралықта өзгереді (15-2) ден

$$tg\phi = \frac{y}{x}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = z \qquad (15-3)$$

болады. Себебі $\frac{y}{x} = \frac{r\sin\phi}{r\cos\phi} = tg\phi, \quad x^2 + y^2 = r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi =$ $= r^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = r^2$ болады. (15-2) нүктенің цилиндрлік координаталары арқылы декарттық, ал (15-3) нүктенің декарттық координаталары арқылы, оның цилиндрлік координаталарын табу формулалары.



82-сурет



83-сурет

15.3 Сфералық координаталар жүйесі

Кеңістікте өзара перпендикуляр OX, OY, OZ өстерін қарастырамыз. Кеңістіктен кезкелген М нүктесін алайық, оның Oxy жазықтықтағы проекциясы M_0 болсын. $OM = \rho$, OM – нің Oz өсімен жасайтын бұрышы θ, OM_0 −дың Ox өсі мен жасайтын бұрышы ϕ болсын, $OM_0 = r$ дейік. θ мен ϕ ды сәйкесінше ендік және бойлық дейді (83 – сурет).

М нүктенің сфералық координаталары деп ρ, ϕ, θ сандарын айтады және оларды осы тәртіпті сақтап былайша $M(\rho, \phi, \theta)$ жазады.

Егер ρ тұрақты болып, θ мен ϕ өзгерсе М нүктесі радиусы $R = \rho$, центрі О болатын сфера сызар еді. Сондықтан бұл координаталар жүйесін сфералық координаталар жүйесі дейді. Әдетте $0 \le \rho < \infty, \quad 0 \le \phi \le 2\pi, \quad 0 \le \theta < \infty$ аралықта өзгереді деп есептеледі.

Егер М нүктенің OXYZ тікбұрышты координаталар жүйесіндегі координаталарын $M(x, y, z)$ десек, бұл нүктенің сфералық және декарттық координаталары арасында мынадай байланыс болады.

$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi, \quad z = \rho\sin(90 - \theta) = \rho\cos\theta, \qquad r =$ $\rho\cos(90 - \theta) = \rho\sin\theta$ болғандықтан

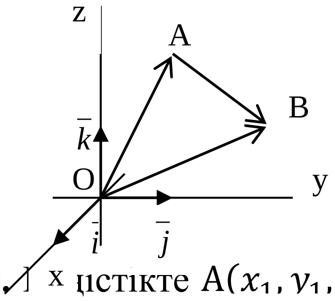
$$x = \rho\sin\theta\cos\phi, \quad y = \rho\sin\theta\sin\phi, \quad z = \rho\cos\theta \qquad (15-4).$$

15.4 Тікбұрышты координаталар жүйесінде кейбір қарапайым есептерді шешу

1°. Вектор координаталары. Тікбұрышты $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ координаталар жүйесінде $A(x_1, y_1, z_1), \quad B(x_2, y_2, z_2)$ нүктелер берілсін. 84–сурет бойынша векторлар айырымының ережесі бойынша $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$. Вектор координаталарының анықтамасы бойынша $\overrightarrow{OB} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\overrightarrow{OA} = \{x_1, y_1, z_1\}$. Векторлар айырымының координаталары туралы ереже бойынша

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} \qquad (15-5)$$

Екі нүктемен берілген вектор координаталарына соңғы нүктенің координаталарынан алғашқы нүктенің сәйкес координаталарын алғандағы сандарға тең болады.



84-сурет

2°. Екі нүкте аралығы. ңістікте А(x_1, y_1, z_1), $B(x_2, y_2, z_2)$ екі нүкте берілсін, онда $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y$ болады. Сонда вектор ұзындығы деп ол векторды кескіндейтін кесінді ұзындығын айтатындықтан АВ=$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ (15,6) екі нүктенің арақашықтығын табу формуласы болады.

Екі нүктенің арасын табу үшін оның бірінші координаталарынан екіншісінің сәйкес координаталарын алып, оларды квадраттап қосып, квадрат түбір табу керек.

3°. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу. Тік бұрышты координата жүйесінде ұштары А(x_1, y_1, z_1), $B(x_2, y_2, z_2)$ болатын АВ кесінді берілсін. $C(x, y, z)$ нүкте АВ кесіндіні λ қатынаста бөлсек, онда $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \lambda$ $(*1)$ болу керек. Бұдан $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB}$. Мұны векторлардың координаталары арқылы жазсақ $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$, $y - y_1 = \lambda(y_2 - y)$, $z - z_1 = \lambda(z_2 - z_1)$ болады. Бұлардан

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \qquad (15-7)$$

Мұны кесіндіні λ қатынаста болу формуласы дейді. $\lambda \neq -1$ болу керек және С нүкте АВ кесіндіде жатса $\overrightarrow{AC}$ мен $\overrightarrow{CB}$ бағыттас болады да $(*1)$- ден $\lambda > 0$ болады, ал С нүкте АВ кесіндінің созындысында жатса $\overrightarrow{AC}$ мен $\overrightarrow{CB}$ қарама – қарсы бағытталады да $\lambda < 0$ болады. бірінші жағдайда АВ кесіндіні С нүкте іштей, екінші жағдайда сырттай бөледі делінеді.

Егер С нүкте АВ кесіндінің қақ ортасы болса $\frac{AC}{CB} = \lambda = 1$ болады да (15-7) мына түрге келеді

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2} \qquad (15-8)$$

Мұны кесіндіні қақ бөлу формуласы дейді.

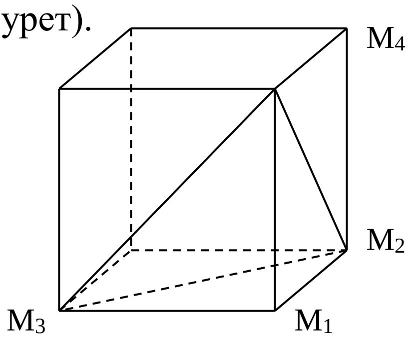
4°. Параллелограм және үшбұрыш аудандары. Тікбұрышты координата жүйесінде төбелері $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$ параллелограм берілсін. Онда бұл параллелограмның ауданы оның қабырғаларына бейнелейтін $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, $\overrightarrow{AD} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ векторлардың векторлық көбейтіндісіне сан жағынан тең болатын $S_{пар} = \left|\left[\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}\right]\right|$. Ал, бұл координаталар арқылы былайша жазылатын

$$S_{пар} = \sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_4 - z_1 & x_4 - x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \end{vmatrix}^2} \qquad (15-9)$$

Ал, ABC үшбұрыш ауданы ABCД параллелограм ауданының жартысына тең болатындықтан

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2} \qquad (15-10)$$

5°. Параллелепипед және тетраэдр көлемдері. Тік бұрышты координата жүйесінде $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, $M_4(x_4, y_4, z_4)$ төрт нүкте берілсін және олар бір жазықтықта жатпасын, онда мына векторлар $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, $\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$, $\overrightarrow{M_1M_4} = \{x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1\}$ компланар болмайды және олар $M_1M_2M_3M_4$ тетраэдрдің қырлары болады. Оны параллелепипедке дейін толықтырайық (85 – сурет).



85-сурет

Параллелепипедтің көлемі оның бір төбеден шығатын үш қыры болатын векторлардың аралас көбейтіндісіне тең болатын:

$$V_{пар} = \left\|\begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{matrix}\right\| \qquad (15-11)$$

Ал, тетраэдрдің көлемі бұл параллелепипедтің көлемінен 6 есе кіші болады. Өйткені параллелепипедтің көлемдері бірдей 6 тетраэдрдің бірігуінен тұрады. Сондықтан тетраэдр көлемі

$$V_{тетр} = \left\| \begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{matrix} \right\| \qquad (15 - 12)$$

Аудан, көлем теріс болмайтындықтан (15-11-12) формулаларда олардың модулдері алынады.

<u>1 – мысал.</u> А(1,-3,-2), В(8,0,-4), С(4,8,-3), Д(-3,5,-1) нүктелер берілген.

Мыналарды табыңдар

1°. Нүктелер қай октантада жатыр?

а) А нүкте 8 – октантада себебі $x > 0, \quad y < 0, \quad z < 0$

б) В нүкте Oxz жазықтығында жатыр себебі $y = 0$

в) С нүкте 5 октантада жатыр себебі $x > 0, \quad y > 0, \quad z < 0$

г) Д нүкте 6 октантада жатыр себебі $x < 0, \quad y > 0, \quad z < 0.$

2°. А нүктеге координата басына қарағанда симметриялы болатын нүктені табыңдар.

Координата басына қарағанда симметриялы болатын нүктелердің сәйкес координаталары қарама – қарсы болады. Сондықтан $A^{'}(-1{,}3{,}2)$ нүкте болады.

3°. С нүктеге Оху координата жазықтығына қарағандағы Д нүктеге OXZ жазықтыққа қарағандағы симметриялы нүктені табыңдар.

Оху координата жазықтығына қарағанда симметриялы нүктелердің х,у координаталары бірдей, z координатасыннның таңбалары қарама – қарсы болу керек. Демек $D^{'}(-3, -5, -1)$ болады.

4°. $\overrightarrow{АС}, \overrightarrow{ВД}$ вектордың координаталарын табыңдар. (15-5) формула бойынша $\overrightarrow{AС} = \{4 - 1{,}8 + 3, -3 + 2\} = \{3{,}11, -1\}$; $\overrightarrow{BД} = \{-3 - 8{,}5 - 0, -1 + 4\} = \{-11{,}5{,}3\}$.

5°. АВ, ДС кесіндінің ұзындығын табыңдар. (15-6) формула бойынша АВ $= \sqrt{(8-1)^2 + (0+3)^2 + (-4+2)^2} = \sqrt{49+9+4} = \sqrt{62} ДС = \sqrt{(4+3)^2 + (8-5)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{49+9+4} = \sqrt{62}.$

6°. АВСД қандай фигура

АД мен ВС ны табайық АД $= \sqrt{(-3-1)^2 + (5+3)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{16+64+1} = 9$ ВС $= \sqrt{(4-8)^2 + (8-0)^2 + (-3+4)^2} = \sqrt{16+64+1} = \sqrt{81} = 9$. 5° мен 6° бойынша $АД = ВС, \quad АВ = ДС$. Демек АВСД параллелограм болады.

7°. АС мен ВД қиылысу нүктесінің координаталарын табыңдар. АВСД параллелограм болғандықтан диагоналдары бірін – бірі қақ бөледі. Сондықтан АС ∩ ВД $= S$ десек (15-8) бойынша $x = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}, \quad y = \frac{-3+8}{2} = \frac{5}{2}$, $z = \frac{-2-3}{2} = -\frac{5}{2}. \qquad S\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ болады.

8°. АВСД параллелограмның ауданы неге тең $\overrightarrow{АВ} = \{8 - 1{,}0 + 3, -4 + 2\} = \quad = \{7{,}3, -2\}$, $\overrightarrow{АД} = \{-3 - 1{,}5 + 3, -1 + 2\} = \{-4{,}8{,}1\}$. Параллелограмның ауданы осы векторлардың векторлық көбейтіндісіне сан жағынан тең болады. (15-9) бойынша $S_{пар} = \sqrt{\begin{vmatrix}3 & -2\\ 8 & 1\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}-2 & 7\\ 1 & -4\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}7 & 3\\ -4 & 8\end{vmatrix}^2} = \sqrt{(3+16)^2+(8-7)^2+(56+12)^2} = \sqrt{4986}$.

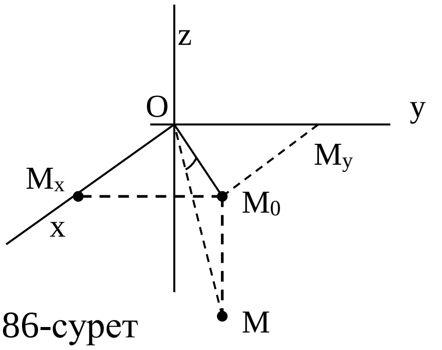
9°. АВС үшбұрыш ауданы $S_{\Delta} = \frac{1}{2}S_{пар} = \frac{1}{2}\sqrt{4986}$.

2–мысал. А(2,-1,-1), В(5,-1,2), С(3,0,-3), Д(6,0,-1) АВСД фигура төртбұрыш па, жоқ әлде тетраэдр ме.

Егер АВСД төртбұрыш болса, яғни барлық төбесі бір жазықтықта жатса $\overrightarrow{АВ}$, $\overrightarrow{АС}$, $\overrightarrow{АД}$ компланар болу керек. Векторлық компланар болу үшін олардың аралас көбейтіндісі 0 – ге тең болу керек. Соны тексереміз $\overrightarrow{АВ} = \{3,0,3\}$, $\overrightarrow{АС} = \{1,1,-2\}$, $\overrightarrow{АД} = \{4,1,0\}$ $\begin{vmatrix}3 & 0 & 3\\ 1 & 1 & -2\\ 4 & 1 & 0\end{vmatrix} = 0+3+0-12-6-0 = -15 \neq 0$. Демек векторлар компланар емес. АВСД төртбұрыш емес, тетраэдр болады. Тетраэдрдың көлемі $V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix}3 & 0 & 3\\ 1 & 1 & -2\\ 4 & 1 & 0\end{vmatrix} = \frac{1}{6}|-15| = \frac{5}{2}$.

3–мысал. $\overrightarrow{OM}$ сәуле координата өстерімен $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}$ бұрыш жасайды және ұзындығы $\left|\overrightarrow{OM}\right| = 1$. М нүктенің цилиндрлік координаталарын табу керек.

Шешуі. Берілген М нүктенің радиус векторы $\overrightarrow{OM}$ Ох және Оу өстерімен $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{3}$ теңдей бұрыш жасайтындықтан ол нүкте 5-октантада орналасады (86 – сурет).



86-сурет

Мұнда $\angle \mathrm{MOM_x} = \alpha = \frac{\pi}{3}$, $\angle \mathrm{MOM_y} = \beta = \frac{\pi}{3}$, $\angle Z\mathrm{OM} = \gamma = \frac{3\pi}{4}$, $OM = 1$. $\overrightarrow{OM}$нің бағыттаушы косинусының формуласы бойынша $x = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cos\alpha = 1 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $y = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cos\beta = 1 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $z = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cos\gamma = 1 \cdot \cos\frac{3\pi}{4} = \ = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. М нүктенің цилиндрлік координаталары $r = OM_0$, $\phi = \angle M_x OM_0$, $z = M_0M$. $\angle M_0OM = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$. Сонда $OM_0 = OM \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\phi = \cos M_x \hat{O} M_0 = \frac{OM_0}{OM} =$

$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Сондықтан $\phi=\frac{\phi}{4}$, ал $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Сонымен М нүктенің цилиндрлік координаталары $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\phi=\frac{\phi}{4}$; $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ал, декарттық координаталары $x=\frac{1}{2},\quad y=\frac{1}{2},\quad z=-1.$

<u>4–мысал.</u> Радиусы 1 – ге тең сферада жатқан нүктенің ендігі 45°, байлығы 330° болса ол нүктенің декарттық координаталары неге тең.

Нүктенің сфералық координаталары ρ,ϕ,θ. Бізде $\rho=1,\quad \phi=330,\quad \theta=45$. Сонда x $=\rho\, cos\, \phi\, sin\, \theta=1\cdot cos\, 3\, 30°\, sin\, 4\, 5°=cos(360°-30°)\, sin\, 4\, 5°=cos\, 3\, 0°\, sin\, 4\, 5°= \qquad =\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$; $y=\rho\, sin\, \phi\, sin\, \theta=sin(360°-30°)\, sin\, 4\, 5°=-sin\, 3\, 0°\, sin\, 4\, 5°=-\frac{\sqrt{2}}{4}$; $z=\rho\, cos\, \theta=1\cdot cos\, 4\, 5°=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Сонымен $\left(\frac{\sqrt{6}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

§16 Жазықтықтың берілу тәсілдері мен теңдеулері

16.1 Жазықтықтың берілу тәсілдері

Жазықтықтар бір – бірінен кеңістіктегі орны арқылы өзгешеленеді. Төмендегі үш жағдайдың үшеуінде де жазықтықтың кеңістіктегі орны бірмәнді анықталады.

1– Жазықтықтың бір түзуде жатпайтын үш нүктесі белгілі болса. Өйткені үш нүктені басып бір, тек бір жазықтық өтеді.

2– Жазықтықтың бір нүктесі және сол жазықтыққа параллель өзара коллинеар емес екі вектор берілсе.

Жазықтыққа параллель барлық векторлар жиыны үш өлшемді векторлық кеңістіктің екі өлшемді ішкі векторлық кеңістігі делінеді. Ол ішкі кеңістік жазықтықтың бағыттаушы ішкі кеңістігі делінеді.

Ал сызықтық тәуелсіз, яғни коллинеар емес кезкелген екі вектор ол ішкі кеңістіктің базисі болады. сондықтан ол екі векторға керілген ішкі кеңістік, яғни жазықтықтың бағыттаушы ішкі кеңістігі ол кеңістікке кіретін (жазықтыққа параллель болатын) екі вектормен анықталады.

3– Жазықтықтың бір нүктесі және ол жазықтыққа перпендикуляр болатын бір вектор (оны жазықтыққа нормал вектор дейді) белгілі болса. Өйткені бір нүктеден бір векторға перпендикуляр етіп бір тек бір жазықтық жүргізуге болады. Сонымен жазықтықтың кеңістіктегі орнын анықтайтын осы үш жағдайда ол жазықтық берілген делінеді, кеңістікте анықталған делінеді.

16.2 Жазықтықтың түрлі жағдайдағы теңдеулері

Кеңістікке координаталар жүйесін ендірсе, кеңістікте берілген жазықтықтың бойында жататын кезкелген нүктенің координаталары қанағаттандыратын, ал ол жазықтықта жатпайтын нүктелердің координаталары қанағаттандырмайтын теңдеу құруға болады. Ол теңдеу жазықтықтың барлық нүктелері бағынатын ортақ қасиетін аналитикалық өрнектеу болып табылады. Оны жазықтықтың теңдеуі дейді.

Кезкелген фигураның, олардың ішінде жазықтықтыңда теңдеуін құру үшін, оның бойынан кезкелген бір нүкте алады (оны ағымдық нүкте дейді), ол нүктенің координаталарын x, y, z айнымалылармен (оларды ағымдық координаталар дейді) белгілейді де, жазықтық нүктелерінің ортақ қасиетіне сүйене отырып, x, y, z терді берілген параметрлармен байланыстыратын теңдеу құрады. Сол іздеген жазықтық теңдеуі болады.

Жазықтықтың кеңістікте әртүрлі орналасуына байланысты ол теңдеулерде әртүрлі болады. жазықтықтың кеңістікте әртүрлі берілу тәсілдеріне сай жоғарыда айтылған әдісті басшылыққа ала отырып жазықтық теңдеулерін былайша құрады (қорытып шығарады).

1°. Бір нүктесі және бағыттаушы ішкі кеңістігі берілген жазықтық теңдеуі. Кеңістікке тікбұрышты координата жүйесі ендірілсін. $M(x_0, y_0, z_0)$ нүкте және $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ векторлар берілген ($\vec{a}$ мен $\vec{b}$ коллинеар болмасын). Сонда M_0 нүктені басып өтетін, өзара коллинеар емес $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларға параллель болатын тек бір жазықтық болады. сол жазықтықтың теңдеуін құру үшін оның бойынан $M(x, y, z)$ ағымдық нүкте алайық. Ол нүктені жазықтықтың қай жерінен алсақта $\overrightarrow{\mathrm{M_0M}} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$, $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ векторлар өзара компланар болады. Сондықтан олардың аралас көбейтіндісі 0 – ге тең болады.

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \qquad (16-1)$$

Мұны векторлардың координаталары арқылы жазсақ

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (16-2)$$

Бұл теңдеуді тек жазықтықта жатқан нүктелердің координаталары қанағаттандырады. Өйткені М жазықтықта жатпаса $\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}, \vec{b}$ векторлар компланар болмайды. Демек (16-1) орындалмайды. Сондықтан (16-2) орындалмайды. Осы (16-2) жазықтықтың теңдеуі болады. оны берілген нүктеден берілген екі векторға параллель етіп дүргізілген жазықтық теңдеуі дейді.

2°. Жазықтықтың параметрлік теңдеуі. Жоғарыда айтылған $\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}, \vec{b}$ векторлар компланар болғандықтан олардың біреуін қалғандарына жіктеп жазуға болады. Ол былайша жіктелсін

$$\overrightarrow{M_0M} = u\vec{a} + v\vec{b}$$

Мұны, вектор координаталарының қасиеті арқылы координаттық формада былай жазуға болады:

$$\mathrm{x} - \mathrm{x}_0 = ua_1 + vb_1, \mathrm{y} - \mathrm{y}_0 = ua_2 + vb_2, z - z_0 = ua_3 + vb_3$$

Бұдан

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1u + b_1v + x_0 \\ y &= a_2u + b_2v + y_0 \\ z &= a_3u + b_3v + z_0 \end{aligned}\right\} \qquad (16-3)$$

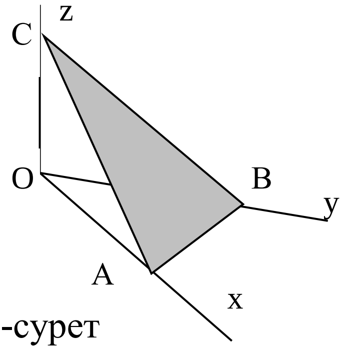
(16-1) қанағаттандыратын нүктелердің координаталары ғана (16-3) – ті қанағаттандыатындықтан, (16-3) жазықтық теңдеуі болады. Оны жазықтықтың параметрлік теңдеуі дейді, параметрлер u мен v.

3°. Үш нүктесі арқылы берілген жазықтық теңдеуі. Тік бұрышты координата жүйесінде $\text{M}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\text{M}_2(x_2, y_2, z_2)$, $\text{M}_3(x_3, y_3, z_3)$ үш нүкте берілсін. Үш нүктені басып бірғана жазықтық өтетіні белгілі. Осы жазықтық бойынан оның ағымдық $M(x, y, z)$ ағымдық нүктесін алсақ, ол жазықтықтың қай жерінен алынсада $\overrightarrow{\text{M}_1\text{M}} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$, $\overrightarrow{\text{M}_1\text{M}_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, $\overrightarrow{\text{M}_1\text{M}_3} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$ векторлар компланар болады. Сондықтан $\left(\overrightarrow{MM_1} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3}\right) = 0$ болады. мұны координата арқылы жазсақ

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (16-4)$$

Мұны тек жазықтық бойында жатқан нүктелердің координаталары ғана қанағаттандыратындықтан, ол жазықтық теңдеуі болады. Оны үш нүктесі арқылы берілген жазықтық теңдеуі дейді.

4°. Жазықтықтың кесіндідегі теңдеуі. π жазықтығы $Oxyz$ тік бұрышты координаталар жүйесінің үш өсінде қиып өтсін және қиылысу нүктесі координата басынан a, b, c қашықтықтарда жатсын. Онда $A(a, 0,0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0,0, c)$ болар еді. Бұл жерде жазықтық координата өстерінен а,в,с кесінді қиып өтеді делінеді: $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ (87 – сурет).



87-сурет

Осы жазықтықтың теңдеуін құрайық. Оны үш нүктені басып өтетін жазықтық теңдеуіне (16-4) ке салып табуға болар еді $\begin{vmatrix} \text{x} - \text{a} & \text{y} - 0 & z - 0 \\ 0 - a & b - 0 & 0 - 0 \\ 0 - \text{a} & 0 - 0 & \text{c} - 0 \end{vmatrix} = 0$. Анықтауышты ашсақ $bcx - \text{a}bc + 0 - 0 + \text{a}bz + acy - 0 = 0$. Мұны abc ға бөлсек

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (16-5)$$

Мұны жазықтықтың кесіндідегі теңдеуі дейді.

5°. Берілген нүктеден берілген векторға перпендикуляр етіп жүргізілген жазықтық теңдеуі. $\text{M}_0(x_0, y_0, z_0)$ нүкте және $\overrightarrow{N} = \{A, B, C\}$ вектор берілсін. M_0 нүктеден $\overrightarrow{N}$ векторға перпендикуляр етіп жазықтық жүргізілсін, оның теңдеуін құру үшін жазықтық бойынан $M(x, y, z)$ нүктені аламыз. Оны қай жерінен алсада $\overrightarrow{N} \perp \overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ болады. Сондықтан бұл векторлардың скаляр көбейтіндісі 0 – ге тең болады: $\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$.

Мұны осы векторлардың координаталары арқылы жазсақ

$$(x - x_0)A + (y - y_0)B + (z - z_0)C = 0 \qquad (16 - 6)$$

Мұны берілген векторға берілген нүктеден перпендикуляр етіп жүргізілген жазықтық теңдеуі дейді. Жазықтыққа перпендикуляр болатын векторды оған нормал вектор дейді.

6°. Жазықтықтың жалпы теңдеуі. Жоғарыда анықталған жазықтық теңдеулерінің барлығы да бір дәрежелі үш белгісізді сызықтық теңдеулер. Ондай теңдеулердің жалпы түрі мынадай болады

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (16 - 7)$$

Демек жазықтық теңдеуі 1 – дәрежелі теңдеу болады. Керісінше (16-7) түрдегі теңдеудің бәрі қандайда бір жазықтықты анықтайдыма, жоқ па екенін анықтайық. Ол туралы мынадай теорема бар.

<u>1 – теорема.</u> Тік бұрышты координаталар жүйесінде координаталары (16-7) түрдегі бір дәрежелі үш белгісізді сызықтық теңдеуді қанағаттандыратын нүктелер жиыны, егер A,B,C қатарынан 0 болмаса, $\vec{a} = \{0, -C, B\}$, $\vec{b} = \{-C, 0, A\}$, $\vec{c} = \{-B, A, 0\}$ векторларға параллель болатын жазықтықты анықтайды.

Дәлелі. Теорема шарты бойынша A,B,C қатарынан 0 – ге тең емес. Мысалы A $\neq$ 0 дейік. Онда (16-7) ні жазуға болады $\begin{vmatrix} x + \frac{D}{A} & y & z \\ -B & A & 0 \\ -C & 0 & A \end{vmatrix} = 0$ Мұны ашсақ (16-7) шығады.

Мұны жазықтықтың (16-2) теңдеуімен салыстырсақ, бұл $M_0\left(-\frac{D}{A}, 0{,}0\right)$ нүктеден өтетін және $\overrightarrow{c} = \{-B, A, 0\}$, $\overrightarrow{b} = \{-C, 0, A\}$ векторларға параллель болатын жазықтықтың теңдеуі екенін байқаймыз. Ол жазықтық $\vec{a} = \{0, -C, B\}$ векторға да параллель болады. Өйткені $\begin{vmatrix} -\mathrm{B} & \mathrm{A} & 0 \\ -\mathrm{C} & 0 & \mathrm{A} \\ 0 & -\mathrm{C} & \mathrm{B} \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 + \mathrm{ABC} - \mathrm{ABC} = 0$ болатындықтан $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланар болады. Демек $\vec{a}$ векторда $\vec{b}$ мен $\vec{c}$ векторларға параллель жазықтыққа параллель болады.

Сөйтіп (16-7) теңдеудегі x, y, z –тің коэффициенттері координаталары болатын $\overrightarrow{N} = \{A, B, C\}$ вектор ол жазықтыққа перпендикуляр болады.

Өйткені $\overrightarrow{N}$ вектор жазықтыққа параллель болатын, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторларға ортогонал. Шынында да $\vec{a}\,\overrightarrow{N}=0\cdot A+(-C)\cdot B+C\cdot B=0,\ \ \vec{b}\,\overrightarrow{N}=0,\ \ \vec{c}\,\overrightarrow{N}=0\cdot$ Демек $\overrightarrow{N}$ вектор жазықтыққа да перпендикуляр болады оны жазықтықтың нормал векторы немесе нормалы дейді.

7°. Жазықтықтың толымсыз теңдеулері. Егер жазықтықтың жалпы теңдеуіндегі (15-9) – дағы төрт коэффициенттің ең болмағанда біреуі 0 – ге тең болса, онда ол теңдеуді жазықтықтың толымсыз теңдеуі дейді.

а) $D=0$болсын. Онда (15-9) теңдеу мына түрге келеді

$$Ax+By+Cz=0 \qquad (16-8)$$

Координата жүйесінің басының О(0,0,0) координаталары бұл теңдеуді қанағаттандырады. Сондықтан (16-8) теңдеу, яғни бос мүшесі жоқ теңдеу координата басынан өтетін жазықтықтың теңдеуі болады.

б) $A=0$ болсын. Онда теңдеу мына түрге келеді

$$By+Cz+D=0 \qquad (16-9)$$

Бұған параллель вектор $\vec{b}=\{-c,0{,}0\}$, $\vec{c}=\{-b,0{,}0\}$ болып шығады. Бұлар абсцисса өсінің координаттық векторы $\vec{c}=\{1{,}0{,}0\}$ мен коллинеар. Демек (16-9) абсцисса өсіне параллель болатын жазықтықтың теңдеуі болады. Осы сияқты $Ax+Cz+D=0 \quad (16-9\text{а})$ $Ax+By+D=0 \quad (16-9б)$ теңдеулер сәйкесінше ордината және апликата өстеріне параллеь жазықтықтың теңдеуі болады.

Енді екі коэффициент 0 – ге тең болсын

в) $\text{А}=0, D=0$болсын. Теңдеу

$$By+Cz=0 \qquad (16-10)$$

түрге келеді. Бұл $\text{А}=0$ болғандықтан x өсіне параллель, $D=0$ болғандықтан координата басынан өтетін жазықтықтың теңдеуі болады. Ал, координата басынан өтетін және Ox өсіне параллель жазықтық Ox өсін басып өтеді.

Демек (16-10) x (обсцисса) өсін қамтитын жазықтық теңдеуі болады. Осы сияқты $Ax+Cz=0 \quad (16-10\text{а})$, $Ax+By=0 \quad (16-10б)$ теңдеулер сәйкесінше ордината, апликата өстерін баса жүргізілген жазықтықтың теңдеулері болады.

г) $A=B=0$ болсын. Онда теңдеу

$$Cz+D=0 \qquad (16-11)$$

түрге келеді. Бұл $\text{А}=0$ болғандықтан x өсіне, $\text{В}=0$ болғандықтан y өсіне параллель жазықтық теңдеуі болады. Сонда $\text{А}=\text{В}=0$ болғандықтан (16-11) Oxy жазықтығына параллель жазықтықтың теңдеуі болады. Осы сияқты $Ax+D=0 \quad (16-11\text{а})$ Oyz жазықтығына, $\text{В}y+D=0 \quad (16-11\text{б})$ Oxz жазықтығына параллель жазықтықтың теңдеуі болады.

д) $A=B=D=0$ болса

$$Cz=0 \qquad (16-12)$$

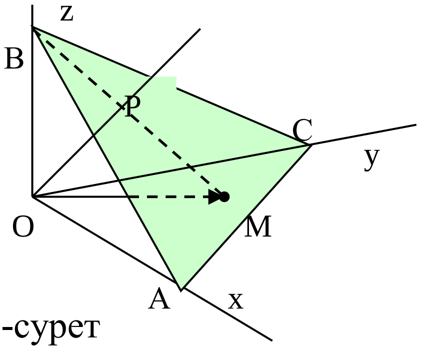
бұл Oxy жазықтығының теңдеуі. Осы сияқты $Ax = 0$ $\quad (16 - 12а)$, $Ву = 0$ $\quad (16 - 12б)$ сәйкесінше Oyz, Oxz жазықтықтың теңдеуі болады.

$A = B = C = 0$ болалмайды.

Сонымен (16-8), (16-9, а, б), (16-10, а, б), (16-11, а, б), (16-12, а, б) теңдеулер жазықтықтың толымсыз теңдеулері болады.

8°. Жазықтықтың нормал теңдеуі. Тік бұрышты $Oxyz$ координата жүйесінде координата жүйесінде координата басынан Р қашықтықта өтетін және нормалы координата өстерімен α, β, γ бұрыш жасайтын жазықтық берілсін (88 – сурет). Ол ABC жазықтығы болсын. O нүктеден жазықтыққа перпендикуляр жүргізейік. Сонда шарт бойынша $0\rho =$ Р. Осы 0ρ түзуді жазықтықтың нормалы үшін алуға болады. Сонда $\angle xo\rho = \alpha$, $\angle yo\rho = \beta$, $\angle zo\rho = \gamma$.

Жазықтықтың нормалының бірлік векторын $\vec{n}$ десек $O\vec{P} = p\vec{n}$ болады және $\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ болады.



88-сурет

Жазықтық бойынан $M(x, y, z)$ нүкте алайық. Сонда $0P$ жазықтыққа перпендикуляр болғандықтан ол жазықтықта жатқан PМ$-$ге де перпендикуляр болады $0P \perp P$М. Сондықтан $0P$ ны $\overrightarrow{0M}$ вектордың нормалға түскен проекциясы деуге болады, яғни $Пр_{\vec{n}}\overrightarrow{OM} = OP = p$.

Сонда $p = Пр_{\vec{n}}\overrightarrow{OM} = |\vec{n}| Пр_{\vec{n}}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{n} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$ болар еді.

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (16 - 13)$$

Жазықтық теңдеуі болады. Мұндағы $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ бірлік вектордың координаталары болғандықтан

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (16 - 14)$$

Демек жазықтықтың теңдеуі нормал теңдеу делінеді, егер оның айнымалыларының коэффициенттерінің квадраттарының қосындысы 1 – ге тең болса.

Егер жазықтық жалпы теңдеумен $Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (16 - 7)$ берілсе және $A^2 + B^2 + C^2 = 1$ болса, ол теңдеу жазықтықтың нормал теңдеуі болар еді.

Егер $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 \neq 1$ болса, онда ол теңдеуді нормал түрге келтіруге болады. Ол үшін (16-7) теңдеуді $\mu \neq 0$ санына көбейтеміз: $A\mu x + B\mu y +$

$C\mu z + D\mu = 0$ көбейткенде $(A\mu)^2 + (B\mu)^2 + (C\mu)^2 = 1$ болатын санға көбейтеміз. Соңғыдан

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (16 - 15)$$

Мұны нормалдаушы көбейткіш дейді. Өйткені (16-7) – ні осыған көбейтсек

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \qquad (16 - 16)$$

болып, (16-7) теңдеу нормал түрге келеді. Себебі $\left(\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)^2 +$ $+ \left(\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)^2 + \left(\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)^2 = \frac{A^2+B^2+C^2}{A^2+B^2+C^2} = 1$ болады. Сонымен (16-16) теңдеу жазықтықтың жалпы теңдеуі (16-7) – нің нормал түрге келген түрі.

Егер (16-14) пен (16-16) бір жазықтықтың нормал теңдеулері десек, бұл екеуінен

$$cos\,\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, cos\,\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, cos\,\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, P = \frac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (16 - 17)$$

болады. Бұл косинустарды $\vec{n}$ векторды (нормал векторды) бағыттаушы косинустары дейді. Косинустарды квадраттап қоссақ $cos^2\,\alpha + cos^2\,\beta + cos^2\,\gamma = \frac{A^2}{A^2+B^2+C^2} + \frac{B^2}{A^2+B^2+C^2} + \frac{C^2}{A^2+B^2+C^2} = 1.$

Ал, бұл жазықтықтың нормал векторы (жалпы кезкелген вектор) координата өстерімен кезкелген бұрыш жасай алмайды. Ол бұрыштар (16-13) теңдікпен шектеледі.

5 – мысал. $M_1(3,-1,2)$, $M_2(4,-1,-1)$, $M_3(2,0,2)$, $M_4(2,1,3)$ берілген.

Мыналарды анықтаңдар

1) M_1, M_2, M_3 нүктелерді басып өтетін жазықтықтың теңдеуін құрыңдар

Үш нүктені басып өтетін жазықтық теңдеуі (16-4) бойынша $\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 4-3 & -1+1 & -1-2 \\ 2-3 & 0+1 & 2-2 \end{vmatrix} = 0$ болады, $\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ Ашсақ $0 + z - 2 + 3y + 3 - 0 + 3x - 9 - 0 = 0,\quad 3x + 3y + z - 8 = 0.$

2) M_1 нүктеден өтетін және $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ векторларға параллель болатын жазықтықтың теңдеуін құрыңдар

$\overrightarrow{M_1M_2} = \{4-3, -1+1, -1-2\} = \{1,0,-3\}$; $\overrightarrow{M_1M_3} = \{2-3, 0+1, 2-2\} = \{-1,1,0\}$ Сонда іздеген жазықтық теңдеуі (16-2) бойынша

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$0 + z - 2 + 3y + 3 - 0 + 3x - 9 - 0 = 0,\quad 3x + 3y + z - 8 = 0$ неге бұл 1) мен бірдей болып шықты.

3) M_1 нүктеден өтетін және $\overrightarrow{M_2M_3}$ векторға перпендикуляр болатын жазықтықтың теңдеуін құрыңдар

Бізде $\overrightarrow{M_2M_3} = \{2-4{,}0+1{,}2+1\} = \{-2{,}1{,}3\}$. Сонда бұл жазықтықтың теңдеуі (16-6) бойынша

$(x-3)(-2) + (y+1)\cdot 1 + (z-2)\cdot 3 = 0, \quad -2x + 6 + y + 1 + 3z - 6 = 0, \quad 2$

.

4) M_2, M_3, M_4 нүктелерден өтетін жазықтықтың параметрлік теңдеуін құрыңдар

$\overrightarrow{M_2M_3} = \{2-4{,}0+1{,}2+1\} = \{-2{,}1{,}3\}, \quad \overrightarrow{M_2M_4} = \{2-4{,}1+1{,}3+1\} = \{-2{,}2{,}4\}$. Сонда (16-3) бойынша

$$x = -2u - 2v + 4$$
$$y = 1u + 2v - 1$$
$$z = 3u + 4v - 1$$

5) $3x + 4y - 6z - 12 = 0$ жазықтық координата өстерін қандай нүктеде қиып өтеді.

$3x + 4y - 6z = 12$ деп жазып, теңдіктің екі жағын да 12 – ге бөлеміз $\frac{3x}{12} + \frac{4y}{12} - \frac{6z}{12} = \frac{12}{12}, \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{3} - \frac{z}{2} = 1$ (16-5) формула бойынша $a = 4, \quad b = 3, \quad c = -2$. Демек координата өстерін сәйкесінше $A(4{,}0{,}0), \quad B(0{,}3{,}0), \quad C(0{,}0,-2)$ нүктелерде қиып өтеді екен.

6) $2x - 2y + z - 18 = 0$ жазықтық теңдеуі нормал күйде ме, жоқпа. Қалай нормал күйге келтіруге болады.

Теңдеу нормал күйде болса белгісіздің коэффициенттерінің квадраттарының қосындысы 1 – ге тең болу керек.

Тексерейік $2^2 + (-2)^2 + 1^2 = 4 + 4 + 1 = 9 \neq 0$. Сондықтан жазықтық теңдеуі нормал түрде емес, жалпы түрде берілген. Оны нормал түрге келтіру үшін нормалаушы көбейткішті тауып, теңдіктің екі жағында соған көбейту керек. (16-15) бойынша ол мынаған тең

$\mu = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{1}{\sqrt{(2)^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$, Осыны теңдеуге көбейтсек $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - 6 = 0$. Бұл нормал күйге келді. Өйткені

$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{9}{9} = 1$ болып шығады.

7) $2x - 2y + z - 18 = 0$ теңдеудің нормал векторын табыңдар. Ол $\vec{N} = \{A, B, C\} = \{2, -2{,}1\}$ вектор және оған коллинеар кезкелген вектор болады.

8) $2x - 2y + z - 18 = 0$ жазықтыққа параллель бірнеше векторды табыңдар.

Жазықтықтың жалпы теңдеуінде келтірілген теорема бойынша $\vec{a} = \{0, -C, B\} = \{0, -1, -2\}, \quad \vec{b} = \{-C, 0, A\} = \{-1{,}0{,}2\}, \quad \vec{c} = \{-B, A, 0\} = \{2{,}2{,}0\}$ векторлар жазықтыққа параллель болады. Өйткені $\vec{a}\cdot\vec{N} = 2\cdot 0 - 2(-1) + 1(-2) = 0 + 2 - 2 = 0$,

$\vec{b}\cdot\vec{N} = 2(-1) - 2\cdot 0 + 1\cdot 2 = -2 - 0 + 2 = 0, \quad \vec{c}\cdot\vec{N} = 2\cdot 2 + 2(-2) + 0\cdot 1 = 4 -$

болғандықтан $\vec{a} \perp \vec{N}$, $\vec{b} \cdot \vec{N}$, $\vec{c} \cdot \vec{N}$, ал $\vec{N}$ жазықтыққа перпендикуляр. Сондықтан $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлар жазықтыққа параллель болады.

9) $2x - 2y + z - 18 = 0$ жазықтығының нормалы $\vec{N} = \{2, -2{,}1\}$ болатын болды. Оның бағыттаушы косинустары неге тең. (16-17) формула бойынша $cos\,\alpha = \frac{\mathrm{A}}{|\vec{N}|} = \frac{2}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{2}{3}$; $cos\,\beta = -\frac{2}{3}$; $cos\,\gamma = \frac{1}{3}$.

10) Жазықтықтың нормалы координата өстерімен, сәйкесінше $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$ бұрыш жасай аладыма жоқпа α, β, γ бұрыш жасай алу үшін $cos^2\,\alpha + cos^2\,\beta + cos^2\,\gamma = 1$ болу керек. Тексерейік $cos^2\,3\,0° + cos^2\,4\,5° + cos^2\,6\,0° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{6}{4} \neq 1$. Сондықтан мұндай бұрыштар жасай алмайды.

§17 Жазықтыққа арналған кейбір есептер

17.1 Екі жазықтықтың өзара орналасуы

Тікбұрышты $Oxyz$ координата жүйесінде $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ және $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ теңдеумен екі жазықтық берілсін. Бұл екі жазықтықтың ортақ нүктелерінің координаталары екі теңдеуді де қанағаттандырады, керісінше координаталары екі теңдеуді де қанағаттандыратын нүкте ол екі жазықтыққа ортақ болады. Сондықтан екі жазықтықтың кеңістікте өзара орналасуын зерттеу мына теңдеулер жүйесінің шешімін зерттеумен барабар:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (17-1)$$

Бұл теңдеулер жүйесінің матрицасы N_1, кеңейтілген матрицасы N_2 болсын

$$N_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

Бұл матрицалардың рангтарын сәйкесінше r_1, r_2 дейік. Сонда мынадай жағдайлар болуы мүмкін.

<u>1 – жағдай.</u> $r_1 = r_2 = 2$. Бұл кезде Кронекер – Капелли теоремасы бойынша теңдеулер жүйесі үйлесімді болады және белгісіз саны теңдеу санынан артық болғандықтан жүйе шешімі шексіз көп болады. Ал, екі теңдеу бірдей болмағандықтан белгісіз коэффициенттері пропорционал болмайды, яғни $\frac{A_2}{A_1}, \frac{B_2}{B_1}, \frac{C_2}{C_1}$ қатынастың ең болмағанда бір пары өзара тең болмайды.

$$\frac{A_2}{A_1} \neq \frac{B_2}{B_1} \neq \frac{C_2}{C_1} \qquad (17-2)$$

Жүйе шешімі көп болады. Екі жазықтықтың артық нүктесі көп болады, яғни жазықтық түзу бойымен қиылысады.

<u>2 – жағдай.</u> $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Бұл кезде Кронекер – Капелли теоремасы бойынша теңдеу жүйесі үйлесімсіз, шешуі болмайды. Демек жазықтықтар қиылыспайды, олар параллель болады. $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ деген сөз

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}\neq\frac{D_2}{D_1} \qquad (17-3)$$

деген сөз.

3 – жағдай. $r_1=r_2=1$. Онда Кронекер – Капелли теоремасы бойынша жүйенің шексіз көп шешімі болады.

Екі теңдеу бірдей, яғни

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}=\frac{D_2}{D_1} \qquad (17-4)$$

болады. Сонымен екі жазықтық (17-2) орындалса түзу бойымен қиылысады, (17-3) орындалса параллель болады, (17-4) орындалса беттеседі.

17.2 Вектормен жазықтықтың параллель болу белгісі

Тікбұрышты $Oxyz$ координаталар жүйесінде $Ax+By+Cz+D=0 \quad (16-7)$ теңдеу мен жазықтық және $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ вектор берілсін.

Теорема $Ax+By+Cz+D=0 \quad (16-7)$ жазықтыққа $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ вектор параллель болу үшін

$$Aa_1+Ba_2+Ca_3=0 \qquad (17-5)$$

болуы қажетті және жеткілікті.

$\vec{a}$ вектор жазықтыққа параллель болсын. Онда жазықтықта $\mathrm{M}_1(x_1,y_1,z_1)$, $\mathrm{M}_2(x_2,y_2,z_2)$ нүктелер табылып $\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}}=\vec{\mathrm{a}}$ болуы керек. Мұны координаталары арқылы жазсақ $x_2-x_1=a_1,\ \ y_2-y_1=a_2,\ \ z_2-z_1=a_3 \quad (*)$. Ал, M_1,M_2 нүктелер жазықтықта жатқандықтан $Ax_2+By_2+Cz_2+D=0,\ Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ бірінен–бірін алсақ $A(x_2-\mathrm{x}_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)+D=0$ $(*)$ –ны ескерсек $Aa_1+Ba_2+Ca_3=0 \ \ (17-5)$.

Сонымен вектор мен жазықтық параллель болса, (17-5) орындалады екен.

Енді керісінше (17-5) орындалсын. Жазықтықтан $\mathrm{M}_1(x_1,y_1,z_1)$ нүкте алсақ $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ болар еді. Бұл екеуін қоссақ $A(x_1+a_1)+B(y_1+a_2)+C(z_1+a_3)+D=0$. Ал, бұл координаталары $x_2=x_1+a_1$, $y_2=y_1+a_2,\ z_2=z_1+a_3$ болатын $\mathrm{M}_2(x_2,y_2,z_2)$ нүкте де жазықтықта жатады деген сөз. Соңғыдан $x_2-x_1=a_1,\ y_2-y_1=a_2,\ z_2-z_1=a_3$. Ал, бұл $\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$ және $\vec{\mathrm{a}}=\{\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2,\mathrm{a}_3\}$ векторлар өзара тең деген сөз. Ал, $\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}}$ жазықтықта жатыр. Сондықтан $\vec{a}$ вектор $Ax+By+Cz+D=0$ жазықтыққа параллель болады.

Сөйтіп $Aa_1+Ba_2+Ca_3 \quad (17-5)$ вектор мен жазықтық параллель болу белгісі болады.

(17-5) – тен $\vec{\mathrm{a}}=\{\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2,\mathrm{a}_3\}$ жазықтыққа параллель болса, онда $\vec{N}=\{A,B,C\}$ векторды $Ax+By+Cz+D=0$ жазықтықтың нормал векторы дейді.

17.3 Жазықтықтар арасындағы бұрыш

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ теңдеулермен екі жазықтық берілсін. Мұндағы белгісіздердің коэффициенттерінің ең болмағанда екі жұбы пропорционал болмасын. Онда ол жазықтықтар қиылысады. Жазықтықтар қиылысқанда 4 екі жақты бұрыш шығады. Сонын бірі сол жазықтықтардың нормал векторлары $\overrightarrow{N_1} = \{A_1, B_1, C_1\}$ мен $\overrightarrow{N_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$ арасындағы бұрышқа тең болады. Ал, ол екі вектор арасындағы бұрышты ϕ десек, ол мына формуламен табылады

$$cos\,\phi = \frac{\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right| \left|\overrightarrow{N_2}\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (17-6)$$

Егер екі жазықтық перпендикуляр болса $\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2} = 0$ болады да (17-6) дан

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \qquad (17-7)$$

болады. Ал, екі жазықтық параллель болса $\overrightarrow{N_1}$ мен $\overrightarrow{N_2}$ коллинеар болады да

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (17-8)$$

болады. (17-7) екі жазықтықтың өзара перпендикуляр болу, (17-8) олардың параллель болу белгілері болып табылады.

17.4 Жазықтықтар шоғы және оның теңдеуі

Бір түзуден өтетін (қиылысатын) жазықтықтарды жызықтықтар шоғы дейді, ал ол түзуді шоқтың өсі дейді.

Тікбұрышты координаталар жүйесінде $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ екі жазықтық берілсін. Ол екеуі қиылысатын болсын. Ол үшін белгісіз коэффициентінің үшеуі қатарынан пропорционал болмауы керек.

Берілген теңдеулерден мынадай теңдеу құрайық

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \qquad (17-9)$$

Мұны былай жазуға болады

$$(A_1 + A_2\lambda)x + (B_1 + B_2\lambda)y + (C_1 + C_2\lambda)z + (D_1 + D_2\lambda) = 0$$

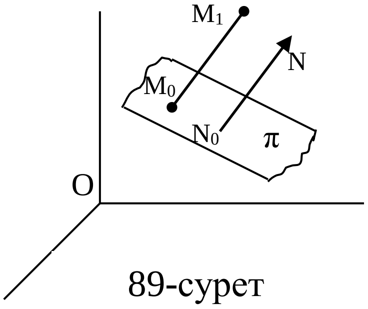
Мұның белгісіздерінің коэффициенттері қатарынан 0 – ге тең болмайды. Өйткені, болады десек, $A_1 + A_2\lambda = 0$, $B_1 + B_2\lambda = 0$, $C_1 + C_2\lambda = 0$ болады да бұдан $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ болып шартқа қайшы келеді.

Сондықтан (17-9) дың айнымалыларының ең болмағанда біреуінің коэффициенті 0 – ге тең болмайды. Сондықтан (17-19) бірінші дәрежелі сызықтық теңдеу болады. Ондай теңдеу жазықтықтың теңдеуі болатының білеміз.

Демек (17-9) қандайда бір жазықтықтың теңдеуі координаттары берілген екі теңдеудің екеуінде қанағаттандыратын нүктелердің координаттары (17-9) теңдеуі де қанағаттандырады. Ал, бұл берілген екі жазықтықтың екеуінде де жататын нүкте (яғни қиылысу сызығында жататын нүкте) (17-9) теңдеумен анықталатын жазықтықта да жатады деген сөз. Сондықтан (17-9) берілген жазықтықтардың қиылысу сызығынан өтетін жазықтықтың теңдеуі болады. Ондағы λ –ға әртүрлі мән беру арқылы қиылысу сызығынан өтетін әртүрлі жазықтықтың теңдеуін шығарып алуға болады. Сондықтан (17-9) жазықтықтар шоғының теңдеуі делінелі.

17.5 Нүкте мен жазықтықтың ара қашықтығы

Тік бұрышты координаталар жүйесінде $Ax + By + Cz + D = 0$ теңдеумен жазықтық және онда жатпайтын $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүкте берілсін. Ол нүктеден жазықтыққа түсірілген перпендикуляр табаны $M_0(x_0, y_0, z_0)$ болсын. Сонда M_1M_0 кесінді ұзындығын M_1 нүктенің жазықтықтан қашықтығы дейді. Оны $M_1M_0 = d$ деп белгілейік (89 – сурет). Жазықтық нормалы $\vec{N} = \{A, B, C\}$ мен $\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}$ коллинеар болады. Өйткені оның екеуіде жазықтыққа перпендикуляр және $M_0(x_0, y_0, z_0)$ жазықтықта жататындықтан $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ болады. Бұдан $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Сонда $\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{N} = \left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| \left|\vec{N}\right| cos\left(\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{N}\right)$ $(*)$. Мұндағы $\left(\overrightarrow{M_0M_1}\hat{,}\vec{N}\right)$ бұрыш екі коллинеар векторлар, арасындағы бұрыш болғандықтан не 0°, не 180° болады. Ал, $cos\, 0° = +1$, $cos\, 180° = -1$ болғандықтан $cos\left(\overrightarrow{M_0M_1}\hat{,}\vec{N}\right) = \pm 1$ болады.



89-сурет

Ал, $\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| = d,$ $\left|\vec{N}\right| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Екінші жағынан $\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{N} = A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) = Ax_1 + By_1 + Cz_1 - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$. Сонымен $(*)$ ны былай жазуға болады екен $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = d\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}(\pm 1)$. Бұдан $d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Ара қашықтық тек оң сан болғандықтан нүкте мен жазықтық арасын табу формуласы мынадай болады:

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right| \qquad (17-10)$$

Сөйтіп, нүкте мен жазықтықтың арасын табу үшін алдымен жазықтықтың теңдеуін нормал түрге келтіру керек. Содан соң x, y, z орнына нүкте координаты (x_1, y_1, z_1) –қоя салу керек екен.

Егер түзу нормал теңдеумен $x\, cos\, \alpha + y\, cos\, \beta + z\, cos\, \gamma - \mathrm{P} = 0 \quad (16-13)$ берілсе, онда $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктенің одан қашықтығын табу үшін нүкте координаталарын (x, y, z) орнына қоя салу керек.

$$d = |x_0\, cos\, \alpha + y_0\, cos\, \beta + z_0\, cos\, \gamma| \qquad (17-11)$$

17.6 $\delta = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ төрт мүшелік таңбасының геометриялық мағынасы

Координаталары $Ax + By + Cz + D = 0(16-7)$ теңдеуді қанағаттандыратын нүктелердің барлығы осы теңдеумен анықталатын жазықтықта жатады. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүкте бұл жазықтықта жатпасын онда $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \neq 0$, яғни не $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D > 0$, не $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D < 0$ болады (89 – сурет).

Жазықтықтан $N_0(x_0, y_0, z_0)$ нүкте алып, бұл нүктеден $\vec{N} = \{A, B, C\}$ векторды өлшеп салайық. Ол нормал болғандықтан жазықтыққа перпендикуляр болады. Ол $\vec{N} = \overrightarrow{N_0N}\{A, B, C\}$ болады. M_1 нүктеден жазықтыққа перпендикуляр жүргізейік. Ол $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_0$ болсын. Сонда $\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1}$ мен $\vec{N}$ коллинеар болады. Сондықтан t саны табылып, $\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1} = t\,\vec{N}$ $(**)$ болады және $t > 0$ болса $\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1} \uparrow\uparrow \vec{N}$, $t < 0$ болса $\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1} \uparrow\downarrow \vec{N}$ $({}^{*}_{*}*)$ болады. $(**)$ —ні координаталары арқылы жазсақ $x_1 - x_0 = At, \quad y_1 - y_0 = Bt, \quad z_1 - z_0 = Ct,$
$x_1 = At + x_0, \quad y_1 = Bt + y_0, \quad z_1 = Cz + z_0$. Сонда $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = A(At + x_0) + \quad +B(Bt + y_0) + C(Ct + z_0) + D = A^2t + B^2t + C^2t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = t(A^2 + B^2 + C^2)$.

Себебі $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Сөйтіп, $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = t(A^2 + B^2 + C^2)$. Мұндағы $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Демек $\delta = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ ның оң, теріс таңбасы болуы t —ның таңбасына байланысты екен. $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D > 0$ болады, егерде $t > 0$ болса, яғни $\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1} \uparrow\uparrow \vec{N}$ болса. Ал, бұл M_1 нүкте жазықтықтың нормалы бағытталған жағында (жарты кеңістікте) жатса деген сөз. $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D < 0$ болады, егер $t < 0$ болса, яғни $\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1} \uparrow\downarrow \vec{N}$ болса. Ал, бұл M_1 нүкте жазықтықтың нормалы бағытталған жағына кері жағында жатса деген сөз.

Сонымен $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D > 0$ болса, онда $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүкте жазықтық нормалы $\vec{N} = \{A, B, C\}$ бағытталған жағында жатады. $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D < 0$ болса, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүкте жазықтықтың нормалы бағытталмаған жағында жатады.

Салдар. Егер $Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтық және $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нүктелер берілсе, онда M_1, M_2 нүктелер жазықтықтың бір жағында жатса

$$(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)(Ax_2 + By_2 + C_2 + D) > 0 \qquad (17-12)$$

екеуі екі жағында жатса

$$(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)(Ax_2 + By_2 + C_2 + D) < 0 \qquad (17-13)$$

болады.

17.7 Кеңістікте үш жазықтықтың өзара орналасуы

Жалпы теңдеулермен $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$ үш π_1, π_2, π_3 жазықтықтар берілсін.

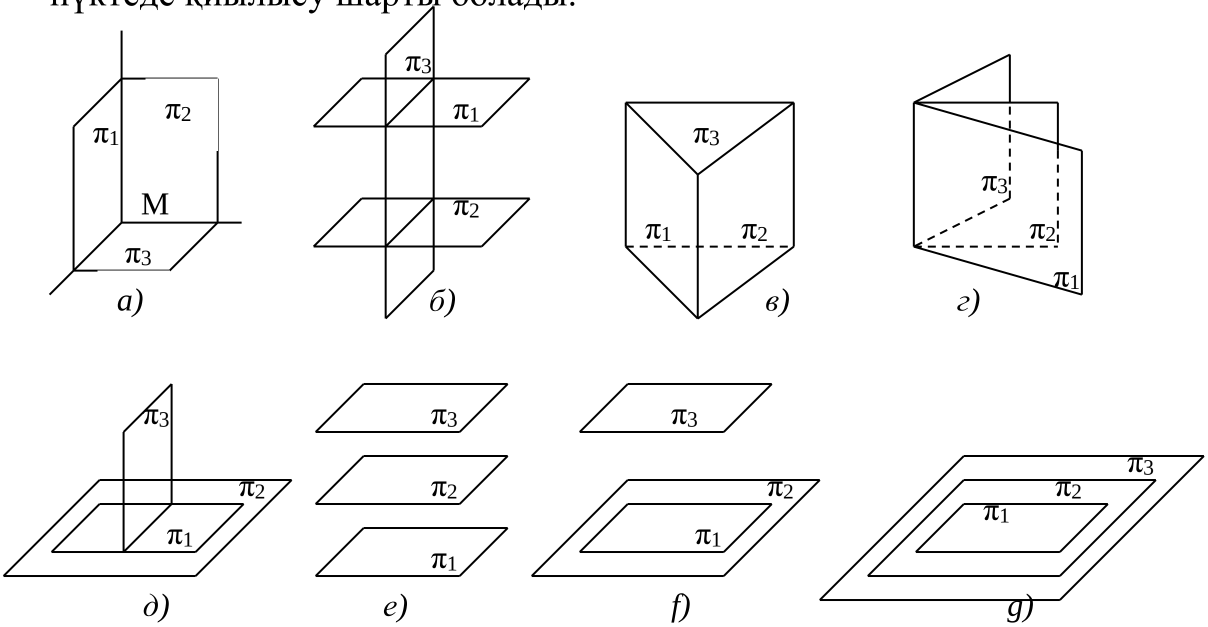
Бұл теңдеулер жүйесін қарастырайық $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$ Оның матрицасы $N_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$ кеңейтілген матрицасы $N_2 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$ болсын. Олардың рангтерін r_1, r_2 дейік.

Сонда мынадай жағдайлар болуы мүмкін

1 – жағдай. $r_1 = 3, \quad r_2 = 3$. Бұл кезде Кронекер – Капелли теоремасы бойынша теңдеулер жүйесі үйлесімді болады және

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (17-14)$$

болғандықтан жүйенің тек бір шешімі болады. Ал, бұл үш жазықтық бір нүктеде қиылысады деген сөз (90 а – сурет). (17-14) Үш жазықтықтың бір нүктеде қиылысу шарты болады.



90-сурет

2 – жағдай. $r_1 = 2, \quad r_2 = 3$. Кронекер – Капелли теоремасы бойынша бұл кезде теңдеулер жүйесі үйлесімсіз. Демек үш жазықтық бір нүктеде қиылыспайды.

Бұл кезде мынадай болуы мүмкін

а) N_1 матрицада сәйкес элементтері пропорционал болатын екі қатар олуы мүмкін. Онда ол екі жазықтық параллель болады, ал үшінші оларды қиып өтеді (90 б – сурет). $\pi_1 \| \pi_2$, ал π_3 оларды қияды.

б) N_2 матрицада сәйкес элементтері пропорционал екі қатар жоқ. Онда үш жазықтық қос – қостан қиылысады, қиылысу сызықтары параллель болады (90 в – сурет).

3 – жағдай. $r_1 = 2, \quad r_2 = 2$. Кронекер – Капелли теоремасы бойынша жүйе үйлесімді, шешімі көп болады.

$r_1 = 2$ болғандықтан N_1 дің бірлік коэффициенттері пропорционал бола бермейді. Сондықтан ол жазықтықтар түзу бойымен қиылысады.

Мынадай жағдай болады

а) $N_2 -$ де барлық коэффициенттері пропорционал болатын екі қатар жоқ. Онда үш жазықтық әртүрлі болады (90 г – сурет).

б) $N_2 -$ де барлық коэффициенттері пропорционал болатын екі қатар бар. Онда ол екі жазықтық беттеседі, үшінші оларды қияды (90 д – сурет).

4 – жағдай. $r_1 = 1, \quad r_2 = 2$. Кронекер – Капелли теоремасы бойынша жүйе үйлесімсіз.

Мұнда мынадай жағдай болуы мүмкін

а) $N_2 -$ де коэффициенттері пропорционал екі қатар жоқ. Демек үш жазықтық бір – бірімен қиылыспайды, параллель болады (90 е – сурет).

б) $N_2 -$ де коэффициенттері пропорционал болатын екі қатар бар. Онда екі жазықтық беттеседі, үшінші оларға параллель болады (90 ж – сурет).

5 – жағдай. $r_1 = 1, \quad r_2 = 1$. Онда үш теңдеу бірдей болады. Үш жазықтық беттеседі (90 з – сурет). Бұл кезде

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (17-15)$$

Бұл үш жазықтықтың беттесу шарты болады. Сөйтіп жазықтық кеңістікте 8 түрлі орналасуы мүмкін. Бір нүктеден өтетін жазықтықтар жиынын жазықтықтар бұдасы дейді. Ол нүкте бұданың центрі делінеді. Егер бұда центрі $M_0(x_0, y_0, z_0)$ белгілі болса жазықтықтар бұдасының теңдеуін былайша жазуға болады

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \qquad (17-16)$$

Егер $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$ үш жазықтық берілсе осы үшеуінің қиылысу нүктесінен өтетін жазықтықтар бұдасының теңдеуін былайшада жазуға болады.$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda_1(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \lambda_3(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0 \qquad (17-17)$

1 – мысал. а) $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ б) $3x - 2y - 3z + 5 = 0, \quad 9x - 6y - 9z - 5 = 0$ в) $2x - y - z - 3 = 0, \ 10x - 5y - 5z - 15 = 0$ жазықтықтары пары өзара қалай орналасқан.

Оны анықтау үшін берілген теңдеулердің коэффициенттерін қарастырамыз.

а) жағдайда $\frac{2}{3}, \ \frac{-3}{-6}, \ \frac{4}{0}$ қатынастар өзара тең емес. Сондықтан ол жазықтықтар қиылысады.

б) жағдайда $\frac{3}{9} = \frac{-2}{-6} = \frac{-3}{-9} \neq \frac{-3}{15}$. Сондықтан олар параллель болады.

в) жағдайда $\frac{2}{10}=\frac{-1}{-5}=\frac{-1}{-5}\neq\frac{-3}{15}$. Төрт коэффициентті пропорционал.

Демек үш жазықтық беттеседі.

<u>2 – мысал.</u> $x-2y-2z-12=0,\ x-2y-2z-6=0$ жазықтықтар арасын табыңдар.

Шешуі. Мұнда белгісіз коэффициенттерінің үшеуін пропорционал $\frac{1}{1}=\frac{-2}{-2}=\frac{-2}{-2}\neq\frac{-12}{-6}$, ал бос мүше олармен пропорционал емес. Сондықтан бұл екі жазықтық параллель. Ал, бос мүше таңбалары бірдей болғандықтан жазықтықтың екеуі де координата басы О нүктенің бір жағында жатыр.

Сондықтан ол жазықтықтардың координата басынан қашықтықтарын тауып бір – бірінен алсақ, екі параллель түзу арасы шығады. Сонда (17-10) бойынша O(0,0,0) ден қашықтық $d_1=\left|\frac{0-2\cdot0-2\cdot0-12}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}\right|=\left|\frac{-12}{3}\right|=4,\ d_2=\left|\frac{0-2\cdot0-2\cdot0-6}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}\right|=\left|\frac{-6}{3}\right|=2.$ Сонда жазықтық арасы $d=|d_1-d_2|=|4-3|=1$. Екі жазықтық арасы.

<u>3 – мысал.</u> $M_0(3,1,-1)$ нүкте мен $22x+4y-20z-45=0$ жазықтық арасын табыңдар.

(17-10) бойынша $d=\left|\frac{22\cdot3+4\cdot1-20(-1)-45}{\sqrt{22^2+4^2+(-20)^2}}\right|=\left|\frac{66+4+20-45}{\sqrt{484+16+400}}\right|=\frac{45}{30}=\frac{3}{2}$

<u>4 – мысал.</u> $4x-5y+3z-1=0,\ \ x-4y-z+9=0$ жазықтықтар арасындағы бұрышты табыңдар.

1 – жазықтықтың нормал векторы $\overrightarrow{N_1}=\{4,-5,3\}$, екіншісінікі $\overrightarrow{N_2}=\{1,-4,-1\}$ Сонда (17-6) бойынша

$cos\,\phi=\frac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{|\overrightarrow{N_1}||\overrightarrow{N_2}|}=\frac{4\cdot1-5(-4)+3(-1)}{\sqrt{16+25+9}\cdot\sqrt{1+16+1}}=\frac{21}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{18}}=\frac{21}{5\cdot3\cdot2}=\frac{7}{10}$ $\phi=arccos\,0,7$.

<u>5 – мысал.</u> $3x-4y-2z+5=0$ жазықтық және $M_1(3,-2,1)$, $M_2(-2,5,2)$, $M_3(1,-1,2)$ нүктелер берілген. Осы нүктелер берілген жазықтыққа қарағанда қалай орналасқан.

Шешуі. Егер M_1 мен M_2 жазықтықтың бір жағында жатса, яғни жазықтық M_1M_2 кесіндіні қимаса, онда

$(3x_1-4y_1-2z_1+5)(3x_2-4y_2-2_2+5)>0$ болу керек, ал

$(3x_1-4y_1-2z_1+5)(3x_2-4y_2-2_2+5)<0$ болса екі нүкте жазықтықтың екі жағында жатады. Сондықтан жазықтық M_1M_2 кесіндіні қияды.

Тексерейік $\delta_1=3x_1-4y_1-2z_1+5=3\cdot3-4(-2)-2\cdot1+5=9+8-2+5=20>0,$ $\delta_2=3(-2)-4\cdot5-2\cdot2+5=-6-20-4+5=-25<0.$

Демек $\delta_1\cdot\delta_2=17\cdot(25)<0$ болып шықты. Демек жазықтық M_1M_2 кесіндіні қияды.

Енді δ_3 –ті табайық $\delta_3 = 3 \cdot 1 - 4(-1) - 2 \cdot 4 + 5 = 4 > 0$, $\delta_1 \cdot \delta_3 = 17 \cdot 4 > 0$ болады. демек жазықтық $\mathrm{M_1M_3}$ кесіндіні қимайды. Демек $\mathrm{M_1, M_3}$ нүктелер жазықтықтың бір жағында, M_2 екінші жағында жатады.

<u>6 – мысал.</u> $4x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 5y - z + 2 = 0$ жазықтықтардың қиылысу сызығынан және A(1,1,1) нүктеден өтетін жазықтық теңдеуін құрыңдар.

Мұны жазықтықтар шоғының теңдеуіне саламыз.

$4x - y + 3z - 1 + \lambda(x + 5y - z + 2) = 0$ берілген екі жазықтықтың қиылысу сызығынан өтетін жазықтық. Ондай жазықтық өте көп. Соның ішінде A нүктеден өтетін біреуақ. Біз жазықтық A нүктені басып өтетіндей етіп λ –таңдап алуымыз керек. Жазықтық A нүктеден өтеді десек A – ның координаталары теңдеуді қанағаттандыруы керек.

$4 \cdot 1 - 1 + 3 \cdot 1 - 1 + \lambda_1(1 + 5 \cdot 1 - 1 + 2) = 0$, $4 - 1 + 3 - 1 + \lambda_1(1 + 5 - 1 + 2) = 0$, $5 + 7\lambda = 0$, $\lambda = -\frac{5}{7}$. Демек $\lambda = -\frac{5}{7}$ болған жағдайдағы теңдеу A нүктені басып өтетін жазықтық теңдеуі болады. $4x - y + 3z - 1 - \frac{5}{7}(x + 5y - z + 2) = 0$, $28x - 7y + 21z - 7 - 5\mathrm{x} - 25\mathrm{y} + 5z - 10 = 0$, $23x - 32y + 26z - 17 = 0$ іздеген жазықтық теңдеуі болады.

Шынында да A(1,1,1) нүкте координаталарын орнына қойсақ $23 - 32 + 26 - 17 = 49 - 49 = 0$ болып шығады.

<u>7–мысал.</u> $x - 2y + z - 7 = 0$, $2x + y - z + 2 = 0$, $x - 3y + 2z - 11 = 0$ үш жазықтық қалай орналасқан.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 + 2 - 1 - 3 + 8 = 12 - 10 = 2 \neq 0.$$

Сондықтан үш жазықтық бір нүктеде қиылысады.

§18 Кеңістіктегі түзу

18.1 Түзудің берілу тәсілдері мен теңдеулері

Төмендегі жағдайларда түзудің кеңістіктегі орны бірмәнді анықталады.

1. Түзудің бір нүктесі мен бағыты белгілі болса.
2. Түзудің екі нүктесі белгілі болса.
3. Қиылысатын екі жазықтық берілсе.

Сондықтан осы үш жағдайда түзу кеңістікте берілген делінеді, ол оның кеңістіктегі орны анықталған деген сөз.

Осы жағдайларға сай түзу теңдеуін құрайық.

1. Берілген нүктеден берілген бағытта өтетін түзу теңдеуі. Тік бұрышты $Oxyz$ координата жүйесінде $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүкте және $\vec{\mathrm{a}} = \{\mathrm{a_1, a_2, a_3}\}$ вектор берілсін. Онда $\mathrm{M_0}$ нүктеден $\vec{\mathrm{a}}$ вектор бағытында бір тек бір l түзуі өтеді. $M(x, y, z)$ нүкте ол түзудің ағымдық нүктесі болса, онда $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ және $\vec{\mathrm{a}} = \{\mathrm{a_1, a_2, a_3}\}$ векторлар коллинеар болады. Сондықтан бір t саны табылып

$$\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{a} \qquad (18 - 1)$$

болады. Вектор координаталарының қасиеті бойынша, бұл координаталары арқылы былайша жазылады

$$x - x_0 = a_1 t, \quad y - y_0 = a_2 t, \quad z - z_0 = a_3 t$$

Мұны былайша

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \qquad (18 - 2)$$

немесе былайша

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{array}\right\} \qquad (18 - 3)$$

жазуға болады. бұл теңдеулерді тек түзу бойында жатқан нүктелердің координаталары ғана қанағаттандырады. Нүкте түзуде жатпаса $\overrightarrow{M_0 M}$ мен $\vec{a}$ коллинеар болмайды. Сондықтан ол нүкте үшін (18-1) орындалмайды, демек (18-2,3) теңдеулер қанағаттандырылмайды.

Сондықтан бұл теңдеулер түзудің теңдеулері болады: (18-2) – ні түзудің канондық теңдеуі, (18-3) – ті түзудің параметрлік теңдеуі дейді. $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ вектор бұл түзулердің бағыттаушы векторы делінеді t параметр делінеді.

Бағыттаушы вектордың бір координаты, мысалы $a_3 = 0$ болса, онда теңдеу мына түрде жазылады $\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}, z - z_0 \quad (18 - 2a)$,
$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ \quad z = z_0 \end{array}\right\}$ $(18 - 3a)$. Бұл z өсіне перпендикуляр түзудің теңдеуі болады. Өйткені $\vec{a} = \{a_1, a_2, 0\}$ вектормен z өсінің бағыттаушы векторы $\vec{k} = \{0,0,1\}$ үшін $\vec{a} \cdot \vec{k} = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$ орындалады. Бұл $\vec{a} \perp \vec{k}$ деген сөз. Осы сияқты $\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{z - z_0}{a_3}, y - y_0 = 0$ Оу өсіне перпендикуляр, $\frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}, x - x_0 = 0$ Ох өсіне перпендикуляр түзудің теңдеуі болады.

Егер бағыттаушы вектордың екі координаты, мысалы $a_2 = 0, \quad a_3 = 0$ болса, онда (18-2) мына түрде жазылады $y - y_0 = 0, \quad z - z_0 = 0$ бұл теңдеу $\vec{a} = \{a_1, 0,0\}$ мен $\vec{i} = \{1,0,0\}$ коллинеар болғандықтан x өсіне параллель түзудің теңдеуі болады. Осы сияқты $x - x_0 = 0, \quad y - y_0 = 0$ Oz өсіне, $x - x_0 = 0, \quad z - z_0 = 0$ Оу өсіне параллель түзудің теңдеуі болады.

2. Екі нүктесі белгілі түзу теңдеуі. Кеңістікте $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ екі нүкте берілсін. Онда бұл екі нүкте арқылы $\overrightarrow{M_1 M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ вектор бағыты анықталады. Сонда M_1, M_2 нүктелерді басып өтетін түзу үшін $\overrightarrow{M_1 M_2}$ вектор бағыттаушы вектор болады да бұл түзудің теңдеуі (18-2) бойынша $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ немесе

$$\frac{x - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_2}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_2}{z_2 - z_1} \qquad (18 - 4)$$

болады. Мұны екі нүктеден өтетін түзу теңдеуі дейді. Бұл қатынасты параметр t –ға теңеп, теңдеуді параметрлік формада былай жазуға болады.

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \quad z = z_1 + (z_2 - z_1)t \qquad (18-5)$$

Бұл теңдеулерден $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$,$M_3(x_3, y_3, z_3)$ үш нүктенің бір түзуде жату шартын шығарып алуға болады. Ол (18-4) – тен

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (18-6)$$

болады.

3. Жазықтықтың қиылысуы түрінде берілген түзу теңдеуі. Екі жазықтық жалпы теңдеумен берілсін. $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Екі жазықтық қиылысса қиманың түзу болатыны белгілі. Екі теңдеуді де координаталары қанағаттандыратын нүкте сол екі жазықтықта да жатады. Екі жазықтықта да жататын нүкте олардың қиылысу сызығында жатады. Сөйтіп (x, y, z) саны екі теңдеуді де қанағаттандырса, бұл сандар екі жазықтықтың қиылысу сызығында жататын нүкте координаталары болады. Сондықтан берілген екі теңдеуден жасалған мына жүйе

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (18-7)$$

Қандайда бір түзуді анықьайды. Мұны түзудің жалпы теңдеуі дейді. Екі жазықтық бір түзуді анықтау үшін олар қиылысу керек. Ал, олар қиылысу үшін теңдеугегі (x, y, z) - тің коэффициенттері қатарынан пропорционал болмау керек, яғни $\frac{A_1}{A_2}, \frac{B_1}{B_2}, \frac{C_1}{C_2}$ қатынастың ең болмағанда бір пары өзара тең болмауы керек. Түзудің жалпы теңдеуін, яғни (18-7) теңдеуді түзудің канондық және параметрлік түрдегі теңдеулеріне айналдыруға болады. Ол үшін x, y, z —тің біріне, мысалы z —ке андан $z = z$ мән беріп жүйеден $x = x_0$, $y = y_0$ мәндерін табады. Сонда $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүкте түзуде жатады.

Енді бұл түзудің бағыттаушы векторын табады. Жазықтықтың нормал векторлары $\overrightarrow{N_1} = \{A_1, B_1, C_1\}$, $\overrightarrow{N_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$ болсын. Бұлардың векторлық көбейтіндісі $\left[\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}\right] \perp \overrightarrow{N_1}$, $\left[\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}\right] \perp \overrightarrow{N_2}$ болатындықтан жазықтықтардың қиылысу сызығына параллель болады. Сондықтан (18-7) түзу үшін $M_0(x_0, y_0, z_0)$ сол түзуде жататын нүкте, ал

$\vec{N} = \left[\overrightarrow{N_1}\overrightarrow{N_2}\right] = \left\{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right\}$ оның бағыттаушы векторы болғандықтан (18-7) теңдеуді былай жазуға болады

$$\boldsymbol{\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} \qquad (18-8)}$$

немесе мұны t —ға теңеп параметрлік түрге келтірсек

$$x = x_0 + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} t, \quad y = y_0 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} t, \quad z = z_0 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} t \qquad (18-9)$$

болып шығады.

Түзудің (18-7) түрде берілген теңдеуін осылайша канондық (18-8), параметрлік (18-9) түрге келтіруге болады.

18.2 Кеңістікте екі түзудің өзара орналасуы

Тік бұрышты координата жүесінде екі түзу мынадай теңдеулермен берілсін

$$\begin{matrix} x = x_1 + a_1 t \\ y = y_1 + a_2 t \\ z = z_1 + a_3 t \end{matrix} \quad (l_1) \quad \begin{matrix} x = x_2 + b_1 t \\ y = y_2 + b_2 t \\ z = z_2 + b_3 t \end{matrix} \quad (l_2)$$

Бұл түзудің 1 – сінде $\mathrm{M}_1(x_1, y_1, z_1)$, екіншісінде $\mathrm{M}_2(x_2, y_2, z_2)$ нүкте жатыр және олардың $\vec{\mathrm{a}} = \{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ бағыттаушы векторлары $\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, $\vec{\mathrm{a}} = \{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ векторлардың координаталарынан мынадай матрицалар жасайын

$$N_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

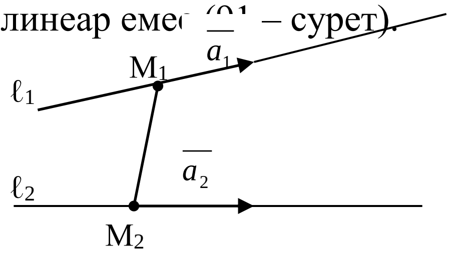
Бұлардың рангтері r_1, r_2 болсын.

Мынадай жағдайлар болуы мүмкін

1 – жағдай. $r_1 = 2, \quad r_2 = 3$. Бұл кезде $r_2 = 3$ болғандықтан

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (18 - 10)$$

Бұл $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{M_1M_2}$ векторлар компланар емес деген сөз. $r_2 = 2$ болғандықтан $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ коллинеар емес (91 – сурет).



91-сурет

Демек бұл кезде l_1 мен l_2 айқас түзулер болады.

2 – жағдай. $r_1 = 2, \quad r_2 = 2$. Бұл кезде $r_2 = 0$ болғандықтан

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (18 - 11)$$

Бұл $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{M_1M_2}$ векторлар компланар болады деген сөз. Демек бұл кезде l_1, l_2 түзулер бір жазықтықта жатады, бірақ $r_1 = 2$ болғандықтан олар параллель болмайды ($\vec{a}$ мен $\vec{b}$ коллинеар емес).

Демек түзу қиылысады.

3 – жағдай. $r_1 = 1, \quad r_2 = 2$. Бұл кезде $r_2 = 2$ болғандықтан (18-11) орындалады, яғни l_1 мен l_2 бір жазықтықта жатады. Бірақ $r_1 = 1$ болғандықтан $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ коллинеар болады.

Демек бұл кезде $l_1 \| l_2$болады.

4 – жағдай. $r_1 = 1, \quad r_2 = 1$. Бұл кезде екі түзу бір жазықтықта жатады, ал $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{M_1M_2}$ коллинеар болады.

Демек екі түзу беттеседі.

18.3 Екі түзудің арасындағы бұрыш

Мынадай теңдеулермен екі түзу берілсін:

$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3}, \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{b_3}$

Олар өзара қиылысса төрт бұрыш шығады. Соның бірі бұл түзулердің бағыттаушы векторлары $\vec{\mathrm{a}} = \{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3\}$ мен $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ның арасындағы бұрышқа тең болады. Сондықтан

$$cos\,\phi = \frac{\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{b_2}}{\left|\overrightarrow{a_1}\right| \left|\overrightarrow{b_2}\right|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \qquad (18-12)$$

Осы формуламен түзулер арасындағы бұрыш табылада. Егер түзулер перпендикуляр болса, олар арасындағы бұрыш $\phi = 90, \quad cos\,9\,0 = 0$ болады да (18-12) – ден

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0 \qquad (18-13)$$

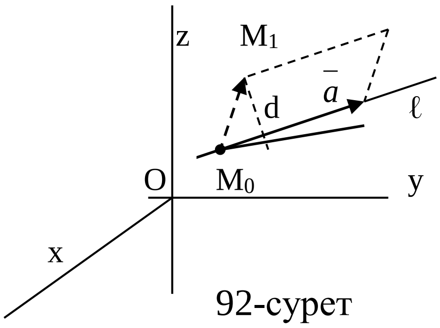
Ал, түзулер параллель болса $\vec{a}\|\vec{b}$ болады да, коллинеарлық белгісі бойынша мынадай болады

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \qquad (18-14)$$

(18-3) екі түздің перпендикуляр, (18-14) параллель болу белгісі.

18.4 Нүкте мен түзудің арақашықтығы

$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$ теңдеумен және онда жатпайтын $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүкте берілсін (91 – сурет).



92-сурет

l түзуінде $M_0(x_0, y_0, z_0)$ жатыр. $\overrightarrow{\mathrm{M_0M_1}} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}$ векторды жүргізейік. Түзудің бағыттаушы векторын M_0 нүктеден өлшеп салайық. Сонда іздеген M_1 мен түзу арасы d қабырғалары $\vec{a}$ мен $\overrightarrow{M_0M_1}$ болатын параллелограмның белгісі болар еді. Сондықтан $d = \frac{S_{пар}}{|\vec{a}|}$ болады.

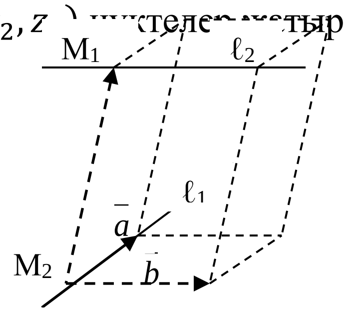
Қабырғалары $\vec{a}$ мен $\overrightarrow{M_0M_1}$ болатын параллелограмның ауданы осы векторлардың векторлық көбейтіндісі болатын вектордың ұзындығына сан жағынан тең болатын. Сондықтан

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{a}\right]\right|}{|\vec{a}|}$$

$$= \left| \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \right| \qquad (18 - 15)$$

18.5 Айқас түзулердің арақашықтығы

$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3}$, $\frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{b_3}$. Айқасушы түзулер болсын. Олардың бағыттаушы векторлары $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$. Оларда $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нүктелері жатыр (93 – сурет).



93-сурет

M_1 нүктеден $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ векторларды өлшеп салайық. Қырлары осы үш вектор болатын параллелепипед салса l_1 оның төменгі, l_2 жоғарғы табанында жатар еді. Сондықтан ол екі түзудің ең қысқа қашықтығы осы параллелепипедтің биіктігіне тең болады.

Ол қашықтықты h десек

$$h = \frac{V_{пар}}{S_{парал}}$$

Ал, параллелепипедтің көлемі $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{M_1M_2}$ векторлардың аралас көбейтіндісіне, ал параллелограм ауданы $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлардың векторлық көбейтіндісінің ұзындығына сан жағынан тең болады. Демек

$$h = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\,\vec{a}\vec{b}\right|}{\left|[\vec{a}\vec{b}]\right|} = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}} \qquad (18-16)$$

18.6 Жазықтық пен түзудің өзара орналасуы

Тік бұрышты координата жүйесінде $Ax + By + Cz + D = 0$ теңдеумен жазықтық, $\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$ теңдеумен түзу берілсін.

Осы екі түзуді біріктіріп шешсек, олардың қиылысу нүктелерін табар едік. Түзу теңдеуін t −ға теңеп, x, y, z тауып, оны жазықтық теңдеуіне қойайық.

$$A(x_0 + a_1t) + B(y_0 + a_2t) + C(z_0 + a_3t) + D = 0, Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + (Aa_1 + Ba_2 + Ca_3)t = 0$$

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0D}{Aa_1 + Ba_2 + Ca_3} \qquad (*)$$

t −ны осыдан тауып түзу теңдеуіндегі орнына қойып x, y, z ны табамыз.

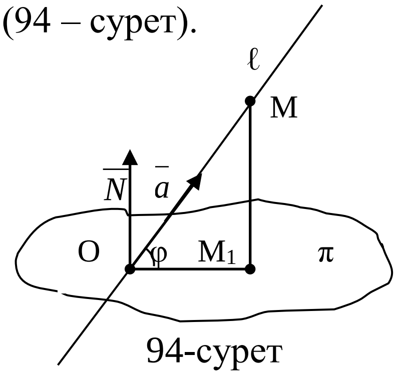
Сонда мынадай жағдайлар болуы мүмкін

1. $\mathrm{Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 \neq 0}$ $\quad(18-17)$ Бұл кезде $(*)$ −дан бірғана t табылады. Сондықтан бірғана x, y, z табылады. Демек түзу мен жазықтық бұл жағдайда бір нүктеде қиылысады.
2. $\left.\begin{matrix} \mathrm{Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0} \\ \mathrm{Ax_0 + By_0 + Cz_0} + D \neq 0 \end{matrix}\right\}$ $\quad(18-18)$ Бұл кезде $(*)$ −дан t табылмайды. Сондықтан x, y, z табылмайды. Демек түзу мен жазықтық қиылыспайды, параллель болады.
3. $\left.\begin{matrix} \mathrm{Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0} \\ \mathrm{Ax_0 + By_0 + Cz_0} + D = 0 \end{matrix}\right\}$ $\quad(18-19)$ Бұл кезде $(*)$ −дан шексіз көп t табылады. Демек шексіз көп x, y, z табылады. Демек түзу жазықтықта жатады.

Сонымен (18-17) жазықтық пен түзудің бір нүктеде қиылысу, (18-18) олардың параллель болу, (18-19) түзудің жазықтықта жату шарты.

18.7 Түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш

$Ax + By + Cz + D = 0$ теңдеумен жазықтық, $\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$ теңдеумен түзу берілсін. Олар қиылыссын (94 – сурет).



94-сурет

Түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш деп түзу мен түзудің жазықтықтағы проекциясы арасындағы бұрышты айтады. М – нен жазықтыққа перпендикуляр жүргізіп, оның табаны M_1 –ді О нүктеге қоссақ түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш $\angle M_1OM = \phi$ болады.

Түзудің бағыттаушы векторы $\vec{\mathrm{a}} = \{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3\}$ мен жазықтықтың нормалы $\vec{N} = \{A, B, C\}$ векторды түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесі О дан өлшеп салайық. Сонда $\phi = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \left(\widehat{\vec{\mathrm{a}}\,\vec{N}}\right)\right)$ немесе $\phi = \pm\left(\frac{3\pi}{2} - \left(\vec{\mathrm{a}}\,\vec{N}\right)\right)$ болады. Ал, $cos\left(\vec{a}\hat{,}\vec{N}\right) = \frac{Aa_1 + Ba_2 + Ca_3}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$ болатындықтан

$$sin\,\phi = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \qquad (18-20)$$

Осы формуламен түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш табылады.

Егер түзу мен жазықтық параллель $\phi = 0°$ немесе $\phi = 180°$ болады, ал $sin\,0° = sin\,1\,80° = 0$ болатындықтан

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0 \qquad (18-21)$$

Егер түзу жазықтыққа перпендикуляр болса, онда $\vec{N} = \{A, B, C\}$ жәнe $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ коллинеар болады да

$$\frac{A}{a_1} = \frac{B}{a_2} = \frac{C}{a_3} \qquad (18-21)$$

болар еді.

(18-21) түзудің жазықтыққа параллель болу, (18-22) перпендикуляр болу белгісі.

<u>1–мысал.</u> $M_0(2,0,-3)$ нүкте берілген, мыналарды анықтаңдар

1°. M_0 нүктеден $\vec{a} = \{2, -3,4\}$ векторға параллель етіп жүргізілген түзу теңдеуі қандай болады.

Ол теңдеу (18-2) бойынша мынадай болады $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{4}$. Мұны канондық түрде былай жазуға болады. $x = 2t + 2, \quad y = -3t, \quad z = 4t - 3$.

2°. M_0 нүктеден өтетін Ох өсіне параллель болатын түзу теңдеуі қандай болады.

Ох өсінің бағыттаушы векторы $\vec{\imath} = \{1,0,0\}$ болатындықтан іздеген түзу теңдеуі $\frac{x-2}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z+3}{0}$. Мұны былай жазуға болады $y = 0, \quad z + 3 = 0$. Бұл екі теңдеу мәндес.

3°. M_0 нүктеден өтетін және $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$ түзуге параллель болатын түзу теңдеуі қандай болады.

Іздеген түзу берілген түзуге параллель болатындықтан бұл түзудің бағыттаушы векторы $\vec{\mathrm{a}} = \{5,2, -1\}$ іздеген түзуге де бағыттаушы вектор болады. Сондықтан ол түзу теңдеуі мынадай болады $\frac{x-2}{5} = \frac{y-0}{2} = \frac{z+3}{-1}$.

4°. M_0 нүктеден өтетін және $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$ түзу мен қиылысатын түзу теңдеуі қандай болады.

Берілген түзу бойында $\mathrm{M}_1(1,-2,-1)$ нүкте берілген. Сондықтан осы $\mathrm{M}_1(1,-2,-1)$ нүктеден өтетін және $\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1} = \{1-2,-2-0,-1+3\} = \{-1,-2{,}2\}$ вектор бағыттаушы векторы болатын түзу берілген түзумен қиылысады $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{2}$. Өйткені екеуі бір нүктеден өтеді және параллель емес.

5°. M_0 нүктеден және $M_1(5,-3{,}2)$ нүктеден өтетін түзу теңдеуі қандай болады.

Екі нүктеден өтетін түзу теңдеуі (18-4) бойынша $\frac{x-2}{5-2} = \frac{y-0}{-3-0} = \frac{z+3}{2+3}$, $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$ іздеген түзу теңдеуі болады.

6°. M_0 нүктеден өтетін және $2x+5y-3z+10=0$ жазықтыққа перпендикуляр болатын түзудің теңдеуі қандай болады.

Түзу жазықтыққа перпендикуляр болғандықтан ол жазықтықтың нормал векторына параллель болады. Сондықтан іздеген түзу M_0 нүктеден өтетін $\vec{N} = \{2{,}5,-3\}$ векторға параллеь болатын түзу болады. Оның теңдеуі $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z+3}{-3}$ болады.

7°. Екі жазықтық $2x-3y-3z-9=0$, $\;x-2y+z+3=0$ теңдеумен берілген.

а) Осы екі жазықтық бір түзуді анықтайма.

Екі жазықтық бір түзуді анықтау үшін олар қиылысу керек. Қиылысу үшін белгісіз коэффициенттері пропорционал болмау керек. Тексерейік $\frac{2}{1}, \frac{-3}{-2}, \frac{-3}{1}$ бір – біріне тең емес, яғни пропорционал емес. Сондықтан екі жазықтық қиылысады, қиылысуынан бір түзу шығады.

б) Сол түзудің теңдеуін анықтау керек, яғни $\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0 \\ x-2y+z+3=0 \end{cases}$ түзудің теңдеуін канондық түрге келтіру керек болсын.

Ол үшін бұл түзуде жатқан бір нүкте мен түзудің бағыттаушы векторын табу керек.

Нүктені табу үшін x, y, z тің біріне ойдан мән беріп, x,y – ті табу керек. $z=-2$ дейік, онда $\begin{cases} 2x-3y=3 \\ x-2y=-1 \end{cases}$

Бұл жүйені шешсек $y=5$, $\;x=9$ болады. Демек $M_1(9{,}5,-2)$ іздеп отырған түзу бойында жатады.

Енді түзудің бағыттаушы векторын табу керек. Ол жазықтықтардың нормал векторлары $\overrightarrow{N_1} = \{2,-3,-3\}$, $\overrightarrow{N_2} = \{1,-2{,}1\}$ –нің векторлық көбейтіндісі болады.

Сондықтан $\left[\overrightarrow{N_1}\,\overrightarrow{N_2}\right] = \left\{\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\right\} = \{-3-6,-3-2,-4+3\} = \; = \{-9,-5,-1\}$. Сонда канондық теңдеу $\frac{x-9}{9} = \frac{y-5}{5} = \frac{z+2}{1}$ болады.

6°. M_0 нүктемен $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3}$ түзудің ара қашықтығы неге тең.

Нүкте мен түзу арасы (18-15) формуламен табылады. Алдымен түзудің бағыттаушы векторы $\vec{a} = \{2,1,3\}$ −тің ұзындығын табады $|\vec{a}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$.

Одан соң $\overrightarrow{M_0M_1} = \{1-2, -1-0, 0+3\} = \{-1,-1,3\}$, $\vec{a} = \{2,1,3\}$ −вектордың векторлық көбейтіндісінің ұзындығын табады $\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1}\cdot \vec{a}\right]\right| = \sqrt{\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}3 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}^2} =$ $\sqrt{(-3-3)^2+(6+3)^2+(-1+2)^2} = \sqrt{36+81+1} == \sqrt{118}$

Сонда $h = \frac{\sqrt{118}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{59}{7}}$ іздеген қашықтық болады.

2–мысал. Өзара қиылыспайтын $\frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1}, \frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}$ түзулердің ең қысқа қашықтығын табыңдар.

Бұл түзулер параллельде емес, себебі бағыттаушы векторлары коллинеар емес. Сондықтан бұл түзулер айқасқан түзу болады.

Шарт бойынша $\vec{a} = \{4,-3,1\}$, $\vec{b} = \{-2,9,2\}$. Бірінші түзуде $M_1(9,-2,0)$, екінші түзуде $M_2(0,-7,2)$ нүктелер жатыр. Сонда $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-9,-5,2\}$ болады.

Сонда $\overrightarrow{M_1M_2}\,\vec{a}\vec{b} = \begin{vmatrix}-9 & -5 & 2\\ 4 & -3 & 1\\ -2 & 9 & 2\end{vmatrix} = 54+72+10-12+81+40 = 245$

$$\left|[\vec{a},\vec{b}]\right| = \sqrt{\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 9 & 2\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & -2\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}4 & -3\\ -2 & 9\end{vmatrix}^2}$$

$$= \sqrt{(-6-9)^2+(-2-8)^2+(36-6)} =$$

$$= \sqrt{225+100+900} = 35$$

Сонымен $h = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2},\vec{a},\vec{b}\right|}{\left|[\vec{a}\vec{b}]\right|} = \frac{245}{35} = 7$

3–мысал. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{5}$ түзумен $4x+3y-z+3=0$ жазықтық қалай орналасқан.

Мұнда $\vec{a} = \{2,-1,5\}$, $M_0(1,-3,-2)$ нүкте түзуде жатыр. Сонда $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 4\cdot 1 + 3(-3) + (-1)(-2) + 3 = 4-9+2+3 = 0$, $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 4\cdot 2 + 3(-1) + 5(-1) = 8-3-5 = 0$. Сондықтан түзу жазықтықта жатады.

Қайталау сұрақтары мен есептер

1. Аффиндік және тікбұрышты координаталар жүйесі деген не.
2. Нүкте координаталары деген не, оларды қалай табады.
3. Координаталары берілген нүктені қалай салады.
4. Октанта деген не, ол қалай нөмірленеді. Әр октантадағы нүкте координаталарының таңбасы қандай, ол неге байланысты.

5. Вектор координаты деген не, оның нүкте координатымен байланысы.
6. Цилиндрлік координата жүйесі қандай болады. Нүктенің цилиндрлік координаталары деп нені айтады, оның нүктесін декарттық координатасымен байланысы.
7. Сфералық координата жүйесі қандай болады, нүктенің сфералық координатасы деп нені айтады, оның нүктесін тікбұрышты координатасымен байланысы қандай.
8. Тікбұрышты координата жүйесінде екі нүкте берілсе сол нүктелермен берілген
   а) вектор координаталарын қалай табады
   б) кесінді ұзындығын қалай табады, нүкте арасын ше
   в) кесіндіні берілген қатыста бөлу, қақ бөлу формулалары.
9. Төбелерінің координаталары белгілі а) Үшбұрыштың б) Параллелограмның аудандарын в) тетраэдр, параллелепипед көлемін қалай табады. Формуласы қандай.
10. Жазықтық берілді дегенді қалай түсінесің. Қандай жағдайда жазықтық берілді делінеді.
11. Жазықтықтың теңдеуін қорытып шығарудың жалпы әдісі қандай.
12. Жазықтықтың теңдеулері: бір нүктеден берілген бағытта өтетін үш нүктеден өтетін, параметрлік теңдеуі, үш нүктеден өтетін жазықтық теңдеуі, жазықтықтың кесіндідегі теңдеуі, жазықтықтың жалпы, толымсыз, нормал теңдеулері.
13. Жазықтықтың жалпы теңдеуін нормал түрге келтіру жолы.
14. Екі жазықтықтың кеңістік өзара орналасу тәсілдері қандай.
15. Жазықтықтар шоғы және оның теңдеуі.
16. Вектор мен жазықтықтың параллель болу белгісі.
17. Жазықтықтар арасындағы бұрыш, параллель және перпендикуляр болу белгілері.
18. Жазықтық пен нүкте арасы.
19. $\delta = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ 4 мүшеліктің таңбасының геометриялық мағынасы.
20. Үш жазықтықтың өзара орналасу белгілері.
21. Кеңістікте түзудің берілу тәсілдері.
22. Түзудің түрлі теңдеулері.
23. Нүкте мен түзу арасы.
24. Екі түзудің кеңістікте өзара орналасуы (параллель болу, беттесу, қиылысу шарттары).
25. Айқас түзулердің ең қысқа қашықтығын табу.
26. Жазықтық пен түзудің өзара орналасуы.
27. Түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш, олардың параллель, перпендикуляр болу белгілері.
28. Мына теңдеумен анықталатын түзу координата өсіне қарағанда қалай орналасады:

а) $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z = 0 \end{cases}$ г) $\begin{cases} B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

б) $\begin{cases} A_1x + D_1 = 0 \\ B_2y + D_2 = 0 \end{cases}$ д) $\begin{cases} A_1x + C_1z = 0 \\ A_2x + C_2z = 0 \end{cases}$

в) $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ B_2y + D_2 = 0 \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3y + 2z = 0 \\ 5x - 1 = 0 \end{cases}$

29. $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ түзу теңдеуінің коэффициенттері қандай шартты қанағаттандыруы керек, егер бұл түзу

а) x өсіне параллель болса

б) y өсін қиып өтсе

в) z өсімен беттессе

г) Oyz жазықтығына параллель болса

е) координата басынан өтсе

30. A(1,-5,3) нүктеден өтетін және координата өстерімен сәйкесінше 60°, 45°, 120° жасайтын түзу теңдеуі қандай болады.

31. Төбелері A(3,-1,0), B(0,-7,3), C(-2,1,-1), Д(3,2,6) нүктелер болатын тетраэдрдің

а) қарама – қарсы қарсы қырлары арасындағы бұрышты

б) тетраэдр көлемін

в) A нүктенің BCД жазықтықтан қашықтығын табыңдар.

32. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$ түзуі мен $3x - 3y + 2z - 5 = 0$ жазықтық арасындағы бұрышты табыңдар.

33. Коэффициент A қандай болғанда $Ax + 3y - 5z + 1 = 0$ жазықтығы $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}$ түзуге параллель болады.

34. A(4,-3,1) нүктенің $x + 2y - z - 3 = 0$ жазықтықтағы проекциясын табу керек.

35. $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{7} = \frac{z-2}{3}$ түзу мен $5x - 9y - 2z - 1 = 0$ жазықтық өзара қалай орналасқан.

36. A(2,3,-1) нүкте мен $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2}$ түзу арасын табу керек.

37. $M_0(2,-2,1)$ нүкте және $x = 2t - 1,\quad y = -3t + 2,\quad z = 2t - 3$ түзу арқылы өтетін жазықтық теңдеуі қандай болады.

38. Төбелері A(3,-1,6), B(-1,7,-2,), C(1,-3,2) болатын үшбұрыштың түрін ажыратыңдар.

39. Төбелері A(1,2,-1), B(2,-1,3), C(-4,7,5,) болатын үшбұрыштың B нүктесінен жүргізілген биссектрисасы қаншаға тең.

40. $5x - 6y + 3z - 120 = 0$ жазықтықтың координата өстерінен қиятын кесінділерін табыңдар.

VI тарау. Екінші ретті беттер

§19. Канондық теңдеумен берілген екінші ретті беттер

19.1 Бет ұғымы және бет теңдеуі. Үш айнымалы x, y, z терге тәуелді $F(x, y, z)$ өрнек берілсін. x_0, y_0, z_0 сандар бұл өрнектің мүмкін мәні делінеді, егер $F(x_0, y_0, z_0)$ нақты сан болатын болса, $F(x, y, z) = 0$ қатысты қарастырайық. Бұл қатыс (теңдік) x, y, z айнымалылардың кезкелген мүмкін мәндерінде орындалса ол теңбе–теңдік делінеді. Мысалы $F(x, y, z) = sin^2(x + y + z) + cos^2(x + y + z) - 1$ теңдік теңбе – теңдік болады, өйткені ол x, y, z тің барлық мүмкін мәнінде орындалады.

Егер $F(x, y, z) = 0$ теңдік айнымалылардың кезкелген мүмкін мәнінде орындала бермейтін болса, ол теңдікті теңдеу дейді.

Мысалы $F(x, y, z) = 2x + 3y - 5z + 7 = 0$ кезкелген x, y, z үшін орындалмайды. Сондықтан ол үш айнымалылы теңдеу болады.

Егер кеңістікке аффиндік (не тікбұрышты) координаталар жүйесі ендірілсе, онда кезкелген нүктелер жиындығын теңдеулер, теңсіздіктер және олардың жүйелері арқылы аналитикалық өрнектеуге болады. Ол өрнекті сол нүктелер жиынының теңдеуі дейді, егерде оны тек сол жиында жатқан нүктелердің координаталары ғана қанағаттандыратын болса, ал жиыннан тыс жатқан нүкте координаталары қанағаттандырмаса.

Егер нүктелер жиынының аналитикалық өрнегі бір

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (19 - 1)$$

теңдеуге келетін болса, ол нүктелер жиыны бет делінеді, ал (19-1) ол беттің аналитикалық өрнегі немесе теңдеуі делінеді. Сонымен аффиндік (тікбұрышты) координаталар жүйесінде координаталары (19-1) теңдеуді қанағаттандыратын кеңістік нүктелерінің жиынын бет дейміз, (19-1) ол беттің теңдеуі делінеді. (19-1) теңдеу шынында да қандайда бір S бетті анықтау үшін S бетте жатқан барлық нүкте координаталары ол теңдеуді қанағаттандыуы, ал S бетте жатпайтын бірде бір нүктенің координаталары ол теңдеуді қанағаттандырмауы керек.

Егер (19-1) теңдеу айнымалы (x, y, z) −терге қарағанда бүтін алгебралық теңдеу болса, яғни $Ax^m y^n z^p$ түрдегі саны шектеулі мүшелердің алгебралық қосындысынан тұратын көпмүшелік болса, онда ол теңдеумен анықталатын бетті алгебралық бет дейді. Мұндағы А–тұрақты сан, m, n, p −бүтін теріс емес нақты сандар (көрсеткіштер). $m + n + p$ қосындының ең үлкені (теңдеудің дәрежесі) алгебралық беттің реті делінеді. Беттің реті, алгебралық болу–болмауы координата жүйесіне тәуелді болмайды, яғни координата жүйесін өзгерту арқылы алгебралық бетті алгебралық емес бетке, 2–ретті бетті 3– немесе 1–ретті бетке айналдырып жіберуге болмайды.

Алгебралық емес беттерді, яғни теңдеуі алгебралық теңдеу болмайтын бетті трансценденттік бет дейді.

Аффиндік (тікбұрышты) координаталар жүйесінде теңдеуі екі дәрежелі үш белгісізді алгебралық теңдеу болатын беттерді екінші ретті алгебралық бет дейді.

Жазықтық 1–ретті бетке жатады. Екі дәрежелі үш белгісізді алгебралық теңдеудің жалпы түрі мынадай болады

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + My + Nz + K = 0 \qquad (19 - 2)$$

Біз мұндай жалпы теңдеумен берілген 2–ретті беттерді емес, ықшамдалған канондық теңдеумен берілген 2–ретті беттерді қарастырамыз. Ондай беттердің қасиеттерін анықтау мақсатында беттерді координата жазықтықтарына параллель жазықтықтармен және координата жазықтықтарының өздерімен қиып қиманы зерттейтін боламыз.

19.2 Сфералық бет

Бір нүктеден бірдей қашықтықтағы кеңістік нүктелерінің жиынын сфералық бет, не сфера дейді. Тік бұрышты $Oxyz$ координата жүйесінде центрі $C(a,b,c)$ нүкте, радиусы r болатын сфералық бетті қарастырайық. $M(x,y,z)$ осы сферада жатса, онда тек сонда ғана $CM=r$ болады. Нүкте арасын табу формуласы бойынша. Бұдан

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \qquad (19-3)$$

шығады. Бұл сфераның теңдеуі болады. Өйткені тек сферада жатқан М нүктелер үшін ғана $CM=r$ теңдігі. Сондықтан (19-3) орындалады.

Егер сфера центрі координата басымен беттессе $a=b=c=0$ болады да (19-3) мына түргк келеді

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \qquad (19-3a)$$

Егер (19-3) – дегі жақшаларды ашсақ

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-r^2=0 \qquad (19-3\text{б})$$

теңдеу шығады. Бұл екі дәрежелі үш белгісізді теңдеу. Сондықтан сфера екінші ретті бет болады.

Жалпы

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0 \qquad (19-4)$$

түрдегі теңдеу, егер $A^2+B^2+C^2-4C>0$ болса, центрі $C\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2},-\frac{C}{2}\right)$ болатын, радиусы $r=\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}}{2}$ болатын сфера болады. Өйткені (19-4) – ті былайша түрлендіруге болады

$$x^2-2x\left(-\frac{A}{2}\right)+\left(-\frac{A}{2}\right)+y^2-2y\left(-\frac{B}{2}\right)+\left(-\frac{B}{2}\right)+z^2-2z\left(-\frac{C}{2}\right)+\left(-\frac{C}{2}\right)$$
$$=\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}+\frac{C^2}{4}-D$$

Бұдан $\left(x-\frac{A}{2}\right)^2+\left(y-\frac{B}{2}\right)^2+\left(z-\frac{C}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2+C^2-4D}{4}$ Мұны сфераның теңдеуі (19-3) пен салыстырсақ соңғы теңдеу центрі $\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2},-\frac{C}{2}\right)$, радиусы $r=\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}}{2}$ болатын шеңбер болатыны көрінеді.

<u>1–мысал.</u> Центрі C(2,3,4) нүкте болатын және Oxz жазықтығына жанасатын сфера теңдеуі қандай болады.

Сфера Oxz - ке жанасатындықтан оның радиусы С нүктенің координатасына тең болады $z=y=3$. Сонда сфера теңдеуі (19-3) бойынша

$(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=9$ болады

Ашсақ $x^2+y^2+z^2-4x-6y-8z++4+9+16=9$

Бұдан $x^2+y^2+z^2-4x-6y-8z+20=0.$

2–мысал. $x^2+y^2+z^2-6x+2y-8z+1=0$ шеңбер берілсе, оны былайша $x^2-2x\cdot 3+9+y^2+2y\cdot 1+1+z^2-2z\cdot 4+16=9+1+16-1$ түрлендіруге болады. Бұдан $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=25$. Демек бұл сфера центрі С(3,-1,4), радиусы $r=\sqrt{25}=5$ болады екен.

19.3 Цилиндрлік бет

Кеңістікте l түзуі мен L сызығы берілсін. L сызықтың әрбір нүктесіне l түзуге параллель түзулер жүргізсек, онда осы түзулердің жиыны бір бет жасайды, оны **цилиндрлік бет** дейді, l ді ол беттің **жасаушысы,** L сызығын **бағыттаушысы** дейді (95 а – сурет).

Демек цилиндрлік бет бір сызық бойымен бір түзудің өзіне - өзі параллель қозғалуынан жасалады екен.

Кеңістікке тікбұрышты $Oxyz$ координата жүйесін ендірейік. L сызығы Оху жазықтығында жатсын, онда оның теңдеуі $\begin{cases} f(x\cdot y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ түрде болады.

Осы L сызықтың әрбір нүктесінен z өсіне параллель түзулер жүргізсек, ол параллель түзулер жиыны жасаушысы z өсіне параллель болатын цилиндрлік бет жасайды (95 б – сурет).

Егер $M(x,y,z)$ осы цилиндрлік беттің кезкелген нүктесі болса, ал M_0 оның Оху жазықтықтағы проекциясы болса, онда M_0 L де жатады және координаталары $M_0(x,y,0)$ болады. Сондықтан $M(x,y,z)$ нүкте координаталары

$$f(x,y)=0 \qquad (19-5)$$

теңдеуді қанағаттандырады. Сондықтан (19-5) **цилиндрдің теңдеуі** болады.

Егер цилиндр табаны (бағыттаушысы) дөңгелек, эллипс, гипербола, парабола болса, онда ол цилиндр дөңгелек цилиндр. Эллипстік, гиперболалық, параболалық цилиндр делінеді.

Жалпы цилиндр теңдеуін былайша құрады. Цилиндрдің бағыттаушы сызығы өзара қиылысатын екі бет ретінде берілсін, оның теңдеуі

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases} \qquad (19-6)$$

болсын. Егер жасаушысының бағыттаушысы $(m:n:1)$ белгілі болса (яғни жасаушының бағыттаушы векторының координаталары $(m,n,1)$ болса), онда жасаушы теңдеуі

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z}{1} \qquad (19-7)$$

болады. Мұндағы а мен в айнымалы параметрлер, ол жасаушы түзу мен бағыттаушы сызықтың қиылысу нүктесінің координаталары. Ол параметрлердің мәні жасаушы мен бағыттаушының қиылысуымен, яғни (19-6) мен (19-7) нің үйлесімді болуымен шектеледі. Бұл шектелудің аналитикалық өрнегін (19-6), (19-7) төрт теңдеуден $(x, y, z)-$тен арылу арқылы шығарып аламыз. Ол

$$\varphi(a,b)=0 \qquad (19-8)$$

болсын.

Осы шарт орындалғанда жасаушы мен бағыттаушы қиылысады, сөйтіп цилиндрдің кезкелген нүктесінің координаталары (19-7) теңдеуді қанағаттандырады.

Соңғы екі теңдеуден а мен в арылсақ мына теңдеу шығады

$$\varphi(x-mz, y-nz)=0 \qquad (19-9)$$

Міне осы цилиндрдің теңдеуі болады.

Ескерту: (19-7) формулада жасаушының (ол түзу болады) бағыттаушы векторының координаталарын $\vec{p}=\{m,n,1\}$, ал жасаушысы мен бағыттаушының қиылысу нүктесін $N(a,b,0)$ деп алған.

Оның мәні мынадай: Егер $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ бір түзудің бағыттаушы векторы болса, онда оны a_3-ке бөлгенде шығатын векторда оған бағыттаушы вектор болады: $\dfrac{\vec{a}}{a_3}=\left\{\dfrac{a_1}{a_3},\dfrac{a_2}{a_3},\dfrac{a_3}{a_3}\right\}=\{m,n,1\}$. Ал, енді егер түзу теңдеуі $\dfrac{x-a_1}{m}=\dfrac{y-a_2}{n}=\dfrac{z-a_3}{1}$ болса, теңдіктің үш жағына да a_3-ті қоссақ теңдік өзгермейді $\dfrac{x-a_1}{m}+a_3=\dfrac{y-a_2}{n}+a_3=\dfrac{z-a_3}{1}+a_3$. Бұдан $\dfrac{x-(a_1-ma_3)}{m}=\dfrac{y-(a_2-na_3)}{n}=\dfrac{z-a_3+a_3}{1}$ немесе $\dfrac{x-a}{m}=\dfrac{y-b}{n}=\dfrac{z}{1}$. Мұндағы $\dfrac{a_1}{a_3}=m;\ \dfrac{a_2}{a_3}=n;\ a_1-ma_3=a,\ a_2-na_3=b$. Сондықтан жасаушының теңдеуін $\dfrac{x-x_0}{a_1}=\dfrac{y-y_0}{a_2}=\dfrac{z-z_0}{a_3}$ деп алудың орнына $\dfrac{x-a}{m}=\dfrac{y-b}{n}=\dfrac{z}{1}$ деп ала салған.

3–мысал. Бағыттаушысы $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ z=0 \end{cases}$ шеңбер болатын, жасаушысы $m:n:1=5:3:1$ бағытта болатын цилиндрдің теңдеуін құру керек.

Жасаушының теңдеуі $\dfrac{x-a}{5}=\dfrac{y-b}{3}=\dfrac{z}{1}$ болады, $z=0$ болғандықтан. Бұдан $x=a,\quad y=b$ болады.

$\begin{cases} x=a \\ y=b \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ теңдеулер жүйесінен а мен в – ны байланыстыратын қатыс аламыз. Ол $a^2+b^2=25$ болады. Міне осы шарт орындалса жасаушы мен бағыттаушы қиылысады, яғни олардың теңдеулері үйлесімді болады. жасаушы теңдеуі мен $a^2+b^2=25$ біріктіріп а мен в – дан арыламыз. Жасаушы теңдеуінен $a=x-5z,\quad b=y-3z$, мұны соңғы теңдікке қойсақ а, в –

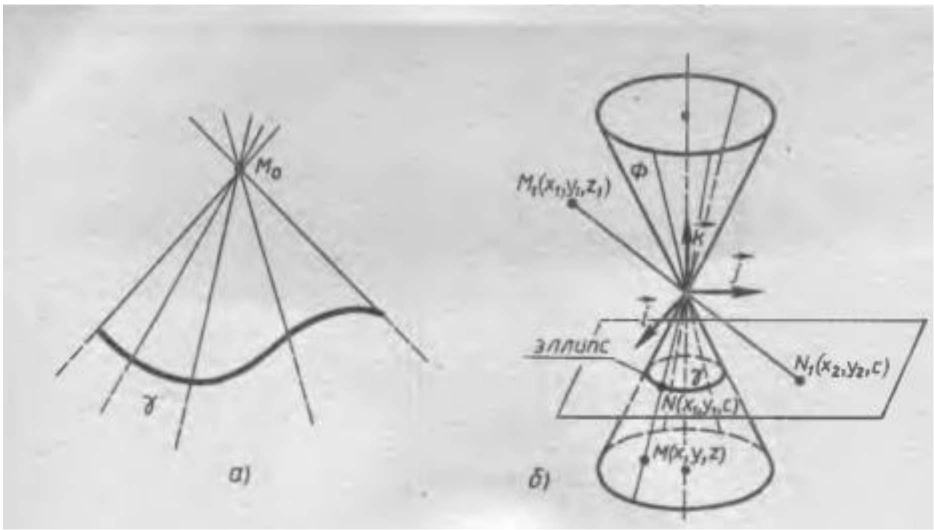
дан аарыламыз. $(x-5z)^2+(y-3z)^2=25$ осы цилиндр теңдеуі болады. Жақшаны ашсақ $x^2-10xz+25z^2+y^2-6yz+9z^2-25=0$

$$x^2+y^2+34z^2-10xz-6yz-25=0.$$

19.4 Конустық бет

Кеңістікте L сызығы және онда жатпайтын S нүктесі берілсін. L дің әрбір нүктесін S ке қосқанда шығатын түзулер жиынын конустық бет дейді

(96 – сурет). L ден М нүкте алсақ, S ті конустық беттің төбесі $SM-$ді жасаушысы L ді бағыттаушысы дейді.



96-сурет

<u>Теорема.</u> Егер $F(x,y,z)$ біртекті функция болса (яғни $F(xt,yt,zt)=\varphi(t)$ $F(x,y,z)$ болса), онда аффиндік координата жүйесінде $F(x,y,z)=0$ теңдеумен анықталатын бет – төбесі координата басында жататын конустық бет болады.

Дәлелі. Егер О координата басы болса Ф бет $F(x,y,z)=0$ теңдеумен берілсе $M_1(x_1,y_1,z_1)$ нүкте осы бетте жатса, онда OM_1 түзудің кезкелген $M(x,y,z)$ нүктесі де осы бетте жатады. Өйткені $M\in OM_1$ болғандықтан $\overrightarrow{OM}$ мен $\overrightarrow{OM_1}$ коллинеар болады. Сондықтан $x=x_1t,\quad y=y_1t,\quad z=z_1t$ болады. Ал, $M_1\in Ф$ да жатқандықтан $F(x_1,y_1,z_1)=0$ болады. Сонда $F(x,y,z)=F(x_1t,y_1t,z_1t)=tF(x_1,y_1,z_1)=t\cdot 0=0$ болады. Ал, бұл $M(x,y,z)$ нүкте Ф бетте жатады деген сөз. Сонымен қатар $M\in OM_1$ болғандықтан бұл Ф бет О нүктеден өтетін түзу арқылы жасалған бет болады. Сөйтіп, Ф төбесі О нүкте болатын конустық бет болады.

Конустық беттіңтеңдеуін былайша құрады. Егер $S(a,b,c)$ конустық беттің төбесі болса

$$\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\F_2(x,y,z)=0\end{cases}\qquad(19-10)$$

оның бағыттаушысы болса, жасаушысының теңдеуі

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z}{1} \qquad (19-11)$$

болады. Мұндағы m,n айнымалы параметрлер, оның мәні жасаушы мен бағыттаушының қиылысуымен, яғни (19-10) мен (19-11) теңдеулердің үйлесімді болуымен шектеледі. Бұл екеуінен (x,y,z) тен арылып, m мен n ді байланыстыратын теңдеуді аламыз. Ол $\varphi(m,n)=0$ болсын. Енді (19-1) ден $m=\dfrac{x-a}{z}, \quad n=\dfrac{y-b}{z}$ тауып $\varphi(m,n)=0$ ге қойсақ

$$\varphi\left(\frac{x-a}{z},\frac{y-b}{z}\right)=0 \qquad (19-12)$$

теңдеуді аламыз. Бұл конус теңдеуі болады. Егер конус төбесі $S(a,b,c)$ координата төбесі $O(0,0,0)$ мен беттессе $a=0, \quad b=0, \quad c=0$ болады да конус теңдеуі

$$\varphi\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0 \qquad (19-12a)$$

болады.

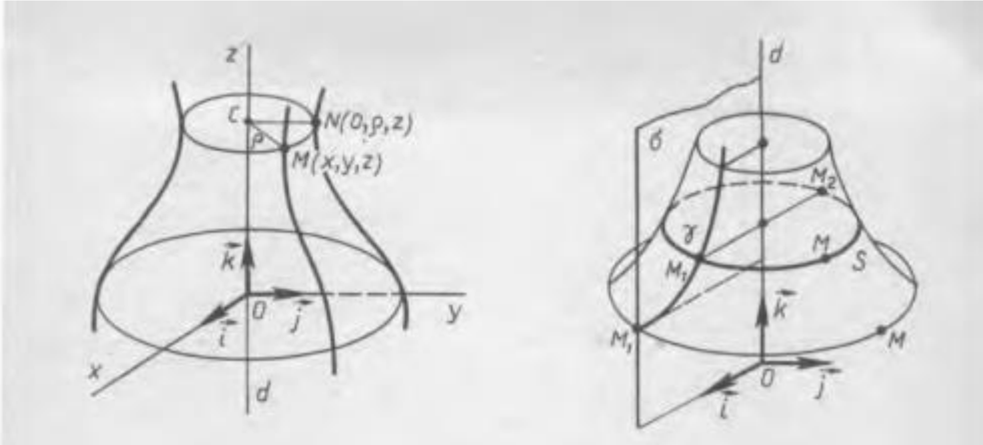
<u>4–мысал.</u> Төбесі координата басында жататын, бағыттаушысы $\begin{cases} x^2+y^2+(z-5)^2=9 \\ z=4 \end{cases}$ болатын конустың теңдеуін құру керек.

Шешуі. Конустық жасаушы координата басынан (конус төбесі О мен беттеседі) өтетіндіктен ол жасаушының теңдеуін $\dfrac{x-0}{m}=\dfrac{y-0}{n}=\dfrac{z-0}{1}$ деп жазуға болады. Бұдан $x=mz, \quad y=nz$. Ал есеп шартында $n=4$. Сондықтан бағыттаушы теңдеуі векторының координаталары m,n осы шартқа бағынуы керек екен. Жасаушы теңдеуінен $m=\dfrac{x}{z}, \quad y=\dfrac{y}{z},$ Мұны орнына қойсақ конус теңдеуі шығады: $\dfrac{x^2}{z^2}+\dfrac{y^2}{z^2}=\dfrac{1}{2}$ немесе $2x^2+2y^2-z^2=0$.

19.5 Айналу беті

Қандайда бір сызықтың түзу айналасынан айналуынан шыққан бетті айналу беті дейді. Бұл кезде түзу айналу өсі делінеді. Өске перпендикуляр жазықтықтар айналу бетін шеңбер бойымен қиады. Ол шеңберлерді параллельдер дейді, ал өсті бастыра жүргізілген жазықтықтар мен беттің қиылысу сызықтарын меридианалар дейді.

L сызығы екі беттің қиылысу сызығы ретінде мына теңдеу жүйесімен $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ берілсін. Бұдан $x=\varphi(z), \quad y=\psi(z)$ болып табылсын. L сызығы oz өсінен айналсын. Сонда шыққан бет теңдеуін құру үшін (97 – сурет)



97-сурет

оның бойынан $M(x,y,z)$ нүкте алайық та, сол нүктеден oz өсіне (айналу өсіне) перпендикуляр болатын жазықтық жүргізейік. Қимада центрі С айналу өсінде жататын шеңбер шығады.

Ол шеңбер L сызығын $N(x,y,z)$ нүктеде қисын. Сонда $CM^2 = X^2 + Y^2, \quad CN^2 = x^2 + y^2$ (себебі С нүкте z өсте жатқандықтан оның абсциссасы мен ординатасы 0-ге тең болады, ал M, C, N нүктелердің апликаталары бірдей болады). N нүкте L сызықта жатқандықтан $x = \varphi(z), \quad y = \psi(z)$ болады. Ал, $X^2 + Y^2 = x^2 + y^2$ болатындықтан

$$X^2 + Y^2 = \varphi^2(z) + \psi^2(z) \qquad (19-13).$$

Міне осы $x = \varphi(z), \quad y = \psi(z)$ сызықтың z өсінен айналғандағы шығатын бет теңдеуі болады.

Бұл бойынша z өсі айналасынан L сызықты айналдырғанда шығатын бет теңдеуін құру үшін сызық теңдеуінен x пен y – ты z арқылы тауып, оларды квадраттап қосу керек екен. Егер x өсінен айналасынан айналдырса, онда y пен $z-$ті x арқылы тауып, оларды квадраттап қосу керек, y өсінің айналасынан айналдырса x пен $z-$ті y арқылы тауып оларды квадраттап қосу керек.

5–мысал. Oxz жазықтығында жатқан эллипс берілген. Онда оның теңдеуі $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ болады.

а) Осы эллипсті Oz өсінен айналдырғанда шығатын бет теңдеуін табайық. Ол үшін жоғарыда шығарылған ереже бойынша x пен y – ты z арқылы тауып, квадраттап қосу керек, теңдеуден $x^2 = a^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$, ал $y^2 = 0$. Қоссақ

$$x^2 + y^2 = a^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) + 0, \quad \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (19-14a)$$

Мұны айналу эллипсоиды дейді.

б) Енді берілген эллипсті Ox өсінен айналдырғанда шығатын бетті табайық. Ол үшін теңдеуден y пен $z-$ті x арқылы тауып, квадраттап қосу керек. Сонда $z^2 = C^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$, ал $y^2 = 0$. Қоссақ

$$y^2 + z^2 = c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (19-14б)$$

Бұл теңдеуде айналу эллипсоиды деген бетті анықтайды.

в) Егер эллипс yOz жазықтығында жатса, онда оның теңдеуі $\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$

болады. Мұны y, z өстері айналасынан айналдыруға болады. Сонда z өсінен айландырсақ $y^2 = b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$, $x^2 = 0$ болатындықтан

$$x^2 + y^2 = b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right),\quad \frac{x^2+y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (19-14в)$$

болады.

Егер бұл эллипсті у өсінен айналдырсақ

$$\frac{x^2+z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (19-14г)$$

г) Осы сияқты Оху жазықтығында жатқан эллипсті х, у өстері айналдыруға болады. Бұл кезде эллипс теңдеуі $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$ болады. Сонда у өсінен айналса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1 \qquad (19-14д)$$

х өсінен айналса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \qquad (19-14е)$$

(19 –14 а, б, в, г, д, е) айналу эллипсоидтың теңдеулері.

<u>6–мысал.</u> Oxz жазықтығында жатқан гипербола берілсін. Онда оның теңдеуі $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$ болады.

а) Осы гиперболаны жорымал өсі $z-$тен айналдырайық. Ол үшін х пен у – ты z арқылы тауып, квадраттап қосу керек. Сонда $x^2 = a^2\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)$, $y^2 = 0$ болады да

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (19-15a)$$

б) Осы гиперболаны нақты х өсінен айналдырайық, онда $z^2 = c^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)$, $y^2 = 0$ болады да $z^2 + y^2 = c^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)$ болады. Бұдан

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$ немесе

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (19-15б).$$

в) Гипербола $Oyz-$те жатса теңдеу $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, x=0,$ $Oxy-$те жатса $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$ $y=0$ болады да бет теңдеуі

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (19-15в)$$

($z-$тен айналғанда) болады.

$$-\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (19-15г)$$

(х тан айналғанда) болады.

г) Осы сияқты Оху жазықтықта жатқан гиперболаның теңдеуі $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$ болатындықтан Оу-тен айналғандағы бет теңдеуі

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1 \qquad (19-15д)$$

Ох тан айналғандағы бет теңдеуі

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1 \qquad (19-15е)$$

(19 – 15 а, б, в, г, д, е) айналу гиперболоид теңдеулері.

7–мысал. а) Oyz жазықтығында жатқан парабола берілсін. Онда оның теңдеуі $\begin{cases}y^2=2pz\\ x=0\end{cases}$ болады. Осы параболаны Oz өсінен айналдырғандағы бет теңдеуін табу үшін х, у – ты z арқылы тауып, квадраттап қосу керек. Сонда

$$x^2+y^2=2pz \qquad (19-16а)$$

іздеген бет теңдеуі болады.

б) Егер парабола Oxz жазықтықта жатса теңдеуі $\begin{cases}x^2=2pz\\ y=0\end{cases}$ болатындықтан z өсінен айналғандағы бет

$$x^2+y^2=2pz \qquad (19-16б)$$

в) Егер парабола Оху жазықтығында жатса $\begin{cases}y^2=2px\\ z=0\end{cases}$ болар еді. Мұның х өсінен айналуынан шыққан бет теңдеуі

$$y^2+z^2=2px \qquad (19-16в)$$

болады.

г) Парабола $\begin{cases}z^2=2py\\ x=0\end{cases}$ болса, бет теңдеуі

$$x^2 + z^2 = 2py \qquad (19-16г)$$

болады. $\begin{cases} z^2 = 2px \\ y = 0 \end{cases}$ болса

$$z^2 + y^2 = 2px \qquad (19-16д)$$

айналу бетінің теңдеуі болады. Парабола $\begin{cases} x^2 = 2py \\ z = 0 \end{cases}$ болса мұның айналуынан шыққан бет теңдеуі

$$x^2 + z^2 = 2py \qquad (19-16е)$$

болады.

(19 – 16 а, б, в, г, д, е) теңдеулер айналу параболоидының теңдеулері делінеді.

8–мысал. Oxz жазықтығында шеңбер берілсін. Онда оның теңдеуі $\begin{cases} x^2 + z^2 = r^2 \\ y = 0 \end{cases}$ болады.

Мұны z өсінен айналдырса бет теңдеуі $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ болады. х өсінен айналдырса бет теңдеуі тағы да $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ болады. Егер шеңбер Oyz жазықтығында жатса шеңбер теңдеуі $\begin{cases} y^2 + z^2 = r^2 \\ x = 0 \end{cases}$ болады. Бұл кезде шеңберді у өсінен айналдырса да, z өсінен айналдырса да $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ болып шығады.

Ал, бұлар сфераның теңдеуі. Демек шеңбер өзінің өсінен айналғанда әруақытта сфера шығады екен.

19.6 Канондық теңдеумен берілген беттер

Тікбұрышты координата жүйесінде теңдеуі мынадай болатын беттерді былайша айтады.

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (19-20)$ Эллипсоид (98–сурет).
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (19-21)$ Жорымал эллипсоид.
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (19-22)$ Бір қуысты гиперболоид (99–сурет).
4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (19-23)$ Екі қуысты гиперболоид (100–сурет).
5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (19-24)$ Конустық бет (101–сурет).
6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (19-25)$ Жорымал конус.
7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad (19-26)$ Эллипстік параболоид (102–сурет).
8. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad (19-27)$ Гиперболалық параболоид (103–сурет).

9. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(19-28)$ Эллипстік цилиндр (104–сурет).

10. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(19-29)$ Гиперболалық цилиндр (105–сурет).

11. $y^2=2px$ $(19-30)$ Параболалық цилиндр (106–сурет).

Бұл теңдеулерді көрсетілген беттердің канондық теңдеулері дейді. Енді осы теңдеулерді зерттеу арқылы көрсетілген беттердің қасиеттерін, формаларын анықтайық. Ол үшін бұл беттерді координата жазықтықтары Oxy (теңдеуі $z=0$), Oxz (теңдеуі $y=0$), Oyz(теңдеуі $x=0$) – тер мен және оларға параллель (теңдеулері $z=h,\ \ x=h,\ \ z=h$) жазықтықтар мен қиып, қимада пайда болған фигураларды зерттейміз. Беттерді жеке–жеке қарастырайық.

1. Эллипсоид

Теңдеуі мынадай $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(19-20)$

1–ден, теңдеуді координата басының O(0,0,0) нүктенің координаталары қанағаттандырмайды. Сондықтан эллипсоид координата басынан өтпейтін фигура (дене) болады.

2–ден, бұл теңдеуге айнымалылар x,y,z тек екі дәрежеде енген. Сондықтан $M(x,y,z)$ нүкте бұл бетте жатса, онда координаталары $(x,y,-z)$, $(x,-y,z)$, $(-x,y,z)$, $(x,-y,-z)$, $(-x,y,-z)$, $(-x,-y,z)$, $(-x,-y,-z)$ болатын нүктелерде осы бетте жатады. Сондықтан эллипсоид координата өстері $Ox,Oy,Oz-$ке қарағанда, координата жазықтықтары $Oxy,Oxz,Oyz-$терге қарағанда және координата басы O(0,0,0) нүктеге қарағанда симметриялы болатын фигура болады.

Координата басы эллипсоидтың центрі делінеді (ол симметрия центрі болады), координата өстері эллипсоидтың өстері делінеді (ол өстерге қарағанда эллипсоид нүктелері симметриялы орналасады).

3–ден, эллипсоид абсцисса өсімен (оның теңдеуі $y=0,\ \ z=0$), ордината өсімен (теңдеуі $x=0,\ \ z=0$), апликата өсімен (теңдеуі $x=0,\ \ y=0$) екі нүктеде қиылысады. Өйткені $y=0,\ \ z=0$ болса (19–20) $x^2=a^2,\ \ x=\pm a$ болып шығады.

Сонымен x өсімен $A_1(a,0,0)$, $A_2(-a,0,0)$, y өсімен $B_1(0,b,0)$, $B_2(0,-b,0)$, z өсімен $C_1(0,0,c_1)$, $C_2(0,0,c_2)$ нүктелерде қиылысады. Ол нүктелерді эллипсоидтың төбелері дейді. $A_1A_2=2a,\ \ B_1B_2=2b,\ \ C_1C_2=2c$эллипсоидтың өстері, a,b,c жарты өстері делінеді.

4–ден, теңдеуден $\frac{x^2}{a^2}\le 1,\ \frac{y^2}{b^2}\le 1,\ \frac{z^2}{c^2}\le 1$ болатыны шығады (себебі үшеуінің қосындысы 1 болу керек). Бұдан $x^2\le a^2,\ \ y^2\le b^2,\ \ z^2\le c^2$, ал бұл $-a\le x\le a,\ \ -b\le y\le b,\ \ -c\le z\le c$ деген сөз.

Сондықтан эллипсоидтың барлық нүктелері қырлары $2a,\ 2b,\ 2c$ болатын тікбұрышты параллелепипедтің ішінде жатады. Демек эллипсоид шектелген фигура болады.

5–ден, эллипсоидты Оху жазықтыққа параллель $z=h$ жазықтықпен қиайық. Сонда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}$,

$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}=1 \quad (19-30)$ болып, қимада жарты өстері $a_1=\frac{a}{c}\sqrt{c^2-h^2}$, $b_1=\frac{b}{c}\sqrt{c^2-h^2}$ болатын эллипс шығады екен.

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1 \qquad (19-31)$$

$h-$тың шамасына сай мынадай жағдайлар болуы мүмкін.

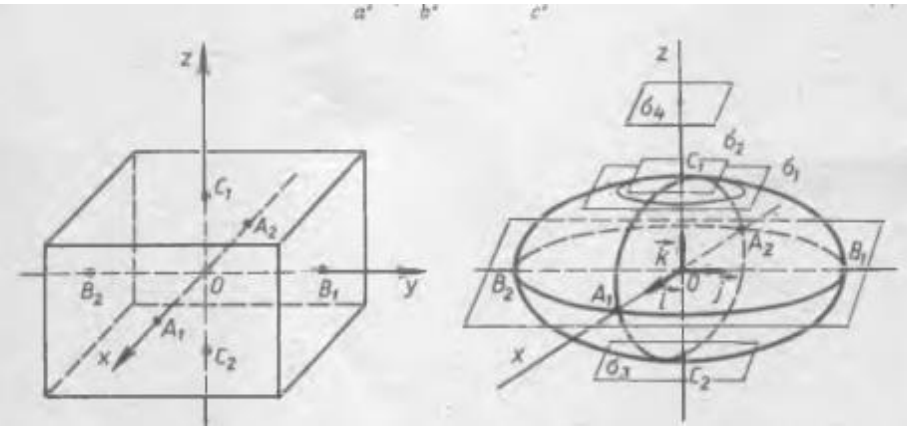
а) $h<C$, бұл кезде (19–31) эллипс болады, $h=0$ болса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипс шығады. h 0 – ден бастап С – ға дейін көбейсе, эллипс кішірейе береді.

б) $h=C$ болған кезде эллипс нүктеге айналады. Ал, бұл $z=h=C$ жазықтық эллипсоидпен бір нүктеде қиылысады, яғни жазықтық эллипсоидқа жанама болады деген сөз.

в) $h>0$ болса, онда (19–31) эллипс жорымал эллипс болады. Ал, бұл $z=h$ жазықтық эллипсоидпен қиылыспайды деген сөз.

6–дан, егер эллипсоидты Oxz, Oyz жазықтықтарымен және оларға параллель болатын $y=h$, $x=h$ жазықтықтармен қиса қимада тағы да эллипс шығады және h көбейген сайын ол эллипстер кішірейе береді, $h=a$, $h=b$ болғанда ол эллипс нүктеге айланады. Ал, $h>a$, $h>b$ болғанда $x=h$, $y=h$ жазықтық эллипсоидпен қиылыспайды.

Осыларды ескерсек эллипсоид формасы 98 – суреттегідей болады.



98-сурет

Ескерту: Эллипсоид теңдеуі $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ мен айналу эллипсоидтың теңдеуін $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (Oz өсінен айналғандағы бет теңдеуі). Салыстырсақ екеуі де үш өсті болатынын, бірақ эллипсоидта үш өс үш түрлі болса, айналу эллипсоидта екі өс теңдей болатынын байқауға болады. Сондықтан эллипсті аз өсінен айналдырып, тегі болып шығатын өсті сәл сөзу немесе сығу арқылы эллипсоид алуға болады.

2. Бір қуысты гиперболоид

Теңдеуі $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (19-22)$. Осы теңдеуді талдайық.

1. Координата басының координаталары (0,0,0) бұл теңдеуді қанағаттандырмайды. Сондықтан бір қуысты гиперболоид координата басынан өтпейтін фигура болады.

2. Теңдеуге x, y, z тек жұп дәрежеде енетіндіктен $M(x,y,z)$ нүкте бір қуысты гиперболоидта жатса, онда оған координата басына қарағанда симметриялы болатын $M_1'(-x,-y,-z)$ нүкте де, координата жазықтықтарына қарағанда симметриялы болатын $(-x,y,z)$, $(x,-y,z)$, $(x,y,-z)$ нүктелерде, координата өсіне қарағандағы симметриялы $(-x,-y,z)$, $(-x,y,-z)$, $(x,-y,-z)$ нүктелерде осы бір қуысты гиперболоидта жатады. Демек бір қуысты гиперболоид координата басына, координата өстеріне, координата жазықтықтарына қарағанда симметриялы орналасқан фигура болады. Бұл симметрия центрі, өсі болатын координата басы мен координата өстерін бір қуысты гиперболоидтың центрі, өстері дейді.

3. Бір қуысты гиперболоид Ох өсімен екі нүктеде қиылысады, $y=0,\ \ z=0$ десек $x=\pm a$ болады. Ол нүктелерді $A_1(a,0,0),\ \ A_2(-a,0,0)$ дейік. Сол сияқты Оу өсімен (теңдеуі $x=0,\ \ z=0$) екі $B_1(0,b,0),\ \ B_2(0,-b,0)$ нүктеде қиылысады, ал Oz өсімен (оның теңдеуі $x=0,\ \ y=0$) қиылыспайды. Өйткені $x=0,\ \ y=0$ болғанда $z^2=-C^2,\ \ z=\sqrt{-C^2}$ болып жорымал сан шығады. Ох, Оу өстерін бір қуысты гиперболоидтың нақты, $Oz-$ті жорымал өсі дейді, a,b,c жарты өстері делінеді, $A(\pm a,0,0),\ \ B(0,\pm b,0)$ нүктелері төбелері делінеді.

4. Теңдеуден $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geq 1$ болатыны шығады. Себебі бұдан $\frac{x^2}{c^2}-$ алғанда 1 шығуы керек. Олай болса бір қуысты гиперболоидтың нүктелер $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипстен тыс орналасады. Бұл эллипсті бір қуысты гиперболоидтың жұтқыншақтық эллипсі дейді.

5. Бір қуысты гиперболоидты $z=h$ жазықтықпен қисақ қимада $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ \ \frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}=1$ болатын эллипс шығады, мұндағы

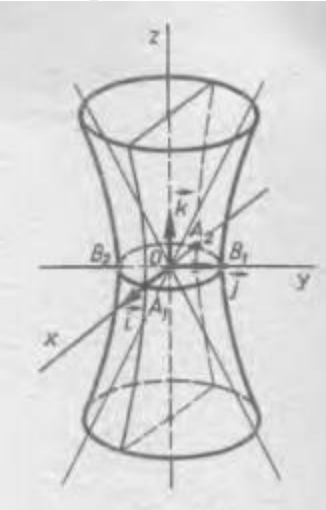
$h=0$ болғанда эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ болып жұтқыншақтық эллипске айналады, ал h 0 – ден бастап арта бастаса эллипс ұлғая береді.

6. Бір қуысты гиперболоидты $x=h$ жазықтықпен қисақ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$

$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2}$, $\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)}-\frac{z^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)}=1$ болатын гипербола шығады.

Егер $|h|<a$ болса бұл жорымал өсі Oz – ке параллель болатын, ал $|h|>a$ болса жорымал өсі Оу – ке параллель болатын гипербола болады.

Егер бір қуысты гиперболоидты $y=h$ жазықтықпен қисақ қимада жорымал өсі не Oz – ке Ох – қа параллель болатын гипербола шығады.



99-сурет

Осыларды ескерсек бір қуысты гиперболоидтың формасы 99–суреттегідей болады.

3. Екі қуысты гиперболоид

Теңдеу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad (19-23).$

1–ден, координата басынан өтпейді. Өйткені О(0,0,0) теңдеуді қанағаттандырмайды.

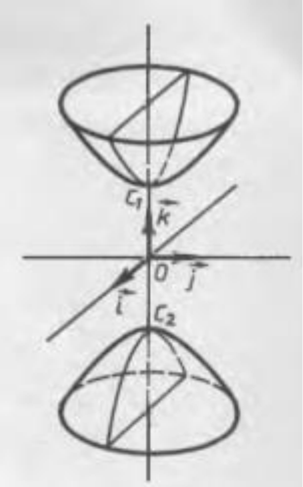
2–ден, x, y, z теңдеуге жұп дәрежеде енетіндіктен екі қуысты гиперболоид координата басына, координата өстеріне, координата жазықтықтарына қарағанда симметриялы орналасқан фигура болады. Координата басы екі қуысты гиперболоидтың центрі, координата өстері өсі болады.

3–ден, екі қуысты гиперболоидта х өсімен (теңдеуі $y=0,\ z=0$), у өсімен (теңдеуі $x=0,\ z=0$) қиылыспайды, ал Oz өсін екі нүктеде $C_1(0{,}0{,}0),\ C_2(0{,}0{,}c)$ қиып өтеді. Ол нүктелер екі қуысты гиперболоидтың төбелері делінеді, a, b, c жарты өстері делінеді.

4–ден, теңдеуден $\frac{z^2}{c^2}\geq 1$ болатыны көрінеді, себебі $\frac{z^2}{c^2}-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=1$ болу керек. Бұдан $|z|\geq|c|$. Демек $z=C,\ z=-C$ параллель жазықтықтарының арасында екі қуысты гиперболоидтың нүктелері болмайды. $z=C$ жазықтықтың үстінгі, $z=-C$ жазықтықтың астынғы жағына орналасады. Сондықтан екі қуысты гиперболоид бір – бірінен ажыратылған екі бөліктен тұрады.

5–ден, егер екі қуысты гиперболоидты Оху жазықтығына параллель $z=h$ жазықтықпен қисақ, қимада $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$, $\frac{x^2}{a^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}=1$ болатын эллипс шығады. Ол эллипс $h=c$ болғанда нүктеге айланады, ал С дан артқан сайын эллипс ұлғая береді.

6–дан, егер екі гиперболоидты $x=h$, $y=h$ жазықтықтармен қиса, қимада нақты өсі Oz –ке параллель болатын гипербола шығады.



100-сурет

Осыларды ескерсек екі қуысты гиперболоидтың формасы 100–суреттегідей болады.

4. Эллипстік параболоид

Теңдеуі $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ $(19-26)$. Теңдеуін зерттейік.

1. Координата басының координаталары O(0,0,0) бұл теңдеуді қанағаттандырады. Сондықтан эллипстік параболоид координата басынан өтеді.

2. Теңдеуге х пен у жұп, z – тың дәрежеде енгендіктен эллипстік параболоид Oz өсіне, Oxz, Oyz координата жазықтықтарына қарағанда симметриялы болып орналасатын фигура. Oz өсі ол беттің өсі болады.

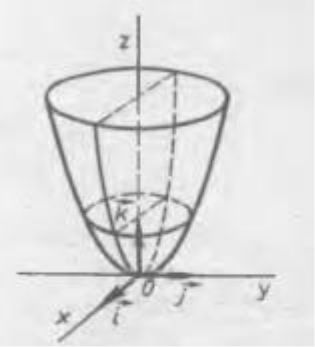
3. Эллипстік параболоид барлық өстерімен координата басында қиылысады. $x=0$, $y=0$ болса, $z=0$ болады. $x=0$, $z=0$ болса, $y=0$ болады. $y=0$, $z=0$ болса, $x=0$ болады. Координата басын эллипстік параболоидтың төбесі дейді.

4. Теңдеуден $z\geq 0$ екені шығады. Себебі х пен у жұп дәрежеде болғандықтан теңдіктің сол жағы оң сан, сондықтан оң жағы да оң сан болуы керек. Сондықтан эллипсоидтың барлық нүктесі Оху жазықтық үстінгі жарты кеңістігінде жатады және ол жазықтыққа координата басында жатады.

5. Егер эллипстік параболоидты $z=h$ жазықтықпен қиса, қимада

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2h$, $\frac{x^2}{2a^2h}+\frac{y^2}{2b^2h}=1$ эллипс шығады және $h-$ артқан сайын эллипсте үлкейе береді.

6. Егер эллипстік гиперболоидты $x=h,\quad y=h$ жазықтықтармен қисақ, қимада $y^2=2b^2z-\frac{h^2}{a^2},\quad x^2=2a^2z-\frac{h^2}{b^2}$ түрдегі парабола шығады, z өсі оның өсі болады.



102-сурет

Осыларды ескерсек эллипстік параболоид теңдеуі 102–суреттегідей болады.

5. Гиперболалық параболоид

Теңдеуі $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z\quad(19-27)$. Теңдеуін зерттейміз.

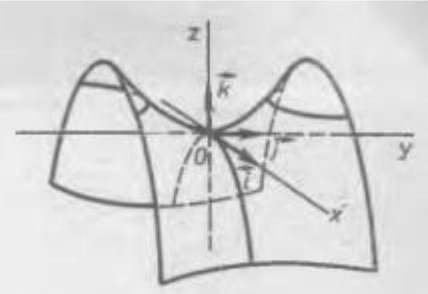
1. Гиперболалық параболоид координата басынан өтеді. Себебі O(0,0,0) нүкте координаталары (19 – 27) теңдеуді қанағаттандырады.

2. Oz өсіне, $Oxz,\ Oyz$ жазықтығына симметриялы болады. Өйткені x, y квадрат, z бір дәрежеде енген.

3. Гиперболалық параболоид барлық өстермен координата басында қиылысады. Оны Гиперболалық параболоидтың төбесі дейді.

4. Гиперболалық параболоид Oxy жазықтығымен, яғни $z=0$ жазықтықпен екі түзу бойымен қиылысады $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2\cdot 0$ деп $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=0$ шығады.

Гиперболалық параболоид Oyz жазықтығымен, яғни $x=0$ жазықтығымен және Oxz жазықтығымен, яғни $y=0$ жазықтығымен, сәйкесінше, $y^2=-2b^2z,\quad x^2=2a^2z$ парабола бойымен, ал $z=h$ жазықтығымен гипербола бойымен қиылысады.



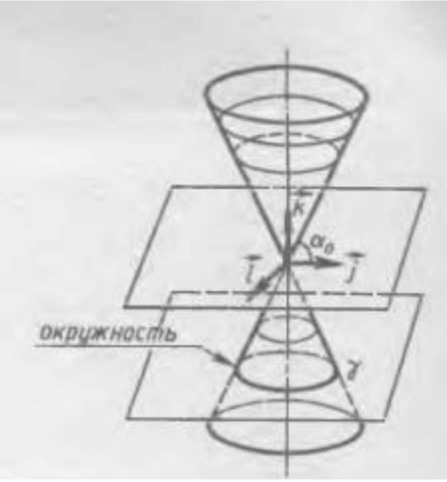
103-сурет

Осыларды ескерсек Гиперболалық параболоидтың формасы 103–суреттегідей болады.

6. Конус

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ теңдеумен төбесі координата басында жататын конус анықталады. Ол конусты $z=h$ жазықтықпен қиса, қимада $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}$, $\frac{x^2}{\frac{a^2h^2}{c^2}}+\frac{y^2}{\frac{b^2h^2}{c^2}}=1$ эллипс шығады және бұл эллипс h ұлғайған сайын үлкейе береді. $h=0$ болса нүктеге айланады.

Егер конусты $x=h,\ y=h$ жазықтықтармен қиса, қимада гипербола шығады. Бұл жағдайда $h=0$ болса координата басында қиылысатын түзулер шығады.

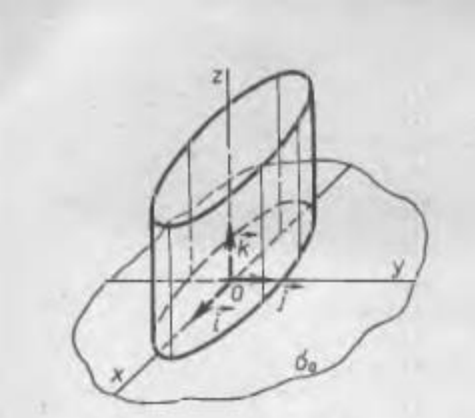


101-сурет

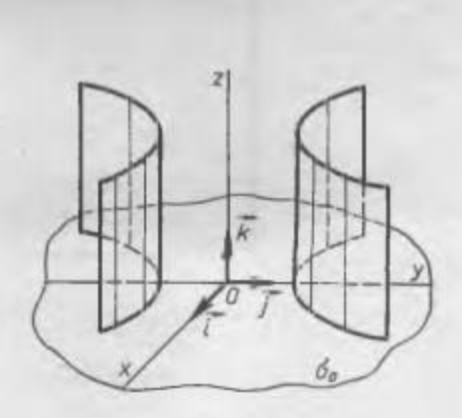
Осыларды ескерсек конус формасы 101 – суреттегідей болады.

7. Цилиндр

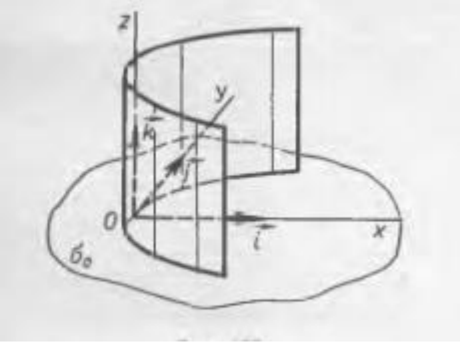
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1,\ y^2=2px$ формулалармен сәйкесінше табанында эллипс, гипербола, парабола жататын жасаушысы z өсіне параллель болатын бет анықталады. Ол беттерді сәйкесінше эллипстік, гиперболалық, параболалық цилиндр дейді. Олардың формасы 104,105,106–суреттерде берілген.



104-сурет



105-сурет



106-сурет

19.7 Екінші ретті беттің түзу сызықты жасаушысы

Түзу сызықтың қозғалуынан шығатын бетті түзу сызықты бет дейді, ал ол бетте толығымен жататын түзуді оның түзу сызықты жасаушысы дейді. Мысалы параллелепипед жақтары, конус, цилиндр түзу сызықты беттерге жатады.

Көзге басқаша көрінгенмен бір қуысты гиперболоид, гиперболалық параболоидтарда түзу сызықты бет болады.

а) Бір қуысты гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (19-22)$ берілсін. Оны былайша жазып, жіктейік. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$, $\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)$

Мынадай теңдеулер жүйесін қарастырайық

$$\begin{cases}\beta\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \alpha\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{cases}\quad(19-31)\qquad \begin{cases}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{cases}\quad(19-32)$$

Бұл жүйенің екеуіде жазықтықтардың қиылысуынан шыққан түзудің теңдеуі. Оның үстіне әр жүйедегі теңдеулерді мүшелеп көбейтсе (яғни оң жағын оң жағына, сол жағын сол жағына көбейтсе) (19–22) теңдеу шығады.

Сондықтан координаталары (19–31), (19–32) теңдеулерді қанағаттандыратын нүкте координаталары (19–22) теңдеуді де қанағаттандырады. Демек (19–31), (19–32) теңдеулермен анықталатын түзулер (19–22) теңдеумен анықталатын бетте, яғни бір қуысты гиперболоидта толығымен жатады.

Параметр α мен $\beta-$ға түрліше мән беріп бетте жататын әртүрлі үзулерді аламыз. Сөйтіп, бір қуысты гиперболоид түзу сызықты жасаушылардан тұрады (19–31), (19–32) сол түзу сияқты жасаушының теңдеулері. Бұл (19–31) және (19–32) теңдеумен түрлі анықталатын түзулер өзара қиылысады. Сөйтіп бір қуысты гиперболоид екі түрлі түзу сызықты жасаушылардан тұрады. Беттің әр нүктесінен әр түрден бір – бір ғана түзу өтеді. Бір түлі түзулері өзара қиылыспайды.

б) Гиперболалық параболоид теңдеуі $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \quad (19-27)$ еді. Оны $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2z$ деп жазуға болады.

Мынадай теңдеулер жүйесін қарастырайық

$$\begin{cases}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2\beta z\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=\alpha\end{cases} \quad (19-33) \qquad \begin{cases}\alpha\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2\beta z\\ \beta\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\alpha\end{cases} \quad (19-34)$$

Мұның екеуіде түзудің теңдеуі. Әр жүйе теңдеулерін мүшелеп көбейтсе (19–27) шығады. Сондықтан бұл түзулер теңдеуін координаталары қанағаттандыратын нүктелер (19–27) бетте жатады. Демек бұл түзулер гиперболалық параболоидта толығымен жатады және әрбір нүктесінен (19–33) теңдеумен анықталатын бір түзу, (19–34) пен анықталатын бір түзу өтеді. Сөйтіп гиперболалық параболоид беті екі түзулер түрінен жасалады. Оларды ол беттің сызықты жасаушылары дейді (19–33) пен (19–34) сол түзу сызықты жасаушылар түрінің теңдеулері. Әр түрлі жеке түзулері бұл теңдеудегі α мен $\beta-$ға нақты бір мән беру нәтижесінде шығады.

19.8 Беттің жанамалары мен нормасы

$F(x,y,z)=0$бет берілсін. Егер осы беттің $M(x,y,z)$ нүктедегі дербес туындылары $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ үшеуіде қатарынан 0–ге тең болса немесе үш туындының ең болмағанда біреуі бұл нүктеде болмаса, онда $M(x,y,z)$ беттің ерекше нүктесі делінеді, ал үш туындының үшеуі де бар болса және олардың ең болмағанда біреуі нөлге тең болмаса онда $M(x,y,z)$ беттің кәдімгі нүктесі делінеді.

Беттің кәдімгі нүктесінен өтетін және бетте жататын сызыққа сол нүктеден жүргізілген жанама түзу бетке сол нүктеден жүргізілген жанама түзу делінеді.

Математикалық талдау курсында беттің кәдімгі нүктесінен бетке жүргізілген жанама түзулер жиыны бір жазықтықта жататынын дәлелденеді. Ол жазықтық бетке сол нүктеде жүргізілген жанама жазықтық делінеді, ал ол жазықтыққа сол нүктеден перпендикуляр етіп жүргізілген түзу беттің сол нүктедегі нормасы делінеді.

Егер беттің кәдімгі $M(x,y,z)$ нүктесінен өтетін, бетте жататын сызық теңдеуі $x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t),\ \ z=g(t)$ болып параметрлік түрде берілсе, онда бетке сол нүктеден жүргізілген жанама түзу теңдеуі

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}} \qquad (19-35)$$

болады.

Ал, ол нүктеден жүргізілген жанама жазықтық теңдеуі

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0 \qquad (19-36)$$

болады, ал нормал түзу теңдеуі мынадай болады.

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad (19-37)$$

Егер бет $z=f(x,y)$ немесе $z-f(x,y)=0$ түрде берілсе жанама жазықтық теңдеуі мына түрде болады

$$Z-z=\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y) \qquad (19-38)$$

Ал, нормал теңдеуі бұл кезде мынадай болады

$$\frac{X-x}{-\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{Y-y}{-\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{Z-z}{1} \qquad (19-39)$$

Осы формулаларды пайдалана отырып канондық теңдеу мен берілген беттердің жанама жазықтықтарының теңдеуін қорытып шығарайық.

1. Сфера жанамасы. $x^2+y^2+z^2=r^2$ сфера берілсін. Бұл теңдеуді $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-r^2$ түрде жазып, x,y,z арқылы дербес туындыларын тапсақ $\frac{\partial F}{\partial x}=2x,\ \ \frac{\partial F}{\partial y}=2y,\ \ \frac{\partial F}{\partial z}=2z$. Бұлардың $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктедегі мәндері $\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{M_0}=2x_0,\ \ \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{M_0}=2y_0,\ \ \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{M_0}=2z_0$. Сонда бұл нүктеден жүргізілген жанама жазықтық теңдеуі (19–36) бойынша

$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0$. Бұдан 2–ге қысқартып жақшаны ашсақ $x_0x-x_0^2+y_0y-y_0^2+z_0z-z_0^2=0$, $x_0x+y_0y+z_0z=x_0^2+y_0^2+z_0^2=r^2$. Сонымен сфераға жүргізілген жанама жазықтық теңдеуі мынадай болады екен.

$$x_0x+y_0y+z_0z=r^2 \qquad (19-40)$$

Ал, $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктеден жүргізілген бет нормасы бұл жазықтыққа перпендикуляр болғандықтан оның бағыттаушы векторы $\vec{N}$ үшін $\vec{N}=\{x_0,y_0,z_0\}$ векторды алуға болады.

Сонда нормал теңдеуі мынадай болады

$$\frac{x-x_0}{x_0}=\frac{y-y_0}{y_0}=\frac{z-z_0}{z_0} \qquad (19-40a)$$

Ықшамдасақ $\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}$ болып шығады.

2. Эллипсоид жанамасы. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Эллипсоид теңдеуі берілсін $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1.$ Бұдан $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2x}{a^2},\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2y}{b^2},\ \frac{\partial F}{\partial z}=\frac{2z}{c^2};$ $\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{M_0}=\frac{2x_0}{a^2},\ \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{M_0}=\frac{2y_0}{b^2},\ \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{M_0}=\frac{2z_0}{c^2}.$

Сонда, жанама жазықтың теңдеуі $\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0).$ Бұдан $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1.$ Демек эллипсоидқа оның M_0 нүктесінен жүргізілген жазықтығының теңдеуі

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1 \qquad (19-41)$$

Ал, нормалдың теңдеуі

$$\frac{x-x_0}{\frac{x_0}{a^2}}=\frac{y-y_0}{\frac{y_0}{b^2}}=\frac{z-z_0}{\frac{z_0}{c^2}} \qquad (19-41a)$$

3. Дәл осы сияқты бір қуысты гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ берілсе, $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2x}{a^2},\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2y}{b^2},\ \frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{2z}{c^2}$ болады да $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктеден жүргізілген жанама жазықытық теңдеуі мынадай болады.

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)-\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0,\ \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-\frac{z_0z}{c^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1$$

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-\frac{z_0z}{c^2}=1 \qquad (19-42)$$

4. Екі қуысты гиперболоид жанамасы. Теңдеуі $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$. Туынды алсақ $\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{M_0}=\frac{2x_0}{a^2},\ \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{M_0}=\frac{2y_0}{b^2},\ \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{M_0}=-\frac{2z_0}{c^2}.$ Сонда жанама теңдеуі $\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)-\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0,\ \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-\frac{z_0z}{c^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=-1.$

Сонымен екі қуысты гиперболоидтың жанама жазықтығының теңдеуі

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-\frac{z_0z}{c^2}=-1 \qquad (19-43)$$

5. Эллипстік параболоид жанамасы. Теңдеуі $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$. Мұны былай жазуға болады $z=\frac{x^2}{2a^2}+\frac{y^2}{2b^2}$.

Демек бет $z=f(x,y)$ теңдеумен берілген. Сондықтан бұл бетке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктеден өтетін жанама жазықтық теңдеуі (19–38) формула бойынша табылады $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{2a^2}=\frac{x}{a^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{2b^2}=\frac{y}{b^2}$, $z-z_0=\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)$, бұдан $z-z_0=\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)$,

$$z-z_0=\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-2z_0,\quad z+z_0=\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}\qquad (19-44)$$

6. Гиперболалық параболоид жанамасы. Теңдеуі $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$. Бұдан $z=\frac{x^2}{2a^2}-\frac{y^2}{2b^2}$. Сонда $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{2a^2}=\frac{x}{a^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y}{2b^2}=-\frac{y}{b^2}$. Сонда жанама жазықтық теңдеуі $z-z_0=\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)$, $z-z_0=\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)$, $z-z_0=\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-2z_0$

$$z+z_0=\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}\qquad (19-45)$$

7. Конустың жанамасы. Теңдеуі $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2x}{a^2}$, $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2y}{b^2}$, $\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{2z}{c^2}$. Теңдеу $\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)-\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0$,

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-\frac{z_0z}{c^2}-\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}\right)=0,\quad \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-\frac{z_0z}{c^2}=0\qquad (19-46)$$

9–мысал. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$ эллипсоидты координата жазықтықтары және оларға параллель жазықтықтармен қиғанда шығатын қиманы табыңдар.

Шешуі. Қиманы табу үшін координата жазықтықтарының теңдеуі мен бет теңдеуін біріктіріп шешу керек. Оху жазықтығымен қиайық, мұның теңдеуі $z=0$. $\begin{cases}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1\\ z=0\end{cases}$ шешсек $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

Сонымен эллипсоидты Оху жазықтығымен қиса қимада $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ эллипс шығады екен. Оның жарты өстері $a=4$, $b=3$, центрі координата басы болады.

Егер эллипсоидты Oxz (теңдеуі $y=0$), Oyz (теңдеуі $x=0$) жазықтықтармен қисақ қимада $\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$, $\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$ эллипстер шығады.

Егер эллипсоидты Оху жазықтыққа параллель $z=h$ жазықтықпен қисақ қимада $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1-\frac{h^2}{4}$, $\frac{x^2}{16\left(1-\frac{h^2}{4}\right)}+\frac{y^2}{9\left(1-\frac{h^2}{4}\right)}=1$ эллипсі шығады. Эллипс нақты эллипс болу үшін $h<2$ болу керек. $h=2$ болса эллипс $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=0$ болып нүктеге айланады.

Егер эллипсоидты Oyz жазықтығымен (теңдеуі $x=0$) қисақ, қимада $\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$ эллипс шығады.

Егер эллипсоидты Oxz жазықтығымен (теңдеуі $y=0$) қисақ, қимада $\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$ эллипс шығады.

<u>10–мысал.</u> $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=-1$екі қуысты гиперболоид пен $\frac{x}{4}=-\frac{y}{3}=\frac{z+2}{4}$ түзудің қиылысу нүктелерін табу керек.

Шешуі. у пен $z-$ті х арқылы түзу теңдеуінен тапсақ $y=-\frac{3}{4}x,\quad z=x-2$ болады. Мұны бет теңдеуіне қойсақ $\frac{x^2}{16}+\frac{\frac{9}{16}x^2}{9}-\frac{x^2-4x+4}{4}=-1$, $\frac{x^2}{8}-\frac{x^2-4x+4}{4}=-1$, $x^2-2x^2+8x-8+8=0,\ x^2-8x=0$, $x_1=0,\quad x_2=8$. $x_1=0$ десек $y_1=0,\quad z_1=-2$. Демек $M_1(0{,}0{,}-2)$ қиылысу нүктесі болады. $x_2=8$ десек $y_2=-6,\quad z_2=6$. Демек $M_2(8{,}-6{,}6)$ нүктеде қиылысу нүктесі болады. Сонымен бет пен түзу екі нүктеде қиылысады екен.

<u>11–мысал.</u> $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$ бір қуысты гиперболоидтың $6x+4y+3z-17=0$ жазықтыққа параллель болатын түзу сызықты жасаушысының теңдеуі қандай болады.

Бет теңдеуінен $\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1-\frac{y^2}{9}$, $\left(\frac{x}{2}+\frac{z}{4}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{z}{4}\right)=\left(1+\frac{y}{3}\right)\left(1-\frac{y}{3}\right)$

Сонда бір қуысты гиперболоидтың екі түзу сызықты жасаушылар үйірінің біріншісін $\begin{cases} k\left(\frac{x}{2}+\frac{z}{4}\right)=1+\frac{y}{3} \\ \frac{x}{2}-\frac{z}{4}=k\left(1-\frac{y}{3}\right) \end{cases}$ екіншісін $\begin{cases} k\left(\frac{x}{2}+\frac{z}{4}\right)=1-\frac{y}{3} \\ \frac{x}{2}-\frac{z}{4}=k\left(1+\frac{y}{3}\right) \end{cases}$ деп жазуға болады. Бұлардан $\begin{cases} \frac{k}{2}x-\frac{1}{3}y+\frac{k}{.4}z=1 \\ \frac{1}{2}x+\frac{k}{3}y-\frac{1}{4}z=k \end{cases}$ және $\begin{cases} \frac{k}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{k}{.4}z=1 \\ \frac{1}{2}x-\frac{k}{3}y-\frac{1}{4}z=k \end{cases}$ Бұл түзу сызықты жасаушылардың біріншісінің бағыттаушы векторын $\vec{a}$, екіншісінің бағыттаушы векторын $\vec{b}$ десек

$$\vec{a}=\left\{\begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{k}{4} \\ \frac{k}{3} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{k}{4} & \frac{k}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{k}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{k}{2} & \frac{k}{3} \end{vmatrix}\right\}=\left\{\frac{1-k^2}{12},\ \frac{k}{4},\ \frac{1+k^2}{6}\right\}$$

$$\vec{b}=\left\{\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & \frac{k}{4}\\ -\frac{k}{3} & -\frac{1}{4}\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}\frac{k}{4} & \frac{k}{2}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}\frac{k}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & -\frac{k}{3}\end{vmatrix}\right\}=\left\{\frac{-1+k^2}{12},\ \frac{k}{4},\ \frac{-1-k^2}{6}\right\}$$

Міне осы векторлар берілген $6x+4y+3z-17=0$ жазықтыққа параллель болу керек. Параллель болу белгісі бойынша $\frac{1-k^2}{12}\cdot 6+\frac{k}{4}\cdot 4+\frac{k^2+1}{6}\cdot 3=0$ және $\frac{-1+k^2}{12}\cdot 6+\frac{k}{4}\cdot 4+\frac{-k^2-1}{6}\cdot 3=0$ болу керек.

Бұлардан $1-k^2+2k+k^2+1=0$ және $-1+k^2+2k-k^2 11=0$ $k-$мәнінің орнына қойып әр үйірге кіретін түзу сызықты жасаушаның теңдеуін анықтаймыз.

1 – үйір теңдеуінен $\begin{cases}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{.4}z=1\\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{4}z=-1\end{cases}$ 2 – үйірден $\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{.4}z=1\\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{4}z=1\end{cases}$

Мұны канондық түрге келтірейік $k-$ның мәнін қойсақ бұл түзулердің бағыттаушы векторлары $\vec{a}=\left\{0,-\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right\}$, $\vec{b}=\left\{0,\frac{1}{4},-\frac{1}{3}\right\}$.

Жасаушылар теңдеулеріндегі $z=0$ десек

1 – нен $\begin{cases}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=1\\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=1\end{cases}$ 2 – нен $\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=1\\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=1\end{cases}$ бұлардан

$y=0,\quad x=-2$ $\qquad y=0,\quad x=2$

Сонымен 1–үйірге жататын түзу бойында $M_1(-2{,}0{,}0)$ 2–үйірге жататын түзу бойында (2,0,0) нүкте жатады екен. Сондықтан ол түзудің канондық теңдеулері $\frac{x+2}{0}=\frac{y}{-\frac{1}{4}}=\frac{z}{\frac{1}{3}}$ және $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{\frac{1}{4}}=\frac{z}{-\frac{1}{3}}$

$$\frac{x+2}{0}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{4} \quad \text{және} \quad \frac{x-2}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-4}.$$

12–мысал. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=6z$ гиперболалық параболоидты $y+6=0$ жазықтықпен қиғандағы қиманы анықтаңдар. Ол үшін $y=-6$ны бет теңдеуіне қоямыз $\frac{x^2}{5}-\frac{36}{4}=6z$, $\frac{x^2}{5}=6z+9$, $x^2=30z+45$. Бұл парабола теңдеуі. Сондықтан іздеген қима парабола болады екен. Мұны былай жазуға болады $x^2=30\left(z+\frac{3}{2}\right)=2\cdot 15\left(z+\frac{3}{2}\right)$. Сондықтан $(x-0)^2=2\cdot 15\left(z+\frac{3}{2}\right)$ деп мұның төбесі $\left(0,-\frac{3}{2}\right)$. Шарт бойынша $y=-6$. Сонымен парабола параметрі $p=15$. Төбесі

$\left(0,-6,-\frac{3}{2}\right)$ нүктеде жатады.

Қайталау сұрақтары мен есептер

1. Бет деген не және оның теңдеуі қандай.
2. Қандай бет алгебралық бет делінеді.
3. Беттің реті деген не.
4. Екінші ретті бет деген не, оның теңдеуі қандай болады.
5. Бет анықталған координата жүйесін түрлендіру арқылы трансценденттік бетті алгебралық бетке және керісінше айналдыруға болады ма.
6. Беттің ретін координата жүйесі арқылы өзгертуге болады ма, жоқ па.
7. Цилиндрлік бет деген не, оның теңдеуін құру жолы қандай.
8. Конустық бет және оның теңдеуін құру жолы.
9. Айналу беті және оның теңдеуін құру жолы.
10. Эллипстің аз өстерінен айналу беті – айналу эллипсоиды теңдеуі.
11. Гиперболаның аз өстерінен айналу беті – айналу гиперболоиды теңдеуі.
12. Параболаның өстерден айналуынан шығатын айналу параболоиды беттері.
13. Эллипсоид және оның қасиеттері.
14. Бір қуысты гиперболоид және оның қасиеттері.
15. Екі қуысты гиперболоид және оның қасиеттері.
16. Эллипстік параболоид және оның қасиеттері.
17. Гиперболалық параболоид және оның қасиеттері.
18. Конус және оның қасиеттері.
19. Эллипстік, гиперболалық, параболалық цилиндрлер және оның теңдеулері.
20. Шеңбердің диаметрден (өстен) айналуынан шығатын бет.
21. Сфера және оның теңдеуі.
22. Түзу сызықтық жасаушы деген не.
23. Бір қуысты гиперболоидтың түзу сызықты жасаушысы.
24. Гиперболалық параболоидтың түзу сызықты жасаушысы.
25. Канондық теңдеумен берілген беттің жанамасы, нормасы деген не. Эллипсоид, гиперболоид, параболоид, сфералардың бойында жатқан нүктелерден оған жүргізілген жанама жазықтық пен нормалдың теңдеулері.
26. $M_1(1,2,-3)$, $M_2(3,2,1)$ нүктелерден бірдей қашықтықта жатқан нүктелердің жиыны қандай фигура болады, теңдеуін анықтаңдар.
27. Мынн теңдеулермен қандай сызықтар анықталады

а) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

г) $\begin{cases} x - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

д) $\begin{cases} x + 2 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases}$

е) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ x = 0 \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 20 \\ x - 2 = 0 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25 \\ x^2+y^2+z^2=16 \end{cases}$ шеңберді *Oxy, Oxz, Oyz* координата жазықтықтарына проекциялайтын цилиндрді табыңдар.

29. $M(6{,}2{,}8)$ нүктеден өтетін және толығымен $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$ бетте жататын түзу теңдеуі қандай болады.

30. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{4}=-1$ бетке $M_0(-6{,}2{,}6)$ нүктеде жанасатын жазықтық теңдеуі қандай болады.

31. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=z$ эллипстік параболоидаға $x-y-2z=0$ жазықтыққа параллель болатын жанама жазықтықтың теңдеуі қандай болады.

32. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}=0$ конус пен $\frac{x-5}{5}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-6}{3}$ түзуінің қиылысу нүктелерін табыңдар.

33. $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{6}$ түзудің Ox өсінен айналғанда шығатын бет теңдеуі қандай болады.

§20. Екінші реттік беттің жалпы теориясына қысқаша шолу

20.1 Екінші ретті беттің жалпы теңдеуі

Декарттық координата жүйесінде координаталары екі дәрежелі үш белгісізді теңдеуді қанағаттандыратын кеңістік нүктелерінің жиынын екінші ретті бет дейді. Екінші ретті беттің жалпы теңдеуін оқу – үйрену жұмысына қолайлы болу үшін, әдетте былайша жазады.

$$2F(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+\cdots+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \qquad (20-1)$$

Мұнда $a_{ij}=a_{ji}$ болады. Өйткені мұның екеуіде i және j айнымалылар көбейтіліп тұрған x_ix_j мүшенің коэффициенті дегенді білдіреді. (20–1) теңдеуден x,y,z арқылы алынған туындыларды табайық: $2F'_x=2a_{11}x+2a_{12}y+2a_{13}z+2a_{14}$, $2F'_y=2a_{21}x+2a_{22}y+2a_{23}z+2a_{24}$,

$2F'_z=2a_{31}x+2a_{32}y+2a_{33}z+2a_{34}$.

Егер $F'_x(x,y,z)=F_1(x,y,z)$, $F'_y(x,y,z)=F_2(x,y,z)$, $F'_z(x,y,z)=F_3(x,y,z)$ ал, $a_{14}x+a_{24}y+a_{34}z+a_{44}=F_y(x,y,z)$деп белгілесек, 2–ретті беттің (20–1) жалпы теңдеуін былайша да жазуға болады.

$$2F(x,y,z)=F_1(x,y,z)\cdot x+F_2(x,y,z)\cdot y+F_3(x,y,z)\cdot z+F_4(x,y,z)=0 \qquad 20-1a$$

Жалпы теңдеудегі $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$ қосылғышты жалпы теңдеудің аға мүшелер табы, ал $a_{14}x+a_{24}y+a_{34}z+a_{44}$ қосылғышты теңдеудің сызықтық бөлігі дейді.

20.2 Екінші реттегі беттерді жалпы теңдеуін зерттеп, канондық түрге келтіру.

Екінші ретті беттің жалпы теңдеуі келесі түрде беріледі:
$F(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{13}xz+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0$ (1)
(1) Теңдеу тік бұрышты декарттық координаттар жүйесінде берілген деп алсақ, онда координаталар жүйесін паралель көшіріп бұру нәтижесінде келесі өрнектер инварианттар болады, яғни мәні өзгермейді.

$$I_1=a_{11}+a_{22}+a_{33},\ I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ K_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{vmatrix}.$$

Мұндағы анықтауыштар симметриялы, яғни $a_{ij} = a_{ji}$.
Бұру бойынша ғана тұрақты болатын келесі анықтауыштарды семивarианттар деп атаймыз.

$$K_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & a \end{vmatrix}$$

Егер $I_3=0,\ K_4=0$ болса, онда K_3 – инвариант болады.
Егер $I_3=0,\ K_4=0,\ I_2=0,\ K_3=0$ болса, онда K_2 – инвариант болады.

1) Егер $I_3 \neq 0$ болса, онда координаттар жүйесін бұру және паралель көшіру арқылы (1) теңдеу келесі түрге келтіреді:

   $\lambda,X^2+\lambda_2Y^2+\lambda_3Z^2+\frac{K_4}{I_3}=0$ (2)

   Мұндағы $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$- келесі характеристикалық теңдеудің түбірлері:

$$\begin{vmatrix} a_{11-\lambda} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22-\lambda} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33-\lambda} \end{vmatrix}=0 \quad (3)$$

   Немесе $\lambda^3- I_1\,\lambda^2+I_2\,\lambda-I_3=0$ (3)

   Характеристикалық теңдеудің түбірлерінің таңбалары және инварианттардың мәндеріне байланысты келесі жағдайларды қарастыруға болады:

1. Егер $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$- таңбалас болып, ал $\frac{K_4}{I_3}$ – таңбасы оларға қарама қарсы

болса, онда (1) теңдеу эллипсондтың теңдеу болады. / λ_1/ ≤ / λ_2/ ≤ / λ_3/ деп алғанда.

(2) Теңдеу келесі түрде жазылады: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Мұндағы a=$\sqrt{\frac{-K_4}{\lambda_1 I_3}}$, b = $\sqrt{\frac{-K_4}{\lambda_2 I_3}}$, C = $\sqrt{\frac{-K_4}{\lambda_3 I_3}}$, C = $\sqrt{\frac{-K_4}{\lambda_3 I_3}}$.

2. Егер λ_1, λ_2, λ_3 және $\frac{K_4}{I_3}$ – таңбалас болғанда, (2) теңдеуді $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$

(5) түрінде жазуға болады, мұндағы a=$\sqrt{\frac{K_4}{\lambda_1 I_3}}$, b= $\sqrt{\frac{K_4}{\lambda_2 I_3}}$, c=$\sqrt{\frac{K_4}{\lambda_3 I_3}}$.

Бұл (5) теңдеу жорамал эллипсондтың теідеуін анықтайды.

3. Егер λ_1, λ_2, λ_3, таңбалас болып $K_4=0$, онда (1) теңдеу жорамал конусты анықтайды / λ_1/ ≤ / λ_2/ ≤ / λ_3/ деп алғанда (2) теңдеу келесі түрге келеді.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (6)$$

Мұндағы a=$\sqrt{\frac{1}{|\lambda_1|}}$, $b = \sqrt{\frac{1}{|\lambda_2|}}$, $c = \sqrt{\frac{1}{|\lambda_3|}}$, $a \geq b \geq c$екені белгілі.

4. Егер характеристикалық теңдеудің екі түбірі λ_1 және λ_2 таңбалас болып үшінші түбірі λ_3, $\frac{K_4}{I_3}$ – пен таңбалас болып λ_1 мен λ_2-лерге қарама қарсы таңбалы болса онда (1) теңдеу бір қуысты гиперболоидтың теңдеуін анықтайды. Оның канондық теңдеуі келесі түре келеді:

$$\frac{}{} + \frac{}{} - \frac{}{} = 1 \quad (7)$$

Мұндағы a=$\sqrt{-\frac{K_4}{\lambda_1 I_3}}$, b=$\sqrt{-\frac{K_4}{\lambda_2 I_3}}$, c=$\sqrt{\frac{K_4}{\lambda_3 I_3}}$

a ≥ b деп қарастырамыз

5. Егер λ_1 λ_2 және $\frac{K_4}{I_3}$ таңбалас болып, λ_3 оларға қарама қарсы болса, онда (2) теңдеуі келесі түрде жазуға болады:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \qquad (8)$$

Бұл екі қуысты гиперболлоидттық канондық теңдеуі .

6. Егер λ_1 және λ_2 таңбалас болып, λ_3 оларға қарама-қарсы таңбалы болса, ал K_4 =0 болғанда, онда (1) теңдеу конустың теңдеуін анықтайды. Канондық теңдеуі келесі түрге келтіріледі:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (9)$$

Мұндағы a^2=$\frac{1}{1/|\lambda_1|}$, b^2=$\frac{1}{1/|\lambda_2|}$, c=$\frac{1}{1/|\lambda_3|}$

II. Егер $I_3=0$, $K_4 \neq 0$ болса, онда координаталар жүйесін бұру және паралель көшіру арқылы екінші ретті беттің теңдеуі (1) келесідей түрге келтіруге болады:

$$\lambda, x^2 + \lambda_2 y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}\ z=0 \qquad (10)$$

мұндағы λ_1 және λ_2 нольге тең емес характеристикалық теңдеудің түбірлері.

7. Егер λ_1 және λ_2 таңбалас болса, онда (10) теңдеу эллиптикалық параболлоидтің теңдеуі болады. | λ_1|≤| λ_2| деп алсақ онда (10) теңдеуі келесі түрде жазуға болады:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \qquad (11)$$

Мұндағы p=± $\frac{1}{\lambda_1}\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}$, q=± $\frac{1}{\lambda_2}\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}$,

$p \geq q > 0$

8. Егер λ_1 мен λ_2 таңбалары қарама-қарсы болса, онда (10) теңдеу гиперболлоидтық параболлоидтың теңдеуі.

Егер $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$ деп алып -$\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}$ таңбасы теріс деп , алсақ онда (10) теңдеуді келесі түрде жазуға болады $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ (12)

Мұндағы p=$\frac{1}{\lambda_1}\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}$, q=$-\frac{1}{\lambda_1}\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}$

III. Егер $I_3=0$, $K_4=0$, $I_2 \neq 0$ болса, онда координаттар жүйесін бұру және паралель көшіру арқылы екінші реттің жалпы теңдеуі (1) келесі түрге келтіріледі:

$$\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2+\frac{K_3}{I_2}=0 \qquad (13)$$

Мұндағы λ_1 және λ_2 характеристикалық теңдеудің нольден өзгеше түбірлері.

9. Егер λ_1, λ_2 таңбалас және $\frac{K_3}{I_2}$ – мен таңбалары қарама-қарсы болса, онда (13) теңдеу Эллиппикалық келесі түрге келтіріледі:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (14)$$

мұндағы $a^2=-\frac{K_3}{\lambda_1 I_2}$, $b^2=-\frac{K_3}{\lambda_2 I_2}$, $a \geq b$

10. Егер λ_1, λ_2 және $\frac{K_3}{I_2}$ таңбалас болғанда (10) теңдеу келесі түрге келтіріледі

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1 \qquad (15)$$

Бұл жорамал эллипстік цилиндрдің теңдеуі. Мұндағы $a^2=\frac{K_3}{\lambda_1 I_2}$, $b^2=\frac{K_3}{\lambda_1 I_2}$. $a \geq b$

10. Егер λ_1, λ_2 және $\frac{K_3}{I_2}$ таңбалас болғанда (10) теңдеу келесі түрге келтіріледі.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1 \qquad (15)$$

Бұл жорамал эллипстік цилиндрдің теңдеуі.

Мұндағы $a^2=\frac{K_3}{\lambda_1 I_2}$, $b^2=\frac{K_3}{\lambda_1 I_2}$, $a \geq b$

11. Егер λ_1 мен λ_2 таңбалас болып $K_3=0$ болса, онда (10) екі жорамал қиылысатын жазықтардың теңдеуі болады.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \qquad (16)$$

Мұндағы $a^2=\frac{1}{|\lambda_1|}$, $b^2=\frac{1}{|\lambda_2|}$, Мұндағы $a \geq b$ деп қабылдаған

12. Егер λ_1 мен λ_2 таңбалары әр түрлі болып $K_3 \neq 0$ болса, онда (13) теңдеу келесі түрге келтіріледі.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (17)$$

Бұл гиперболалық цилиндрдің канондық теңдеуі.

Мұндағы $a^2=\frac{K_3}{\lambda_1 I_2}$, $b^2=\frac{K_3}{\lambda_2 I_2}$

13. Егер λ_1 мен λ_2 таңбалары әр түрлі болып $K_3=0$ болса, онда (13) теңдеу, екі өзара қиылысатын жазықтардың теңдеуіне келеді:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \qquad (18)$$

Мұндағы $a^2= \frac{1}{\lambda_1}$, $b^2=\frac{2}{\lambda_2}$

IV. Егер $I_3=0$, $K_4=0$, $I_2=0$, $K_3\neq 0$ болса онда екінші ретті беттің жалпы теңдеуі координаталар жүйесін бұру және паралель көшіру арқылы келесі түрге келесі түрге келтіріледі:

$$\lambda_1 x^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}\, y = 0 \qquad (19)$$

Мұндағы $\lambda_1=I_1$ характеристикалық теңдеудің нольден өзгеше жалғыз түбірі.

14. Бұл жағдайда (19) теңдеуді келесі түрде жазуға болады.

$$X^2=2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1^3}}\, y \qquad (20)$$

Бұл параболаның цилиндрдің теңдеуі. Осы параболалық цилиндрдің оның жасаушысына перпендикуляр жазықтықпен қимасы параболла болады. Параболланың параметрі келесі формуламен анықталады $p=\sqrt{-\frac{K_3}{I_1^3}}$

V. Егер $I_3=0$, $R_4=0$, $I_2=0$, $K_3=0$ болса, онда екінші ретті беттің жалпы теңдеуң (1), координаттар жүйесін бұру және паралель көшіру арқылы келесі түрге келтіріледі:

$\lambda_1 x^2+\frac{K_2}{I} = 0$ немесе $I_1 X2+\frac{K_2}{I_1} = 0$, немесе $X^2=\frac{K_2}{I_1^2}$ (21)

15. Егер $K_2<0$ онда (21) теңдеу екі паралель жазықтардың теңдеуі болады $\frac{K_3}{I_1^2} = -a^2$ деп алғанда (21) теңдеуді келесі түрге келтірсе болады $x^2-a^2=0$ (22)

16. Егер $K_2>0$ болса онда (21) теңдеу екі жорамал паралель жазықтардың теңдеуін анықтайды. $\frac{K_2}{I_1^2} = a^2$ – деп белгілегенде келесі канондық теңдеуге келеміз: $x^2+a^2=0$ (23)

17. Егер $K_2=0$ болса, онда (21) теңдеу келесідей түрге келеді $X^2=0$

Бұл екі беттесетін жазықтардың теңдеуі. Егер характеристикалық теңдеудің түбірлері еселі (беттесетін) болса, онда мұндай бет айналу беті болады.

Жалпы теңдеу мен берілген екінші ретті беттің теңдеуін канондық түрге келтіргеннең кейін, жаңа координаттар жүйесінің бас нүктесінің ескі координаттар жүйесіндегі координаттарын яғни $O'(x_0, y_0, z_0)$ табамыз.

Жаңа координаттық осьтерің бағыттаушы векторларының координаттары l_i, m_i,n_i келесі теңдеулер жүйесінен табылады:

$$\begin{cases}(a_n-\lambda_i)l_i+a_{12}m_i+a_{13}n_i=0\\ a_{21}l_i+(a_{22}-\lambda_i)m_i+a_{23}n_i=0\\ a_{31}l_i+a_{32}m_i+(a_{33}-\lambda_i)n_i=0\end{cases} \qquad (24)$$

Мұндағы λ_i – характеристикалық теңдеудің түбірлері $i=1;2;3$.

Егер екінші ретті беттің центрі бар болса (жалғыз емес болсада), онда жаңа координат жүйесінің бас нүктесінің координаттары $O'(x_0,y_0, z_0)$ келесі теңдеулер жүйесінен табылады:

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_1=0\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_2=0\\ a_{31}x+a_{33}y+a_{33}z+a_3=0\end{cases} \qquad (25)$$

Сонымен, инварианттарының көмегімен екінші ретті беттің жалпы теңдеуін (1) зерттеп, канондық түрге келтіргенде, біз екінші ретті беттерді 5 топқа бөліп қарастыруға болатының көрдік: I_0. Егер $I_2\neq 0$, онда центрі бар беттер, ондай беттер алтау екен: эллипсоид; жорамал эллипсоид; жорамал конус; бір қуысты гиперболлоид;екі қуысты гиперболоид; конус. Бұлардың біреуі нақты бет ретінде берілмейді (жорамал эллипс), ал біреуі жалғыз нүкте ретінде ғана қарастыруға болады. (жорамал конус).

I. $I_3\neq 0$

1. Үш осьті Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a>b>c)$$

Үш осьті Эллипсоидтың теңдеуі (25) теңдеулер жүйесіне анықталады, ал үлкен осінің (O΄X) бағыттаушы векторысы координаттары (24) теңдеулер жүйесінең табылады. Мұндағы | λ |- ең кіші мәні (O΄Y) осінің бағыттаушы векторының |3| теңдеулер жүйесінен табылады | λ |-орташа мәні.

2. Егер (1) теңдеу жорамал конус (нүктені) анықтаса, онда оның координаттары (25) теңдеулер жүйесінең анықталады.
3. Бір қуысты гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad a>b.$$

Бір қуысты гиперболоидтың центрі (25) теңдеулер жүйесінен анықталады. $\lambda_1 * \lambda_2>0$, $|\lambda_1|<|\lambda_2|$, λ_3 – характеристикалық теңдеудің үшінші түбірі болсын.

4. Екі қуысты гиперболоид.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (a>b)$$

Мұндағы $\lambda_1 * \lambda_2>0$ $|\lambda_1|<|\lambda_2|$ болып центрі мен координаттар осьтерінің бағыттаушы векторлары (25), (24) теңдеулер жүйесінең анықталады.

5. Конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (a>b)$

Алдынғы жағдайдағыдай анықталады.

II. Егер I_3=0, $K_4\neq$ 0 болғанда (1) теңдеу центрі жоқ екі түрлі бетті анықтауы мүмкін: Эллиптикалық параболлоид және гиперболлалық параболлоид. Осы беттердің төбелерінің координаттарын табайық:

6. Эллиптикалық параболлоид

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \qquad (11)$$

Осындай канондық теңдеуге келтірілгенде эллиптикалық параболлоидтің төбесі жаңа координаттар жүйесінің басы болады. Ойыстық бағытындағы векторы келесі түрде болады:

$\bar{P}=\{l_1A_1, l_2A_2, l_3A_3\}$

Мұндағы A_1= - $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{32} & a_{33} & a_3 \end{vmatrix}$, A_2 = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{33} & a_3 \end{vmatrix}$, A_3= - $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{33} & a_3 \end{vmatrix}$,

яғни K_4 анықтауышының a_1, a_2, a_3 элементтері бойынша алынған алгебралық толықтауыштары. Егер $|\lambda_1|<|\lambda_2|$ болса, онда эллиптикалық параболлоидтің осінің бағыттаушы векторы (24) теңдеулер жүйесінен анықталады, мұнда біз $\lambda = \lambda_1$ деп аламыз. O΄Y осінің бағыттаушы векторының координаттары осы теңдеулерінің жүйесінен (24) $\lambda = \lambda_2$ болғанда анықталады. Эллиптикалық параболлоидтың төбесінің координаттары келесі теңдеулер жүйесінен табылады

$$\begin{cases} \frac{a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_1}{A_1}=\frac{a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_2}{A_2}=\frac{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_3}{A_3} \\ F(x,y,z)=0 \end{cases}$$

(26)

7. Гиперболлалық параболлоид болған жағдайда

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$$

Бұл теңдеуден параболлоидттық төбесі координаттар басында жататынын көреміз. Гиперболлалық параболлоидтың осінің бағыттаушы векторы, параболлоидтың O΄X Z жазықтығымен басты қиылысуының ойыстық жағына бағытталған вектор, ол үлкен параметрі P арқылы анықталған вектор болады

$\{I_1, A_1, I_{1,}A_2, I_1, A_3\}$

Мұндағы A_1, A_2, A_3 – тер K_4 анықтаушының a_1, a_2, a_3 бойынша алгебралық толықтауыштары. $|\lambda_2|$ < $|\lambda_2|$ деп алсақ O΄X осінің бағыты (24) теңдеулер жүйесінен $\lambda = \lambda_2$ деп алғандағы векторлармен анықталады. Төбесінің координаттары (26) теңдеулер жүйесінен табылады. Егер λ_1 = -λ_2 болса, онда гиперболалық параболлоидтың теңдеуі келесі түрге келеді: x^2 - y^2 = 2pz

Бұл жағдайда парболлоидтың O΄X Zжәне O΄Y Z жазықтықтармен қиылысуында пайда болған параболлоидтың параметрлері бірдей болады. Параболоидтың осінің бағыты $\bar{p}=\{A_1, A_2, A_3\}$ векторымен анықталады.

III. Егер $I_1=0$, $K_4=0$ болса, онда (1) теңдеу симметрия осьтері бар келесі беттерді анықтайды. Эллиптикалық цилиндр; жорамал эллиптикалық цилиндр; екі қиылысатын жорамал жазықтар; гиперболалық цилиндр; қиылысатын екі жазықтық. Бұлардан жорамал Эллиптикалық цилиндр нақты сандар арқылы анықталмайды, ал қиылысатын екі жорамал жазықтық тек түзу болады. Эллиптикалық және гиперболалық цилиндрлердің орналасуын анықтаймыз.

8. Эллиптикалық цилиндр.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Эллиптикалық цилиндрдің орналасуын анықтау үшін $(a \neq b)$ оның осімен, осіне перпендикуляр қималарының кіші және үлкен остерінің бағыттаушы векторларын білу керек. Цилиндрдің осі (25) теңдеуден анықталады. Бұл жағдайда оның екі сызықты тәуелсіз шешімдері ғана алынады. Егер λ_1, λ_2 – характеристикалық теңдеудің түбірлері болса, онда $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$ болады. Осьтік қимасындағы кіші және үлкен остерінің бағыттары (24) теңдеуден λ_1 және λ_2 үшін табылады. O´X осінің бағыты $\lambda=\lambda_1$, ал O´Y осінің бағыты $\lambda=\lambda_2$ болады. $\lambda_1 = \lambda_2$ болса $x^2+y^2=a^2$ дөңгелек цилиндр болып негізгі осін табылғаны жеткілікті.

9. Гиперболалық цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Бұл жағдайда эллиптикалық цилиндр сияқты гиперболалық цилиндрдің центрлік осімен бас бағыттарындағы осьтері $\lambda=\lambda_1$ және $\lambda=\lambda_2$ үшін табылады.

Бұл жағдайда эллиптикалық цилиндр сияқты гиперболалық цилиндрдің центрлік осімен бас бағыттардағы осьтері. $\lambda=\lambda_1$ және $\lambda=\lambda_2$ үшін табылады.

IV. 10. Параболалық цилиндр

$$x^2 = 2py$$

Параболалық цилиндрдің орналасуын анықтау үшін келесі жағдайларды білу жеткілікті:

1) Цилиндрдің жасаушысына паралель симметрия жазықтығын;
2) Симметрия жазықтығына перпендикуляр болатын цилиндрдің жанама жазықтығын.
3) Цилиндрдің ойыстық жағына бағытталған, осы жанама жазықтыққа перпендикуляр векторды.

Параболалық цилиндрдің жалпы теңдеуін келесі түрге келтіріп жазуға болады:

$(ax+by+cz)^2+2b_1x+2b_2y+2b_3z+c_4=0$ немесе $(ax+by+cz+m)^2-[2(ma-b_1)x+2(mb-b_2)y+(mc-b_3)z+m^2-b_4]=0$

Осыдан келесі теңдеулермен берілген жазықтықтар перпендикуляр болатындай етіп m-санын тандап аламыз.

$ax+by+cz+m=0,$

$(2ma-b_1)x+(2mb-b_2)y+(mc-b_3)z^2+m^2-b_4=0$ осылардың перпендикулярлық шартынан $a(ma-b_1)+b(mb+b_2)+c(mc-b_3)=0$ осыдан $m = \frac{b_1a+b_2b+b_3c}{a^2+b^2+c^2}$

Бұл жағдайда (m-нің осы мәнінде) цилиндрдің жасаушысына паралель жазықтық симметрия жазықтығына болып оның теңдеуі.

$(2ma-b_1)x+(2mb-b_2)y+(mc-b_3)z+m^2-b_4=0$

Цилиндрдің осы жазықтыққа перпендикуляр жанама жазаықтығының теңдеуі

$(2ma-b_1)x+(2mb-b_2)y+(mc-b_3)z+m^2-b_4=0$

$\{am-b_1,\ bm-b_2\ cm-b_3\}$ векторы осы жанама жазықтыққа перпендикуляр болып оның ойыстық жағына бағытталады.

V. $I_3=0$, $K_4=0$, $I_2=0$, $K_3=0$ болған жағдайдағы екінші ретті беттердің теңдеулері қарапайым болады.

Егер координаттар басы беттің центрі болса, онда оның жалпы теңдеуінде белгісіздердің бірінші дәрежелері болмайды, яғни жалпы теңдеуі

$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a=0$ түрінде болады.

Мысалы, координаттар басы конустың төбесі болса, оның теңдеуі келесі түрде болады.

$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz=0.$

Беттің (x_0,y_0,z_0) нүктесіндегі жанама жазықтығының теңдеуі келесі түрде жазылады:

$F'_x(x_0\,y_0\,z_0)\ x+F'_y(x_0,\ y_0,\ z_0)y+F'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)\ z+a_1\,x_0+a_2\,y_0+a_3\,z_0+a=0$

Мысалдар.

1- мысал. Тік бұрыштың координаталар жүйесінде келесі теңдеумен берілген беттің түрін және орналасуын анықтаныздар.

$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz – 2x + 6y + 2z = 0.$

Шешуі:

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -36\ \neq 0$$

Беттің жалғыз центрі бар болады.

$$K_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 36 > 0$$

$I_1=1+5+1=7$ $\quad I_1 * I_3 = -36*7 < 0$, демек берілген бет бір қуысты гиперболоид

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристикалық теңдеу құрып шешеміз

$\lambda^3 - 7\lambda^2+36=0$

$\lambda_1=3,\ \lambda_2=6,\ \lambda_3 = -2.$

Осыдан келтірілген теңдеуі

$3x^2+6y^2-2z^2-1=0$

немесе $\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}-\frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$

Беттің центрін келесі теідеулер жүйесінен анықтаймыз:

$$\begin{cases} x+y+3z-1=0 \\ x+5y+z+3=0 \\ 3x+y+z+1=0 \end{cases}$$

осыдан $C\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ беттің центрі жаңа осьтерге паралель векторларды табамыз O´X осіне паралель $\overline{l_1}=\{l_1, m_1, n_1\}$ векторын

$$\begin{cases} (1-3)l_1+m_1+3n_1=0 \\ l_1+(5-3)m_1+n_1=0 \\ 3l_1+m_1+(1-3)n_1=0 \end{cases}$$

Теңдеулер жүйесінен анықтаймыз.

$\bar{l}_1=\{1,-1,1\}$ осы сияқты $\bar{l}_2=\{1,2,1\}$ $\bar{l}_3=\{1,0,-1\}$ векторлары сәйкесінше O´Y және O´Z осьтеріне паралель.

2- <u>мысал</u>. Тік бұрышты координаталар жүйесінде келесі теңдеумен берілген беттің түрін және орналасуын анықтаныздар.

$2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2xz+2yz-4x+6y-2z+3=0$

Шешуі:

$$I_3=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0,\ K_4=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}=-125<0$$

Бұл теңдеу эллиптикалық параболоидты анықтайды.

$$I_2=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=10,\ I_1=2+2+3=7.$$

Характеристикалық теңдеуі.

$\lambda^3-7\lambda^2+10\lambda=0$,

түбірлері $\lambda_1=2$, $\lambda_2=5$, $\lambda_3=0$

Беттің келтірілген теідеуі.

$2x^2+5y^2-2\sqrt{-\frac{-125}{10}z=0}$ немесе $\frac{x^2}{\frac{5}{2\sqrt{2}}}+\frac{y^2}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=2z,\ p=\frac{5}{2\sqrt{2}},\ q=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ойыстық жағына бағытталған параболоидтың осінің бағыттаушы векторы $7\left\{-\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right\}=7\{25,-25,0\}\downarrow\downarrow$ $\{1,-1,0\}$

Жаңа O´X осінің бағыттаушы векторының бағыттаушы векторының координаттары l_1, m_1, n_1 келесі теңдеулер жүйесінен анықталады.

$$\begin{cases}(2-2)l_1+2m_1+n_1=0\\ 2l_1+(2-2)m_1+n_1=0\\ l_1+m_1+(3-2)n_1=0\end{cases}$$

Осыдан l_1=1, m_1=1, n_1=-2. Демек $\bar{e}_1=\{1,1,-2\}$ O´X осінің бағыттаушы векторы. Осы сияқты

$$\begin{cases}(2-5)l_2+2m_2+n_2=0\\ 2l_2+(2-5)_{m2}+n_2=0\\ l_2+m_2+(3-5)n_2=0\end{cases}$$

Теңдеулер жүйесінен O´Y осьінің бағыттаушы векторын $\bar{l}_2=\{1,1,1\}$ табамыз.

Параболоидтың төбесінің координаталарын келесі теңдеулер жүйесінен анықтаймыз.

$$\begin{cases}\frac{2x+2y+z-2}{25}=\frac{2x+2y+z+3}{-25}=\frac{x+y+3z-1}{0}\\ 2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2xz+2yz-4x+6y-27+3=0\end{cases}$$

немесе $\begin{cases}2x+2y+z-2=-(2x+2y+z+3)\\ x+y+3z-1\\ 2x^2+2y^2+4xy+2xz+2yz-4x+6y-27+3=0,\end{cases}$

яғни O´$\left(-\frac{1}{40},-\frac{19}{40},\frac{1}{2}\right)$

<u>3-мысал</u>. Тік бұрышты координаттар жүйесіндегі теңдеуі арқылы берілген беттің түрін және орналасуын табыңыздар.

$5x^2+2y^2+5z^2-4xy-2xz-4yz-+10x-4y-2z+3=0$

Шешуі:

$$I_3=\begin{vmatrix}5&-2&-1\\-2&2&-2\\-1&-2&5\end{vmatrix}=0 \qquad K_4=\begin{vmatrix}5&-2&-1&5\\-2&2&-2&-2\\-1&-2&5&-1\\5&-2&-1&4\end{vmatrix}$$

$$I_2=\begin{vmatrix}5&-2\\-2&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&-2\\-2&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&-2\\-2&5\end{vmatrix}=36$$

$$K_3=\begin{vmatrix}5&-2&5\\-2&2&-2\\5&-2&4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5&-1&5\\-1&5&-1\\5&-1&4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&-2&-2\\-2&5&-1\\-2&-1&4\end{vmatrix}=-36$$

$I_1=5+2+5=12$

$I_3=K_4=0$, $I_2>0$, $I_1*K_3<0$ болғандықтан бұл теңдеу эллиптикалық цилиндрді анықтайды.

Характеристикалық теңдеуі

$I_3 = K_4 = 0$, $I_2 > 0$, $I_1 * K_3 < 0$ болғандықтан бұл теңдеу эллиптикалық цилиндрді анықтайды.

Характеристикалық теңдеуі

$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 36\lambda = 0$

түбірлері $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 6$, $\lambda_3 = 0$

Канондық теңдеуі $6x^2+6y^2-1=0$ немесе $x^2+y^2=\frac{1}{6}$

Бұдан беттің дөңгелек цилиндр болатын, радиусы $\frac{1}{\sqrt{6}}$ екенін табамыз.

Цилиндрдің осі келесі теңдеулер жүйесіндегі алғашқы екі теңдеуі арқылы анықталады.

$$\begin{cases} 5x - 2y - x + 5 = 0 \\ -2x + 2y - 2z - 2 = 0 \\ -x - 2y + 5z - 1 = 0 \end{cases}$$

4-мысал. Тік бұрышты координаталар жүйесінде берілген теңдеуі бойын берілген беттің түрін және орналасуын анықтаңыздар.

Шешуі:

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad K_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$x^2+y^2+4z^2+2xy+4xz+4yz-6z+1=0$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$K_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -18$$

$I_1 = 1 + 1 + 4 = 6$

Бұл теңдеу параболлалық цилиндрді анықтайды.

Келтірілген теңдеуі

$6x^2 - 2\sqrt{-\frac{-18}{0}}y = 0$ немесе $x^2 = \frac{y}{\sqrt{3}}$

Жасаушысына перпендикуляр жазықтықпен цилиндрдің қимасының параметрі $p=\frac{1}{2\sqrt{3}}$

Орналасуын анықтау үшін келесі теңдеуді қарастырамыз $(x+y+2z+m)^2 - [2mx+2my+2(2m+3)z+1]=0$ $x+y+2z+m=0$, $2mx+2my+2(2m+3)+1=0$ жазықтықтарының перпендикулярлық белгісімен табамыз.

$1 * + 1 * m + 2 (2m + 3) = 0$, $m = -1$

Сонымен жасаушысына паралель симметрия жазықтығының теңдеуі $x + y + 2z - 1 = 0$

Осы симметрия жазықтығына перпендикуляр жанама жазықтығының теңдеуі

$-2x - 2y + 2z + 1 = 0$

Осыдан цилиндрдің ойыстық жағына бағытталған жанама перпендикуляр векторды табамыз.

$\{-2,-2,2\} \downarrow\downarrow \{-1,-1,1\}$

5-мысал. Тік бұрышты координаталар жүйесінде берілген теңдеуі бойынша беттің түрі мен орналасуын анықтаныздар.

$y^2 + 2xy + 4xz + 2yz - 4x - 2y = 0$

Шешуі: Есептеп табамыз I_3=0, K_4=0,

$$I_2=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -6 < 0,\ K_3 = 0$$

I_1=0+1+0=1 >0, яғни бұл теңдеу екі қиылысатын жазықтықтардың теңдеуі.

Бұл жазықтықтардың теңдеуін табу үшін жалпы теңдеуін келесідей түрілендіреміз.

$$y^2+2xy+4xz+2yz-4x–2y=y^2+2(x+y-1)y+4xz-4x=y^2+2(x+z-1)y+(x+z-1)^2-(x+z-1)^2-4xzy-4x=(x+y+z-1)^2-x^2+2xz-2x-z^2+2z-1=(x+y+z-1)^2-(x-z+1)^2=(2x+y)(y+2z-2)=0$$

Осыдан бұл жазықтықтардың теңдеулері $2x+y=0, y+2z-2=0$.

Жаттығулар

Келесі теңдеулермен берілген беттердің түрін және орналасуын табыңыздар.

1. $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z=0$
2. $2x^2+y^2+2z-2xy+2yz+4x-2y=0$
3. $x^2+y^2+4z^2+2xy+4xz+4yz-6z+1=0$
4. $4x^2+6y^2+z^2-12xy-6yz+4xz+4x-6y+2z-5=0$
5. $7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+182+30=0$
6. $2x^2+2y^25z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0$
7. $x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz-14x-4y+14z+16=0$
8. $2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2xz+2yz-4x+6y-2z+3=0$

Жауаптары

1. Бір қуысты гиперболлоид. Центрі $(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ жаңа координаттар жүйесінің бірлік векторлары $\bar{l}_1 = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$, $\bar{l}_2 = \left\{\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$, $\bar{l}_3 = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$

2. Эллипстік цилиндр. Симметрия осінің теңдеуі $x=t$, $y=2+2t$, $z=-1-t$. O´X және O´Y остерінің бірлік векторлары $\bar{l}_1=\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ $\bar{l}_2=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$
3. Параболалық цилиндр $6x^2-2\sqrt{3}y=0$.
4. Қос паралель жазықтар $2x-3y+z=-1\pm\sqrt{6}$
5. Эллипсоид. Центрі (1,2,-1), $\bar{l}_1=\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right\}$ $\bar{l}_2=\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right\}$ $\bar{l}_3=\left\{\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\}$
6. Екі қуысты гиперболлоид. Центрі $(0,1,-\frac{2}{5})$ $\bar{l}_1=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right\}$, $\bar{l}_2=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right\}$, $\bar{l}_1=\{0,0,1\}$
7. Айналу конусы $x^2+y^2-2z^2=0$. Төбесі (1,1,-1). Осіне паралель вектор $\bar{l}=\{2,1,-2\}$
8. Элиипстік параболлоид. Төбесі $\left(-\frac{1}{40},-\frac{19}{40},\frac{1}{2}\right)$ Ойыстық жағына бағытталған парболлоидтің осінің бірлік векторы $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right\}$. Басты осьтері бойынша паралель қималарының векторлары $\{1,1,2\}$ және $\{1,1,1\}$.

VII тарау. Көп өлшемді кеңістіктер.

Екі , үш өлшемді аналитикалық геометрия теориясы векторлар теориясына сүйеніп құрылады. Осы сияқты көп өлшемді геометрия теориясы көп өлшемді векторлық кеңістік теориясына сүйене отырып жасалады.

Көп өлшемді векторлық кеңістік теориясы алгебра курсында қарастырылады және оның үш өлшемді кеңістіктен өзгешелігі аксиоматикалық жолмен құрылады.

Бұл тарауда көп өлшемді кеңістік теориясына шолу жасалып, кеңістіктегі геометрияда қарастырылмақ.

§ 21. Көп өлшемді векторлық кеңістік.

21.1 Векторлық кеңістік аксиомалары.

Қандай да бір элементтер жиыны V және нақты сандар жиыны R берілген. V жиынының элементтерін не болса да вектор деп атайық.

V жиында екі амал : векторды векторға қосу және векторды санға көбейту амалдары анықталған болсын. Ол амалдар төмендегі талаптар тобын (аксиомалар тобының талаптарын) қанағаттандыратын болсын.

1-топ. Векторларды қосу аксиомалары.

1.1 $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ векторлар үшін $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ болсын.

1.2 $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V$ векторлар үшін $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ болсын.

1.3$\forall \vec{a} \in V$ векторлар үшін V жиында $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ болатын $\vec{0}$ элемент болсын. Ол элементті -V ның нөлдік векторы дейді.

1.4 $\forall \vec{a} \in V$ вектор үшін V жиында $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\left(-\vec{a}\right)+\vec{a}=\vec{0}$ болатын $\left(-\vec{a}\right)$ элемент болсын.Ол элементті $\vec{a}$ -ға қарама-қарсы вектор дейді.

2- топ. Векторларды санға көбейту аксиомалары.

2.1 $\forall \vec{a} \in V$ вектор үшін $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ болсын.

2.2 $\forall \vec{a} \in V$ вектормен $\forall \alpha, \beta \in R$ нақты сандар үшін $\alpha\left(\beta\cdot\vec{a}\right)=(\alpha\cdot\beta)\vec{a}$ болсын.

2.3 $\forall \vec{a} \in V$ вектормен $\forall \alpha, \beta \in R$ нақты сандар үшін $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ болсын.

2.4 $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V$ векторлар мен $\alpha \in R$ нақты саны үшін $\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ болсын.

Осы айтылған 1-1,2,3,4, 2-1,2,3,4 топ аксиомалары талаптарын қанағаттандыратын V жиын нақты сандар өрсінде анықталған нақты векторлық кеңістік немесе жәй ғана векторлық кеңістік делінеді. Ал, келтірілген 8 аксиома (талап) ол кеңістіктің аксиомалары делінеді.

Тек осы 8 аксиомаға сүйене отырып 1- 3,4 аксиомаларда келтірілген $\vec{0},\left(-\vec{a}\right)$ элементтерден V жиында жалғыз болатынын және мына теңдіктерден $-\left(-\vec{a}\right)=\vec{a}$, $-1\cdot\vec{a}=-\vec{a}$, $0\cdot\vec{a}=0$, $\alpha\cdot\vec{0}=\vec{0}$ дұрыстығын , соңымен қатар $\forall\,\vec{a},\vec{b}$ векторлар үшін $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$ болатын бір ғана $\vec{x}$ вектордың болатындығын дәлелдеуге болады. Бұл $\vec{x}$ вектордың $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларынан айырымы деп атап, былайша $\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$ жазатын боламыз.Осы 8 аксиомаға сүйеніп векторлардың сызықтық тәуелділігі мен тәуелсіздігі ұғымын ендіруге болады.

$\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n\in V$ векторлар жүйесі сызықтық тәуелді делінеді, егерде бәрі бірдей 0 емес $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n\in R$ нақты сандар табылып, бұл векторлардың сызықтық комбинациясы $\vec{P}=\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+\ldots+\lambda_n\vec{x}_n=\vec{0}$ болса (нөлге айналса), ал бұл теңдік $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$ болғанда ғана 0-ге айналатын болса векторлар жүйесі сызықтық тәуелсіз делінеді.

Берілген векторлар жүйесінің ішінде нөлдік вектор болса, олардың сызықтық комбинациясын былайша жазуға болады $\vec{P}=0\vec{x}_1+0\vec{x}_2+\ldots+0\vec{x}_{k-1}+\lambda_k\vec{0}+0\vec{x}_{k+1}+\ldots+0\vec{x}_n=\vec{0}$ (бұл коффициент $\lambda_k\neq 0$ болса да $\vec{P}=0$ болады). Сондықтан ондай векторлар жүйесі сызықтық тәуелді болады. Егер берілген векторлардың бәрі қалғандарының сызықтық комбинациясына $\vec{x}_n=\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+\ldots+\lambda_{n-1}\vec{x}_{n-1}$ тең болса, онда ол жүйе сызықты тәуелді болады. Өйткені $\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+\ldots+\lambda_{n-1}\vec{x}_{n-1}\,\vec{x}_n=\vec{0}$ өрнекте ең болмағанда бір коффициенттің 0-ге тең емес $\lambda_k=-1\neq 0$ екені ақиқат.

Берілген n векторлар жүйесінің бір бөлігі сызықтық тәуелді болса, онда бүкіл жүйеде сызықтық тәуелді болады және керісінше , бір векторлар жүйесі сызықтық тәуелсіз болса, онда оның кез-келген бөлігінен тұратын векторлар жүйесі де сызықтық тәуелсіз болады.

Егер $k\prec n$ болып $\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+\ldots+\lambda_k\vec{x}_k=\vec{0}$ болса және мұның коффициенттерінен ең болмағанда біреуі 0-ге тең болмаса, онда $\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+\ldots+\lambda_k\vec{x}_k+0\vec{x}_{k+1}+\ldots+\lambda_n\vec{x}_n=\vec{0}$ теңдіктеде ол коффициент 0-ге тең болмайды.

21.2. n өлшемді векторлық кеңістік.

Векторлар жиыны 1-1,2,3,4, 2-1,2,3,4 аксиомалар мен қатар төмендегі аксиомаларының талаптарында қанағаттандырсын.

3-топ. Өлшемдік аксиомалары.

3.1 V жиында n вектордан тұратын сызықтық тәуелсіз векторлар жүйесі болады.

3.2 V жиында $n+1$ вектордан тұратын кез-келген векторлар жүйесі сызықтық тәуелді болады.

Осы 10 аксиоманы элементтері қанағаттандыратын V жиын n өлшемді векторлық кеңістік делінеді. Оны V_n деп жазатын боламыз. n саны V векторлық кеңістіктін өлшемділігі делінеді.

n вектордан тұратын $B=\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n\right)$ сызықтық тәуелсіз векторлар жүйесі n өлшемді векторлық кеңістік V_n-нің базисі делінеді. Егер базистік векторлар жүйесі $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$-ге V_n-нің тағы бір вектормен қоссақ, онда ол жүйе 3-2 аксиома бойынша сызықтық тәуелді жүйеге айланады.

Сондықтан V_n кеңістіктен кез-келген $\vec{x}$ векторы базистік векторлардың сызықтық комбинациясынан тұрады: $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n$ (21-1)

Жіктелу бір мәнді болады. Сондықтан $B=\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n\right)$ базисте әрбір $\vec{x}$ векторға бір ғана $x_1,x_2,\ldots,x_n$ сандар сай келеді. Ол сандарды $\vec{x}$ вектордың B базистегі координаталары дейді де былайша $\vec{x}=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ жазады.

B базисте $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n$,

$\vec{y}=y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+\ldots+y_n\vec{e}_n$ векторлар берілсе

$\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1)\vec{e}_1+(x_2+y_2)\vec{e}_2+\ldots+(x_n+y_n)\vec{e}_n$,

$\vec{x}-\vec{y}=(x_1-y_1)\vec{e}_1+(x_2-y_2)\vec{e}_2+\ldots+(x_n-y_n)\vec{e}_n$ және

$k\vec{x}=k\left(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots x_n\vec{e}_n\right)=kx_1\vec{e}_1+kx_2\vec{e}_2+\ldots+kx_n\vec{e}_n$ болатындықтан,

векторларды қосқанда (алғанда) сәйкес координаталары да қосылады (алынады), ал векторларды санға көбейткенде оның барлық координаталары сол санға көбейтіледі.

Сонымен $\vec{x}\pm\vec{y}=\{x_1\pm y_1,x_2\pm y_2,\ldots,x_n\pm y_n\}$

$$k\vec{x}=\{kx_1,kx_2,\ldots,kx_n\} \qquad (21\text{-}2)$$

22.3. Вектор координаталарын түрлендіру.

V_n кеңістікте $B=\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n\right)$ және $B'=\left(\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}',\cdots,\vec{e}_n{}'\right)$ екі базис берілген B' базис векторлары B базисте былайша анықталсын:

$$\left.\begin{aligned}
\vec{e}_1{}' &= a_{11}\vec{e}_1+a_{21}\vec{e}_2+\cdots+a_{n1}\vec{e}_n=a_{j1}\vec{e}_j\\
\vec{e}_2{}' &= a_{12}\vec{e}_1+a_{22}\vec{e}_2+\cdots+a_{n2}\vec{e}_n=a_{j2}\vec{e}_j\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vec{e}_n{}' &= a_{1n}\vec{e}_1+a_{2n}\vec{e}_2+\cdots+a_{nn}\vec{e}_n=a_{jn}\vec{e}_j
\end{aligned}\right\} \qquad (21\text{-}3)$$

Мұны қысқаша былай жазуға болады:

$$\vec{e}_i{}' = a_{ji}\vec{e}_j\ ,\ i, j = 1,2,\dots,n \qquad (21\text{-}3a)$$

Мұның коэффициенттерінен жасалған A матрицаны B базистен B' базиске көшу матрицасы дейді.Ол кемелденген матрица болады.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \dots\dots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \dots\dots a_{n2} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ a_{1n} & a_{2n} \dots\dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Егер $\vec{x} \in V_n$ вектордан B және B' базистегі координаталары,сәйкесінше, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\left(x_1{}', x_2{}', \dots, x_n{}'\right)$ десек, онда

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n = x_1{}'\vec{e}_1{}' + x_2{}'\vec{e}_2{}' + \dots + x_n{}'\vec{e}_n{}' = x_1{}'a_{j1}\vec{e}_j + x_2{}'a_{j2}\vec{e}_j + \dots + x_n{}'a_{jn}\vec{e}_j$$

Мұны төмен жазып теңдіктің екі жағындағы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$-нің коэффициенттерін теңестірсек

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_{11}x_1{}' + a_{21}x_2{}' + \dots + a_{n1}x_n{}' \\ x_2 = a_{12}x_1{}' + a_{22}x_2{}' + \dots + a_{n2}x_n{}' \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = a_{1n}x_1{}' + a_{2n}x_2{}' + \dots + a_{nn}x_n{}' \end{array}\right\} \qquad (21\text{-}4)$$

Мұны қысқаша жазса: $x_i = a_{ij}x_j{}'$ (21-4а)

Мұның коэффициенттерімен жасалған матрица A матрицадан транспорциялау арқылы алынған матрицаға тең болады:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots\dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots\dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Жоғарыдағы (21-4) формула вектор координаталарын түрлендіру формуласы делінеді.Мұндағы j-бағана элементтері $\vec{e}_j{}'$ вектордың координаталарынан тұрады.

Егерде $B = \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\right)$ базисте $\vec{b}_1 = b_{11}\vec{e}_1 + b_{21}\vec{e}_2 + \dots + b_{n1}\vec{e}_n$;

$$\vec{b}_2 = b_{12}\vec{e}_1 + b_{22}\vec{e}_2 + \dots + b_{n2}\vec{e}_n, \dots\dots,\ \vec{b}_k = b_{1k}\vec{e}_1 + b_{2k}\vec{e}_2 + \dots + b_{nk}\vec{e}_n$$

векторлар берілсе, онда мына матрицаның рангы берілген $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_k$ векторлар жүйесінің сызықтық тәуелсіз векторларының санына тең болады.

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \dots\dots b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} \dots\dots b_{2k} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ b_{n1} & b_{n2} \dots\dots b_{nk} \end{pmatrix}$$

V_n кеңістікте n вектордан тұратын жүйе сызықтық тәуелсіз болу үшін, ол векторлардың кез-келген базистегі коэффициенттерінен жасалған анықтауыш 0-ге тең болмауы керек.

21.4. Векторлық кеңістіктің ішкі кеңістігі.

Егер V_k векторлар жиыны V_n векторлық кеңістіктің ішкі жиыны болса және оның өзі де V_n-де анықталған амалдарға қарағанда векторлық кеңістік болса, онда V_k жиынды n өлшемді V_n векторлық кеңістіктің k өлшемді ішкі векторлық кеңістігі дейді.

Егер $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ векторлар V_n кеңістіктен алынған сызықтық тәуелсіз векторлар жүйесі болса, онда мына түрдегі векторлар $t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \ldots + t_k\vec{a}_k$, t_i-нақты сандар V_n-нің ішкі кеңістігі болады.Оны $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ векторларға керілген ішкі кеңістік дейді.

Егер W және W' ішкі кеңістіктер болса, онда олардан алынған $\left(\vec{a} \in W, \vec{a}' \in W'\right)$ кез-келген $\vec{a}$, $\vec{a}'$ векторлардың қосындысы $\vec{a} + \vec{a}' = \vec{P}$ түрдегі барлық векторлардың жиыны сол екі ішкі кеңістіктің қосындысы $(W + W')$ делінеді; мұның өзі де ішкі кеңістік болады.Егер $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$ векторлар W, ал $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n$ векторлар W' ішкі кеңістіктің базистері болса, онда $W + W'$ ішкі кеңістік $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n$ векторларға керілген ішкі кеңістік болады. $W + W'$ ішкі кеңістік W-да, W'-де енетін ең кіші өлшемді ішкі кеңістік болады. W мен W' ішкі кеңістіктердің екеуіне де ортақ элементтерден түратын кеңістікті олардың қимасы дейді және оны $W \cap W'$ деп жазады. Бұл да ішкі кеңістік болады. Ол W-ға да W'-ке енетін ең үлкен өлшемді ішкі кеңістік болады.

21.5. Векторлық кеңістікті сызықтық бейнелеу.

Бұл векторлық кеңістікті екінші векторлық кеңістікке бейнелеу f сызықтық бейнелеу делінеді; егерде,

біріншіден, $f\left(\vec{x} + \vec{y}\right) = f\left(\vec{x}\right) + f\left(\vec{y}\right)$ болса, яғни векторлардың қосындысының бейнесі ,олардың бейнелерінің қосындысындай болса.

екіншіден, $f\left(k\vec{x}\right) = kf\left(\vec{x}\right)$ болса, яғни вектордың санға көбейтіндісінің бейнесі, вектор бейнесін сол санға көбейткендей болса.

Егер сызықтық бейнелеу өзара бір мәнді болса, онда ол бейнелеуді изоморфты бейнелеу дейді.

Егер екі векторлық кеңістіктің бірі екіншісінің изоморфты бейнесі болса, ол екі кеңістік өзара изоморфты делінеді.

Екі векторлық кеңістік изоморфты болу үшін олардың өлшемдері бірдей болулары керек.

Векторлық V_n кеңістікке $B = \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\right)$ базис ендірілсін.Бұл кеңістікті өзіне-өзін сызықтық бейнелеуін базистік векторлар $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \ldots, \vec{e}_n{}'$ векторларға көшсін және олар B базисте былайша өрнектелсін:

$\vec{e}_1{}' = \{c_{11}, c_{21}, \ldots, c_{n1}\}$, $\vec{e}_2{}' = \{c_{12}, c_{22}, \ldots, c_{n2}\}$, ..., $\vec{e}_n{}' = \{c_{1n}, c_{2n}, \ldots, c_{nn}\}$, ал $\vec{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ вектор $\vec{x}\,' = \{x_1', x_2', \ldots, x_n'\}$ векторға көшсін онда V_n кеңістікті өзіне-өзі сызықтық бейнелеу мына формуламен өрнектеледі:

$$\left.\begin{array}{l} x_1' = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \\ x_2' = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \cdots + c_{nn}x_n \end{array}\right\} \qquad (21\text{-}5)$$

Бұл өрнектің матрицасының бағаналары $\vec{e}_i{}'$ вектордың координаталарынан тұрады.

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \ldots\ldots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \ldots\ldots c_{2n} \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ c_{n1} & c_{n2} \ldots\ldots c_{nn} \end{pmatrix}$$

V_n векторлық кеңістікті өзіне-өзін бір мәнді бейнелеу ол кеңістікті түрлендіру делінеді немесе изоморфты бейнелеу делінеді.C матрица кемелденген болады. Векторлық кеңістікті өзіне- өзін бірмәнді бейнелеу (түрлендіру) f -ты басқаша, оператор дейді.

1-Мысал. Бүтін сандар жиыны Z нақты сандар жиыны R -де және керісінше R жиынын Z жиынында векторлық кеңістік болады ма, жоқ па?
Шешуі: Z жиыны R жиынында анықталған векторлық кеңістік болу үшін біріншіден ,Z жиынында қосу амалы орындалу керек. Бұл Z -те орындалады.Өйткені екі бүтін санның қосындысы әруақытта бүтін сан болады.

Екіншіден, Z -тің векторын (яғни бүтін санды) R -дің санына көбейкенде Z -тің саны шығуы керек. Бұл әруақытта орындала бермейді. Мысалы: n бүтін санын $\frac{m}{p}$ нақты санға көбейткенде бүтін сан болуы да , болмауы да мүмкін (Мысалы $10 \cdot \frac{3}{5} = 6$ бүтін сан, $10 \cdot \frac{4}{3}$ бөлшек сан Z -ке жатпайды).Сондықтан бүтін сан жиыны нақты сандар жиынында векторлық кеңістік болмайды.

Ал, R жиынында бұл екі амалдың екеуі де анықталған: нақты санды нақты санға қосса, нақты сан шығады; нақты санды бүтін санға көбейткенде нақты сан шығады.

Сонымен қатар векторлық кеңістіктің 8-аксиомасының 8-де орындалады.

Демек, нақты сандар жиыны бүтін сандар жиынында векторлық кеңістік болады.

2-Мысал. Нақты сандар өрнегінде берілген $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 7\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\vec{a}_3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\vec{a}_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\vec{a}_5=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ векторлар жүйесі сызықтық тәуелді ме, тәуелсіз бе ?

Шешуі: Бұл векторлар (екінші ретті матрицалар)жүйесі сызықтық тәуелді болса ең болмағанда біреуі 0-ге тең емес $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5$ сандары табылып, мына теңдік орындалуы керек.

$$\lambda_1\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 7\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\lambda_5\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Матрицаларды көбейту және қосу ережесі бойынша

$$\begin{pmatrix}3\lambda_1+1\lambda_2+0\lambda_3+0\lambda_4+0\lambda_5 & 5\lambda_1+0\lambda_2+1\lambda_3+0\lambda_4+0\lambda_5\\ 4\lambda_1+0\lambda_2+0\lambda_3+1\lambda_4+0\lambda_5 & 7\lambda_1+0\lambda_2+0\lambda_3+0\lambda_4+1\lambda_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Матрицалардың теңдік қасиеті бойынша, бұдан

$$\left\langle\begin{array}{l}3\lambda_1+\lambda_2=0\\ 5\lambda_1+\lambda_3=0\\ 4\lambda_1+\lambda_4=0\\ 7\lambda_1+\lambda_5=0\end{array}\right.$$

Бұлардан $\lambda_2=-3\lambda_1,\lambda_3=-5\lambda_1,\ \lambda_4=-4\lambda_1,\lambda_5=-7\lambda_1.\ \lambda_1=1$ десек $\lambda_2=-3$, $\lambda_3=-5$, $\lambda_4=-4$, $\lambda_5=-7$. Демек λ-лар 0 болмаса да берілген векторлар жүйесін сызықтық комбинациясы 0-ге тең болады .Сондықтан олар сызықты тәуелді болады.

Ол тәуелділік мынадай болады: $\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5$-ті орнына

$$\vec{a}_1\lambda_1-3\lambda_1\vec{a}_2-5\lambda_1\vec{a}_3-4\lambda_1\vec{a}_4-7\lambda_1\vec{a}_5=0,\quad \vec{a}_1-3\vec{a}_2-5\vec{a}_3-4\vec{a}_4-7\vec{a}_5=\vec{0}$$

3-Мысал. Мына векторлар жүйесі $f_1(x)=1+x+x^2$, $f_2(x)=1-x+x^2-x^3$, $f_3(x)=2+3x+x^2+4x^3$ Z нақты сандар өрнегінде сызықтық тәуелді ма, жоқ па?

Шешуі: Берілген жүйе сызықтық тәуелсіз болса, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ сандарының үшеуіде 0 болғанда ғана мына теңдік орындалуы керек.

$\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)+\lambda_3 f_3(x)=\vec{0}$, яғни

$$\lambda_1\left(1+x+x^2\right)+\lambda_2\left(2+3x+x^2+4x^3\right)+\lambda_3\left(1-x+x^2-x^3\right)=0+0\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3.$$

Бұлардан $\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1+3\lambda_2-\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ 0\lambda_1+4\lambda_2-\lambda_3=0\end{cases}$

Мұның алғашқы екеуінен $2\lambda_1+5\lambda_2=0$, соңғы екеуінен $\lambda_1+5\lambda_2=0$

$$\begin{cases}2\lambda_1+5\lambda_2=0\\ \lambda_1+5\lambda_2=0\end{cases}$$

Бұдан $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. Бұларды ескерсек $\lambda_3 = 0$. Сонымен теңдік $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 0$ $\lambda_3 = 0$ болғанда ғана орындалады екен. Сондықтан берілген векторлар (көпмүшеліктер) жиыны сызықтық тәуелсіз болады.

4-Мысал. $\vec{e}_1 = \{3,1,4\}$, $\vec{e}_2 = \{5,2,1\}$, $\vec{e}_3 = \{1,1,-6\}$ векторлар жүйесі үш өлшемді V_3 векторлық кеңістік үшін базис болады ма, жоқ па?

Шешуі: біріншіден, векторлар жүйесі базис болу үшін базиске кіретін векторлар саны кеңістік өлшеміне тең болуы керек.

Бізде кеңістік үш өлшемді, векторда үшеу. Сондықтан бұл шарт оындалады.

Екіншіден, базистік векторлар сызықтық тәуелсіз болуы керек. Тексерейік координаты арқылы берілген векторлар сызықтық тәуелсіз болуы үшін, вектор координаталары жасайтын матрицаның рангі 3-ке тең болуы керек.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & -2 & -10 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Диагоналдың бір жағындағы элементтер тегіс 0-ге айланды, диагоналда 0-ге тең емес үш сан қалды.

Сондықтан матрицаның рангі $r = 3$ болады. Демек, V_3 үшін берілген векторлар жүйесі базис болады.

5-Мысал. $\vec{b}_1 = \frac{1}{2}, \vec{b}_2 = 3i$, $\vec{b}_3 = -4-6i$ вектор жүйесінің базисін табу керек.

Шешуі: берілген үш вектор сызықты тәуелді. Өйткені $\lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \lambda_3 \vec{b}_3 = \vec{0}$ теңдігі кез-келген $\lambda \neq 0$ үшін орындалады.

$$\lambda_1\left(\frac{1}{2} + 0i\right) + \lambda_2(0 + 3i) + \lambda_3(-4 - 6i) = 0 + 0i$$

Бұдан $\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 - 4 \cdot \lambda_3 = 0 \\ 0 \cdot \lambda_1 + 3 \cdot \lambda_2 - 6 \cdot \lambda_3 = 0 \end{cases}$, $\begin{matrix} \lambda_1 = 8\lambda_3 \\ \lambda_2 = 2\lambda_3 \end{matrix}$

$8\lambda_3 \vec{b}_1 + 2\lambda_3 \vec{b}_2 + \lambda_3 \vec{b}_3 = \vec{0}$ кез-келген $\lambda_3 \neq 0$ үшін орындалады. Ал, $\vec{b}_1$ мен $\vec{b}_2$, $\vec{b}_1$ мен $\vec{b}_3$, $\vec{b}_2$ мен $\vec{b}_3$ сызықтық тәуелсіз. Өйткені $\lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 = \vec{0}$, $\lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_3 \vec{b}_3 = \vec{0}$, $\lambda_2 \vec{b}_2 + \lambda_3 \vec{b}_3 = \vec{0}$ теңдіктері тек $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$ болғанда ғана орындалады. Сондықтан берілген векторлар жүйесі үшін $\left(\vec{b}_1, \vec{b}_2\right), \left(\vec{b}_1, \vec{b}_3\right)$, $\left(\vec{b}_2, \vec{b}_3\right)$ базис болады.

6-Мысал. V_3-тегі $\vec{a} = \{6,0,-5\}$векторддың $(1,-1,0)$, $(1,2,3)$, $(0,1,-1)$ базистегі координатын табыңдар.

Шешуі: $\vec{a} = \{6,0,-5\} = \lambda_1(1,-1,0) + \lambda_2(1,2,3) + \lambda_3(0,1,-1)$. Бұдан

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 6 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 0\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = -5 \end{cases}$$

Бұлардан $\lambda_2 = \frac{1}{6}$, $\lambda_1 = \frac{35}{6}, \lambda_3 = \frac{11}{2}$.

Сондықтан $\vec{g_1} = \{1,-1,0\}, \vec{g_2} = \{1,2,3\}$, $\vec{g_3} = \{0,1,-1\}$ базис болғандағы $\vec{a}$ вектордың координаталары $\vec{a} = \left\{\frac{35}{6}(1,-1,0) + \frac{1}{6}(1,2,3) + \frac{11}{2}(0,0,-1)\right\} = \left\{6,-\frac{11}{2},-5\right\}$ болады.

§22. Көп өлшемді аффиндік кеңістік.

Өткен параграфта көпөлшемді векторлық кеңістік теориясына шолу жасалды.Енді көпөлшемді геометрияның негізгі мәселелерін баяндауға кірісеміз.Ол үшін көпөлшемді аффиндік және көпөлшемді евклидтік кеңістік ұғымдарын анықтап, ол кеңістіктердегі геометриялық мәселелерді қарастырамыз.

22.1. Аффиндік кеңістік аксиомалары.

Элементтері нүкте деп аталатын M жиын және n өлшемді нақты векторлық V_n кеңістікті қарастырайық.

Нүктелер жиыны M -ның белгілі ретте алынған әрбір A, B екі нүктесіне векторлық V_n кеңістіктің бір $\vec{a}$ векторы сәйкестенсін.Бұл сәйкестікті $\vec{AB} = \vec{a}$ деп жазады және B нүкте A нүктеден $\vec{a}$ векторды өлшеп салу нәтижесінде шықты дейді.

Нүктелер жиыны A-ның белгілі тәртіпте алынған кез-келген екі нүктесіне векторлық V_n кеңістіктің бір векторын сәйкестендіру, яғни векторды бір нүктеден өлшеп салу амалы төмендегі 4 топ аксиомаларының талаптарын қанағаттандырсын.

4- топ. Векторды өлшеп салу аксиомалары.

4-1. Нүктелер *жиыны М-ның* кез-келген A нүктесі мен векторлық V_n кеңістіктін кез-келген $\vec{a}$ векторын ол жиыннан $\vec{AB} = \vec{a}$ болатын бір тек бір B нүкте табылатын болсын.

4-2. A жиынының кез-келген A, B, C үш нүктесі үшін $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ болсын.

Алғашқы бапта айтылған 1-1,2,3,4; 2-1,2,3,4; 3-1,2 және жоғарыда айтылған 4-1,2 аксиомалар талаптарын қанағаттандыратын векторлар мен нүктелердің жиынын n өлшемді нүктелі-векторлық нақты аффиндік кеңістік немесе жай ғана n өлшемді аффиндік кеңістік дейді, оны A_n деп белгілейік. Осы төрт топ аксиомалары, n өлшемді аффиндік кеңістіктін аксиомалары делінеді. Бұл аксиомаларды неміс математигі Герман Вейль (1888-1958) ұсынған. Сондықтан олар Вейль аксиомалар жүйесі делінеді. A_n-ның әр жұп нүктесіне бір векторы сәйкестендірілетін V_n кеңістікті A_n-мен байланысты кеңістік дейді.

Осы аксиомалардың салдары ретінде A_n аффиндік кеңістікте төмендегі тұжырымдардың дұрыстығын дәлелдеуге болады.

а) A_n кеңістікте $\forall A \in A_n$ нүкте үшін $\vec{AA} = \vec{0}$ болады.Өйткені $\vec{b} \in V_n$ вектор, $A \in A_n$ нүкте болса, онда 4-1 бойынша A-дан B нүкте табылып, $\vec{AB} = \vec{b}$ болады. 4-2 аксиома бойынша $A_j A_j B$ нүктелер үшін $\vec{AA} + \vec{AB} = \vec{AB}$ болады.Сонда 1-3 аксиома бойынша соңғы теңдіктен $\vec{AA} = \vec{0}$ болады.

б) Егер $\vec{AB} = \vec{0}$ болса,онда $A \equiv B$ (беттеседі) болады.Шынында да $\vec{AB} = \vec{0}$ болғандықтан а) жағдай бойынша $\vec{AA} = \vec{0}$. Сонда 4-1 аксиома бойынша A мен B беттеседі.

в) $\vec{AB} = -\vec{BA}$ болады.Өйткені 4-2аксиома бойынша $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA}$. Бұдан а) жағдайды ескерсек $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0}$,1-3 аксиома бойынша $\vec{AB} = -\vec{BA}$

г) Осы сияқты $\vec{AB} = \vec{CD}$ болса, онда $\vec{AC} = \vec{BD}$ болады.Шынында да IV -2 бойынша $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$, $\vec{AB} = \vec{CD}$ болғандықтан $\vec{CD} + \vec{BC} = \vec{AC}$. Ал, 1-1, 4-2 аксиомалар бойынша $\vec{BC} + \vec{CD} = \vec{BD}$ соңғы екеуінен $\vec{AC} = \vec{BD}$.

22.2. Аффиндік координаталар жүйесі.

Аффиндік A_n кеңістіктің кез- келген бір O нүктесі мен ол кеңістікке байланысты V_n векторлық кеңістіктің қандайда бір базисі $B = \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\right)$-нің жиынын аффиндік кеңістіктегі репер немесе аффиндік координаталар жүйесі дейді: оны $O\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ деп белгілейік. O координата жүйесінің басы, $\vec{e}_i$-лар координаттық векторлар делінеді. A нүктесі $O\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ аффиндік координата жүйесіндегі аффиндік координаталары деп $\vec{OA}$ вектордың $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\right)$ базистегі координаталарын айтады, яғни

$\vec{OA} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \ldots + x_n \vec{e}_n$ болса, онда A нүктенің координаталары деп осы жіктелудің коэффициенттері $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$-ді айтады және оны $A\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ деп белгілейді.

Егер A_n кеңістіктегі нүктелер координаталары $A\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $B\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ болса, онда $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$, $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ болатындай

$\vec{AB} = \{y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n\}$ болады. (22-1)

22.3. Нүкте координаталарын түрлендіру.

Аффиндік A_n кеңістікте екі $O\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ және $S\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n$ аффиндік репер берілсін. Екінші репер элементтері бірінші реперге қарағанда былайша анықталған болсын: $S\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $\vec{g}_1 = \{a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}\}$, $\vec{g}_2 = \{a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}\}$,..., $\vec{g}_n = \{a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn}\}$. M нүктенің бұл базистегі координаталарын сәйкесінше

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ дейік.Сонда $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SM}$, $\overrightarrow{OM} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \ldots + x_n \vec{e}_n$

$\overrightarrow{OS} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \ldots + a_n \vec{e}_n$,

$$\overrightarrow{SM} = y_1 \vec{e}_1{}' + y_2 \vec{e}_2{}' + \ldots + y_n \vec{e}_n{}' = y_1\left(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n1}\vec{e}_n\right) + y_2\left(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n2}\vec{e}_n\right) + \ldots + y_n\left(a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \ldots + a_{nn}\vec{e}_n\right)$$

Бұларды $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SM}$ теңдікке қойып, қайта топтап, теңдіктің екі жағындағы $\vec{e}_{1,} \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$-нің коэффициенттеріне теңестірейік.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1 + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ x_2 &= a_2 + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= a_n + a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{aligned}\right\} \qquad (22\text{-}2)$$

Бұл нүкте координаталарын түрлендіру формуласы делінеді. Мұның матрицасы $\left(\vec{e}_i\right)$ базистен $\left(\vec{g}_i\right)$базиске көшу матрицасы делінеді.Ал, $\left(\vec{g}_i\right)$ базистік векторлар болғандықтан сызықтық тәуелсіз болады, сондықтан көшу матрицаның анықтауышы 0-ге тең болмайды:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

22.4. Аффиндік кеңістіктегі көп өлшемді жазықтық.

A_n n-өлшемді аффиндік кеңістік,V_n онымен байланысты n-өлшемді векторлық кеңістік болсын.

1. A_n кеңістіктің $A_0, A_1, \ldots, A_n$ нүктелер жүйесі сызықтық тәуелсіз(сызықтық тәуелді) делінеді,егер олардан жасалған $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}$ векторлар сызықтық тәуелсіз (тәуелді) болатын болса.

3-1,2 аксиомалар бойынша V_n кеңістікке n вектордан тұратын сызықтық тәуелсіз векторлар жүйесі болады. Сондықтан мұнымен байланысты A_n кеңістікте $n+1$ нүктеден тұратын сызықтық тәуелсіз нүктелер болады.

2. A нүкте n өлшемді аффиндік A_n кеңістіктің кез-келген нүктесі, ал V_k осы аффиндік кеңістікпен байланыстыn өлшемді V_n векторлық кеңістіктің ішкі кеңістігі болсын.

A_n кеңістіктің $\overrightarrow{Ax} \in V_k$ шартын қанағаттандыратын x нүктелері мен V_k ішкі кеңістіктің барлық векторларының жиынын A нүкте мен V_k ішкі кеңістік арқылы анықталған k өлшемді жазықтық (қысқаша k жазықтық) дейді. Оны (A, k) немесе π_k арқылы белгілейміз.

Сонымен $\pi_k = (A,V_k)$ жазықтық V_k ішкі кеңістіктің барлық векторларын бір A нүктеден өлшеп салғанда шығатын векторлармен, олардың ұштары болатын нүктелердің жиыны (біріктірмесі) болады.

A нүкте π_k жазықтықта жатады. Өйткені $\vec{AA} = \vec{0}$, ал $\vec{0} \in V_k$.Сондықтан анықтама бойынша $A \in \pi_k$.

A нүктені $\pi_k = (A,V_k)$ жазықтықтың бастапқы нүктесі дейді, V_k-ны π_k жазықтықтың бағыттаушы ішкі кеңістігі дейді.

$\pi_k = (A,V_k)$ жазықтықтықта шексіз көп нүктелер болады.

Өйткені V_k-да шексіз көп векторлар болады. Ол нүктелердің ішінде ең болмағанда бір $k+1$ нүктелерден тұратын сызықтық тәуелсіз нүктелер жүйесі болады. Өйткені V_k-да ол кеңістік болғандықтан k вектордан тұратын сызықтық тәуелсіз вектор болады.

$\pi_k = (A,V_k)$ жазықтық үшін оның бастапқы нүктесі ретінде осы жазықтықта жатқан A-дан басқа да кез-келген нүктесін алуға болады, яғни $B \ = (A,V_k)$ жататын нүкте болса, онда (A,V_k) мен (B,V_k) бір K жазықтықты анықтайды. Мұның дұрыстығын (A,V_k)-да жатқан нүктенің (B,V_k)-да да жататындығына және керісінше (B,V_k) -да жатқан нүктенің (A,V_k)-да да жататынына көз жеткізу арқылы дәлелдеуге болады. $B,T \in (A,V_k)$ жатсын, онда $\vec{AT} \in V_k$, $\vec{AB} \in V_k$. Сонда A, B, T нүктелерге 4-2 аксиоманы қолдансақ $\vec{AB} + \vec{BT} = \vec{AT}$, $\vec{BA} + \vec{AT} = \vec{BT}$ болатындықтан және $\vec{AB} \in V_k$ дан $\vec{BA} \in V_k$ болып, $\vec{BT} \in V_k$ болады.Ал бұл $T \in (B,V_k)$ днген сөз. Дәл осылай $D \in (B,V_k)$ болса, онда $D \in (A,V_k)$ болады. Сөйтіп (A,V_k) мен (B,V_k) бір жазықтықты анықтайды.

22.5. Көп өлшемді жазықтықтың теңдеулері.

V_k n өлшемді векторлық кеңістік V_n-нің ішкі кеңістігі болсын, $\vec{g}_{1,} \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_k$ оның базисі болсын. π_k жазықтық оның бір A нүктесі мен V_k ішкі кеңістік арқылы анықталатындықтан, ал V_k ішкі кеңістік өзінің базисі $\vec{g}_{1,} \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_k$ мен анықталатындықтан π_k жазықтықты A нүкте мен $\vec{g}_{1,} \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_k$ сызықтық тәуелсіз векторларға керілген жазықтық дейді. Керісінше кез-келген бір нүкте мен сызықтық тәуелсіз K векторлар жүйесі осыларға керілген бір жазықтығын анықтайды.

Демек, $k+1$ нүктелерден тұратын кез-келген сызықтық тәуелсіз $M_0, M_1, \ldots, M_k$ нүктелер жиыны осы нүктелерден өтетін бір жазықтықты анықтайды.

Сөйтіп, $\pi_k = (A,V_k)$ жазықтықты мына жартты

$$\vec{Ax} = t_1 \vec{g}_1 + t_2 \vec{g}_2 + \cdots + t_n \vec{g}_n \qquad (22\text{-}4)$$

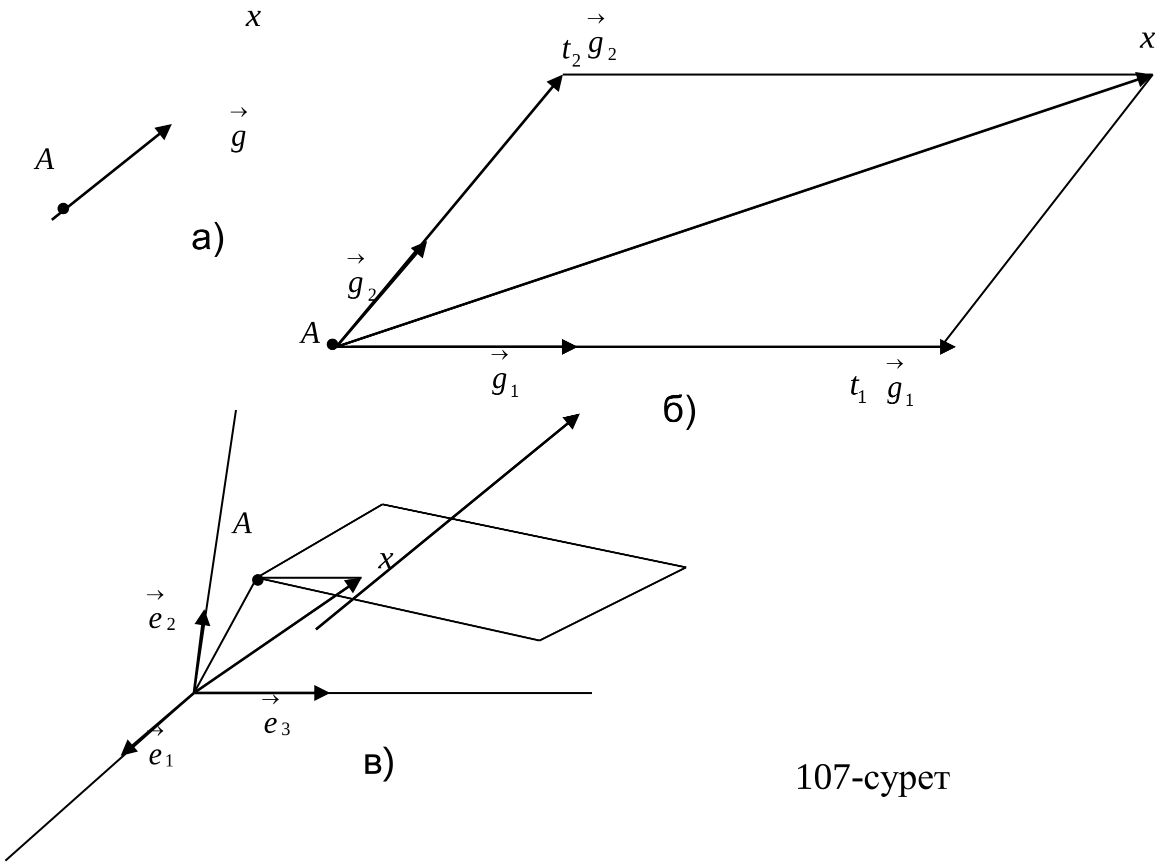
қанағаттандыратын x нүктелердың жиыны ретінде қарастыруға болады, мұндағы t-лар бір-біріне тәуелсіз өзгеретін нақты сандар.

Егер $k=0$ болса, онда V_k тек $\vec{0}$-нөлдік вектордан тұрады, ал бұл кезде жазықтық бір ғана A нүктеден тұрады. Сондықтан нүктені 0-өлшемді жазықтық ретінде қарастыруға болады.

Егер $k=1$ болса, π_1 бір өлшемді жазықтық болады, оны түзу дейді. Сонда (22-4)-тен түзудің теңдеуі мынадай болады: $\overrightarrow{Ax}=t_1\vec{g}_1$ (22-5)

Осы шартты қанағаттандыратын x нүктелер жиыны түзу болады.(107-а сурет).

Егер $k=n-1$ болса π_{n-1} жазықтықты гипержазықтық дейді: $k=n$ болса π_n жазықтық A_n аффиндік кеңістікпен беттесетін жазықтық болады. Үш өлшемді кеңістік үшін π_2 гипержазықтық болады. π_2 жазықтықты мына шартты $\overrightarrow{Ax}=t_1\vec{g}_1+t_2\,\vec{g}_2$ (22-6) қанағаттандыратын x нүктелердің жиыны ретінде қарастыруға болады(107-б сурет).



107-сурет

A_n кеңістікке $O\vec{e}_{1,}\ \vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n$ аффиндік координата жүйесі ендірілсін. π_k жазықтық $A\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ нүкте және $\vec{a}_1=\{a_{11},a_{21},\dots,a_{n1}\}$, $\vec{a}_2=\{a_{12},a_{22},\dots,a_{n2}\}$,..., $\vec{a}_k=\{a_{1k},a_{2k},\dots,a_{nk}\}$ сызықтық тәуелсіз векторлар арқылы берілсін. Сонда (22-4) бойынша бұл жазықтықты $\overrightarrow{Ax}=t_1\vec{a}_1+t_2\,\vec{a}_2+\cdots+t_k\,\vec{a}_k$ шарттын қанағаттандыратын X нүктелер жиыны деуге болады, X нүкте координаталарын $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ дейік. Сонда 107-суреттен

$\vec{OX} = \vec{OA} + \vec{AX} = \vec{OA} + t_1 \vec{a}_1 + t_2 \vec{a}_2 + \cdots + t_k \vec{a}_k$ (22-7) болады. Ал, $\vec{OX} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \cdots + x_n \vec{e}_n$, $\vec{a}_1 = a_{11} \vec{e}_1 + a_{21} \vec{e}_2 + \ldots + a_{n1} \vec{e}_n$, $\vec{a}_2 = a_{12} \vec{e}_1 + a_{22} \vec{e}_2 + \ldots + a_{n2} \vec{e}_n$, $\ldots, \vec{a}_k = a_{1k} \vec{e}_1 + a_{2k} \vec{e}_2 + \ldots + a_{nk} \vec{e}_n$; $\vec{OA} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \ldots + a_n \vec{e}_n$ болатындықтан бұларды алғашқы теңдіктегі орындарына қойып, қайта топтап, теңдіктің екі жағындағы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ коэффициенттерін теңестірсек

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_1 + a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \ldots + a_{1k}t_k \\ x_2 = a_2 + a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \ldots + a_{2nk}t_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_n + a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{nk}t_k \end{array}\right\} \qquad (22\text{-}8)$$

Мұны $\pi_k = (A, V_k)$ жазықтықтың параметрлік теңдеуі дейді, ал (22-7)-ні векторлық теңдеуі дейді.

Векторлар $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ сызықтық тәуелсіз болғандықтан оның коэффициенттерінен жасалған анықтауыш

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{vmatrix} \neq 0$$

Сондықтан (22-8)дің K теңдеуін бөліп алып, $t_1, t_2, \ldots, t_k$ параметрлі бір мәнді табуға болады.Оларды (22-8) жүйеге қалған $n-k$ теңдеудегі орындарына қойып, X нүктенің координаталары $x_1, x_2, \ldots, x_n$ енетін,t-жоқ, $n-k$ теңдеуінен тұратын теңдеулер жүйесін шығарып аламыз. Ол мына түрде болады:

$$\left.\begin{array}{l} x_{k+1} - b_{11}x_1 - b_{12}x_2 - \cdots - b_{1k}x_k - b_1 = 0 \\ x_{k+2} - b_{21}x_1 - b_{22}x_2 - \cdots - b_{2k}x_k - b_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n - b_{n-k,1}x_1 - b_{n-k,2}x_2 - \cdots - b_{n-k,k}x_k - b_{n-k} = 0 \end{array}\right\} \qquad (22\text{-}9)$$

Координаталары осы теңдеуді қанағаттандыратын нүктелер ғана жазықтықта жатады. Сондықтан бұл теңдеуде жазықтықтың теңдеуі болады.

Сөйтіп, аффиндік A_n кеңістікте π_k жазықтық $n-k$ сызықтық тәуелсіз теңдеулер жүйесімен анықталады.

Сондықтан π_{n-1} гипержазықтық $n-(n-1)=1$ теңдеумен анықталады. Ол теңдеу

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a = 0 \qquad (22\text{-}10)$$

түрде болады. Бұл гипержазықтық теңдеуі болады.Егер (22-8) жүйеде $k=1$ болса, $\pi_1 = (A, V_1)$ жазықтықтың, яғни түзудің теңдеуі шығады.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_1 + b_1 t \\ x_2 = a_2 + b_2 t \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = a_n + b_n t \end{array}\right\} \qquad (22\text{-}11)$$

Координаталары, төмендегі сызықты тәуелсіз K теңдеуден тұратын жүйені

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + a_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + a_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nk}x_n + a_k = 0 \end{array}\right\} \qquad (22\text{-}12)$$

қанағаттандыратын нүктелер жиыны $n-k$ өлшемді жазықтық болады. Бұл теңдеуді жазықтықтын жалпы теңдеуі дейді.

$\vec{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ вектор (22-12) жазықтықта жату үшін, оның координаталары мына теңдеулер жүйесін қанағаттандыруы қажетті және жеткілікті

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + \ldots + a_{1n}p = 0 \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{2n}p_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}p_1 + a_{k2}p_2 + \ldots + a_{kn}p_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (22\text{-}13)$$

Координаталары, төмендегі тәуелсіз $n-k$ теңдеулер жүйесін

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + a_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + a_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-k,1}x_1 + a_{n-k,2}x_2 + \ldots + a_{n-k,n}x_n + a_{n-k} = 0 \end{array}\right\} \qquad (22\text{-}14)$$

қанағаттандыратын A_n-ның нүктелер жиыны K өлшемді жазықтықтын теңдеуі болады.

22.6. Көп өлшемді жазықтықтардың өзара орналасуы.

Көп өлшемді жазықтықтар қиылысады делінеді, егерде олардың ортақ нүктелері болса, параллель делінеді.Егер бірінің бағыттаушы ішкі кеңістігі екіншісінің бағыттаушы ішкі кеңістігінде жататын болса, айқас жазықтықтар делінеді.Егер олар қиылыспаса және параллельде болмаса,

1-теорема. A_n аффиндік n өлшемді кеңістіктің көп өлшемді $\pi_k = (A, V_k)$, $\pi_m = (B, V_m)$ жазықтықтарының бір ортақ нүктесі бар болса, онда олардың ортақ жазықтығы болады және ол жазықтықтың бағыттаушы ішкі кеңістігі берілген жазықтықтардың бағыттаушы ішкі кеңістіктерінің қимасы $V_k \cap V_m$-ге тең болады.

Дәлелі. C берілген жазықтықтарға ортақ нүкте болсын: $C \in \pi_k$**,** $C \in \pi_m$.Жазықтардың ішкі бағыттаушы кеңістіктерінің қимасын $V_k \cap V_m = V_t$ дейік, ал C мен V_t-ға керілген жазықтықты $\pi_t = (C, V_t)$ дейік.

Мақсат $\pi_t = \pi_k \cap \pi_m$ болатынын дәлелдеу. Ол үшін π_t-да жатқан нүктенің π_k-да да, π_m-де де жататыныңн дәлелдеу керек.

M нүкте π_t-да жатсын, онда $\overrightarrow{CM} \in V_t$,ал $V_k \cap V_m = V_t$ болғандықан $\overrightarrow{CM} \in V_k$,$\overrightarrow{CM} \in V_m$. Демек , $M \in \pi_k$, $M \in \pi_m$. Сондықтан $M \in \pi_k \cap \pi_m$.

Енді керісінше, егер $M \in \pi_k \cap \pi_m$ жатса, онда $M \in \pi_k$, $M \in \pi_m$.Сондықтан $\overrightarrow{CM} \in V_k \cap V_m$, $\overrightarrow{CM} \in V_t$. Демек, $\overrightarrow{CM} \in V_k \cap V_m$,$\overrightarrow{CM} \in V_t$.Ал,бұл M нүкте π_t жазықтықта жатады деген сөз.

Егер $t = 0$ болса, онда π_t бір ғана нүктеден тұрады.

2-теорема. Егер $\pi_k = (A, V_k)$, $\pi_m = (B, V_m)$ жазықтықтар өзара параллель болса және қиылыспаса, онда ол жазықтықтардың бірі екіншісінде жатады.

Дәлелі. π_k мен π_m теорема шартын қанағаттандыратын жазықтықтар болсын және $m \geq k$ дейік. Онда параллельдік анықтамасы бойынша $V_k \subset V_m$ болады. $V_k \subset V_m$ болатынын дәлелдейік. Ол үшін M нүкте π_k-да жатса, онда оның π_m-де де жататынын дәлелдеу керек.Шарт бойынша π_k мен π_m-ның ортақ нүктесі бар (себебі олар қиылысатын жазықтықтар), ол нүкте C болсын. Егер $M \in \pi_k$ десек $\overrightarrow{CM} \in V_k$ жатады, ал $V_k \subset V_m$ болғандықтан $\overrightarrow{CM} \in V_m$. Демек, $M \in V_m$. Сондықтан π_k жазықтық π_m жазықтықта жатады.

Жазықтықтардың қиылысу белгісі мына теоремада берілген.

3-теорема. Егер екі жазықтық төмендегі жалпы теңдеулермен берілсе

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + a_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + a_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + a_n = 0 \end{array}\right\} \text{ және } \left.\begin{array}{l} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n + b_1 = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n + b_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \ldots + b_{mn}x_n + b_m = 0 \end{array}\right\}$$

бұл теңдеулердің бірін екіншісіне тіркеп жазудан шыққан $(k+m)$ теңдеуден тұратын жүйе $(*)$ матрицасының рангы r мен кеңетірілген матрицаның рангы r' өзара тең $r' = r$ болса, онда π_{n-k}, π_{n-m} жазықтықтар қиылысады және жаңа құрылған $(*)$ жүйе қима жазықтығының теңдеуі болады, оның өлшемі $n - r$ болады.

π_k мен π_m жазықтықтар өздерінің бір нүктелері мен бағыттаушы ішкі кеңістіктері V_k, V_m арқылы берілсін. $V_t = V_k + V_m$ дейік.Бұл кезде π_k мен π_m қиылысу үшін π_k-дан A ,π_m-нен B нүктелер табылып, $\overrightarrow{AB} \in V_t$-да жатуы керек, ондай A мен B табылмаса жазақтықтар қиылыспайды. π_k мен π_m қиылысқан жағдайда қима жазықтығы $k + m - t$ өлшемді болады.

Егер π_k , π_m жазықтықтардың бағыттаушы ішкі кеңістіктерінің қосындысы V_t бүкіл векторлық кеңістікпен беттесе, онда да π_k мен π_m қиылысады.

Егер π_k, π_m жазықтықтар үшін $k \leq m$ болса және V_s бұл жазықтықтардың бағыттаушы ішкі кеңістіктерінің ең үлкен өлшемді ішкі кеңістігі болса, онда V_s-ті π_k мен π_m-нің параллельдік ішкі кеңістігі, V_s-тің өлшемі S бұл жазықтықтардың параллельдік индексі, ал $\frac{S}{K} = J$ саны жазықтықтардың параллельдік дәрежесі делінеді (әрине $J = \frac{S}{K} \leq 1$ болады).

Егер жазықтықтардың ортақ нүктесі болмаса және $S = K$, яғни $J = 1$ болса, онда жазықтықтар толығымен параллель делінеді, ал $J = 0$ болса жазықтықтар айқас болады.

Сөйтіп аффиндік A_n кеңістікке k, m өлшемді ($k \leq m$) π_k, π_m жазықтықтар былайша орналасуы мүмкін.

1. Жазықтардың тек бір ортақ нүктесі болады ($J = 0$).
2. π_k , π_m жазықтықтар π_t жазықтық бойымен қиылысады. Мұнда $0 \prec t \prec k$ $(0 \prec J \prec I)$.
3. π_k жазықтығы π_m жазықтығында жатады ($J = 1$).
4. π_k мен π_m ішінара параллель, яғни ортақ нүктесі жоқ және $0 \prec J \prec I$.
5. π_k мен π_m толығымен параллель,яғни ортақ нүктесі жоқ және $J = 1$.
6. π_k мен π_m айқасады. Олардың ортақ нүктесі жоқ және $J = 0$.

Үш өлшемді A_3 кеңістікте $\overset{\rightarrow}{\pi_1}$ жазықтық (түзу) және $\overset{\rightarrow}{\pi_2}$ екі өлшемді жазықтық үшін мұның тек 1,3,5 жағдайлары орындалады.

Ал, екі түзу $\overset{\rightarrow}{\pi_1}$ мен $\overset{\rightarrow}{\pi_1}'$ үшін 1,3,5,6 жағдайлар, $\overset{\rightarrow}{\pi_2}$ мен $\overset{\rightarrow}{\pi_2}'$ екі өлшемді жазықтық үшін 2,3,5 жағдайлар мүмкін.

A_n кеңістікке J екі түзудің параллельдік дәрежесі болса, онда не $J = 0$, не $J = 1$ ғана болуы мүмкін. Сондықтан екі түзу A_n кеңістікте 4 түрлі орналасуы мүмкін.

1. Түзулер бір нүктеде қиылысады($J = 0$).
2. Түзулер айқасады($J = 0$).
3. Түзулер беттеседі($J = 1$).
4. Түзулер толықтай параллель болады($J = 1$).

A_2 кеңістікте, яғни $n \prec 3$ болғанда түзулер айқасуы мүмкін емес.Сондықтан A_2-де түзулер өзара үш түрлі (1,3,4) орналасуы мүмкін.

22.7. Гипер жазықтықтардың өзара орналасуы.

Аффиндік A_n кеңістікте $n-1$ өлшемді π_{n-1} жазықтықты гипер жазықтық дегенбіз. Ол $n-(n-1)=1$ болатындықтан барлық коэффициенттері қатарынан 0 болмайтын мына түрдегі

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a = 0$$

сызықтық теңдеумен анықталады.

A_n кеңістікте мынадай теңдеулер мен $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a = 0$ $b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n + b = 0$ екі гипер жазықтық берілсін. Оның коэффициенттерінен мынадай $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$ және $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \dots & a_n & a \\ b_1 & b_2 \dots & b_n & b \end{pmatrix}$ матрица және кеңейтірілген матрица жасайық. Сонда олардың рангтерін r_1, r_2 десек, теңдеулер $r_1 = r_2$ болғанда ғана үйлесімді болады.

Сонда мынадай жағдайлар болуы мүмкін.

1-жағдай. $r_2 = 1$ болсын. Онда $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ болады.Сондықтан $r_1 = 1$ болады.Сөйтіп бұл кезде екі теңдеу бірдей болады да, екі жазықтық беттеседі.

2-жағдай. $r_1 = r_2 = 2$ болсын. Бұл кезде теңдеулер үйлесімді болғандықтан жүйенің шешімі болады, яғни жазықтықтың ортақ нүктесі болады. Сондықтан олардың ортақ жазықтығы болады(яғни, жазықтық бойымен қиылысады).

3-жағдай. $r_2 = 2, r_1 = 1$. Бұл кезде теңдеу жүйесі үйлесімсіз. Сондықтан жазықтықтардың ортақ нүктесі жоқ. Бұл кезде олар параллель болады. Шынында да (22-14) бойынша берілген гипер жазықтықтардың бағыттаушы ішкі кеңістіктері мына теңдеулермен беріледі:

$$a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_np_n = 0$$
$$b_1p_1 + b_2p_2 + \cdots + b_np_n = 0$$

$r = 1$ болғандықтан мұндағы коэффициенттер пропорционал болады. Сондықтан берілген жазықтықтардың бағыттаушы ішкі кеңістіктері бірдей болады. Ал, бұл ол жазықтықтар параллель болады деген сөз. Сөйтіп гипер жазықтық өзара үш түрлі орналасады: беттеседі (егер $r_1 = r_2 = 1$ болса), $n-2$ өлшемді жазықтық бойынша қиылысады ($r_1 = r_2 = 2$ болса), өзара параллель болады(егер $r_1 = 1, r_2 = 2$ болса).

1-Мысал. Төрт өлшемді A_4 аффиндік кеңістікте $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right)$ базисте $O'(4,-5,0,-6)$ нүкте және A_4 кеңістікпен байланысқан V_4 кеңістіктің $\vec{g}_1 = \{4,3,2,4\}, \vec{g}_2 = \{6,3,2,0\}, \vec{g}_3 = \{1,-1,0,2\}, \vec{g}_4 = \{0,0,1,3\}$ векторлары берілген.

Мыналарды анықтаңдар:

1°. A_4 кеңістік үшін $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3, \vec{g}_4$ векторлар базис бола алады ма, жоқ па?

4 өлшемді кеңістік базисі 4 сызықтық тәуелсіз векторлардан түруы керек. Сондықтан осы 4 вектор сызықтық тәуелді ме, жоқ па, соны анықтайық. Ол үшін оның координаталарынан жасалған анықтауышты тексереміз.

$$\begin{vmatrix}4&3&2&4\\6&3&2&0\\1&-1&0&2\\0&0&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&3&2&-2\\6&3&2&-6\\1&-1&0&2\\0&0&1&0\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}4&3&-2\\6&3&-6\\1&-1&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}7&3&4\\9&3&0\\0&-1&0\end{vmatrix}=-(-1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}7&4\\9&0\end{vmatrix}=36\neq 0$$

Анықтауыш 0-ге тең болмады. Сондықтан берілген 4 вектор сызықтық тәуелсіз. Сондықтан оларды да A_4-тың базисі үшін алуға болады.

2°. $\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4\right)$ базистен $\left(\vec{g}_1,\vec{g}_2,\vec{g}_3,\vec{g}_4\right)$ базиске көшу матрицасы қандай болады?

Көшу матрицаның 1-бағанасы $\vec{g}_1$,2-бағанасы $\vec{g}_2$, 3-бағанасы $\vec{g}_3$, 4-бағанасы $\vec{g}_4$ вектордың координаталарынан түруы керек.

Сондықтан іздеген матрица $A=\begin{pmatrix}4&6&1&0\\3&3&-1&0\\2&2&0&1\\4&0&2&3\end{pmatrix}$ болады.

3°. $\vec{e}_i$ базистен $\vec{g}_i$ базиске көшудегі нүкте координаталарын түрлендіру формуласы қандай болады?

M нүктенің ($\vec{e}_i$) базистегі координаталары (x_1,x_2,x_3,x_4), ал ($\vec{g}_i$) базистегі координаталары $\left(x_1',x_2',x_3',x_4'\right)$ болсын. Онда (20-2) бойынша көшу матрицасының 1-бағанасы x_1'-тің, 2-бағанасы x_2'-тің, 3-бағанасы x_3'-тің,4-бағанасы x_4'-тің коэффициенттері, ал $0'$-тің коэффициенттері бос мүше болуы керек. Сонда
$$\begin{aligned}x_1&=4x_1'+6x_2'+x_3'+4\\x_2&=3x_1'+3x_2'-x_3'-5\\x_3&=2x_1'+2x_2'+x_4'\\x_4&=4x_1'+2x_3'+3x_4'-6\end{aligned}$$
нүктенің берілген екі базистегі координаталарын байланыстыратын формула болады.

4°. $\vec{P}=(p_1,p_2,p_3,p_4)$ вектордың жаңа базистегі координаталары $\vec{P}'=\left(p_1',p_2',p_3',p_4'\right)$ болса, бұл екуінің арасында қандай байланыс болады. Ол байланыс (21-4) формуламен беріледі:
$$\begin{aligned}p_1&=4p_1'+6p_2'+p_3'\\p_2&=3p_1'+3p_2'-p_3'\\p_3&=2p_1'+2p_2'+p_4'\\p_4&=4p_1'+2p_3'+3p_4'\end{aligned}$$

2-Мысал. A_5 кеңістікте $M_1(2,-4,-1,3,0)$, $M_2(6,-7,2,0,1)$, $M_3(3,2,1,3,4)$, $M_4(3,1,1,2,3)$ нүктелер берілген. Олар сызықтық тәуелді ме, жоқ па?

Егер $\overrightarrow{M_1M_2}=\{4,-3,3,-3,1\}$, $\overrightarrow{M_1M_3}=\{1,6,2,0,4\}$, $\overrightarrow{M_1M_4}=\{1,5,2,-1,3\}$ векторлар сызықтық тәуелді болса, онда нүктелерде сызықтық тәуелді және керісінше болады. Вектор координаталарын түрлендіру арқылы сатылы түрге келтірейік.

$$\begin{pmatrix}1&5&2&-1&3\\1&6&2&0&4\\4&-3&3&-3&1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&5&2&-1&3\\0&1&0&1&1\\0&-23&-5&1&-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&2&5&3\\0&1&0&1&1\\0&1&-5&-23&-11\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&-1&2&5&3\\0&1&0&1&1\\0&0&-5&-24&-12\end{pmatrix}$$

диагональдың бір жағындағы элементтер 0-ге айланды, диагональда 0-ге тең емес үш элемент бар. Сондықтан нүктелер жүйесі де сызықтық тәуелсіз.

3-Мысал. Бес өлшемді A_5 аффиндік кеңістікте $A(2,0,1,0,-1)$ нүкте және $\vec{a}_1=(1,1,2,1,1)$, $\vec{a}_2=(1,2,1,-2,3)$ векторларға керілген жазықтықтың теңдеулерін құрыңдар.

Ол жазықтық екі өлшемді болады.Оның векторлық теңдеуі $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\vec{a}_1t_1+\vec{a}_2t_2$ болады.Мына координат арқылы жазсақ Π_2 жазықтықтың параметрлік теңдеуін аламыз:

$$\begin{aligned}x_1&=2+t_1+t_2\\x_2&=0+t_1+2t_2\\x_3&=1+2t_1+t_2\\x_4&=0+t_1-2t_2\\x_5&=-1+t_1+3t_2\end{aligned}$$

Бұдан t-лардан арылайық:1-2 ден $x_1-x_2=2-t_2$, $t_2=2-x_1+x_2$

$$2x_1-x_2=4+t_1,\ t_1=2x_1-x_2-4.$$

Осыларды 3,4,5-теңдеуге қойсақ: $x_3=-5+3x_1-x_2$, $x_4=4x_1-3x_2-8$, $x_5=-x_1+2x_2+1$.

Сонда $\begin{cases}3x_1-x_2-x_3-5=0\\4x_1-3x_2-x_4-8=0\\x_1-2x_2-x_5-1=0\end{cases}$ болады. Бұл жазықтықтардың жалпы теңдеуі болады.

4-Мысал. Бес өлшемді A_5 аффиндік кеңістік жазықтық теңдеулермен берілген. $\begin{cases}x_1-2x_2+x_4=0\\x_3+3x_4-x_5-3=0\end{cases}$

Мына сұрақтарға жауап табыңдар.

1.Бұл жазықтықтың өлшемі неге тең?

Ол үшін берілген теңдеулер жүйесінің матрицасын және оның кеңейтірілген матрицасын құрамыз.

$\begin{pmatrix}1&-2&0&1&0\\0&0&1&3&-1\end{pmatrix}$ және $\begin{pmatrix}1&-2&0&1&0&0\\0&0&1&3&-1&-3\end{pmatrix}$ екі матрицада да қатарлардың сәйкес элементтері пропорционал емес.Демек, матрица рангтары 2-ге тең.

Сондықтан берілген жазықтық $n-r=5-2=3$ өлшемді жазықтық болады.

2. Жазықтықтың параметрлік теңдеуі қандай болады? Үш параметр болады. Оны $t_1=x_1$, $t_2=x_2$, $t_3=x_3$ десек

$$x_4=-x_1+2x_2=-t_1+2t_2\,,x_5=x_3+3x_4-3=x_3-3t_1+6t_2-3=-3t_1+6t_2+t_3-3$$

Сонымен параметрлік теңдеу $x_1=t_1$

$$\begin{aligned} x_2&=t_2\\ x_3&=t_3\\ x_4&=-t_1+2t_2\\ x_5&=-3t_1+6t_2+t_3-3 \end{aligned}$$

Мұны бір ғана векторлық теңдеу $\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{a}_1t_1+\vec{a}_2t_2+\vec{a}_3t_3$ мен ауыстыруға болады.Мұндағы $\vec{OM}=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$, $\vec{OA}=\{0,0,0,0,-3\}$, $\vec{a}_1=\{1,0,0,-1,-3\}$, $\vec{a}_2=\{0,1,0,2,6\}$, $\vec{a}_1=\{0,0,1,0,1\}$.

5-Мысал. A_4 кеңістікте π_1 жазықтық (түзу) $A(0,4,0,1)$ нүкте мен $\vec{a}=\{1,0,0,3\}$ векторға керілген, π_2 жазықтық $B(1,1,2,2)$ нүктемен $\vec{e}_1=\{0,0,1,2\}$ $\vec{e}_2=\{1,0,-1,2\}$ векторларға керілген. Олардың өзара орналасуын зерттеу керек.

Матрица құрайық. $\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&0&1&2\\1&0&-1&2\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&0&1&2\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&2&0\\0&-1&-1&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&2&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

Демек рангы 3-ке тең. Сондықтан $\vec{a}$ вектор $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ мен компланар емес, оларға жіктелмейді, яғни олардың сызықтық комбинациясына тең емес. Сондықтан π_1 мен π_2 параллель емес.

Олардың ортақ нүктесі бар немесе жоқ екендігін анықтау үшін олардың параметрлік теңдеулерін біріктіріп шешеміз:

$$\pi_1:\begin{cases}x_1=0+1t\\x_2=4+0t\\x_3=0+0t\\x_4=1+3t\end{cases}\qquad \pi_2:\begin{cases}x_1=1+0t_1+1t_2\\x_2=1+0t_1+0t_2\\x_3=2+1t_1-1t_2\\x_4=2+2t_1+2t_2\end{cases}$$

π_1 де $x_2=4$, π_2 де $x_2=1$. Демек, екі теңдеу үйлесімсіз.Сондықтан π_1 мен π_2 айқасады.

§23. Көп өлшемді евклидтік кеңістік.

23.1. n өлшемді евклидтік векторлық кеңістік.

V_n n-өлшемді нақты векторлық кеңістіктің кез-келген $\vec{x}$, $\vec{y}$ екі векторына бір a нақты саны сәйкестендірілсін. Бұл сәйкестікті векторларды скаляр көбейту амалы дейді және оны $\vec{x}\,\vec{y}=\vec{a}$ деп жазады.

V_n нақты векторлық кеңістікте анықталған векторларды скаляр көбейту амалы төмендегі 5-топ аксиомаларын қанағаттандырсын.

5-топ. Векторларды скаляр көбейту аксиомалары.

5-1. $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in V_n$ векторлар үшін $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$ болады.

5-2. $\forall\, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V_n$ векторлар үшін $\left(\vec{x}+\vec{y}\right)\vec{z}=\vec{x}\,\vec{z}+\vec{y}\,\vec{z}$ болады.

5-3. $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in V_n$ векторлар және $\alpha \in R$ нақты саны үшін $\left(\alpha\,\vec{x}\right)\vec{y}=\vec{x}\left(\alpha\,\vec{y}\right)=\alpha\left(\vec{x}\,\vec{y}\right)$ болады.

5-4. $\forall\, \vec{x} \neq 0 \in V_n$ вектор үшін $\vec{x}\,\vec{x} \succ 0$ болады.

Осы 4 аксиома орындалатын n-өлшемді V_n векторлық кеңістікті n-өлшемді евклидтік нақты векторлық кеңістік дейді, оны $\overline{E}_n$ деп белгілейік.

Сөйтіп, n-өлшемді евклидтік нақты векторлық кеңістік $\overline{E}_n$-нің элементтері 1-1,2,3,4; 2-1,2,3,4; 3-1,2; 5-1,2,3,4 топтар аксиомалары талаптарын қанағаттандырады екен.

$\overline{E}_n$ кеңістік аксиомаларынан мыналар шығады.

1°. 5-4 аксиомадан $\vec{x}\,\vec{x} \geq 0$ болатыны және $\vec{x}$ нөлдік вектор болғанда ғана $\vec{x}\,\vec{x}=0$ болатыны шығады.

$\vec{x}\,\vec{x}=\vec{x}^{\,2}$-ты $\vec{x}$ вектордың скаляр квадраты дейді, ал одан алынған квадрат түбірді сол вектордың ұзындығы немесе модулі дейді, оны былайша жазады.

$$\left|\vec{x}\right|=\sqrt{\vec{x}^{\,2}} \tag{23-1}$$

$\left|\vec{x}\right|$ нақты сан болады, өйткені $\vec{x}\,\vec{x}=\vec{x}^{\,2} \succ 0$ сан болады.

2°. 5-3 аксиомадан $\vec{0}\,\vec{x}=\left(0\vec{y}\right)\vec{x}=0\left(\vec{y}\,\vec{x}\right)=0\cdot a=0$ болатындықтан

$$\vec{0}\,\vec{x}=0 \tag{23-2}$$

3°. 5-2 аксиоманы $\vec{x}, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n$ векторларға бірнеше рет қайталасақ, мынадай болып шығады.

$$\vec{x}\left(\vec{y}_1+\vec{y}_2+\cdots+\vec{y}_n\right)=\vec{x}\,\vec{y}_1+\vec{x}\,\vec{y}_2+\cdots+\vec{x}\,\vec{y}_n \tag{23-3}$$

4°. Егер $\vec{a}=\vec{0}$ болса, $\left|\vec{a}\right|=0$, егер $\vec{a}\neq\vec{0}$ болса $\vec{a}\neq 0$ болады.Ұзындығы 1-ге тең векторды бірлік вектор дейді. $\frac{\vec{x}}{\left|\vec{x}\right|}$ бірлік вектор болады. Оны $\vec{x}$ вектордың орты деп атайды

5°. Егер $\vec{b}=\alpha\vec{a}$ болса, онда $\left|\vec{b}\right|=\left|\alpha\right|\left|\vec{a}\right|$ болады.

6°. Коши – Буняковский теңсіздігі: $\left|\vec{x}\vec{y}\right|\leq\left|\vec{x}\right|\cdot\left|\vec{y}\right|$ (23-4)

Бұл векторлардың скаляр көбейтіндісі мен олардың ұзындықтарын байланыстырады. Бұл теңсіздікті үшін $\vec{x}-k\vec{y}$ векторын алып, квадраттасақ $\left(\vec{x}-k\vec{y}\right)^{2}\geq 0$ болар еді. Бұдан $\vec{x}^{2}-2k\vec{x}\vec{y}+k^{2}\vec{y}^{2}\geq 0$. Бұл k-ға қарағанда квадрат үшмүшелік және ол оң үшмүшелік. Сондықтан оның дискриминанты теріс сан болуы керек: $\left(\vec{x}\vec{y}\right)^{2}-\vec{x}^{2}\vec{y}^{2}\leq 0$. Бұдан $\left(\vec{x}\vec{y}\right)^{2}\leq\left|\vec{x}\right|^{2}\left|\vec{y}\right|^{2}$, $\left|\vec{x}\vec{y}\right|\leq\left|\vec{x}\right|\cdot\left|\vec{y}\right|$

7°. Коши – Буняковский теңсіздігінен $-1\leq\frac{\vec{x}\vec{y}}{\left|\vec{x}\right|\cdot\left|\vec{y}\right|}\leq 1$ болатындықтан бір α бұрышы табылып

$$\cos\varphi=\frac{\vec{x}\vec{y}}{\left|\vec{x}\right|\cdot\left|\vec{y}\right|} \qquad (23\text{-}5)$$

болатындығы шығады. Мұндағы φ саны $\vec{x}$ және $\vec{y}$ векторларының арасындағы бұрыш делінеді. (23-5)ол бұрышты табу формуласы. Ол бұрыш $0\leq\varphi\leq\pi$ аралықта болады. (23-5) тен $\vec{x}\vec{y}=\left|\vec{x}\right|\cdot\left|\vec{y}\right|\cos\varphi$ (23-6)

Егер $\varphi=\frac{\pi}{2}$ болса, векторлар ортогонал делінеді. $\cos\frac{\pi}{2}=0$ болғандықтан ортогонал векторлар үшін $\vec{x}\vec{y}=0$ (23-7) болады.

Сондықтан $\vec{e}=k\vec{a}$ болса, $\varphi=0$ болғанда $k\succ 0$, $\varphi=\pi$ болғанда $k\prec 0$ болады.

23.2. Ортогонал базис.

Егер n өлшемді евклидтік векторлық $\overline{E}_{n}$ кеңістіктің $\vec{a}_{1},\vec{a}_{2},\ldots,\vec{a}_{k}$ векторлары қос-қостан бір-біріне ортогонал болса, онда бұл векторлар жүйесі ортогонал векторлар жүйесі делінеді.

1-теорема. Нөлдік емес векторлардан жасалған ортогонал векторлар жүйесі әруақытта сызықтық тәуелсіз болады.

Дәлелі. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ векторлар жүйесі ортогонал жүйе болсын.Олар сызықтық тәуелді болады дейік, онда $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = 0$ теңдіктегі λ_i-лардан кемінде біреуі 0-ге тең емес болады.Ол $\lambda_1 \neq 0$ екен дейік. Теңдікті $\vec{a}_1$ векторларға скаляр көбейтеміз $\lambda_1\left(\vec{a}_1 \vec{a}_1\right) + \lambda_2\left(\vec{a}_2 \vec{a}_1\right) + \dots + \lambda_k\left(\vec{a}_k \vec{a}_1\right) = 0$.

Бұдан $\lambda_1\left(\vec{a}_1 \vec{a}_1\right) = 0$ болады.Ал, $\vec{a} \neq \vec{0}$ болғандықтан, соңғыдан $\lambda_1 = 0$. Бұл қайшылық берілген векторлар жүйесінің сызықтық тәуелсіз болатынын дәлелдейді.

Ал, n өлшемді V_n векторлық кеңістікте кез-келген сызықтық тәуелсіз векторлар жүйесі n-нен көп емес векторлардан тұратындықтан ортогонал векторлар жүйесіде n вектордан артық емес векторлардан тұрады.

Сөйтіп мынадай теорема тұжырымдауға болады.

2-теорема. $\overline{E}_n$ кеңістікте $\vec{0}$-емес векторлардан тұратын ортогонал векторлар жүйесі n-нен көп емес векторлардан тұрады.

3-теорема. $\overline{E}_n$ кеңістіктің кез-келген $m \prec n$ санды векторлар жүйесінің әрбір векторына ортогонал болатын $\vec{0}$ емес вектор табылады.

Шынында да $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ векторлар жүйесі біріме және $\vec{x} \neq \vec{0}$ іздеген вектор болса, онда $\left(\vec{a}_1 \vec{x}\right) = 0, \left(\vec{a}_2 \vec{x}\right) = 0$, ... , $\left(\vec{a}_m \vec{x}\right) = 0$ (*) болулары керек.

Қандайда бір $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базис алайық. $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n$ болсын. Сонда (*) былайша жазылады ($x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n, \vec{a}_1$)=0, ($x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n, \vec{a}_2$)=0, ... , ($x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n, \vec{a}_m$)=0

Егер $\left(\vec{a}_i \vec{e}_j\right) = \lambda_{ij}$ десек

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\}$$

Бұл n белгілеуді m сызықтық теңдеулер жуйесі. Жүйедегі теңдеу саны белгісіз санынан $m \prec n$ кем болғандықтан, оның 0-ден өзге шешулері болады.Демек (*) шарт орындалатын $\vec{x}$ вектор болады(табылады).

Бұл теоремадан $\overline{E}_n$-де ортогонал базис болатыны шығады.Ондай базисті құру үшін кез-келген $\vec{a}_1 \neq 0$ вектор алып, екеуіне де ортогонал болатын $\vec{a}_2$ векторды табады, одан соң ол екеуіне де ортогонал болатын $\vec{a}_3$ векторды алады.Осы процесті соза отырып $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{n-1}$ векторларға ортогонал $\vec{a}_n$ векторды табамыз. Ондай вектордың болатындығы 2,3-

теоремада айтылған. Осылай құрылған $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ векторлар жүйесі ортогонал базис болады.

Сонымен мына теорема дәлелденді.

4-теорема. n өлшемді евклидтік векторлық кеңістік $\overline{E}_n$-де ортогонал базис әруақытта болады.

Егер $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ векторлар жүйесі $\overline{E}_n$ кеңістіктін $\overline{E}_k$ ішкі кеңістігі базисі болса, онда бұл ішкі кеңістіктің ортогонал $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_k$ базисін құруға болады. Ол үшін мына формуланы пайдаланады.

$$\vec{g}_1 = \vec{a}_1 \text{ деп алады, } \vec{g}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\left(\vec{a}_2 \vec{g}_1\right)}{\left(\vec{g}_1 \vec{g}_1\right)} \vec{g}_1, \ \vec{g}_3 = \vec{a}_3 - \frac{\left(\vec{a}_3 \vec{g}_1\right)}{\left(\vec{g}_1 \vec{g}_1\right)} \vec{g}_1 - \frac{\left(\vec{a}_3 \vec{g}_2\right)}{\left(\vec{g}_2 \vec{g}_2\right)} \vec{g}_2, \ldots,$$

$$\vec{g}_i = \vec{a}_i - \frac{\left(\vec{a}_i \vec{g}_1\right)}{\left(\vec{g}_1 \vec{g}_1\right)} \vec{g}_1 - \frac{\left(\vec{a}_i \vec{g}_2\right)}{\left(\vec{g}_2 \vec{g}_2\right)} \vec{g}_2 - \cdots - \frac{\left(\vec{a}_i \vec{g}_{i-1}\right)}{\left(\vec{g}_{i-1} \vec{g}_{i-1}\right)} \vec{g}_{i-1} \qquad \text{(23-8) табады.}$$

Осыдан табылған $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n$ ортогонал базис болады.

23.3. Ортононормаланған базис.

Евклидтік n өлшемді $\overline{E}_n$ векторлық кеңістік базисі ортонормаланған делінеді, егерде оның базистік векторлары қос-қостан ортогонал болса және ұзындықтары бірге тең болса (яғни нормаланған болса). Сонда $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ ортонормаланған базис болса, онда $\left.\begin{matrix} \vec{e}_i \vec{e}_j = 1, & i = j \\ \vec{e}_i \vec{e}_j = 0, & i = j \end{matrix}\right\}$ (23-9) болады.

5-теорема. n өлшемді евклидтік $\overline{E}_n$ векторлық кеңістікте ортонормаланған базис болады.

Дәлелі. 4-теорема бойынша $\overline{E}_n$-де ортогонал базис $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ болады. Бұл векторларды нормаласақ (яғни ұзындығы 1-ге келтірсек)

$\vec{e}_1 = \dfrac{\vec{a}_1}{\left|\vec{a}_1\right|}$, $\vec{e}_2 = \dfrac{\vec{a}_2}{\left|\vec{a}_2\right|}$, ... $\vec{e}_n = \dfrac{\vec{a}_n}{\left|\vec{a}_n\right|}$ бұлар ортонормаланған $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базис жасайды. Өйткені олар ортогонал, яғни $\vec{e}_j \perp \vec{e}_j$ және ұзындықтары 1-ге келтірілген.

Егер $\overline{E}_n$ кеңістікке ортонормаланған $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\right)$ базис ендірілсе және бұл базисте $\vec{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $\vec{y} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ векторлар берілсе, онда мынадай болады.

$$\vec{x}\vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \qquad \text{(23-10)}$$

$$\left|\vec{x}\right| = \sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + \cdots + x_n^{\ 2}} \qquad (23\text{-}11)$$

$$\cos\varphi = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + \cdots + x_n^{\ 2}}\sqrt{y_1^{\ 2} + y_2^{\ 2} + \cdots + y_n^{\ 2}}} \qquad (23\text{-}12)$$

23.4. Ортогонал матрица.

Квадраттық A матрицаның кері матрицасы A^{-1} мен транспозицияланған A^1 матрицасы өзара тең $A^{-1} = A^1$ болса, онда OA ортогонал матрица делінеді. $A^{-1} = A^1$ теңдік $AA^1 = E$, $A^1 A = E$ (E бірлік матрица) теңдіктермен мәндес соңғы теңдікті төмен жазсақ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{болады.Бұдан}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{11} + a_{12}a_{12} + \cdots + a_{1n}a_{1n} & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + \cdots + a_{1n}a_{2n} & \dots & a_{11}a_{n1} + a_{12}a_{n2} + \cdots + a_{1n}a_{nn} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} + \cdots + a_{2n}a_{1n} & a_{21}a_{21} + a_{22}a_{22} + \cdots + a_{2n}a_{2n} & \dots & a_{21}a_{n1} + a_{22}a_{n2} + \cdots + a_{2n}a_{nn} \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}a_{11} + a_{n2}a_{12} + \cdots + a_{nn}a_{1n} & a_{n1}a_{21} + a_{n2}a_{22} + \cdots + a_{nn}a_{2n} & \cdots & a_{n1}a_{n1} + a_{n2}a_{n2} + \cdots + a_{nn}a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Бұдан матрицалардың теңдік ережесі бойынша

$$\left.\begin{aligned} & a_{i1}^{\ 2} + a_{i2}^{\ 2} + \cdots + a_{in}^{\ 2} = 1, \quad i = 1,2,,\dots,n \\ & a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \cdots + a_{in}a_{jn} = 0, \quad i \neq j \end{aligned}\right\} \qquad (23\text{-}13)$$

Осы сияқты

$$\left.\begin{aligned} & a_{1j}^{\ 2} + a_{2j}^{\ 2} + \cdots + a_{nj}^{\ 2} = 1, \quad j = 1,2,,\dots,n \\ & a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} = 0, \quad i \neq j \end{aligned}\right\} \qquad (23\text{-}14)$$

Сонымен ортогонал матрицаның мынадай қасиеті болады:

1°. Қатарларының элементтерінің квадраттарының қосындысы 1-ге тең болады. Бұл бағана үшінде дұрыс.

2°. Әр қатардың элементтерінің басқа қатардың сәйкес элементтеріне көбейтіндісінің қосындысы 0-ге тең болады. Бұл бағана элементтері үшінде дұрыс.

3°. A мен A' матрицалардың анықтауыштары өзара тең болатындықтан $|A| = |A'|$, $|A|^2 = 1$болады. Бұдан $|A| = \pm 1$. Сөйтіп ортогонал матрицаның анықтауышы не +1-ге, не -1-ге тең болады.

6-теорема. $\overline{E_n}$ кеңістікте берілген $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \dots, \vec{e}_n{}'$ базис векторлары ортонормаланған $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базис векторларына $\vec{e}_i = a_{ji}\vec{e}_j$ формуламен жіктелсе, онда $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \dots, \vec{e}_n{}'$ ортонормаланған базис болуы үшін $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\right)$ базистен $\left(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \dots, \vec{e}_n{}'\right)$ базиске көшу матрицасы ортогонал матрица болуы керек.

Дәлелі. Шарт бойынша $\vec{e}_i{}' = a_{1i}\vec{e}_1 + a_{2i}\vec{e}_2 + \ldots + a_{ni}\vec{e}_n$ және $\vec{e}_j{}' = a_{1j}\vec{e}_1 + a_{2j}\vec{e}_2 + \ldots + a_{nj}\vec{e}_n$.

Сонда $\vec{e}_i{}'\vec{e}_j{}' = \left(a_{1i}\vec{e}_1 + a_{2i}\vec{e}_2 + \cdots + a_{ni}\vec{e}_n\right)\left(a_{1j}\vec{e}_1 + a_{2j}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nj}\vec{e}_n\right)$.

Құны көбейтсек, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ ортонормаланған базис болғандықтан (23-9) орындалады да былай болып шығады:

$$\vec{e}_i{}'\vec{e}_j{}' = a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} \qquad (*)$$

Егер $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \ldots, \vec{e}_n{}'$ базис ортонормаланған десек $\vec{e}_i{}'^2 = 1, \vec{e}_i{}'\vec{e}_j{}' = 0$ болады да (*) теңдіктен (23-14) шығады, яғни матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots\ldots a_{n1} \\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots a_{n2} \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{1n} & a_{2n}\ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix}$ ортогонал болады.Мұның керісі де дұрыс.

Мысалы: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ матрицалар ортогонал матрицалар болады. Бұларды қатар (бағана) элементтерінің квадраттарының қосындысы 1-ге тең, ал екі қатардың (бағананың) сәйкес элементтірінің көбейтіндісінің қосындысы 0-ге тең $: \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = (-\sin\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$, $\cos\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha = 0$. Сол сияқты $1^2 + 0^2 + 0^2 = 1, \quad 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0$.

Бұлардың анықтауыштары $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1, \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix} = -1$.

23.5. Ортогонал түрлендіру.

Евклидтік *n* өлшемді $\overline{E_n}$ векторлық кеңістікте сызықтық түрлендіру f Ортогонал түрлендіру делінеді, егерде ол түрлендіруде вектор ұзындығы өзгермейтін болса, яғни $f\left(\vec{x}\right) = \vec{x}{}'$ болса, $\left|\vec{x}\right| = \left|\vec{x}{}'\right| = \left|f\left(\vec{x}\right)\right|$ болуы керек.

7-теорема. Ортогонал түрлендіруде векторлардың скаляр көбейтіндісі өзгермейді.

Дәлелі. $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}_n$ векторлар f ортогонал түрлендіруде $f\left(\vec{x}\right)$, $f\left(\vec{y}\right)$ векторларға көшсін.

$$\left(\vec{x} + \vec{y}\right)^2 = \vec{x}^2 + 2\vec{x}\vec{y} + \vec{y}^2, \ \left|\vec{x} + \vec{y}\right|^2 = \left|\vec{x}\right|^2 + 2\vec{x}\vec{y} + \left|\vec{y}\right|^2 \qquad (**)$$

Сол сияқты $\left|f\left(\vec{x}\right) + f\left(\vec{y}\right)\right|^2 = \left|f\left(\vec{x}\right)\right|^2 + 2f\left(\vec{x}\right)f\left(\vec{y}\right) + \left|f\left(\vec{y}\right)\right|^2 \qquad (***)$

Ал, ортогонал түрлендіру сызықтық түрлендіру болатындықтан

$f\left(\vec{x}\right)+f\left(\vec{y}\right)=f\left(\vec{x}+\vec{y}\right)$ ортогонал түрлендіруде вектор ұзындығы өзгермейтіндіктен (***)ны былай жазуға болады: $\left|\vec{x}+\vec{y}\right|^2=\left|\vec{x}\right|^2+2f\left(\vec{x}\right)f\left(\vec{y}\right)+\left|\vec{y}\right|^2$.

Мұны мен (**)дан $f\left(\vec{x}\right)f\left(\vec{y}\right)=\vec{x}\,\vec{y}$ болып шығады.

Бұдан мынадай салдар шығады.

1. Ортогонал түрлендіруде бұрыш шамасы өзгермейді.
2. Ортогонал түрлендіруде ортонормаланған базис ортонормаланған базиске көшеді.

8-теорема. Сызықтық түрлендіру ортогонал түрлендіру болуы үшін оның матрицасы қандайда бір ортонормаланған базисте ортогонал матрица болуы керек.

23.6. *n* өлшемді эевклидтік кеңістік.

n өлшемді A_n аффиндік кеңістік n өлшемді евклидтік нүктелік кеңістік немесе жай ғана евклидтік кеңістік делінеді, егерде A_n мен байланысты V_n векторлық кеңістік n өлшемді евклидтік кеңістік болса. Бұл кеңістікті E_n деп белгійік.

Аффиндік A_n кеңістік туралы айтылған барлық тұжырымдар евклидтік E_n кеңістік үшінде дұрыс болады. Бірақ, евклидтік E_n кеңістіктің (Мұнда скаляр көбейту амалы анықталғандықтан) өзіндік ерекшеліктері бар.

Ол қасиеттерді метрикалық қасиеттер дейді. Метрикалық қасиеттерді қарастыру үшін әдетте тікбұрышты декарттық координаталар жүйесі қолданылады. Евклидтік E_n кеңістікте аффиндік координаталар жүйесі тікбұрышты декарттық координаталар жүйесі делінеді, егерде оның координаттық векторлары $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ бұл кеңістікпен байланымты векторлық кеңістіктің ортонормаланған базисін жасайтын болса.

Евклидтік E_n кеңістікте A мен B екі нүктенің ара қашықтығы деп $\vec{AB}$ вектордың ұзындығын айтады: $AB=\left|\vec{AB}\right|$ (23-15)

Егер тікбұрышты координата жүйесінде $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $B(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ нүктелер берілсе, онда

$$\vec{AB}=\{y_1-x_1,y_2-x_2,\ldots,y_n-x_n\} \quad (23\text{-}16)$$

$$AB=\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2} \quad (23\text{-}17)$$

Егер тікбұрышты координаталар жүйесінде A,B,C үш нүкте берілсе, онда

$$|AB|+|BC|\geq|AC| \quad (23\text{-}18)$$

Дәлелі. 4-2 аксиома бойынша $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$, квадраттасақ

$$\left|\vec{AC}\right|^2 = \left|\vec{AB}\right|^2 + 2\left|\vec{AB}\right|\left|\vec{BC}\right| + \left|\vec{BC}\right|^2 .$$

Коши-Буняковский теңсіздігі бойынша $\vec{AB} \cdot \vec{BC} \le \left|\vec{AB}\right|\left|\vec{BC}\right|$ болатындықтан

$$\left|\vec{AC}\right|^2 \le \left|\vec{AB}\right|^2 + 2\left|\vec{AB}\right|\left|\vec{BC}\right| + \left|\vec{BC}\right|^2 .$$

Бұдан $\left|\vec{AC}\right|^2 = \left(\left|\vec{AB}\right| + \left|\vec{BC}\right|\right)^2$, $\left|\vec{AC}\right| \le \left|\vec{AB}\right| + \left|\vec{BC}\right|$, яғни $AC \le AB + BC$.

Тікбұрышты координата жүйесінің бірінен екіншісіне көшкенде нүктенің ол жүйедегі координаталарын $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ және $\left\{x_1', x_2', \ldots, x_n'\right\}$ болса, олар арасында мынадай қатыс болады:

$$x_i = a_{ij}x_j' + a_i \text{ , } i, j = 1,2,\ldots,n \tag{23-19}$$

Толық жасасақ

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + \ldots + a_{1n}x_n' + a_1 \\ x_2 = a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + \ldots + a_{2n}x_n' + a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x_1' + a_{n2}x_2' + \ldots + a_{nn}x_n' + a_n \end{array}\right\} \tag{23-19.a}$$

1-Мысал. Евклидтік E_4 кеңістікте $\vec{a}_1 = \{1,4,3,5\}$, $\vec{a}_2 = \{4,-2,-4,0\}$, $\vec{a}_3 = \{-2,-4,-3,0\}$, $\vec{a}_4 = \{0,0,1,-1\}$ векторлар берілген.

Мыналарды табу керек.

1. $\vec{a}_1$ мен $\vec{a}_2$ векторлардың скаляр көбейтіндісін табыңдар.

$$\vec{a}_1 \vec{a}_2 = 1 \cdot 4 + 4(-2) + 3(-4) + 5 \cdot 0 = 4 - 8 - 12 + 0 = -16$$

2. $\vec{a}_1$, $\vec{a}_3$ векторлардың ұзындығын табыңдар.

$$\left|\vec{a}_1\right| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 16 + 9 + 25} = \sqrt{51}$$

$$\left|\vec{a}_3\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{4 + 16 + 9} = \sqrt{29}$$

3. $\vec{a}_2$ вектордың бірлік векторын табыңдар(нормалаңдар).Оның бірлік векторы $\dfrac{\vec{a}_2}{\left|\vec{a}_2\right|}$ болады.Сондықтан $\left|\vec{a}_2\right| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{16 + 4 + 16 + 0} = 6$.

4. $\left(\vec{a}_3 - \vec{a}_4\right)^2$ табыңдар.

$$\left(\vec{a}_3 - \vec{a}_4\right)^2 = \left|\vec{a}_3 - \vec{a}_4\right|^2 ;$$

Ал, $\vec{a}_3 - \vec{a}_4 = \{-2 - 0, -4 - 0, -3 - 1, 0 + 1\} = \{-2, -4, -4, 1\}$

Сонда $\left(\vec{a}_3-\vec{a}_4\right)^2=(-2)^2+(-4)^2+(-4)^2+1^2=4+16+16+1=37$

Сонымен $\left(\vec{a}_3-\vec{a}_4\right)^2=37$.

2-Мысал. $\vec{a}=\{1,2,2,3\}$, $\vec{b}=\{3,1,5,1\}$ векторлар арасындағы бұрышты табу керек.

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\,\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{1\cdot3+2\cdot1+2\cdot5+3\cdot1}{\sqrt{1+4+4+9}\sqrt{9+1+25+1}}=\frac{18}{\sqrt{18}\sqrt{36}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\ \text{Демек}\ \varphi=\frac{\pi}{4};$$

3-Мысал. . $\vec{a}_1=\{1,2,-3,4\},\vec{a}_2=\{6,2,-2,-4\}$ векторлар E_4-те берілген. Олардың ортогонал екенін анықтап, оларды E_4-тен ортогонал базиске дейін толықтырыңдар.

Біріншіден, векторлар ортогонал болса, олардың скаляр көбейтіндісі 0-ге тең болуы керек. Тексереміз $\vec{a}_1\vec{a}_2=1\cdot6+2\cdot2-3\cdot(-2)+4(-4)=0$. Демек $\vec{a}_1$ мен $\vec{a}_2$ ортогонал екен.

Екіншіден, E_4 кеңістіктің базисі 4 вектордан тұрады. Оның екеуі белгілі $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$.Қалған екеуін $\vec{a}_3=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, $\vec{a}_4=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$дейік.Ортогонал базис болуы үшін базистік векторлар қос- қостан өзара ортогонал болуы керек, яғни $\vec{a}_1\cdot\vec{a}_3=0$, $\vec{a}_2\cdot\vec{a}_3=0$ болуы керек.Бұдан скаляр көбейту ережесі бойынша: $\begin{array}{l}x_1+2x_2-3x_3+4x_4=0\\6x_1+2x_2-2x_3-4x_4=0\end{array}$ $\begin{array}{l}x_1+2x_2=3x_3-4x_4\\6x_1+2x_2=2x_3+4x_4\end{array}$.Бұдан $\begin{array}{l}5x_1=-x_3+8x_4\\10x_2=16x_3-28x_4\end{array}$

$\begin{array}{l}x_1=-\frac{1}{5}x_3+\frac{8}{5}x_4\\x_2=\frac{8}{5}x_3-\frac{14}{5}x_4\end{array}$.Бұдан егер $x_4=0$ десек $x_1=-\frac{1}{5}x_3, x_2=\frac{8}{5}x_3$.

Сонда $\vec{a}_3=\left\{-\frac{1}{5}x_3,\frac{8}{5}x_3,x_3,0\right\}=\{-1,8,5,0\}$ деуге болады.$\vec{a}_4$ вектор $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ векторлардың үшеуіменде ортогонал болу керек. Сондықтан $\vec{a}_1\cdot\vec{a}_4=0$, $\vec{a}_2\cdot\vec{a}_4=0,\vec{a}_3\cdot\vec{a}_4=0$ болуы керек.

Бұларды координаталары арқылы жазсақ $\begin{cases}y_1+2y_2-3y_3+4y_4=0\\6y_1+2y_2-2y_3-4y_4=0\\-y_1+8y_2+5y_3+0y_4=0\end{cases}$.

Бұдан $\Delta=\begin{vmatrix}1&2&-3\\6&2&-2\\-1&8&5\end{vmatrix}=10+4-144-6-60+16=-180$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-4y_4 & 2 & -3\\ 4y_4 & 2 & -2\\ 0 & 8 & 5\end{vmatrix}=-40y_4-96y_4-64y_4-40y_4=-240y_4,\quad y_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-240y_4}{-180}=\frac{4}{3}y_4$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & -4y_4 & -3\\ 6 & 4y_4 & -2\\ -1 & 0 & 5\end{vmatrix}=20y_4-8y_4-12y_4+120y_4=120y_4,\quad y_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{120y_4}{-180}=-\frac{2}{3}y_4$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & -4y_4\\ 6 & 2 & 4y_4\\ -1 & 8 & 0\end{vmatrix}=-192y_4-8y_4-8y_4-32y_4=-240y_4,\quad y_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-240y_4}{-180}=\frac{4}{3}y_4$$

Сонымен $\vec{a}_4=\left\{\frac{4}{3}y_4,-\frac{2}{3}y_4,\frac{4}{3}y_4,y_4\right\}=\{4,-2,4,3\}$.

Векторлар $\vec{a}_1=\{1,2,-3,4\},\vec{a}_2=\{6,2,-2,-4\},\vec{a}_3=\{-1,8,5,0\},\vec{a}_4=\{4,-2,4,3\}$ ортогонал базис болады. Өйткені бұлар қос-қостан ортогонал және $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ сызықтық тәуелсіз.

Мұны ортонормаланған базиске айналдыру үшін бұл векторларды нормалау керек, яғни өзінің ұзындықтарына бөлу керек.

$$\vec{e}_1=\frac{\vec{a}_1}{\left|\vec{a}_1\right|}=\left\{\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{2}{\sqrt{30}},\frac{-3}{\sqrt{30}},\frac{4}{\sqrt{30}}\right\},\quad \vec{e}_2=\frac{\vec{a}_2}{\left|\vec{a}_2\right|}=\left\{\frac{6}{\sqrt{60}},\frac{2}{\sqrt{60}},\frac{-2}{\sqrt{60}},\frac{-4}{\sqrt{60}}\right\},$$

$$\vec{e}_3=\frac{\vec{a}_3}{\left|\vec{a}_3\right|}=\left\{\frac{-1}{\sqrt{90}},\frac{8}{\sqrt{90}},\frac{5}{\sqrt{90}},0\right\},\quad \vec{e}_4=\frac{\vec{a}_4}{\left|\vec{a}_4\right|}=\left\{\frac{4}{\sqrt{45}},-\frac{2}{\sqrt{45}},\frac{4}{\sqrt{45}},\frac{3}{\sqrt{45}}\right\}.$$

Бұл векторлар E_4 кеңістік үшін ортонормаланған базис болады.

4-Мысал. Төмендегі $\vec{a}_1=\{1,2,0,1\},\vec{a}_2=\{1,1,1,0\},\vec{a}_3=\{1,0,1,0\},\vec{a}_4=\{1,3,0,1\}$ векторлар жүйесіне керілген ішкі кеңістіктің ортонормаланған базисін құрыңдар.
Шешуі: Алдымен бұл ішкі кеңістіктін базисін анықтаймыз.Ол үшін мына матрицаның рангын табамыз.

$$\begin{pmatrix}1&2&0&1\\1&1&1&0\\1&0&1&0\\1&3&0&1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&-1&1&-1\\0&-2&1&-1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&0&0\\0&-1&1&-1\\0&-2&1&-1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_4$ сызықты тәуелсіз екен, рангы 3-ке тең. Сондықтан берілген ішкі кеңістік үшін $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_4$ базис болады.

Алдымен бұл векторларды ортогоналдаймыз.Ол үшін $\vec{g}_1=\vec{a}_1=\{1,2,0,1\}$ деп аламыз.

$$\vec{g}_2=\vec{a}_2-\frac{\left(\vec{a}_2\vec{g}_1\right)}{\left(\vec{g}_1\vec{g}_1\right)}\vec{g}_1=\vec{a}_2-\frac{1+2+0+0}{1+4+0+1}\vec{g}_1=(1,1,1,0)-\frac{1}{2}(1,2,0,1)=\left\{\frac{1}{2},0,1,-\frac{1}{2}\right\}$$

$$\vec{g}_3=\vec{a}_3-\frac{\left(\vec{a}_3\vec{g}_1\right)}{\left(\vec{g}_1\vec{g}_1\right)}\vec{g}_1-\frac{\left(\vec{a}_3\vec{g}_2\right)}{\left(\vec{g}_2\vec{g}_2\right)}\vec{g}_2=\vec{a}_3-\frac{1+6+0+1}{1+4+0+1}\vec{g}_1-\frac{\frac{1}{2}+0+0-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+0+1+\frac{1}{4}}\vec{g}_2=(1,3,0,1)-\frac{4}{3}(1,2,0,1)-0\left(\frac{1}{2},0,1,-\frac{1}{2}\right)=\left\{-\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,-\frac{1}{3}\right\}$$

Сонымен $\vec{g}_1=\{1,2,0,1\}$, $\vec{g}_2=\left\{\frac{1}{2},0,1,-\frac{1}{2}\right\}$, $\vec{g}_3=\left\{-\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,-\frac{1}{3}\right\}$ векторлар ортогонал базисті құрайды. Енді бұл базисті нормалаймыз.

$$\vec{e}_1=\frac{\vec{g}_1}{\left|\vec{g}_1\right|}=\frac{\{1,2,0,1\}}{\sqrt{6}}=\left\{\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3},0,\frac{\sqrt{6}}{6}\right\}$$

$$\vec{e}_2=\frac{\vec{g}_2}{\left|\vec{g}_2\right|}=\frac{\left\{\frac{1}{2},0,1,-\frac{1}{2}\right\}}{\frac{\sqrt{6}}{2}}=\left\{\frac{1}{\sqrt{6}},0,\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}=\left\{\frac{\sqrt{6}}{6},0,\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{6}\right\}$$

$$\vec{e}_3=\frac{\vec{g}_3}{\left|\vec{g}_3\right|}=\frac{\left\{\frac{-1}{3},\frac{1}{3},0,-\frac{1}{3}\right\}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$$

Міне осы $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ ортонормаланған базис болады. Бұлардың ұзындықтары 1-ге тең және қос-қостан ортогонал.

$$\vec{e}_1\vec{e}_2=\frac{6}{36}+0+0-\frac{6}{36}=0,\ \vec{e}_1\vec{e}_3=-\frac{\sqrt{18}}{18}+\frac{\sqrt{18}}{9}+0-\frac{\sqrt{18}}{18}=0$$

$$\vec{e}_2\vec{e}_3=-\frac{\sqrt{18}}{18}+0+0+\frac{\sqrt{18}}{18}=0$$

Қайталау сұрақтары мен есептер.

1. Жиын векторлық кеңістік болу үшін ол жиында қандай амалдар анықталуы керек?
2. Векторларды қосу аксиомалары қанша және қандай?
3. Векторларды санға көбейту аксиомалары қанша және қандай?
4. Нақты векторлық кеңістік деп нені айтады, мысал
5. Векторлар жүйесінің сызықтық комбинациясы деген не?
6. Векторлар жүйесінің сызықтық тәуелді және тәуелсіз болу анықтамалары қандай?
7. Берілген векторлар жүйесі ішінде нөлдік вектор болса ол жүйенің сызықтық тәуелді болу себебе не?
8. Егер берілген векторлар жүйесінің бірі қалғандарының сызықтық комбинациясынан тұрса, оның сызықтық тәуелді болу себебі не?

9. Өлшемдік аксиомалар тобы неше аксиомадан тұрады және олар қалай аталады?
10. n өлшемді векторлық кеңістік деген не?
11. n өлшемді V_n векторлық кеңістіктің базисі деген не, ол қанша вектордан тұрады және қандай вектордан тұрады?
12. Базистік векторлар жиынына тағы бір вектор қосса не болады?
13. Вектор координаталары деген не, оның қандай қасиеттері бар?
14. Вектор координаталарын түрлендіру формуласы қандай?
15. Бір базистен екінші базиске көшу матрицасы қалай жасалады?
16. Векторлық кеңістіктің ішкі кеңістігі деген не?
17. Екі ішкі кеңістіктің қосындысы, қимасы деген не?
18. Векторлық кеңістікті бейнелеу қандай кезде сызықтық бейнелеу делінеді, жалпы бейнелеу деген не? Изоморфты бейнелеу деген не?
19. Екі векторлық кеңістік қандай жағдайда изоморфты болады?
20. Жиын аффиндік кеңістік болу үшін, оның элементтері не болады және онда қандай амал орындалады?
21. Векторларды өлшеп салу аксиомалары қанша және қандай?
22. Аффиндік кеңістік дегеніміз не?
23. Аффиндік координата жүйесі деген не, нүкте координаты деген не? Нүкте арасы қалай табылады?
24. A_n кеңістіктегі нүкте координаталарын түрлендіру формуласы қандай?
25. A_n кеңістікте берілген нүктелер жүйесі қандай жағдайда сызықтық тәуелді және тәуелсіз делінеді?
26. k өлшемді жазықтық деген не, оның бағыттаушы ішкі кеңістігі деген не?
27. k өлшемді $\Pi_k = (A, V_k)$ жазықтықта қанша нүкте, қанша вектор болады? Себебі не?
28. $\Pi_k = (A, V_k)$ жазықтықта A нүктесін қалай атайды, A-ны басқа нүктемен алмастыруға болады ма?
29. Көп өлшемді жазықтықтың параметрлік және жалпы теңдеулері мен векторлық теңдеуі қандай болады?
30. Бір, екі өлшемді жазықтықтардың теңдеулері қандай болады?
31. A_n кеңістікте Π_k жазықтық қанша сызықтық тәуелсіз теңдеуден тұрады.
32. Гипержазықтық деген не?
33. Көп өлшемді жазықтықтар өзара қандай орналасуы мүмкін? Қалай орналасқанын ажырату белгісі қандай?
34. A_n кеңістіктегі Π_k, Π_m жазықтықтарының өзара орналасу мүмкіндіктері қандай?
35. A_n де түзулер қалай орналасуы мүмкін?
36. Гипержазықтықтардың өзара орналасу мүмкіндіктері қандай(оның белгілері қандай)?
37. Векторларды скаляр көбейту аксиомалары қандай?
38. n өлмемді евклидтік векторлық кеңістік деген не?
39. Коши-Буняковский теңсіздігі қандай?

40. Вектор ұзындығы леген не, оны қалай табады? Вектор арасындағы бұрышты қалай табады?

41. Ортогонал базис деген не, базисті ортогоналдау жолы қандай?

42. Ортонормаланған базис деген не? Ортогонал базисті қалайша ортонормаланған базиске айналдыруға болады?

43. Ортонормаланған базисте векторлардың скаляр көбейтіндісі, ұзындығы, арасындағы бұрышы қандай формулалармен табылады?

44. ортогонал матрица, ортогонал түрлендіру деген не?

45. n өлшемді евклидтік кеңістік деген не? Бұл кеңістікте нүкте арасы қалай табылады?

46. Координата басынан шығатын, ұшы бірінші ширекте жататын векторлар жиыны(жазықтықта) векторлық кеңістік болады ма, жоқ па?

47. Мына векторлықтеңдеуді $2\vec{a}_1+3\vec{a}_2-\vec{a}_3-7\vec{x}=\vec{a}_4$ шешіңдер, егер $\vec{a}_1=\{-1,2,-3,4\}, \vec{a}_2=\{-1,-1,-1,5\}, \vec{a}_3=\{2,-5,-1,3\}, \vec{a}_4=\{2,1,-2,-1\}$ болса.

48. V_5 кеңістікте берелген мына векторлардың $\vec{a}_1=\{3,6,5,6,4\}, \vec{a}_2=\left\{2,3,3,\frac{5}{2},2\right\}$, $\vec{a}_3=\{6,12,13,9,7\}$ сызықтық тәуелсіз екенін дәлелдеңдер.

49. V_4 кеңістік үшін мына векторлар жүйесі $\vec{a}_1=\{2,3,4,-3\}$,$\vec{a}_2=\{-5,-4,-9,2\}$, $\vec{a}_3=\{4,7,8,-5\}, \vec{a}_4=\{3,5,5,3\}$ базис болады ма, жоқ па?

50. V_5 кеңістікте берілген мына векторларға керілген $\vec{a}_1=\{1,1,1,1,0\}$, $\vec{a}_2=\{1,1,-1,-1,-1\}, \vec{a}_3=\{2,2,0,0,-1\}, \vec{a}_4=\{1,1,5,5,2\}, \vec{a}_5=\{1,-1,-1,0,0\}$ ішкі кеңістіктің өлшемі мен базисін табыңдар.

51. A_4 кеңістікте $M(-1,0,2,2)$ нүкте мен $\vec{a}=\{2,1,4,4\}$, $\vec{b}=\{0,0,7,7\}$ векторларға керілген жазықтық теңдеуі қандай болады?

52. Мына нүктелермен $A(2,1,-3,4)$, $B(0,1,-2,17)$, $C(3,-2,-1,0)$, $D(2,-5,2,9)$ бір жазықтықта жататынын дәлелдеңдер.

53. $3x_1+2x_2+x_3-2x_4+4=0$ гипержазықтықпен мына түзулердің $x_1=1+t$, $x_2=-1-2t$, $x_3=3t$, $x_4=2+t$, $t\geq 0$ қиылысу нүктелерін табыңдар.

54. $A(4,0,-1,2)$, $B(0,3,2,1)$, $C(1,-1,-1,0)$, $D(2,-1,-4,-5)$ нүктелер берілген. AB мен CD түзулер өзара қалай орналасқан?

55. $\vec{a}=\{1,2,2,0\}$, $\vec{b}=\{5,1,3,1\}$ векторлар берілген.

а) $\vec{a}$ вектордың ұзындығын табыңдар.

б) $\vec{b}$ вектордың нормалаңдар.

в) $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлардың скаляр көбейтіндісін табыңдар.

г) $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлардың арасындағы бұрышты табыңдар.

VIII тарау. Квадраттық форма және квадрика.

§ 24. Аффиндік кеңістіктегі квадраттық форма.

24.1. Сызықтық форма.

n өлшемді нақты векторлық V_n кеңістіктің әрбір $\vec{x}$ векторына бір нақты a саны сәйкестенсін, яғни V_n кеңістікте аргументті вектор $\vec{x}$ болатын **сандық функция** $a\left(\vec{x}\right)$ анықталсын (Мұны $a: V_n \to R$ бейнелеуі берілді деп айтуға да болады).

Вектор аргументті сандық функция $a\left(\vec{x}\right)$ сызықтық функция делінеді, егер ол мына екі шартты қанағаттандырса,

1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V_n$ векторлар үшін $a\left(\vec{x}+\vec{y}\right) = a\left(\vec{x}\right) + a\left(\vec{y}\right)$ (24-1) болса

2. $\forall \vec{x} \in V_n$ вектор және $\forall \alpha \in R$ нақты сан үшін $a\left(\alpha\vec{x}\right) = \alpha a\left(\vec{x}\right)$ (24-2) болса

V_n кеңістіктің $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\right)$ базисі болсын. Онда $\vec{x} \in V_n$ вектор $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ болып, базиске бірмәнді жіктелер еді. Егер $a\left(\vec{x}\right)$ сызықтық функция болса

$a\left(\vec{x}\right) = a\left(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n\right) = x_1 a\left(\vec{e}_1\right) + x_2 a\left(\vec{e}_2\right) + \cdots + x_n a\left(\vec{e}_n\right)$ болады. Егер $a\left(\vec{e}_i\right) = a_i$ деп белгілесек, онда соңғы теңдіктен

$$a\left(\vec{x}\right) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \sum a_i x_i \qquad (24\text{-}3)$$

Бұл $\vec{x}$ -тың координаталары $x_1, x_2, \ldots x_n$-ге қарағанда бір дәрежелі біртекті сызықтық көпмүшелік.

Әдетте k дәрежелі біртекті сызықтық көпмүшелікті k дәрежелі **сызықтық форма** дейді, оны $k=1$ болғанда жай ғана **сызықтық форма**, $k=2$ болғанда **квадраттық форма** дейді.

(24-3) бойынша вектор аргументті сандық функция $a\left(\vec{x}\right)$ өзінің аргументінің координаталарына қарағанда бір дәрежелі біртекті сызықтық көпмүшелік түрінде өрнектелетіні шығады. Сондықтан сызықтық функцияны сызықтық форма деп те атайды.

24.2. Бисызықтық форма.

n өлшемді нақты векторлық V_n кеңістіктің әрбір $\vec{x}, \vec{y}$ екі векторына бір нақты a саны сәйкестенсін, яғни V_n кеңістікте аргументті екі $\vec{x}, \vec{y}$ вектор болатын $a\left(\vec{x},\vec{y}\right)$ сандық функция анықталсын (Мұны $a:V\times V\to R$ бейнелеуі берілсін деп айтуға да болады).

V_n кеңістікте анықталған екі вектор аргументті сандық функция $a\left(\vec{x},\vec{y}\right)$-ты **бисызықтық функция** дейді, егер ол екі аргументті бойынша да сызықтық функция болса, яғни

бірінше́ден, $a\left(\vec{x}_1+\vec{x}_2,\vec{y}\right)=a\left(\vec{x}_1,\vec{y}\right)+a\left(\vec{x}_2,\vec{y}\right)$ және $a\left(\alpha\vec{x},\vec{y}\right)=\alpha a\left(\vec{x},\vec{y}\right)$, (24-4)

екіншіден, $a\left(\vec{x},\vec{y}_1+\vec{y}_2\right)=a\left(\vec{x},\vec{y}_1\right)+a\left(\vec{x},\vec{y}_2\right)$ және $a\left(\vec{x},\alpha\vec{y}\right)=\alpha a\left(\vec{x},\vec{y}\right)$ (24-5)

болса.

V_n-нің $\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n\right)$ базисі болсын. Векторлар оған былайша жіктелсін: $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n=x_i\vec{e}_i$,

$\vec{y}=y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+\ldots+y_n\vec{e}_n=y_j\vec{e}_j$.

Сонда (24-4,5)-ті ескерсек мынадай болар еді.

$$a\left(\vec{x},\vec{y}\right)=a\left(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\cdots+x_n\vec{e}_n,\, y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+\cdots+y_n\vec{e}_n\right)=$$

$$=x_1a\left(\vec{e}_1,\sum y_j\vec{e}_j\right)+x_2a\left(\vec{e}_2,\sum y_j\vec{e}_j\right)+\cdots+x_na\left(\vec{e}_n,y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+\cdots+y_n\vec{e}_n\right)=$$

$$=x_1y_1a\left(\vec{e}_1,\vec{e}_1\right)+x_1y_2a\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)+\cdots+x_1y_na\left(\vec{e}_1,\vec{e}_n\right)+$$

$$+x_2y_1a\left(\vec{e}_2,\vec{e}_1\right)+x_2y_2a\left(\vec{e}_2,\vec{e}_2\right)+\cdots+x_2y_na\left(\vec{e}_2,\vec{e}_n\right)+$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$+x_ny_1a\left(\vec{e}_n,\vec{e}_1\right)+x_ny_2a\left(\vec{e}_n,\vec{e}_2\right)+\cdots+x_ny_na\left(\vec{e}_n,\vec{e}_n\right)$$

Егер $a\left(\vec{e}_i,\vec{e}_j\right)=a_{ij}$ десек,онда

$$a\left(\vec{x},\vec{y}\right)=a_{11}x_1y_1+a_{12}x_1y_2+\cdots+a_{1n}x_1y_n+a_{21}x_2y_1+a_{22}x_2y_2+\cdots+a_{2n}x_2y_n+ \qquad (24\text{-}6)$$

$$+a_{n1}x_ny_1+a_{n2}x_ny_2+\cdots+a_{nn}x_ny_n$$

Бұл теңдіктің оң жағындағы өрнекті **бисызықтық форма** дейді. Сондықтан бисызықты $a\left(\vec{x},\vec{y}\right)$ функцияны да бисызықтық форма дейді. Онда a_{ij} бисызықтық форманың коэффициенттері делінеді. Ол коэффициенттерден жасалған мына n-ретті квадрат матрицаны бисызықтық форманың матрицасы дейді.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} ......a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} ......a_{2n} \\ .... \\ a_{n1} & a_{n2} ......a_{nn} \end{pmatrix}$$

V_n кеңістікке $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\right)$ базис ендірілсе, онда әрбір $a\left(\vec{x}, \vec{y}\right)$ бисызықтық формаға n-ші ретті бір квадраттық матрица сай келеді және керісінше V_n кеңістік базисі $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\right)$-де берілген кез-келген n-ретті квадрат матрицаға мүшелері (24-6) формуламен анықталған бір бисызықтық форма сай келеді.

Егер бисызықтық $a\left(\vec{x}, \vec{y}\right)$ форма үшін $a\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = a\left(\vec{y}, \vec{x}\right)$ (24-7) болса, онда ол симметриялы бисызықтық форма делінеді. Бұл кезде $a\left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right) = a\left(\vec{e}_j, \vec{e}_i\right)$ болатындықтан $a_{ij} = a_{ji}$ болады. Демек, симметриялы бисызықтық форманың матрицасы да симметриялы болады.

Симметриялы бисызықтық форма $a\left(\vec{x}, \vec{y}\right)$ оң анықталған делінеді, егерде $\forall \vec{x} \in V_n$ үшін $a\left(\vec{x}, \vec{x}\right) \succ 0$ болса.

Мысалы $a\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$ өрнегі оң анықталған симметриялық бисызықтық форма болады. Өйткені ол (24-6) түрде болғандықтан бисызықтық форма болады, ал $a\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \cdots + y_n x_n = a\left(\vec{y}, \vec{x}\right)$ болатындықтан симметриялы болады және $a\left(\vec{x}\vec{x}\right) = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + \cdots + x_n^{\ 2} \succ 0$ болатындықтан оң анықталған болады.

Егер қатарынан 0 емес $\vec{x}, \vec{y}$ векторлар үшін $a\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = 0$ болса, онда бұл векторлар симметриялық бисызықтық $a\left(\vec{x}, \vec{y}\right)$ формаға қарағанда **түйіндес** делінеді.

1-теорема. V_n нақты векторлық кеңістіктің $1 \prec k \leq n$ өлшемді кез-келген ішкі векторлық кеңістігі V_k-да кез-келген екі векторы берілген симметриялық бисызықтық $a\left(\vec{x}, \vec{y}\right)$ формаға қарағанда түйіндес болатын, кемінде бір базис болады.

Салдар. n өлшемді V_n векторлық кеңістікте берілген $a\left(\vec{x},\vec{y}\right)$ симметриялық бисызықтық формаға қарағанда кез-келген екі векторы түйіндес болатын кемінде бір базис болады.

24.3. Квадраттық форма.

Егер $a\left(\vec{x},\vec{y}\right)$ n өлшемді нақты векторлық V_n кеңістіктегі симметриялық бисызықтық форма болып, $\vec{x}=\vec{y}$ болса $a\left(\vec{x},\vec{y}\right)=a\left(\vec{x},\vec{x}\right)=f\left(\vec{x}\right)$ болады.

$f\left(\vec{x}\right)=a\left(\vec{x},\vec{x}\right)$ функцияны $a\left(\vec{x},\vec{y}\right)$ симметриялық бисызықтық формаға сай келетін **квадраттық форма** дейді, ал $a\left(\vec{x},\vec{y}\right)$ симметриялық бисызықтық форманы $f\left(\vec{x}\right)=a\left(\vec{x},\vec{x}\right)$ үшін **полярлық форма** дейді. Поляр өзінің квадраттық формасы арқылы бір мәнді анықталады.

Шынында да, $f\left(\vec{x}\right)=a\left(\vec{x},\vec{x}\right)$ квадраттық форма болса, оның поляры $a\left(\vec{x},\vec{y}\right)$ бисызықты форманы анықтау үшін

$f\left(\vec{x}+\vec{y}\right)=a\left(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}\right)=a\left(\vec{x},\vec{x}\right)+2a\left(\vec{x},\vec{y}\right)+a\left(\vec{y},\vec{y}\right)=f\left(\vec{x}\right)+2a\left(\vec{x},\vec{y}\right)+f\left(\vec{y}\right)$ десек,

бұдан $$a\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\frac{1}{2}\left(f\left(\vec{x},\vec{y}\right)-f\left(\vec{x}\right)-f\left(\vec{y}\right)\right) \qquad (24\text{-}8)$$

Енді V_n кеңістікке $\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n\right)$ базис ендірілсін.

$\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n$ болсын. Бұл вектор үшін

$$\begin{aligned}
f\left(\vec{x}\right)&=a\left(\vec{x},\vec{x}\right)=a\left(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\cdots+x_n\vec{e}_n,\ x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\cdots+x_n\vec{e}_n\right)=\\
&=x_1x_1a\left(\vec{e}_1,\vec{e}_1\right)+x_1x_2a\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)+\cdots+x_1x_na\left(\vec{e}_1,\vec{e}_n\right)+\\
&+x_2x_1a\left(\vec{e}_2,\vec{e}_1\right)+x_2x_2a\left(\vec{e}_2,\vec{e}_2\right)+\cdots+x_2x_na\left(\vec{e}_2,\vec{e}_n\right)+ \qquad (24\text{-}9)\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\
&+x_nx_1a\left(\vec{e}_n,\vec{e}_1\right)+x_nx_2a\left(\vec{e}_n,\vec{e}_2\right)+\cdots+x_nx_na\left(\vec{e}_n,\vec{e}_n\right)
\end{aligned}$$

Егер $a\left(\vec{e}_i,\vec{e}_j\right)=a_{ij}$ десек және $a_{ij}=a_{ji}, x_ix_i=x_i^2$ екенін ескерсек

$$f\left(\vec{x}\right)=a\left(\vec{x},\vec{x}\right)=a_{11}x_1{}^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1y_3+\cdots+2a_{n1}x_1x_n+$$
$$+a_{22}x_2{}^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n+ \qquad (24\text{-}9a)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+a_{nn}x_n{}^2$$

Бұлардың коэффициенттерінен жасалған A матрица n-ретті симметриялық квадрат матрица болады. Оны $a\left(\vec{x},\vec{x}\right)$ квадраттық форманың матрицасы дейді.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots\dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots\dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Әрбір квадраттық формаға бір симметриялық квадрат матрица сай келеді және керісінше кез-келген n-ретті симметриялық квадрат матрица мүшелері (24-9) формуламен табылатын қандайда бір квадраттық форманы анықтайды.

Егер матрицаларды $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=X$, $(x_1,x_2,\dots,x_n)=X'$ деп белгілесек,

квадраттық форма матрица түрінде былайша өрнектеледі:

$$f\left(\vec{x}\right)=a\left(\vec{x},\vec{x}\right)=X'AX \qquad (24\text{-}10)$$

24.4. Координатты сызықтық түрлендіру.

$x_1,x_2,\dots x_n$ айнымалыларды V_n кеңістікте $\vec{x}$ вектордың координаталары ретінде, ал A_n кеңістікте M нүктенің координаталары ретінде қарастыруға болады. $x_1,x_2,\dots x_n$ айнымалылардан $y_1,y_2,\dots y_n$ айнымалыларға мына формулалар арқылы көшу

$$\left.\begin{aligned} x_1&=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n \\ x_2&=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n&=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n \end{aligned}\right\} \qquad (24\text{-}11)$$

$x_1,x_2,\dots x_n$ айнымалыларды $y_1,y_2,\dots y_n$ айнымалыларға **сызықтық түрлендіру** делінеді.

Егер $x_1,x_2,\dots x_n$ айнымалыларды $\vec{x}\in V_n$ вектордың $\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n\right)$ базистегі координаталары десек, онда (24-11)-ті сол $\vec{x}$ вектордың

$\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\right)$ базистен координаталары $(y_1, y_2, ..., y_n)$ болатын жаңа $\left(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \cdots, \vec{e}_n{}'\right)$ базиске көшу формуласы ретінде қарастыруға болады.

24.5. Квадраттық форманы канондық және нормал түрге келтіру.

Егер (24-9) түрдегі квадраттық форманың айнымалыларын (24-11) формуламен сызықтық түрлендірсек, онда $y_1, y_2, \ldots y_n$ айнымалылардан тұратын жаңа квадраттық форма шығады және оның матрицасы өзгереді. (24-11) түрдегі сызықтық түрлендіруді таңдап алу арқылы (24-9) түрдегі квадраттық форманы мына түрге $f\left(\vec{x}\right) = c_1 y_1{}^2 + c_2 y_2{}^2 + \cdots + c_n y_n{}^2$ (24-12) келтіруге болады. Мұны $f\left(\vec{x}\right) = a\left(\vec{x}, \vec{x}\right)$ квадраттық форманың **канондық** түрі дейді.Оның матрицасы мына түрдегі диагональдық матрица болады:

$$\begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & c_n \end{pmatrix}$$

Егер мұндағы c_i-лар +1,-1,0 ғана болатын болса, яғни квадраттық форма мына түрге келсе $f\left(\vec{x}\right) = \varepsilon_1 z_1{}^2 + \varepsilon_2 z_2{}^2 + \cdots + \varepsilon_n z_n{}^2$ (24-13) (Мұндағы $\varepsilon_i = 0, +1, -1$); онда мұны квадраттық форманың **нормал** түрі дейді.

Сөйтіп (24-9) түрдегі квадраттық форманы (24-11) сызықтық түрлендіру арқылы канондық және нормал түрге келтіруге болады. Сонда мынадай жағдайлар болуы мүмкін.

1-жағдай. (24-9) түрдегі квадраттық формаға $x_1, x_2, \ldots x_n$ айнымалылардың бірде-бірі квадрат дәрежеде енбейді, яғни $f\left(\vec{x}\right) = a\left(\vec{x}, \vec{x}\right)$ тек $x_i x_j$ көбейтінділердің қосындысынан тұрады:

$$f\left(\vec{x}\right) = 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1y_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

Бұл жағдайда коэффициенті 0 емес кез-келген бір мүшені алып, сызықтық түрлендіру жәрдемімен ондағы айнымалыны квадрат дәрежеде болатын түрге келтіру керек.

Мысалы: $2a_{ij}x_i x_j$ мүшеге $x_i = y_i + y_j$, $x_j = y_i - y_j$, $x_k = y_k$ қолдансақ $2a_{ij}x_i x_j = 2a_{ij}\left(y_i + y_j\right)\left(y_i - y_j\right) = 2a_{ij}y_i{}^2 - 2a_{ij}y_j{}^2$ болып бір емес, екі айнымалы квадратқа айланады (бұл кезде x_i, x_j-дан басқа x_k айнымалыларды y_k дей саламыз).

2-жағдай. (24-9) квадраттық формаға $x_1, x_2, \ldots, x_n$ айнымалылардың ең болмағанда біреуі квадрат дәрежеде енген.

Мысалы: i-шы айнымалы квадрат дәрежеде енсін, $a_{ii}x_i^2$ болсын. Мұндай кезде (24-9)-ды былайша түрлендіреді:

а) x_i керетін мүшелерді бір жақшаға алады, сонда (24-9) квадраттық форма былайша жазылады:

$$f\left(\vec{x}\right) = 2a_{i1}x_i x_1 + 2a_{i2}x_i y_2 + \cdots + a_{ii}x_i^2 + \cdots + 2a_{in}x_i x_n + f_1 \qquad (*)$$

Мұнда f_1 деген x_i айнымалы кермейтін барлық мүшелердің қосындысы.

б) былайша белгілейді: $y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ii}x_i + \cdots + a_{in}x_n + f_i$. Мұны квадраттайды. Ол әрбір мүшенің квадраты мен әрбір мүшенің өзінен кейінгі барлық мүшелермен екі еселенген көбейтіндісінің қосындысына тең болады.

Табылған y_i^2-тан x_i айнымалы енетін мүшелердің қосындысын алайық. (Ол қосынды $c_{ii}x_i$-дың квадраты және бұл мүшенің қалған мүшелермен екі еселенген көбейтіндісінің қосындысынан тұрады). x_i кермейтін мүшелер қосындысын f_2 дейік. Сонда

$$y_i^2 = 2a_{ii}x_i a_{i1}x_1 + 2a_{ii}x_i a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ii}^2 x_i^2 + \cdots + 2a_{ii}x_i a_{in}x_n + f_2$$

в) бұл теңдіктің екі жағында a_{ii}-ға бөліп, оны (*)-ден шегереді. Сонда мынадай болады:

$$f - \frac{1}{a_{ii}} y_i^2 = f_1 - \frac{1}{a_{ii}} f_2$$

Мұның оң жағына x_i енбейді және ол $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ айнымалылардан тұратын квадраттық форма болады. Оны φ дейік.

Сонда $f = \dfrac{1}{a_{ii}} y_i^2 + \varphi = b_{ii}y_i^2 + \varphi$.

г) Мұны былайша сызықтық түрлендіреді:

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$$

$$y_k = x_k \quad , k \neq i \text{ болса}$$

Сонда f қосынды y-тер арқылы өрнектеледі және φ мына айнымалылардың $y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$ квадраттық формасы болады. Сөйтіп x-тардан y-терге көшу арқылы y_i енетін мүше квадратқа келтіріледі.

Дәл осы әдісті қалған $n-1$ мүшеге қолдану арқылы y_i-дан z_i-ға көшу арқылы тағы бір мүше квадрат түрге келтіріледі.

Осылай бір айнымалыдан екінші айнымалыға көше отырып, квадраттық форма канондық түрге келеді:

$$f = c_1 u_1^2 + c_2 u_2^2 + \cdots + c_n u_n^2$$

Квадраттық форманы канондық түрге келтірудегі бұл әдісін (яғни сызықтық түрлендіру жәрдемімен канондық түрге келтіру әдісін) француз ғалымы **Лагранж** ұсынған. Сондықтан бұл әдіс оның атымен аталады.

Ал, канондық түрден $u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{|c_1|}} w_1, u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{|c_2|}} w_2, \ldots, u_n = \dfrac{1}{\sqrt{|c_n|}} w_n$ сызықтық түрлендіру арқылы квадраттық форма нормал түрге келеді

$$f\left(\vec{x}\right)=\varepsilon_1 w_1{}^2+\varepsilon_2 w_2{}^2+\cdots+\varepsilon_n w_n{}^2,\ \varepsilon_i=0,+1,-1$$

Квадраттық форманы канондық түрге түрлі сызықтық түрлендіру арқылы келтіруге болады, бірақ нәтижелері бірдей болып шыға бермейді.

Дегенмен олардың оң таңбалы мүшелер саны өзара, теріс таңбалы мүшелер саны өзара тең болады. Мұны **инерция заңы** дейді. Оң таңбалы мүшелер саны p, теріс таңбалы мүшелер саны q болса, онда $p+q=r$ санын квадраттық форманың **рангы** дейді. Ол квадраттық форма матрицасының рангына тең болады. p-ны квадраттық форманың **оң индексі** дейді.

n айнымалыдан тұратын квадраттық форма оң анықталған болу үшін, яғни $a(x_1,x_2,\ldots,x_n)\succ 0$ болу үшін оның оң индексі $p=n$ болу керек.

Оң және теріс таңбалы мүшелер санының айырымы $p-q=s$ санын сол квадраттық форманың **сигнатурасы** дейді. Сонымен $p-q=s$, $p+q=r$, $p=\frac{1}{2}(s+r),q=\frac{1}{2}(r-s)$ болады.

1-Мысал. $f\left(\vec{x}\right)=2x_1x_2+2x_1y_3-6x_2x_3$ (1) квадраттық форманы сызықтық түрлендіру (Лагранж әдісімен) арқылы канондық және нормал түрге келтіру керек.

Шешуі: біріншіден, квадраттық форма үш айнымалы x_1,x_2,x_3-тен жасалған. Демек, A_3 кеңістікте берілген. Квадраттық формаға айнымалылардың бірде-бір квадрат дәрежеде енбеген. Сондықтан (1)-ді айнымалының ең болмағанда біреуі квадрат дәрежеде болатындай етіп сызықтық түрлендіру керек. Ол үшін $x_1=y_1+y_2,x_2=y_1-y_2,x_3=y_3$ (2) формуламен (1)-ді сызықтық түрлендіреміз. Сонда :

$$f\left(\vec{x}\right)=2(y_1+y_2)(y_1-y_2)+2(y_1+y_2)y_3-6(y_1-y_2)y_3=2y_1{}^2-2y_2{}^2-4y_1y_3+8y_2y_3$$

(3)

Сонымен x-тан y-ке көшу арқылы квадраттық формада квадрат дәрежелі мүшелер пайда болды.

Енді бұған жоғарыда айтылған 2-жағдайдағы әдісті қолданамыз.

Ол үшін біріншіден, (3)-тен коэффициенті 0 емес квадрат дәрежедегі айнымалының бірін аламыз. Мысалы: $y_i{}^2$-ты алайық. Сол y_1 айнымалы енетін мүшелерді бір жақшаға аламызда қалғандарын f_1 дейміз. Сонда

$$f=\left(2y_1{}^2-4y_1y_3\right)-2y_2{}^2+8y_2y_3 \quad (4) \text{ яғни } f=\left(2y_1{}^2-4y_1y_3\right)+f_1$$

Мұнда $i=1,a_{11}=2,a_{12}=0,a_{13}=-2$.

Былайша белгілейміз: $z_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3=2y_1+0y_2-2y_3=2y_1-2y_3$

Мұны квадраттаймыз: $z_1=4y_1{}^2-8y_1y_3+4y_3{}^2$.

Мұның екі жағында 2-ге бөліп (4)-тен аламыз:

$$f-\frac{1}{2}z_1=-2y_1{}^2-2y_3{}^2+8y_2y_3,\ f=\frac{1}{2}z_1-2y_1{}^2-2y_3{}^2+8y_2y_3$$

Мынадай сызықтық түрлендіру жасаймыз: $$\begin{array}{l} z_1 = 2y_1 - 2y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \end{array} \qquad (5)$$

Сонда бұдан $y_1 = \frac{1}{2}z_1 + z_3$, $y_2 = z_2$, $y_3 = z_3$ болатындықтан

$$f = \frac{1}{2}z_1^2 - 2z_2^2 - 2z_3^2 + 8z_2z_3 = \frac{1}{2}z_1^2 - \left(2z_2^2 - 8z_2z_3\right) - 2z_3^2 \qquad (6)$$

Енді z_1енетін мүше квадратқа айланды. z_2 енетін мүшені бір жақшаға алайық.

Мұнда $i = 2, a_{22} = 2, a_{23} = -4$.

Былайша белгілейміз: $u_2 = a_{22}z_2 + a_{23}z_3 = 2z_2 - 4z_3$.

Квадраттаймыз: $u_2^2 = 4z_2^2 - 16z_2z_3 + 16z_3^2$

Мұны 2-ге бөліп, (6)-дан алсақ

$$f + \frac{u_2^2}{2} = \frac{1}{2}z_1^2 + 6z_3^2, \quad f = -\frac{u_2^2}{2} + \frac{1}{2}z_1^2 + 6z_3^2$$

Мынадай сызықтық түрлендіру ендіреміз: $$\left.\begin{array}{r} u_1 = z_1 \\ u_2 = 2z_2 - 4z_3 \\ u_3 = z_3 \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Сонда $f = \frac{u_2^2}{2} - \frac{1}{2}z_1^2 - 6z_3^2$ (8)

Сонымен (1) квадраттық формаға (2), (5), (7) сызықтық түрлендірулер жасау арқылы x-тан y-ке, y-тен z-ке, z-тен u-ға көшу нәтижесінде ол квадраттық форма канондық түрге келді.

Егер (8)-ге $w_1 = \frac{u_1}{\sqrt{2}}, w_2 = \frac{u_2}{\sqrt{2}}$, $w_3 = \sqrt{6}u_3$ (9) сызықтық түрлендіруін қолдансақ $f = w_1^2 - w_2^2 + w_3^2$ (10) болып нормал түрге келеді.

(1)-ден (8)-ді тікелей шығару үшін (2),(5), (7)-ден:

$$x_1 = y_1 + y_2 = \frac{1}{2}z_1 + z_3 + z_2 = \frac{1}{2}u_1 + u_3 + \frac{1}{2}\left(u_2 + 4u_3\right) = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 + 3u_3$$

$$x_2 = y_1 - y_2 = \frac{1}{2}z_1 + z_3 - z_2 = \frac{1}{2}u_1 + u_3 - \frac{1}{2}\left(u_2 + 4u_3\right) = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 - u_3$$

$$x_3 = y_3 = z_3 = u_3$$

тауып, оны (1)-ге қою керек, сонда (8) шығады.

2-Мысал. $f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ (*1)

біріншіден, x_1 айнымалы енетін мүшелерді жеке топтаймыз

$$f = \left(x_1^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3\right) + x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_2x_3 \qquad (*2)$$

Мұнда $i = 1, a_{11} = 1, a_{12} = -3, a_{13} = -1$

Былайша белгілейміз: $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = x_1 - 3x_2 - x_3$.

Квадраттаймыз: $y_1^2 = x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$.

Мұны (*2)-ден шегереміз: $f - y_1^2 = -8x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_2x_3$

Мына формуламен түрлендіреміз: $$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 - 3x_2 - x_3 \\ y_2 &= x_2 \\ y_3 &= x_3 \end{aligned}\right\} \qquad (*3)$$

Сонда $f = y_1^2 - 8y_2^2 + 4y_3^2 - 4y_2y_3$ (*4)

Енді y_2 айнымалыны бөліп аламыз: $f = y_1^2 + \left(-8y_2^2 - 4y_2y_3\right) + 4y_3^2$

Мұнда $i = 2, a_{22} = -8, a_{23} = -2$

Былайша белгілейміз: $z_2 = a_{22}y_2 + a_{23}y_3 = -8y_2 - 2y_3$

Квадраттаймыз: $z_2^2 = 64y_2^2 + 32y_2y_3 + 4y_3^2$.

Мұны 8-ге бөліп, (*4)-ге қоссақ: $f + \frac{1}{8}z_2^2 = y_1^2 + 4\frac{1}{2}y_3^2$.

Түрлендіру жасаймыз: $$\left.\begin{aligned} z_1 &= y_1 \\ z_2 &= -8y_2 - 2y_3 \\ z_3 &= y_3 \end{aligned}\right\} \qquad (*5)$$

Сонда $f = z_1^2 - \frac{1}{8}z_2^2 + 4\frac{1}{2}z_3^2$ (*6) болып (*1) канондық түрге келді. Осы есепті басқа жолмен былайша шығарайық:

$$f = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3\right) + \left(x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3\right) -$$
$$- \left(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2\right) = \left(x_1 - x_2 + x_3\right)^2 + \left(x_1 - x_2 - 2x_3\right)^2 - \left(x_1 + x_2\right)^2$$

Былайша түрлендірейік: $y_1 = x_1 - x_2 + x_3$, $y_2 = x_1 - x_2 - 2x_3$, $y_3 = x_1 + x_2$

Сонда $f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ болып канондық түрге келді.Бұл (*6)-дан өзгеше. Бірақ екеуінде де оң таңбалы мүше саны $p = 2$, теріс таңбалы мүше саны $q = 1$. Демек, инерция заңы сақталды. Сондықтан әртүрлі болғанымен шешім дұрыс.Мұны мынадай $z_1 = u_1, z_2 = \sqrt{8}u_2, z_3 = \frac{\sqrt{2}}{3}u_3$ түрлендіру арқылы нормаль түрге келтіруге болады. Сонда $f = u_1^2 - u_2^2 + u_3^2$ болып шығады.

§ 25. Аффиндік кеңістіктегі квадрика.

25.1. Квадрика ұғымы.

A_n n өлшемді аффиндік кеңістіктің $O\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ координата жүйесіндегі координаталары мынадай екі дәрежелі алгебралық теңдеуді

$$a_{ij}x_ix_j + 2a_ix_i + a = 0 \qquad (25\text{-}1)$$

Қанағаттандыратын барлық нүктелерінің жиынын **квадрика** немесе **екінші ретті гипержазықтық** дейді.Мұнда $a_{ij} = a_{ji}$ болады. Теңдеудегі $a_{ij}x_ix_j$-екі дәрежелі мүшелер қосындысы, ол қандайда бір квадраттық форма болады, $2a_ix_i$-бір дәрежелі мүшелер қосындысы, ол қандайда бір сызықтық форма болады, a-бос мүше.

Егер $n = 2$ болса, квадрика жазықтықтағы екінші ретті сызық болады. Оның теңдеуі $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0$ болады.

Егер $n = 3$ болса, квадрика үш өлшемді кеңістіктегі екінші ретті бетті білдіреді, теңдеуі

$$a_{11}{x_1}^2 + a_{22}{x_2}^2 + a_{33}{x_3}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + 2a_3x_3 + a = 0$$

болады.

Квадрика теңдеуі кез-келген базисте екінші дәрежелі теңдеу болады. Квадрика теңдеуіне енетін квадраттық форманың рангы квадриканың да рангы делінеді. Рангы кеңістік өлшемі n-ге тең болатын квадриканы **тозғындамаған** квадрика дейді.

25.2. Квадрика центрі.

M_0 нүкте (25-1) теңдеумен анықталатын квадриканың центрі делінеді, егер квадриканың M нүктесіне M_0 нүктеге қарағанда симметриялы M' нүктеде квадрикада жатса, яғни M_0 нүкте квадриканың симметрия центрі болса.

1-теорема. M_0 нүкте (25-1) теңдеумен анықталатын квадриканың центрі болуы үшін, оның координаталары мына теңдеулер жүйесін қанағаттандыруы қажетті және жеткілікті.

$$a_{ij}x_j + a_i = 0, \quad i, j = 1,2,...,n \tag{25-2}$$

Бұл жүйенің матрицасы A, кеңейтілген матрицасы B болсын:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} ......a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} ......a_{2n} \\ .... & \\ a_{n1} & a_{n2} ......a_{nn} \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} ......a_{1n} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} ......a_{2n} & a_2 \\ .... & & \\ a_{n1} & a_{n2} ......a_{nn} & a_n \end{pmatrix}$$

Олардың рангтерін r_1, r_2 дейік. Осы рангтерге сай теңдеулер жүйесін шешуде мынадай жағдайлар кездеседі:

1-жағдай. $r_1 = n, r_2 = n$. Бұл кезде Кронекер-Капелли теоремасы бойынша жүйе үйлесімді және жалғыз ғана шешімі болады. Демек, квадриканың центрі бір нүкте болады.

2-жағдай. $r_1 = r_2 \prec n$. Бұл кезде жүйе үйлесімді болады және $r_1 = r_2 = r \prec n$ болғандықтан (25-2) теңдеулер жүйесі ішінде сызықтық тәуелсіз r теңдеу болады. Сол r теңдеуді бөліп алсақ, ол $n - r$ өлшемді жазықтықты анықтайды. Сөйтіп бұл кезде квадрика центрі $n - r$ өлшемді π_{n-r} жазықтық болады, яғни π_{n-r} жазықтықтың кез-келген нүктесі берілген квадрика үшін центр болады.

3-жағдай. $r_1 \neq r_2$. Бұл кезде Кронекер-Капелли теоремасы бойынша теңдеулер жүйесі үйлесімсіз, шешуі болмайды. Демек, мұндай квадриканың центрі болмайды. Квадрика центрсіз квадрика делінеді. Квадрика тек 1-жағдайда ғана центрлі делінеді.

25.3. Цилиндрлік және Конустық квадрикалар.

Егер $1 \leq k \prec n$ өлшемді ішкі векторлық V_k кеңістік табылып, квадрика өзінің әрбір нүктесімен қатар, осы нүктеден өтетін бағыттаушы ішкі кеңістігі V_k болатын бүкіл k өлшемді жазықтықты да өзіне қамтитын болса, онда ол квадрика цилиндрлік квадрика делінеді.

Демек, цилиндрлік квадрика k өлшемді π_k жазықтықтардан тұрады. Оларды цилиндрлік квадриканың жасаушылары дейді. Олар параллель болады.

Мынадай теорема бар:

2-теорема. Егер A_n аффиндік кеңістіктегі квадрика $O\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ аффиндік координаталар жүйесінде мынадай теңдеумен

$$a_{mk}x_mx_k + 2a_mx_k + a = 0,\ m,k = 1,2,...,t, \quad 1 \le t \prec n \tag{25-3}$$

Берілсе, онда бұл квадрика жасаушысы $\vec{e}_{t+1}, \vec{e}_{t+2}, \dots, \vec{e}_n$ векторларға керілген V_{n-t} ішкі векторлық кеңістік болатын цилиндрлік квадрика болады.

Квадрика конустық квадрика делінеді, егерде $0 \le k \prec n$ өлшемді π_k жазықтық табылып, квадрика бұл жазықтықта жатпайтын әрбір M нүктесімен қатар, сол нүктеден өтетін және π_k жазықтықты қамтитын бүкіл $(k+1)$ жазықтықты өзіне қамтитын болса. π_k жазықтығы конустық квадриканың төбесі делінеді, оның әрбір нүктесі квадрика центрі болады.

3-теорема. Егер A_n кеңістіктегі квадриканың сол квадрикада жататын ең болмағанда бір центрі болса, ол квадрика конустық квадрика болады.

Әрі цилиндрлік, әрі конустық болатын квадрикаларда болады.

25.4. Квадрика теңдеуін нормал түрге келтіру.

A_n аффиндік кеңістіктің $O\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ аффиндік координата жүйесінде $a_{ij}x_ix_j + 2a_ix_i + a = 0$ (25-1) теңдеумен квадрика берілсін.

4-теорема. Аффиндік координаталар жүйесін таңдап алу арқылы кез-келген квадрика теңдеуін мына түрдегі теңдеулердің біріне келтіруге болады:

$$\varepsilon_1 u_1^2 + \varepsilon_2 u_2^2 + \cdots + \varepsilon_m u_m^2 = 1, \quad m \le n \tag{25-4}$$

$$\varepsilon_1 u_1^2 + \varepsilon_2 u_2^2 + \cdots + \varepsilon_m u_m^2 = 0, \quad m \le n \tag{25-5}$$

$$\varepsilon_1 u_1^2 + \varepsilon_2 u_2^2 + \cdots + \varepsilon_m u_m^2 = 2u_{m+1}, \quad m \prec n \tag{25-6}$$

Мұндағы $\varepsilon_i = \pm 1$.

Дәлелі. Алдымен квадрика теңдеуін (25-1)-дегі квадраттық форманы канондық түрге келтіретіндей $x_i = a_{ij}y_j$ сызықтық түрлендіруін орындаймыз. Ал, бұл геометрияда координата жүйесінің төбесін өзгертпей жаңа координата жүйесіне көшу (яғни ескі координаталар жүйесін бұру) болып табылады.

Сонда квадрика теңдеуін жаңа координата жүйесінде мына түрге келеді:

$$p_1y_1^2 + p_2y_2^2 + \cdots + p_my_m^2 + 2q_1y_1 + 2q_2y_2 + \cdots + 2q_ny_n + c = 0, \quad m \le n$$

бұларды толық квадратқа келтірсе, былай болады:

$$p_1\left(y \ +\frac{q_1}{p_1}\right)^2+p_2\left(y_2+\frac{q_2}{p_2}\right)^2+\cdots+p_m\left(y_m+\frac{q_m}{p_m}\right)^2+2q_{m+1}y_{m+1}+2q_{m+2}y_{m+2}+$$

$$+\cdots+2q_ny_n+c-p_1\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^2-p_2\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^2-\cdots-p_m\left(\frac{q_m}{p_m}\right)^2=0$$

Енді координаталар жүйесін мына формулалармен параллель жылжытамыз:

$$z_1=y_1+\frac{q_1}{p_1}$$

$$z_2=y_2+\frac{q_2}{p_2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$z_m=y_m+\frac{q_m}{p_m}$$

$$z_{m+1}=y_{m+1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$z_n=y_n$$

және былайша белгілесек: $c-p_1\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^2-p_2\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^2-\cdots-p_m\left(\frac{q_m}{p_m}\right)^2=p$

Теңдеу мына түрге келеді:

$$p_1z_1{}^2+p_2z_2{}^2+\cdots+p_mz_m{}^2+2q_{m+1}z_{m+1}+2q_{m+2}z_{m+2}+\cdots+2q_nz_n=p \qquad (25\text{-}7)$$

Егер $m=n$ болса параллель жылжыту түрлендіруі $z_i=y_i+\frac{q_i}{p_i}$ болады да (25-7) мына түрге келеді:

$$p_1z_1{}^2+p_2z_2{}^2+\cdots+p_nz_n{}^2=p$$

Мынадай жағдайлар болуы мүмкін:

1-жағдай. (25-7)-дегі $q_{m+1}=q_{m+2}=\cdots=q_n=0,\ p\neq 0$.Бұл кезде (25-7) мына түрге келеді:

$$p_1z_1{}^2+p_2z_2{}^2+\cdots+p_mz_m{}^2=p$$

Мына формуламен $\begin{cases} z_i=\sqrt{\left|\frac{p}{p_i}\right|}u_{i,} \quad i=1,2,...,m \\ z_j=u_j\ ,\ j=m+1,m+2,...,n \end{cases}$

жаңа координата жүйесіне көшсек, теңдеу мына түрге келеді:

$$\varepsilon_1u_1{}^2+\varepsilon_2u_2{}^2+\cdots+\varepsilon_mu_m{}^2=1 \quad \varepsilon_i=\pm1$$

2-жағдай. Егер $q_{m+1}=q_{m+2}=\cdots=q_n=0,\ p=0$. Бұл кезде (25-7) мына түрге келеді: $\varepsilon_1u_1{}^2+\varepsilon_2u_2{}^2+\cdots+\varepsilon_mu_m{}^2=0$.

Мына формуламен $\begin{cases} z_i=\sqrt{\left|\frac{1}{p_i}\right|}u_{i,} \quad i=1,2,...,m \\ z_j=u_j\ ,\ j=m+1,m+2,...,n \end{cases}$

жаңа координата жүйесіне көшсек, теңдеу мына түрге келеді:

$$\varepsilon_1 u_1{}^2+\varepsilon_2 u_2{}^2+\cdots+\varepsilon_m u_m{}^2=0\,,\;\varepsilon=\pm1$$

3-жағдай. $m \prec n$ және $q_{m+1},q_{m+2},...,q_n$ -нің ең болмағанда біреуі 0-ге тең емес, мысалы $q_{m+1}\neq 0$ болсын.

Мынадай түрлендіру жасасақ: $\begin{cases} w_{m+1}=\dfrac{p}{2}-q_{m+1}z_{m+1}-q_{m+2}z_{m+2}-\cdots-q_n z_n \\ \qquad w_i=z_i\;,\quad i\neq m+1 \end{cases}$

Онда (25-7) мына түрге келеді: $p_1 w_1{}^2+p_2 w_2{}^2+\cdots+p_m w_m{}^2=2w_{m+1}$

Мына формуламен $\begin{matrix} w_i=\dfrac{u_i}{\sqrt{|p_i|}}, \quad i=1,2,...,m \\ w_j=u_j,\, j=m+1,m+2,...,n \end{matrix}$

жаңа координата жүйесіне көшсек

$$\varepsilon_1 u_1{}^2+\varepsilon_2 u_2{}^2+\cdots+\varepsilon_m u_m{}^2=2u_{m+1},\quad \varepsilon_i=\pm1$$

Теорема дәлелденді, (25-4,5,6) формулалар квадриканың нормал теңдеулері делінеді.

25.5. Квадрика классификациясы.

Центрлі квадриканың нормал теңдеуі (25-4), немесе (25-5) түрге келеді, ал центрсіз квадриканың нормал теңдеуі (25-6)-ға келеді.

1. Егер (25-4)-ге $m=n$ болса, ол $\varepsilon_1 u_1{}^2+\varepsilon_2 u_2{}^2+\cdots+\varepsilon_n u_n{}^2=1$ (25-8)

Бұл кезде а) $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\cdots=\varepsilon_n=1$ болса, теңдеу $u_1{}^2+u_2{}^2+\cdots+u_n{}^2=1$ (25-8а) болады.Мұндай квадриканы **эллипсоид** дейді.

б) Егер $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\cdots=\varepsilon_n=-1$ болса, теңдеу $u_1{}^2+u_2{}^2+\cdots+u_n{}^2=-1$ 25-8б) түрге келеді. Мұны **жорымал эллипсоид** дейді.

в) Егер $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$ таңбалары бірдей болмаса, онда квадрика **гиперболоид** делінеді.

2. Егер (25-5)-те $m=n$ болса, ол $\varepsilon_1 u_1{}^2+\varepsilon_2 u_2{}^2+\cdots+\varepsilon_n u_n{}^2=0$ (25-9) түрге келеді.

Бұл кезде а) $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\cdots=\varepsilon_n=\pm1$ болса, теңдеу $u_1{}^2+u_2{}^2+\cdots+u_n{}^2=0$ (25-9а) болады. Мұндай квадрика **жорымал конус** делінеді.

б) Егер $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$ әртүрлі таңбалы болса квадрика **конус** делінеді. Координата басы бұл конустың центрі болады.

3. Егер $m=n-1$ болса (25-6) мына түрге $\varepsilon_1 u_1{}^2+\varepsilon_2 u_2{}^2+\cdots+\varepsilon_{n-1} u_{n-1}{}^2=2u_n$ (25-10)

Бұл кезде квадрика **параболоид** делінеді, центрі болмайды.

4. (25-4,5)-те $m \prec n$, (25-6)-да $m \prec n-1$ болатын жағдай. Бұл кезде (25-4,5)-те $m=r$, ал (25-6)-да $m=r-1$ десек, ол теңдеулер мына түрге келеді:

$$\varepsilon_1 u_1{}^2+\varepsilon_2 u_2{}^2+\cdots+\varepsilon_n u_n{}^2=1 \qquad (25\text{-}11)$$

$$\varepsilon_1 u_1{}^2+\varepsilon_2 u_2{}^2+\cdots+\varepsilon_n u_n{}^2=0 \qquad (25\text{-}12)$$

$$\varepsilon_1 u_1{}^2+\varepsilon_2 u_2{}^2+\cdots+\varepsilon_{n-1} u_{n-1}{}^2=2u_n \qquad (25\text{-}13)$$

Нормал теңдеуі осы үшеуінен біріне келетін квадриканы **цилиндрлік квадрика** дейді.

(25-11), (25-12) түрдегі теңдеуге центрі $(n-r)$ өлшемді π_{n-r} жазықтық болатын квадрика келеді, ал (25-13)-ке центрі жоқ квадрика келеді.

Бір өлшемді аффиндік A_1 кеңістікте үш түрлі квадрика болады. Олардың теңдеулері мынадай болады: $u_1^2=1$ (екі нүкте), $u_1^2=-1$ (екі жорымал нүкте), $u_1^2=0$ (екі беттескен нүкте).

Екі өлшемді аффиндік A_2 кеңістікте квадрика 9 түрлі болады. Олар мыналар:

1. $u_1^2+u_2^2=1$ (эллипс), 2. $u_1^2+u_2^2=-1$ (жорымал эллипс)
3. $u_1^2-u_2^2=1$ (гипербола), 4. $u_1^2-u_2^2=0$ (қиылысатын екі нақты түзу)
5. $u_1^2+u_2^2=0$ (қиылысатын жорымал екі түзу)

Бұл кездерде $m=n$.

6. $u_1^2=2u_2$ (парабола) бұл кезде $m=n-1$
7. $u_1^2=1$ (екі параллель түзу).
8. $u_1^2=-1$ (екі жорымал параллель түзу).
9. $u_1^2=0$ (екі беттескен түзу) бұл кезде де $m=n-1, n=2$.

Үш өлшемді аффиндік A_3 кеңістікте 17 түрлі квадрика болады. Олар мыналар:

а) $m=n$ болғанда
1. $u_1^2+u_2^2+u_3^2=1$ (эллипсоид), 2. $u_1^2+u_2^2+u_3^2=-1$ (жорымал эллипсоид)
3. $u_1^2+u_2^2-u_3^2=1$ (бір қуысты гиперболоид)
4. $u_1^2+u_2^2-u_3^2=-1$ (екі қуысты гиперболоид), 5. $u_1^2+u_2^2-u_3^2=0$ (конус)
6. $u_1^2+u_2^2+u_3^2=0$ (жорымал конус)
7. $u_1^2+u_2^2=2u_3$, 8. $u_1^2-u_2^2=2u_3$ (эллипстік, гиперболалық параболоид)
б) $m=n-1$ болғанда
9. $u_1^2+u_2^2=1$, 10. $u_1^2-u_2^2=1$, 11. $u_1^2+u_2^2=-1$, 12. $u_1^2=2u_2$ (эллипстік, гиперболалық цилиндр; жорымал, параболалық цилиндр)
13. $u_1^2-u_2^2=0$, 14. $u_1^2+u_2^2=0$ (екі қиылысатын нақты және жорымал жазықтықтар).
15. $u_1^2=1$, 16. $u_1^2=-1$, 17. $u_1^2=0$ (параллель нақты және жорымал екі жазықтық, беттескен екі жазықтық).

1-Мысал. $x_1^2+11x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-6x_2x_3+4x_2-12x_3-12=0$ (1) квадриканы нормал түрге келтіріп, квадриканың түрін ажырату керек.

Шешуі: Бұл квадрика x_1, x_2, x_3 үш айнымалыдан жасалған, A_3 кеңістікте берілген.

Мұны нормал түрге келтіру үшін алдымен ол теңдеудегі квадраттық форманы $f=x_1^2+11x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-6x_2x_3$ канондық түрге келтіру керек.

а) x_1 квадрат дәрежеде енген. Сондықтан x_1^2-ты алып, x_1 енетін мүшелерді өз алдына топтаймыз.

$$f=\left(x_1^2-2x_1x_2+4x_1x_3\right)+11x_3^2-6x_2x_3 \qquad (2)$$

Мұнда $i=1, a_{11}=1, a_{12}=-1, a_{13}=2$.Мынадай белгілеу ендіреміз:

$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = x_1 - x_2 + 2x_3$. Мұны квадраттаймыз :

$y_1 = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + 4x_3^{\ 2} - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$

Мұны (2)-ден аламыз: $f - y_1^{\ 2} = -x_2^{\ 2} + 7x_3^{\ 2} - 2x_2x_3$

Мынадай формуламен сызықтық түрлендіреміз: $\left.\begin{array}{l} y_1 = x_1 - x_2 + 2x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{array}\right\}$ (3)

Сонда $f = y_1^{\ 2} - y_2^{\ 2} + 7y_3^{\ 2} - 2y_2y_3$ (4)

Біз x-тан y-ке көшу арқылы y_1-ді квадратқа айландырдық.

б) Енді y_2-ні квадратқа айландыру керек. Ол үшін y_2 енетін мүшелерді бөліп аламыз: $f = y_1^{\ 2} + \left(-y_2^{\ 2} - 2y_2y_3\right) + 7y_3^{\ 2}$ (4-а)

Мұнда $i = 2, b_{22} = -1, b_{23} = -1$.

Былайша белгілейік : $z_2 = b_{22}y_2 + b_{23}y_3 = -y_2 - y_3$.

Мұны квадраттайық : $z_2^{\ 2} = y_2^{\ 2} + 2y_2y_3 + y_3^{\ 2}$.

Мұны (4-а)-ға қоссақ: $f + z_2^{\ 2} = y_1^{\ 2} + 8y_3^{\ 2}$.

Мұны мынадай формуламен сызықтық түрлендіреміз :

$$z_1 = y_1, z_2 = -y_2 - y_3,\ z_3 = y_3.$$

Сонда $f = z_1^{\ 2} - z_2^{\ 2} + 8z_3^{\ 2}$ (5) болып (2) квадраттық форма канондық түрге айланды. Ол үшін екі рет (3), (3-а) сызықтық түрлендіруді пайдаландық. (2)-ден тікелей (5) түрге келтіретін түрлендіруді табу үшін (3)-тен x_1, x_2, x_3-ті , (3-а)-дан y_1, y_2, y_3-ті табу керек:

$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - 2y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = -z_2 - z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$.Бұл екеуінен: $\begin{cases} x_1 = z_1 - z_2 - 3z_3 \\ x_2 = -z_2 - z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$ (3-б)

(3-б)-ны (2)-ге қойса (5) шығады.

в) Сонымен (1)-дегі квадраттық форма (5) түрге айланды. Оларды және (3-б)-ны (1)-дегі орнына қоямыз (яғни (3-б)-ны аффиндік координата жүйесін түрлендіру формуласы ретінде аламыз). Сонда

$$z_1^{\ 2} - z_2^{\ 2} + 8z_3^{\ 2} + 4\left(-z_2 - z_3\right) - 12z_3 - 12 = 0,\ z_1^{\ 2} - z_2^{\ 2} + 8z_3^{\ 2} + -4z_2 - 16z_3 - 12 = 0 \quad (6)$$

(Геометриялық бұл бұру түрлендіру нәтижесінде шықты).

г) Енді мұны координата жүйесін параллель жылжыту арқылы одан әрі түрлендіреміз. Ол үшін (6)-ны толық квадратқа келтіреміз:

$$z_1^{\ 2} - \left(z_2^{\ 2} + 4z_2\right) + 8\left(z_3^{\ 2} - 2z_3\right) - 12 = 0$$

$$z_1^{\ 2} - \left(z_2^{\ 2} + 2z_2 \cdot 2 + 4\right) + 8\left(z_3^{\ 2} - 2z_3 \cdot 1 + 1\right) = 12 - 4 + 8$$

$$z_1^{\ 2} - \left(z_2 + 2\right)^2 + 8\left(z_3 - 1\right)^2 = 16$$

Мұндағы $u_1 = z_1, u_2 = z_2 + 2, u_3 = z_3 - 1$ (7)

десек $u_1^{\ 2} - u_2^{\ 2} + 8u_3^{\ 2} - 16 = 0$. Мұны $u_1 = 4w_1, u_2 = 4w_2, u_3 = \sqrt{2}w_3$ (7-а)

формуламен түрлендірсек: $w_1^{\ 2} - w_2^{\ 2} + w_3^{\ 2} - 1 = 0$ (8)

болып нормал түрге келеді.

Бұл бір қуысты гиперболоидтың теңдеуі.

Берілген квадриканы нормал түрге келтіретін координаталар жүйесін түрлендіру формулысын табу үшін берілген x_1, x_2, x_3 айнымалыны соңғы w_1, w_2, w_3 айнымалылармен байланыстыратын формуланы табу керек.

(7)-ден $z_1 = u_1, z_2 = u_2 - 2, z_3 = u_3 + 1$, (7-а)-ны ескерсек

$$x_1 = z_1 - z_2 - 3z_3 = u_1 - u_2 + 2 - 3u_3 - 3 = u_1 - u_2 - 3u_3 - 1 = 4w_1 - 4w_2 - 3\sqrt{2}w_3 - 1$$
$$x_2 = -z_2 - z_3 = -u_2 - 2 - u_3 - 1 = -u_2 - u_3 + 1 = -4w_2 - \sqrt{2}w_3 + 1$$
$$x_3 = z_3 = u_3 + 1 = \sqrt{2}w_3 + 1$$

Осыны (1)-ге қойсақ (8) шығады.

Соңғыны былай жазайық: $x_1 = 4w_1 - 4w_2 - 3\sqrt{2}w_3 - 1$

$$x_2 = 0w_1 - 4w_2 - 2\sqrt{2}w_3 + 1$$
$$x_3 = 0w_1 + 0w_2 + \sqrt{2}w_3 + 1$$

Бұдан жаңа координа жүйесінің басы $O'(-1,1,1)$ нүкте, ал базистік векторлар $\vec{g}_1 = \{4,0,0\}$, $\vec{g}_2 = \{-4,-4,0\}$, $\vec{g}_3 = \{-3\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ болатыны шығады.

2-Мысал. A_3 кеңістікте $2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 4x_1 - 2x_2 = 0$ (1*) квадрика берілген. Оны нормал түрге келтіру керек, түрін ажырату керек, жаңа аффиндік координата жүйесіне көшу формуласын тауып, координата басын, жаңа координаттық векторларды табу керек.

Біріншіден, квадриканы квадраттық формасын $f = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 = 0$ (2*) канондық түрге келтіреміз:

$$f = (2x_1^2 - 2x_1x_2) + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$$

(2*а)

Мұнда $a_{11} = 2, a_{12} = -1, a_{13} = 0$.

Былайша белгілейміз: $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 2x_1 - x_2$.

Квадраттаймыз: $y_1^2 = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$, $\frac{1}{2}y_1^2 = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2$.

Мұны (2*а)-дан алсақ: $f - \frac{1}{2}y_1^2 = \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2$

Мынадай түрлендіру жасаймыз:
$$y_1 = 2x_1 - x_2$$
$$y_2 = x_2 \qquad (3)$$
$$y_3 = x_3$$

Сонда $f = \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + 2y_3^2 - 2y_2y_3$ (4)

$$f = \frac{1}{2}y_1^2 + \left(\frac{1}{2}y_2^2 - 2y_2y_3\right) + 2y_3^2 \qquad (4а)$$

Мұнда $i = 2, a_{22} = \frac{1}{2}, a_{23} = -1$.

Былайша белгілейміз: $z_2 = a_{22}y_2 + a_{23}y_3 = \frac{1}{2}y_2 - y_3$

Мұны квадраттасақ: $z_2^2 = \frac{1}{4}y_2^2 - y_2y_3 + y_3^2$

Мұны 2-ге көбейтіп (4-а)-дан алсақ: $f-2z_2^{\,2}=\frac{1}{2}y_1^{\,2}$.

Сонда $\begin{matrix} z_1=y_1 \\ z_2=\frac{1}{2}y_2-y_3 \\ z_3=y_3 \end{matrix}$ (3а) формуламен түрлендірсек: $f=\frac{1}{2}z_1^{\,2}+2z_2^{\,2}$

болып канондық түрге келді. (3)-тен $\begin{matrix} x_1=\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2 \\ x_2=y_2 \\ x_3=y_3 \end{matrix}$ (3-а)-дан $\begin{matrix} y_1=z_1 \\ y_2=2z_2+2z_3 \\ y_3=z_3 \end{matrix}$.

Бұлардан $\begin{matrix} x_1=\frac{1}{2}z_1+z_2+z_3 \\ x_2=0z_1+2z_2+2z_3 \\ x_3=0z_1+0z_2+1z_3 \end{matrix}$.

Мұны берілген теңдеуге қойсақ:

$$\frac{1}{2}z_1^{\,2}+2z_2^{\,2}+4\left(\frac{1}{2}z_1+z_2+z_3\right)-2(2z_2+2z_3)=0$$

$$\frac{1}{2}z_1^{\,2}+2z_2^{\,2}+2z_1=0,\quad z_1^{\,2}+4z_2^{\,2}+4z_1=0$$

Мұны толық квадратқа келтірейік: $z_1^{\,2}+2z_1\cdot 2+4+4z_2^{\,2}=4$

$(z_1+2)^2+4z_2^{\,2}=4$ $\left.\begin{matrix} u_1=z_1+2 \\ u_2=2z_2 \\ u_3=z_3 \end{matrix}\right\}$ десек $u_1^{\,2}+u_2^{\,2}=4$

Ал, бұл эллипстік цилиндрдің теңдеуі

$$x_1=\frac{1}{2}(u_1-2)+\frac{1}{2}u_2+u_3=\frac{1}{2}u_1+\frac{1}{2}u_2+u_3-1$$

$$x_2=0(u_1-2)+u_2+2u_3=0u_1+u_2+2u_3+0$$

$$x_2=0(u_1-2)+\frac{0}{2}u_2+1\cdot u_3=0u_1+0u_2+1u_3+0.$$

Бұдан координата басы $O'(-1{,}0{,}0)$, ал координаттық векторы $\vec{g}_1=\left\{\frac{1}{2},0,0\right\}$, $\vec{g}_2=\left\{\frac{1}{2},1,0\right\}$, $\vec{g}_3=\{1,2,1\}$ болатыны шығады.

§ 26. Евклидтік кеңістіктегі квадраттық форма мен квадрика.

26.1. Сызықтық оператор.

n өлшемді евклидтік нақты $\overline{E}_n$ векторлық кеңістікті қарастырамыз. Векторлық кеңістікті өзіне-өзін бейнелеу $F:\overline{E}_n\to\overline{E}_n$ сызықтық бейнелеу немесе сызықтық оператор делінеді, егерде ол бейнелеуде

біріншіден, $\forall\vec{x},\vec{y}\in\overline{E}_n$ үшін $F\left(\vec{x}+\vec{y}\right)=F\left(\vec{x}\right)+F\left(\vec{y}\right)$ (26-1а) болса, яғни екі

вектордың қосындысының бейнесі ол векторлардың бейнелерінің қосындысындай болса екіншіден, $\forall \vec{x} \in \bar{E}_n$ вектор мен $\forall \lambda \in R$ нақты сан үшін $F\left(\lambda \vec{x}\right) = \lambda F\left(\vec{x}\right)$ (26-1б) болса, яғни сан мен вектордың көбейтіндісінің бейнесі вектор бейнесі мен сол санның көбейтіндісіндей болса

Егер F осы екі шартты қанағаттандыратын бейнелеу, яғни $\bar{E}$ кеңістікте берілген сызықтық оператор болса, онда ол бұл кеңістіктің кез-келген $\vec{x}$ векторын осы кеңістіктің қандайда бір $\vec{x}'$ векторына бейнелейді. Мұны $\vec{x}' = F\left(\vec{x}\right)$ немесе $\vec{x} = F\bar{x}$ деп белгілейтін боламыз. $\vec{x} \in \bar{E}_n$ векторлардың бейнелерінің жиыны, яғни $F\left(\vec{x}\right)$ векторлар жиыны $\bar{E}_n'$ кеңістіктің ішкі векторлық кеңістігін құрайды.

$\bar{E}_n$ евклидтік векторлық кеңістіктің базисі $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\right)$ болсын, $\vec{x} \in \bar{E}_n$ вектордың бұл базистегі координаталары $\vec{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ болсын.

Бұл $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ векторды $\bar{E}_n$ кеңістікте әрекет ететін F оператор $\vec{x}' = F\left(\vec{x}\right) = x_1'\vec{e}_1 + x_2'\vec{e}_2 + \ldots + x_n'\vec{e}_n$ векторға көшірсін.

Ал, базистік $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ векторларды мына векторларға көшірсін:

$$\left.\begin{aligned}
\vec{e}_1' &= F\left(\vec{e}_1\right) = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n1}\vec{e}_n = a_{j1}\vec{e}_j \\
\vec{e}_2' &= F\left(\vec{e}_2\right) = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n2}\vec{e}_n = a_{j2}\vec{e}_j \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\vec{e}_n' &= F\left(\vec{e}_n\right) = a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nn}\vec{e}_n = a_{jn}\vec{e}_j
\end{aligned}\right\} \qquad (26\text{-}2)$$

Бұл теңдіктің қысқаша $\vec{e}_i' = F\left(\vec{e}_i\right) = a_{ji}\vec{e}_j$, $i, j = 1,2,\ldots,n$ (26-2а) түрінде жазуға болады.

Сонда

$$\begin{aligned}
\vec{x}' &= F\left(\vec{x}\right) = F\left(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n\right) = x_1F\left(\vec{e}_1\right) + x_2F\left(\vec{e}_2\right) + \cdots + x_nF\left(\vec{e}_n\right) = \\
&= x_1\left(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n1}\vec{e}_n\right) + x_2\left(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n2}\vec{e}_n\right) + \cdots + \\
&+ x_n\left(a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nn}\vec{e}_n\right) = \left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n\right)\vec{e}_1 + \\
&+ \left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n\right)\vec{e}_2 + \cdots + \left(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n\right)\vec{e}_n
\end{aligned} \qquad (26\text{-}3)$$

Мұны қысқаша $\vec{x}' = F\left(\vec{x}\right) = a_{ij}x_j\vec{e}_i$ (26-3а) деуге болады.

Вектор координаталарының қасиеті бойынша (26-3)-тен

$$\left.\begin{array}{l} \vec{x}_1' = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n = a_{j1}x_j \\ \vec{x}_2' = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n = a_{j2}x_j \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{x}_n' = a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = a_{jn}x_j \end{array}\right\} \qquad (26\text{-}4)$$

Мұны қысқаша $x_i' = a_{ij}x_j$ (26-4а) деп жазуға болады.

Бұл берілген векторлармен оның бейнесінің координаталарын байланыстырады. Ол теңдеулер жүйесінің коэффициенттерінен жасалған A матрицасы сызықтық оператордың матрицасы дейді.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Бұл матрицаның бағаналары $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$ векторлардың координаталарынан жасалған. Бұл матрицаны қысқаша $A = \left(a_{ij}\right)$ арқылы белгілейік, мұндағы i-қатардың , j-бағананың нөмірлерін көрсетеді.

26.2. Симметриялық сызықтық оператор.

Сызықтық оператор F симметриялық сызықтық оператор делінеді, егерде $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \overline{E}_n$ векторлар үшін $F\left(\vec{x}\right)\vec{y} = \vec{x}F\left(\vec{y}\right)$ (26-5) болатын болса.

1-теорема.Симметриялық сызықтық оператордың кез-келген ортонормаланған базистегі матрицасы симметриялық матрица болса.

Дәлелі. $A = \left(a_{ij}\right)$ симметриялық сызықтық F оператордың қандайда бір $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\right)$ ортонормаланған базистегі матрицасы болсын. Оның симметриялық болатынын, яғни $a_{ij} = a_{ji}$ болатынын дәлелдейік.

(26-5) формуланы базистік векторларға қолдансақ

$$F\left(\vec{e}_i\right)\vec{e}_j = \vec{e}_i F\left(\vec{e}_j\right) \qquad (*) \quad \text{болар еді.}$$

Ал, (26-2) бойынша

$$F\left(\vec{e}_i\right)\vec{e}_j = \left(a_{1i}\vec{e}_1 + a_{2i}\vec{e}_2 + \cdots + a_{ji}\vec{e}_j + \cdots + a_{ni}\vec{e}_n\right)\vec{e}_j =$$

$$= a_{1i}\vec{e}_1\vec{e}_j + a_{2i}\vec{e}_2\vec{e}_j + \cdots + a_{ji}\vec{e}_j\vec{e}_j + \cdots + a_{ni}\vec{e}_n\vec{e}_j$$

$$F\left(\vec{e}_j\right)\vec{e}_i = \left(a_{1j}\vec{e}_1 + a_{2j}\vec{e}_2 + \cdots + a_{ij}\vec{e}_i + \cdots + a_{nj}\vec{e}_n\right)\vec{e}_i = .$$

$$= a_{1j}\vec{e}_1\vec{e}_i + a_{2j}\vec{e}_2\vec{e}_i + \cdots + a_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_i + \cdots + a_{nj}\vec{e}_n\vec{e}_i$$

Бұл соңғы екі теңдіктен $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\right)$ ортонормаланған базис болғандықтан $\vec{e}_i\,\vec{e}_j = 0$, $\vec{e}_i\,\vec{e}_i = \vec{e}_j\,\vec{e}_j = 1$ болатынын ескерсек $F\left(\vec{e}_i\right)\vec{e}_j = a_{ji}, F\left(\vec{e}_j\right)\vec{e}_i = a_{ij}$ болады да (*) бойынша $a_{ij} = a_{ji}$ болып, A матрицаның симметриялық болатындығы шығады.

1-теоремаға кері теоремада дұрыс болады, яғни сызықтық оператордың әйтеуір бір ортонормаланған базистегі матрицасы симметриялық болса, онда ол оператор симметриялық оператор болады.

26.3. Оператордың меншікті векторы мен меншікті саны.

n өлшемді $\overline{E}_n$ евклидтік кеңістікте әрекет ететін F сызықтық операто бұл кеңістіктің кез-келген $\vec{x}$ векторын $\lambda \vec{x}$ векторға сәйкестендіретін болса, яғни $\vec{x}' = F\left(\vec{x}\right) = \lambda \vec{x}$ (26-6) болса, онда $\vec{x}$ вектор берілген F оператордың меншікті векторы, λ сол векторға сай келетін меншікті саны (меншікті мәні) делінеді.

F сызықтық оператор, $\vec{x}$ оның меншікті векторы, λ сол векторға сай келетін меншікті саны болса, онда (26-4) теңдеулер жүйесі былайша өзгереді:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

бұдан

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases} \qquad (26\text{-}7)$$

Бұл $x_1, x_2, \ldots, x_n$ айнымалыларға қарағанда біртекті сызықтық теңдеулер жүйесі. Ондай жүйенің 0-дік шешімінен өзге шешімдері болуы үшін оның анықтауышы 0-ге тең болуы керек:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (26\text{-}8)$$

Сөйтіп сызықтық оператордың меншікті саны λ осы теңдеудің шешімі болады.Бұл теңдіктің сол жағы λ-ға қарағанда n дәрежелі алгебралық көпмүшелік. Оны симметриялық сызықтық оператордың характеристикалық көпмүшелігі дейді, ал (26-8) теңдеудің өзін характеристикалық теңдеуі дейді.

Бір базистен екінші базиске көшкенде оператордың матрицасы өзгеруі мүмкін, бірақ оның характеристикалық теңдеуінің түбірлері өзгермейді.

2-теорема. Симметриялық сызықтық оператордың характеристикалық теңдеуінің түбірлері тек нақты сандар болады.

Дәлелі. λ_0 оператордың характеристикалық теңдеуінің бір түбірі болсын. Онда оны (26-7)-дегі орнына қойса, пайда болған жүйенің анықтауышы 0 болады. Сондықтан ол жүйенің 0-ден өзге шешімі болады. Ол шешім $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ болсын. Онда

$$\begin{gathered} a_{1j}\beta_j = \lambda_0\beta_1 \\ a_{2j}\beta_j = \lambda_0\beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{nj}\beta_j = \lambda_0\beta_n \end{gathered}$$

β_i-ға түйіндес санды $\overline{\beta}_i$ дейік. Жоғарыдағы теңдікті сәйкесінше $\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \ldots, \overline{\beta}_n$ сандарға көбейтіп, мүшелеп қосайық.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j\beta_i = \lambda_0\sum\beta_i\overline{\beta}_i \qquad (*)$$

Комплекс $\alpha = a+bi, \overline{\alpha} = a-bi$ сан берілсе және $a \neq 0, \quad a+bi = a-bi$ болса, онда $\alpha\overline{\alpha} = a^2+b^2$ оң нақты сан болады. Сондықтан β_i-лар нөлге тең емес сандар болғандықтан $\beta_i, \overline{\beta}_i$-дың коэффициенті λ_0 нақты оң сан болады. (*)-ның сол жағынында нақты сан болатынын дәлелдеуге болады.

Салдар. Кез-келген симметриялық сызықтық оператордың ең болмағанда бір меншікті саны болады.

Өйткені алгебраның негізгі теоремасы бойынша (26-8)-дың кемінде бір түбірі болады. Ол түбір 2-теорема бойынша нақты сан болады.

3-теорема. Сызықтық симметриялық оператордың әртүрлі меншікті санына сай келетін меншікті векторлары өзара ортогонал болады.

Дәлелі. $\overline{E}_n$-де берілген F симметриялық сызықтық оператордың $\vec{x}$ пен $\vec{y}$ меншікті векторлары, α мен β оларға сай келетін меншікті сандары болсын: $F\left(\vec{x}\right) = \alpha\vec{x}, F\left(\vec{y}\right) = \beta\vec{y}$.

Оператордың симметриялық оператор болғандықтан $F\left(\vec{x}\right)\vec{y} = \vec{x}F\left(\vec{y}\right)$ немесе $\alpha\vec{x}\vec{y} = \vec{x}\beta\vec{y}$. Бұдан $(\alpha-\beta)\vec{x}\vec{y} = 0$. Ал $\alpha-\beta \neq 0$ болғандықтан $\vec{x}\vec{y} = 0$. Ал, бұл $\vec{x}$ пен $\vec{y}$ өзара ортогонал векторлар деген сөз.

4-теорема. Меншікті мәндері (сандары) теңдей болатын меншікті векторлардың кез-келген комбинациясы, сол меншікті мәнге(санға) сай келетін меншікті вектор болады.

Өйткені $F\left(\vec{x}\right) = \alpha\vec{x}$, $F\left(\vec{y}\right) = \alpha\vec{y}$ болса $F\left(\vec{x}\pm\vec{y}\right) = F\left(\vec{x}\right)\pm F\left(\vec{y}\right) = \alpha\vec{x}\pm\alpha\vec{y} = \alpha\left(\vec{x}\pm\vec{y}\right)$ болатындықтан $\vec{x}\pm\vec{y}$ вектор F оператордың α меншікті санды векторы болады.

5-теорема. Егер $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\right)$ базистік векторлары қандайда бір сызықтық оператор F -тің меншікті векторлары болса, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ оларға сай келетін меншікті сандар болса, онда ол оператордың матрицасы диагоналдық матрица болады.

Өйткені $F\left(\vec{e}_1\right) = \lambda_1 \vec{e}_1, F\left(\vec{e}_2\right) = \lambda_2 \vec{e}_2, ..., F\left(\vec{e}_n\right) = \lambda_n \vec{e}_n$ болғандықтан (26-2) мына түрге келеді:

$$\left.\begin{array}{l} F\left(\vec{e}_1\right) = a_{11} \vec{e}_1 + a_{21} \vec{e}_2 + \cdots + a_{n1} \vec{e}_n = \lambda_1 \vec{e}_1 \\ F\left(\vec{e}_2\right) = a_{12} \vec{e}_1 + a_{22} \vec{e}_2 + \cdots + a_{n2} \vec{e}_n = \lambda_2 \vec{e}_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F\left(\vec{e}_n\right) = a_{1n} \vec{e}_1 + a_{2n} \vec{e}_2 + \cdots + a_{nn} \vec{e}_n = \lambda_n \vec{e}_n \end{array}\right\}$$

Бұдан $a_{11} = \lambda_1, a_{22} = \lambda_2, ..., a_{nn} = \lambda_n$, қалған a_{ij} -лар 0-ге тең. Демек, бұл кездегі матрица мынадай болады:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

6-теорема. Евклидтік $\overline{E}_n$ кеңістікте барлық векторлары берілген F симметриялық сызықтық оператордың меншікті векторлары болатын, ортонормаланған базис болады.

Дәлелін индукция әдісімен жүргізейік.

Алдымен бір өлшемді $\overline{E}_1$ кеңістік үшін теорема дұрыс болатынына көз жеткізейік. Бұл кезде (26-4) теңдеулер жүйесі бір ғана $x_1' = a_{11} x_1$ теңдеуден тұрады, ал бұл $\vec{x}' = F\left(\vec{x}\right)$ вектор $\vec{x}$ вектордан a_{11}-ге көбейткішке өзгешеленетінін, яғни $\vec{x}' = F\left(\vec{x}\right) = a_{11} \vec{x}$ болатынын көрсетеді. Ал, бұл $\vec{x}$ вектор F -тің $\lambda = a_{11}$ санды меншікті векторы деген сөз. Кез-келген бірлік $\bar{e}_1$ вектор $\overline{E}_1$-дің базисі болады.

Енді теорема $\overline{E}_{n-1}$ кеңістік үшін дұрыс деп алып, $\overline{E}_n$ кеңістік үшінде дұрыс болатынын дәлелдеу керек.

$\overline{E}_n$ кеңістік үшін F симметриялық сызықтық оператор болсын.2-теореманың салдары бойынша ол оператордың нақты меншікті саны λ болады. Бұл мәнге сай келетін меншікті вектор $\vec{y}$ дейік. Мұның бірлік векторы $\vec{e}_1 = \frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}$ болады.Ал, бұл $\vec{y}$-тің сандық көбейткішке ғана өзгешеленетіндіктен бұл да λ меншікті санға сай келетін меншікті вектор болады, яғни $F\left(\vec{e}_1\right) = \lambda \vec{e}$ болады.

Алгебрадан $\vec{e}_1$ векторға ортогонал болатын бірлік векторлардың жиыны $\overline{E}_n$ кеңістіктің $(n-1)$ өлшемді ішкі кеңістігі $\overline{E}_{n-1}$ болатыны белгілі.Ол ішкі кеңістікті Евклидтік векторлық кеңістік ретінде қарастыруға болады.Өйткені $\overline{E}_n$ кеңістік векторлары үшін орындалатын векторларды скаляр көбейту қасиеттері $\overline{E}_{n-1}$ үшін де орындалады. $\vec{z}$ вектор $\overline{E}_{n-1}$-дің кез-келген векторы болсын.Онда $\vec{e}_1 \cdot \vec{z} = 0$ болады және оператор F симметриялық болғандықтан

$$F\left(\vec{z}\right)\vec{e}_1 = \vec{z}\,F\left(\vec{e}_1\right) = \lambda\,\vec{e}_1 \cdot \vec{z} = \lambda \cdot 0 = 0$$

Сондықтан $F\left(\vec{z}\right)$ вектор $\vec{e}_1$-ге ортогонал вектор болады және бұл да $\vec{y}$ вектор сияқты $\overline{E}_{n-1}$-де жатады.

Сөйтіп, F оператор $\overline{E}_{n-1}$-дің векторына $\overline{E}_{n-1}$-дің векторын сәйкестендіреді.

F оператормен тек $\overline{E}_{n-1}$ ішкі кеңістік векторларына әрекет жасау арқылы $\overline{E}_{n-1}$-де анықталған жаңа сызықтық F_1 оператор аламыз.

$\overline{E}_n$-нің кез-келген векторы үшін (26-5) орындалатындықтан ол $\overline{E}_{n-1}$-дің векторлары үшінде орындалады. Демек, F_1 оператор да симметриялық оператор болады.

Индукция ережесі бойынша теорема $\overline{E}_{n-1}$ ішкі кеңістік үшін дұрыс. Сондықтан $\overline{E}_{n-1}$-де F_1 оператордың меншікті векторларынан тұратын ортонормаланған базис болады. Оны $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\right)$ дейік.Бұлардың барлығы $\vec{e}_1$-ге ортогонал және F оператор үшін де меншікті вектор болады. Сондықтан $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ векторлар евклидтік векторлық кеңістік $\overline{E}_n$ үшін берілген F симметриялық сызықтық оператодың меншікті векторларынан тұратын ортонормаланған базис болады.

Салдар. Симметриялық сызықтық оператордың матрицасын ортонормаланған базисті таңдап алу арқылы диагоналдық түрге келтіруге болады.

5-теорема бойынша ол базис үшін симметриялық сызықтық оператордың меншікті векторларынан тұратын базисті алуға болады.

26.4. Квадраттық форманы ортогонал түрлендіру арқылы оны канондық түрге келтіру.

24.5 тақырыбында сызықтық түрлендіру арқылы A_n кеңістігінде берілген кез-келген квадраттық форманы канондық және нормал түрге келтіруге болатындығы айтылды.

Евклидтік кеңістікте метрикалық қасиеттерге сәйкес негізінен ортонормаланған базис қолданылады. Сондықтан евклидтік кеңістікте ортогонал матрицаны сызықтық түрлендіру қолданылады. Ондай сызықтық түрлендіру ортогонал түрлендіру делінетіні (§23) келтірілген.

Бұл жөнінде мынадай тұжырымдар дұрыс.

Лемма. Егер квадраттық форма мен сызықтық оператордың қандайда бір ортонормаланған базистегі матрицалары бірдей болса, онда олардың матрицалары кез-келген ортонормаланған базисте бірдей болады.

Теорема. Кез-келген квадраттық форма ортогонал түрлендіру арқылы канондық түрге келеді.

Дәлелі. $f = a_{ij}x_i x_j$ (*1) квадраттық форма болсын. Қандайда бір ортонормаланған $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисте матрицасы осы квадраттық форманың симметриялық матрицасындай болатын сызықтық операторды қарастырамыз. Бұл оператордың характеристикалық теңдеуі мынадай болады:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (*2)$$

Жоғарыда айтылған салдар бойынша берілген сызықтық оператордың матрицасы диагоналдық түрге келетін $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \ldots, \vec{e}_n{}'$ ортонормаланған базис болады және ол матрицаның диагоналдағы элементтері (*2) характеристикалық теңдеудің түбірлері $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ -ден тұрады.

Лемма бойынша (*1) квадраттық форманың жаңа базистегі матрицасы осы сызықтық оператордың матрицасындай болады, яғни нормал түрге $\lambda_1 y_1{}^2 + \lambda_2 y_2{}^2 + \cdots + \lambda_n y_n{}^2$ (*3) келеді. Жаңа базис векторлары ескі базис векторлары арқылы былайша өрнектеледі: $\vec{e}_i{}' = c_{ij}\vec{e}_j$ (*4) және $\vec{e}_i$ -ден $\vec{e}_i{}'$ базиске көшу матрицасы ортогонал болады.

Сонда квадраттық форманы канондық түрге келтіретін сызықтық түрлендіру мынадай болады:

$$x_i = c_{ji}y_j \qquad (*5)$$

Мұның матрицасы $\left(\vec{e}_i\right)$ базистен $\left(\vec{e}_i{}'\right)$ базиске көшу матрицасына транспозициялау арқылы алынады. Сондықтан бұл да ортогонал матрица болады.

Сонымен квадраттық форманы ортогонал түрлендіру арқылы канондық түрге келтіруге болады.

Келтіру жолы мынадай:

1. Берілген квадраттық форма теңдеуіне сүйене отырып, сызықтық оператордың характеристикалық теңдеуі (2*)-ны құрады және оны шешіп меншікті сандар $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ табады.

Сонда ол (*3) түрдегі канондық түрге келеді.

2.Квадраттық форманы (*1) түрден (*3) түрге келтіретін базисті табу үшін табылған λ_i-ларды (26-5)-ге біртіндеп қойып, сол λ_i-ларға сай келетін меншікті вектор $\vec{x}$-тың координаталары $x_1, x_2, ..., x_n$-ді табады.

3. Ол табылған $\vec{x}$ векторларды өз ұзындығына бөліп, нормалайды. Ол векторлар ортонормаланған базистік векторлар болады.

Ескерту. Квадраттық форманы канондық түрге келтіретін жоғарыда баяндалған ортогонал түрлендіруден өзге **Якобы** ұсынған әдіс бар.

Ол мынадай:

1. Берілген квадраттық форманың матрицасын табады.
2. Ол матрицадан бұрыштай $1,2,3,...,n$ ретті анықтауыштар жасайды. Олар мыналар болсын:

$$a_{11} = J_1, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = J_2, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = J_2, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = J_n$$

3. Мыналарды табады: $\lambda_1 = J_1, \lambda_2 = \dfrac{J_2}{J_1}, \lambda_3 = \dfrac{J_3}{J_2}, \dots, \lambda_n = \dfrac{J_n}{J_{n-1}}$.
4. Сонда квадраттық форма

$$f = \lambda_1 y_1^{\,2} + \lambda_2 y_2^{\,2} + \cdots + \lambda_n y_n^{\,2}$$ канондық түрге келеді.

1-Мысал. $f = x_1^{\,2} - 2x_2^{\,2} + x_3^{\,2} + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$ квадраттық форма $\overline{E}_3$-те берілген.

Мыналарды табу керек:

1.Квадраттық форманың характеристикалық теңдеуін құрып, оны шешіңдер.

Есептің берілуі бойынша

$$a_{11} = 1, a_{22} = -2, a_{33} = 1, a_{12} = a_{21} = 2, a_{13} = a_{31} = -4, a_{23} = a_{32} = -2.$$

Сонда характеристикалық теңдеу

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Ашсақ $\lambda^3 - 27\lambda - 54 = 0$, $\lambda^3 - 36\lambda + 9\lambda - 54 = 0$ $\qquad \lambda(\lambda^2 - 36) + 9(\lambda - 6) = 0$

$(\lambda - 6)(\lambda + 3)^2 = 0$. Бұдан $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -3$. Міне осы меншікті сандар болады.

2. Канондық формасы қандай болады? $f = \lambda_1 y_1^{\ 2} + \lambda_2 y_2^{\ 2} + \lambda_3 y_3^{\ 2}$ формула бойынша $f = 6y_1^{\ 2} - 3y_2^{\ 2} - 3y_3^{\ 2}$. Міне осы канондық формасы.

3. Берілген квадраттық форма канондық түрге келетін базисті табу керек.

Ол үшін $$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda_i)x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

Жүйені, яғни жүйені $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ үшін шешу керек.

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - (2+\lambda)x_2 - 2x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

а) $\lambda_1 = 6$ болғанда жүйе $$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 8x_2 - 2x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Мұның алғашқы екеуінен $x_1 = 2x_2$, соңғы екеуінен $x_3 = -x_1$. Сонда $\lambda = 6$ болғандағы меншікті вектор координаталары $\left\{x_1, \frac{1}{2}x_1, -x_1\right\}$ немесе $\left\{1, \frac{1}{2}, -1\right\}$ немесе $\vec{p}_1 = \{2,1,-2\}$.

Мұны нормаласақ $\vec{e}_1{}' = \frac{\vec{p}_1}{\left|\vec{p}_1\right|} = \frac{\{2,1,-2\}}{\sqrt{4+1+4}} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right\}$.

Бұл $\lambda = 6$-ға сай келетін жаңа базис векторы болады.

б) $\lambda_2 = -3$болғанда жүйе $$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Бұл үш теңдеу бірғана $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ теңдеумен мәндес.

Мұнда $x_2 = x_3$ десек $x_1 = \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2}x_3$.

Сонда $\lambda_2 = -3$-ге сай келетін меншікті вектор $\vec{p}_2 = \left\{\frac{1}{2}x_3, x_3, x_3\right\}$ немесе $\left\{\frac{1}{2}, 1, 1\right\}$ немесе $\vec{p}_2 = \{1,2,2\}$. Нормаласақ $\vec{e}_2{}' = \frac{\vec{p}_2}{\left|\vec{p}_2\right|} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$.

Бұл 2 базистік вектор.

Енді үшінші $\vec{p}_3$ векторды табу керек. Оның координаталары да $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ теңдеуді қанағаттандырады. Сонымен қатар ол $\vec{p}_1$-ге де, $\vec{p}_2$-ге де ортогонал болу керек, яғни $\vec{p}_1\,\vec{p}_3 = 0$, $\vec{p}_2\,\vec{p}_3 = 0$. Егер $\vec{p}_3 = \{x_2, x_2, x_2\}$ десек, мұның бірінен $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$, екіншісінен $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$. Бұл екеуінен $x_1 = -x_2$, $x_1 = 2x_3$.

Сонымен $\vec{p}_3 = \left\{x_1, -x_1, \frac{1}{2}x_1\right\}$ немесе $\vec{p}_3 = \{2,-2,1\}$.

Мұны нормаласақ $\vec{e}_3\,' = \frac{\vec{p}_3}{\left|\vec{p}_3\right|} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right\}$.

Сонда жаңа базис ескі базиске былайша жіктеледі екен.

$$\begin{cases} \vec{e}_1\,' = \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2 - \frac{2}{3}\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2\,' = \frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3\,' = \frac{2}{3}\vec{e}_1 - \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_3 \end{cases}$$

Берілген квадраттық форманы канондық түрге келтіретін ортогонал түрлендіру матрицасы бір базистен екінші базиске көшу матрицасын транспозициялау нэтижесінде шығатындықтан

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\ x_3 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 \end{cases}$$

Мұны берілген квадраттық формадағы x_1, x_2, x_3-тің орнына қойса, ол канондық түрге келеді.

2-Мысал. $f = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$ квадраттық форманы Якобы әдісімен канондық түрге келтіру керек.

Біріншіден, квадраттық форманың матрицасын құрамыз. Мысалда $a_{11} = 1, a_{22} = -2, a_{33} = 1, a_{12} = 2, a_{13} = -4, a_{23} = -2$ қалғандары 0-ге тең.

Сонда іздеген матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

болады. Бұдан

$$J_1 = 1,\ J_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6,\ J_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 16 + 16 + 32 - 4 - 4 = 54$$

Сонда меншікті сандар $\lambda_1 = J_1 = 1,\ \lambda_2 = \frac{J_2}{J_1} = -6,\ \lambda_3 = \frac{J_3}{J_2} = -9$ болады да квадраттық форма $f = y_1^2 - 6y_2^2 - 9y_3^2$ болып шығады.

1-мысалда бұл квадраттық форма $f = 6y_1^2 - 3y_2^2 - 3y_3^2$ болған, екеуі екі түрлі. Бірақ теріс таңбалы мүшелер саны екеуінде бірдей, оң таңбалы мүшеде бірдей.

Демек, инерция заңы орындалады. Сондықтан есеп дұрыс шыққан.

3-Мысал. $f = 2x_1{}^2 - x_2{}^2 - 3x_4{}^2 + 4x_3x_4$ квадраттық форма берілген. Мұны канондық түрге келтіріңдер және канондық түрге келтіріңдер және канондық түрге келтіретін ортогонал түрлендіруді табыңдар.

Шешуі: Мұнда $a_{11} = 2, a_{22} = -1, a_{33} = 0, a_{44} = -3, a_{34} = 2$ қалғандарының барлығы нөлге тең.

Бұл квадраттық форманың характеристикалық теңдеуі

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Шығарсақ $(2-\lambda)(-1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1,\ 3\lambda + \lambda^2 - 4 = 0, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = -4$

Сондықтан берілген квадраттық форманың канондық түрі мынадай болады:

$$f = 2y_1{}^2 - y_2{}^2 + y_3{}^2 - 4y_4{}^2$$

Енді берілген квадраттық форманы осы канондық түрге келтіретін ортогонал түрлендіруді табу үшін $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$-тің әр қайсысына сай келетін меншікті векторларды және координаттық векторларды табу керек ол үшін мына теңдеулер жүйесін шешу керек:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33}-\lambda)x_3 + a_{34}x_4 = 0 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + (a_{44}-\lambda)x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \\ 0x_1 + (-1-\lambda)x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 - \lambda x_3 + 2x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 2x_3 + (-3-\lambda)x_4 = 0 \end{cases}$$

Бұдан $\begin{cases} (2-\lambda)x_1 = 0 \\ (-1-\lambda)x_2 = 0 \\ -\lambda x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_3 + (-3-\lambda)x_4 = 0 \end{cases}$

Соңғыдан $\lambda_1 = 2$ болғанда $\begin{cases} 0x_1 = 0 \\ -3x_2 = 0 \\ -2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$. Бұдан x_1-кез-келген сан,

$x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$. Сонда $\lambda_1 = 2$-ге сай келетін меншікті вектор

$\vec{p}_1 = \{x_1, 0,0,0\} = \{1,0,0,0\}$. 1-координаттық вектор $\vec{e}_1{}' = \dfrac{\vec{p}_1}{|\vec{p}_1|} = \dfrac{\{1,0,0,0\}}{1} = \{1,0,0,0\}$.

$\lambda_2=-1$ болса $\begin{cases}3x_1=0\\ 0x_2=0\\ x_3=-2x_4\\ 2x_3=2x_4\end{cases}$. Бұдан x_2-кез-келген сан, $x_1=0, x_3=0, x_4=0$. Сонда

$\lambda_2=-1$-ге сай келетін меншікті вектор $\vec{p}_2=\{0,x_2,0,0\}=\{0,1,0,0\}$. Демек, 2-координаттық вектор $\vec{e}_2{}'=\dfrac{\vec{p}_2}{\left|\vec{p}_2\right|}=\dfrac{\{0,1,0,0\}}{1}=\{0,1,0,0\}$.

$\lambda_3=1$ болса $\begin{cases}1x_1=0\\ -2x_2=0\\ -x_3+2x_4\\ 2x_3-4x_4\end{cases}$. Бұдан $x_1=0, x_2=0, x_3=2x_4$. Сонда $\lambda_3=1$-ге сай келетін меншікті вектор $\vec{p}_3=\{0,0,2x_4,x_4\}=\{0,0,2,1\}$, $\left|\vec{p}_3\right|=\sqrt{5}$. 3-координаттық вектор

$\vec{e}_3{}'=\dfrac{\vec{p}_3}{\left|\vec{p}_3\right|}=\dfrac{\{0,0,2,1\}}{\sqrt{5}}=\left\{0,0,\dfrac{2}{\sqrt{5}},\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right\}$.

$\lambda_4=-4$ болса $\begin{cases}2x_1=0\\ 3x_2=0\\ 4x_3+2x_4=0\\ 2x_3+x_4=0\end{cases}$. Бұдан $x_1=0, x_2=0, x_3=x_3, x_4=-2x_3$. Сонда $\lambda_4=-4$-ке сай келетін меншікті вектор $\vec{p}_4=\{0,0,x_3,-2x_3\}=\{0,0,1,-2\}$, $\left|\vec{p}_4\right|=\sqrt{5}$. 4-координаттық вектор $\vec{e}_4{}'=\dfrac{\vec{p}_4}{\left|\vec{p}_4\right|}=\dfrac{\{0,0,1,-2\}}{\sqrt{5}}=\left\{0,0,\dfrac{1}{\sqrt{5}},\dfrac{-2}{\sqrt{5}}\right\}$.

Сонда берілген квадраттық форманы канондық түрге келтіретін ортогонал түрлендіру

$$\begin{cases}x_1=1y_1+0y_2+0y_3+0y_4\\ x_2=0y_1+1y_2+0y_3+0y_4\\ x_3=0y_1+0y_2+\dfrac{2}{\sqrt{5}}y_3+\dfrac{1}{\sqrt{5}}y_4\\ x_4=0y_1+0y_2+\dfrac{1}{\sqrt{5}}y_3-\dfrac{2}{\sqrt{5}}y_4\end{cases} \qquad \begin{cases}x_1=y_1\\ x_2=y_2\\ x_3=\dfrac{2}{\sqrt{5}}y_3+\dfrac{1}{\sqrt{5}}y_4\\ x_4=\dfrac{1}{\sqrt{5}}y_3-\dfrac{2}{\sqrt{5}}y_4\end{cases}$$

26.5. Евклидтік кеңістіктегі квадрика.

1. A_n аффиндік кеңістікте айтылған квадрика анықтаушысы евклидтік кеңістік үшін де дұрыс, бірақ мұнда кез-келген аффиндік координаталар жүйесі емес тікбұрышты координатолар жүйесі қолданылады. Квадриканы ықшамдау квадраттық форманы ортогонал түрлендіру жолымен ықшамдаудан басталады. Ал, бұл геометриялық жаңа тікбұрышты

координаталар жүйесіне көшу болып табылады (яғни координата жүйесін координата басынан бұру болады). Одан әрі координата жүйесін параллель жылжыту арқылы квадриканы мына түрге келтіреміз:

$$p_1z_1{}^2+p_2z_2{}^2+\cdots+p_mz_m{}^2+2d_{m+1}z_{m+1}+2d_{m+2}z_{m+2}+\cdots+2d_nz_n=p \qquad (26\text{-}9)$$

Мұнда $m\le n$ және $p_1,p_2,\ldots,p_m$ қатарынан нөлге тең емес бұл теңдеуді одан әрі ықшамдап оның коэффициенттерін +1-ге,не -1-ге айландыру әруақытта мүмкін бола бермейді.

2. Үш өлшемді евклидтік кеңістіктегі квадрика классификациясы. (26-9) теңдеуді E_3 кеңістікте одан әрі ықшамдауда мынадай жағдайлар кездесуі мүмкін.

1-жағдай. $m=n=3, p\neq 0$.

Бұл кезде (26-9) мына түрге келеді: $p_1z_1{}^2+p_2z_2{}^2+p_3z_3{}^2=p$

Оны былай жазуға болады: $\dfrac{z_1{}^2}{\frac{p}{p_1}}+\dfrac{z_2{}^2}{\frac{p}{p_2}}+\dfrac{z_3{}^2}{\frac{p}{p_3}}=1$.

p-лардың таңбаларына сай былай болады:

а) $\dfrac{z_1{}^2}{a_1{}^2}+\dfrac{z_2{}^2}{a_2{}^2}+\dfrac{z_3{}^2}{a_3{}^2}=1$. Мұны эллипсоид дейді.

-Егер a_1,a_2,a_3 үш түрлі болса, онда үш өсті эллипсоид делінеді.

-Егер екеуі тең болса, онда айлану эллипсоид делінеді.

-Егер үшеуі тең $a_1=a_2=a_3$ болса, онда сфера дейді.

б) $\dfrac{z_1{}^2}{a_1{}^2}+\dfrac{z_2{}^2}{a_2{}^2}+\dfrac{z_3{}^2}{a_3{}^2}=-1$. Жорымал эллипсоид делінеді.

в) $\dfrac{z_1{}^2}{a_1{}^2}+\dfrac{z_2{}^2}{a_2{}^2}-\dfrac{z_3{}^2}{a_3{}^2}=1$. Бір қуысты гиперболоид делінеді.

г) $\dfrac{z_1{}^2}{a_1{}^2}+\dfrac{z_2{}^2}{a_2{}^2}-\dfrac{z_3{}^2}{a_3{}^2}=-1$. Екі қуысты гиперболоид делінеді.

2-жағдай. $m=n=3, p=0$.

Бұл кезде (26-9) мына түрге келеді: $p_1z_1{}^2+p_2z_2{}^2+p_3z_3{}^2=0$

Оны былай жазуға болады: $\dfrac{z_1{}^2}{\frac{1}{p_1}}+\dfrac{z_2{}^2}{\frac{1}{p_2}}+\dfrac{z_3{}^2}{\frac{1}{p_3}}=0$

p_i-ларға сай мынадай жағдайлар кездеседі:

а) $\dfrac{z_1{}^2}{a_1{}^2}+\dfrac{z_2{}^2}{a_2{}^2}-\dfrac{z_3{}^2}{a_3{}^2}=0$. Бұл конус делінеді.

б) $\dfrac{z_1{}^2}{a_1{}^2}+\dfrac{z_2{}^2}{a_2{}^2}+\dfrac{z_3{}^2}{a_3{}^2}=0$. Бұл жорымал конус.

3-жағдай. $m=2, n=3, d_3\neq 0$.

Бұл кезде (26-9) теңдеу мына түрге келеді: $p_1z_1{}^2+p_2z_2{}^2+2d_3z_3=p$

Мұны $z_1 = u_1, z_2 = u_2, z_3 = u_3 - \frac{p}{2d_3}$ формуламен параллель жылжыту арқылы мына түрге келтіруге болады: $p_1u_1^2 + p_2u_2^2 + 2d_3u_3 = 0$.

Коэффициенттерге байланысты мына жағдайлар болады:

а) $\frac{u_1^2}{a_1^2} + \frac{u_2^2}{a_2^2} = 2u_3$. Бұл эллипстік параболоид делінеді.

б) $\frac{u_1^2}{a_1^2} - \frac{u_2^2}{a_2^2} = 2u_3$. Бұл гиперболалық параболоид делінеді.

4-жағдай. $m = 2, n = 2$. Цилиндрлік квадрика.

Бұл кезде егер $p \neq 0$ болып, (26-9) мына түрге келеді: $p_1z_1^2 + p_2z_2^2 = p$ Мұнда

а) $\frac{z_1^2}{a_1^2} + \frac{z_2^2}{a_2^2} = 1$ эллипстік цилиндр

б) $\frac{z_1^2}{a_1^2} - \frac{z_2^2}{a_2^2} = 1$ гиперболалық цилиндр

в) $\frac{z_1^2}{a_1^2} + \frac{z_2^2}{a_2^2} = -1$ жорымал цилиндр

4.2. Егер $p = 0$ болса, онда $p_1z_1^2 + p_2z_2^2 = 0$

а) $\frac{z_1^2}{a_1^2} + \frac{z_2^2}{a_2^2} = 0$ нақты түзу бойымен қиылысатын екі жорымал жазықтық.

б) $\frac{z_1^2}{a_1^2} - \frac{z_2^2}{a_2^2} = 0$ қиылысатын екі нақты түзу.

4.3. Егер $p \neq 0, p_2 = 0$болса, онда $p_1z_1^2 = p$

а) $z_1^2 = a_1^2$ әр түрлі екі параллель жазықтық.

б) $z_1^2 = -a_1^2$ жорымал екі параллель жазықтық.

в) $z_1^2 = 0$ екі беттескен жазықтық.

4.4. $p_1z_1^2 + 2d_2z_2 + 2d_3z_3 = p$, d_1 мен d_2 қатарынан нөл емес.

Мұны былайша жазуға болады: $z_1^2 + \frac{2d_2}{p_1}z_2 + \frac{2d_3}{p_1}z_3 = \frac{p}{p_1}$.

Бұдан $u_1^2 + 2q_2u_2 + 2q_3u_3 = 0$.

Мынадай $\begin{cases} u_1 = w_1 \\ u_2 = -\frac{q_2}{q}w_2 + \frac{q_3}{q}w_3 \\ u_3 = -\frac{q_2}{q}w_2 - \frac{q_3}{q}w_3 \end{cases}$ ортогонал түрлендіру жәрдемімен жаңа тікбұрышты координата жүйесіне көшсек, теңдеу $w_1^2 = 2qw_2$ түрге келеді.Мұны параболалық цилиндр дейді.

1-Мысал. $x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+2x_1-2x_2-3=0$ (1) E_2 кеңістікте берілген квадриканы канондық түрге келтіріп, түрін ажырату керек.

1. Мұның квадраттық формасы $f=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$. Осыны ортогонал түрлендіру арқылы канондық түрге келтіреміз.Мұнда $a_{11}=1, a_{12}=1, a_{22}=1$ қалғандары нөл. Характеристикалық теңдеуі $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Бұдан $1-2\lambda+\lambda^2-1=0, \lambda^2-2\lambda=0$, $\lambda_1=2, \lambda_2=0$.

Сонда квадраттық форма $f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2=2y_1^2+0y_2^2=2y_1^2$ (2)

2. Берілген квадраттық форма канондық түрге келетін жаңа координата жүйесінің базистерін табамыз. Олар осы квадраттық форманың матрицасындай матрицалы сызықтық оператордың меншікті векторлары болады. Сондықтан оның координаталары мына теңдеулер жүйесін қанағаттандыру керек:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)u_1+a_{12}u_2=0 \\ a_{21}u_1+(a_{22}-\lambda)u_2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (1-\lambda)u_1+u_2=0 \\ u_1+(1-\lambda)u_2=0 \end{cases} \tag{3}$$

а) $\lambda_1=2$ болғанда $\begin{cases} -u_1+u_2 \\ u_1-u_2 \end{cases}$. Бұдан $u_1=u_2$.

Сонда $\lambda_1=2$-ге сай келетін меншікті вектор $\vec{p}_1=\{u_1,u_2\}=\{1,1\}$.

Ал, $\left|\vec{p}_1\right|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ болатындықтан 1-координаттық вектор

$$\vec{e}_1{}'=\frac{\vec{p}_1}{\left|\vec{p}_1\right|}=\frac{\{1,1\}}{\sqrt{2}}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

б) $\lambda_2=0$ болғанда $\begin{cases} u_1+u_2=0 \\ u_1+u_2=0 \end{cases}$. Бұдан $u_1=-u_2$. Демек $\lambda_2=0$-ге сай келетін меншікті вектор $\vec{p}_2=\{u_1,-u_2\}=\{-1,1\}$, $\left|\vec{p}_2\right|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

Сонда 2-базистік вектор $\vec{e}_2{}'=\frac{\vec{p}_2}{\left|\vec{p}_2\right|}=\frac{\{-1,1\}}{\sqrt{2}}=\left\{\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

Сонда ортогонал түрлендіру
$$\begin{aligned} x_1&=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1-\frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \\ x_2&=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \end{aligned} \tag{4}$$

3. Мұны бір тікбұрышты координата жүйесінен екіншісіне оны бұру арқылы көшудегі координатаны түрлендіру формуласы ретінде қарастырамыз.Сонда бұл жаңа системадағы квадрика теңдеуі мынадай болады:

$$2y_1^2+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1-\frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right)-2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right)-3=0$$

Бұдан

$$2y_1^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}y_2 - 3 = 0 \text{ немесе } 2y_1^2 - 2\sqrt{2}y_2 - 3 = 0$$

Мұны $y_1^2 = \sqrt{2}\left(y_2 + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$ деуге болады.Егер табылған координата

жүйесін $\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 - \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{cases}$ (5) формуламен параллель жылжытсақ квадрика

теңдеуі мына канондық түрге келеді: $z_1^2 = \sqrt{2}z_2$ (6)

Ал, бұл парабола теңдеуі. Олай болса берілген квадрика парабола екен. (4) пен (5)-тен

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}z_2 + \frac{3}{4}$$
$$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}z_2 - \frac{3}{4}$$

Бұл берілген координата жүйесінен канондық түрге келетін координата жүйесіне көшу формуласы.

Бұл жүйенің төбесі $O'\left(\frac{3}{4}, \frac{-3}{4}\right)$, координаттық векторлар $\vec{e}_1{}' = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, $\vec{e}_2{}' = \left\{\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

Қайталау сұрақтары мен есептер

1. Бір вектор аргументті сандық функция деген не және ол қандай жағдайда сызықтық функция делінеді?
2. Сызықтық форма деген не?
3. Екі вектор аргументті сандық функция деген не, бисызықты функция деген не?
4. Бисызықты форма деген не, оның матрицасы деп нені айтады?
5. Симметриялық бисызықтық форма деген не? Оң анықталған симметриялық бисызықтық формаға мысал келтір.
6. Симметриялық бисызықтық формаға қарағанда түйіндес вектор деп қандай векторларды айтады? V_n-де кез-келген екі векторы түйіндес болатын базис туралы теорема қалай тұжырымдалады?
7. Квадраттық форма деген не? Екі, үш айнымалыдан жасалған квадраттық формалар қандай болады?
8. Квадраттық форма матрицасы. Квадраттық форма мен бисызықты форма арасындағы қатыс қандай?
9. Квадраттық форманы матрица арқылы өрнектеу.
10. Координатты сызықтық түрлендіру және оның формуласы қандай?
11. Аффиндік кеңістікте, айнымалы квадрат дәрежеде енбейтін квадраттық формаға, квадрат дәрежеде болатын мүшені ендіру жолы.

12. A_n кеңістікте квадраттық форманы канондық түрге айландыру жолы. Канондық түр қандай болады?
13. A_n-де канондық түрден нормал түрге көшу жолы.
14. Инерция заңы деген қандай?
15. Квадраттық форманың рангы, оң индексі, сигнатурасы деген не? Олар арасында қандай қатыс болады?
16. Аффиндік A_n кеңістіктегі квадрика деген не? Екі, үш айнымалыдан жасалған квадрикалар нені білдіреді, теңдеулері қандай?
17. Квадрика центрі деген не, оны қалай табады? Центр туралы теорема. Центрдің болу, болмаулары.
18. Цилиндрлік квадрика деген не?
19. Конустық квадрика деген не?
20. A_n кеңістікте квадрика теңдеуін нормал түрге келтіру туралы теорема.
21. A_n-дегі квадриканы ықшамдау, классификациялау.
22. n өлшемді $\overline{E}_n$ евклидтік векторлық кеңістіктегі оператор.
23. Берілген вектор мен оның оператор нәтижесінде шыққан бейнесі арасындағы байланыс.
24. Симметриялық сызықтық оператор деген не, оның матрицасы туралы реорема?
25. Оператордың меншікті векторы және оған сай келетін меншікті саны деген не?
26. Оператордың характеристикалық теңдеуі, оның шешуі және түбірлері туралы теорема.
27. Сызықтық симметриялық оператордың әр түрлі меншікті санына сай келетін векторлар қасиеті, меншікті сандары бірдей болатын векторлар қасиеті.
28. Оператордың матрицасы қандай жағдайда диагоналдық матрица болады?
29. $\overline{E}_n$ кеңістікте барлық векторлары берілген оператордың меншікті векторлары болатын базис туралы теорема.
30. Квадраттық форма мен сызықтық оператордың ортонормаланған базистегі матрицасы туралы және квадраттық форманы ортогонал түрлендіру туралы теоремалар.
31. Квадраттық форманы $\overline{E}_n$-де ортогонал түрлендіру арқылы канондық түрге келтіру жолы.
32. Квадраттық форма берілген базис пен оны канондық түрге келтіретін базис арасындағы байланыс. Ортогонал түрлендіру формуласы.
33. Квадраттық форманы канондық түрге келтірудің Якоби әдісі қандай?
34. Евклид кеңістіктегі квадрика және оны нормал түрге келтіру.
35. Үш өлшемді евклидтік кеңістіктегі квадриканы классификациялау.

36. Матрицаны мынадай болатын $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ бисызықтық форманы құрып, оның рангын табыңдар.

37. A_3 кеңістікте берілген $3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$ квадраттық форманың матрицасын анықтап, оның рангын табыңдар.

38. A_3-те берілген $x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ квадраттық форманы сызықтық түрлендіру жолы мен канондық түрге келтіріңдер. Оның нормал түрі қандай болады?

39. A_3 аффиндік кеңістікте $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$ квадраттық форма берілген.

а) Сызықтық түрлендіру арқылы оны канондық және нормал түрге келтіріңдер.

б) Берілген квадраттық форманы канондық және нормал түрге келтірудегі түрлендіру формуласы қандай болады?

40. E_3 кеңістікте берілген $x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$ квадраттық форманы ортогонал түрлендіру арқылы канондық түрге келтіріңдер.

41. E_5 кеңістікте $4x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_3^2 - 5x_4^2 + 3x_5^2 - 8x_2x_3 + 6x_4x_5$ квадраттық форма берілген. Ортогонал түрлендіру арқылы оны канондық түрге келтіру және түрлендіру формуласын жазу керек.

42. E_4 кеңістікте берілген $4x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4$.Квадраттық форманы ортогонал түрлендіру арқылы және Якоби әдісімен канондық, нормал түрлерге келтіріп нәтижесін салыстырыңдар.

43. A_2-де берілген $9x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$ квадраттық форманы сызықтық түрлендіру, ортогонал түрлендіру және Якоби әдісімен канондық түрге келтіріп нәтижесін салыстырыңдар.

44. A_3-те $2x_1^2 + 12x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 12x_2x_3 - 10x_1 + 14x_3 + 7 = 0$ квадрика берілген. Оның центрін табыңдар.

45. $4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + 8x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 0$ квадриканы канондық түрге келтіріңдер.

46. Мына квадриканың $x_1^2 + 9x_3^2 + x_4^2 - 6x_1x_3 + 2x_1x_4 - 6x_3x_4 + x_2 + 3x_3 + x_5 + 1 = 0$ центрі жоқ екенін дәлелдеңдер.

47. Мына квадриканы $2x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_3 + 4x_1 - 6x_2 + 8x_3 - \frac{35}{3} = 0$ квадриканы ортогонал түрлендіру арқылы канондық, нормал түрге келтіріңдер. Координаттық базистерді жаңа координата жүйесін және ортогонал түрлендіру формуласын табыңдар.

Пайдаланған әдебиеттер:

1. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. М”Наука” 1968.
2. Аргунов Б.И. және басқалар. Геометриядан есептік практикум, 1,11,111 бөлім. Алматы 1980-1981ж.
3. Аскарова М. Векторлар және оларға амалдар қолдану. Алматы “Мектеп” 1981.
4. Атанасян Л.С., Атанасян В.А. Сборник задач по геометрии, часть 1. М”Просвещение” 1973 г.
5. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия, часть 1. М”Просвещение” 1986 г.
6. Аяпбергенов С. Аналитикалық геометрия Алматы 1971
7. Базылев В.Т. и др. Сборник задач по геометрии. М.”Просвешение” 1980.
8. Бакельман И.Я. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. М.”Просвешение” 1976.
9. Бахвалов С.В. Бабушкин П.И. Иваницкая В.П. Аналитическая геометрия. М.”Просвешение” 1965.
10. Бахвалов С.В. Маденов П.С. Парроменай А.С. Сборник задач по аналитической геометрии Из-во”Наука” 1964.
11. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.
12. Болтянский В.Г., Яглом И.М. Векторы в курсе геометрии средней школы. М.----1962.
13. Гусак А.А Пособие по решению задач высшей математике.
14. Данко П.Е. Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах, часть 1. М.”Высшая школа” 1974.
15. Есенбаева Р.У., Игликов А.И., Молдабаева П.С. Аналитикалық геометрия және сызықтық алгебра элементтері. Алматы 1985.
16. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. Изд. ”Наука”М. 1965.
17. Сборник задач по математикепод редакцией Ефимова Н.В.
18. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. Изд. “Наука” М.1968.
19. Исқақов М., Құлқашева М. Аналитикалық геометрия есептері мен жаттығулары. Алматы “Мектеп” 1972.
20. Клетенек Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.”Наука” 1964.
21. Кузнецов Л.А. Сборник задании по высшей математике. Типовые расчеты “Высшая школа” М. 1983.
22. Майоров В.М., Спонец З.А. Задачник-практикум по векторной алгебре. Учпед. М. 1961.
23. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. Изд. Московский университет 1969.
24. Моденов П.С. Задачи по геометрии М”Наука” 1979.
25. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии М.”Наука” 1976.
26. Погорелов А.В. геометрия М “Наука” 1983.

МАЗМҰНЫ

І ТАРАУ. ВЕКТОРЛЫҚ АЛГЕБРА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

II ТАРАУ. ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ АНАЛИТИКАЛЫҚ ГЕОМЕТРИЯ

III ТАРАУ. ЕКІНШІ РЕТТІ СЫЗЫҚТАР

IV ТАРАУ. ЖАЗЫҚТЫҚТЫ ТҮРЛЕНДІРУ

V ТАРАУ. КЕҢІСТІКТЕГІ АНАЛИТИКАЛЫҚ ГЕОМЕТРИЯ

VI ТАРАУ. ЕКІНШІ РЕТТІ БЕТТЕР

VII ТАРАУ. КӨП ӨЛШЕМДІ КЕҢІСТІКТЕР

VIII ТАРАУ. КВАДАРТТЫҚ ФОРМА ЖӘНЕ КВАДРИКА