**Абдрахманов Қ., Рахымбек Д., Мадияров Н.**

**Ж О Ғ А Р Ы Г Е О М Е Т Р И Я -2**

**(Проективтік геометрия. Жазықтықтағы геометриялық салулар. Кескіндеу әдістері)**

ШЫМКЕНТ -2024

УДК 514.18(0758)

ББК 22.151.3я73

Оқу құралын басуға Өзбекәлі Жәнібеков атындағы Оңтүстік Қазақстан педагогикалық университетінің академиялық кеңесі ұсынған, хаттама №5

19.04.2024ж.

**Пікір жазғандар:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Аширбаев Н.Қ.** | – ф-м.ғ.д., М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті профессоры |
| **Ибрагимов Р.І.** | -пед.ғыл.докторы, Ө.Жанибеков атындағы Оңтүстік Қазақстан педагогикалық университеті доценты |

Абдрахманов Қ., Рахымбек Д., Мадияров Н. Жоғары геометрия – 2:оқу құралы/ Қ.Абдрахманов, Д. Рахымбек, Н.Мадияров.- Шымкент 2024.- 297б.

ISBN 978-9965-19-317-0

Жоғары геометрия оқу құралының ұсынылып отырған екінші бөлімінде келесідей тақырыптар қарастырылған: проективтік геометрия; жазықтықтағы салулар; кескіндеу әдістемелері.

Ұсынылған оқу құралы 5В010900 -“Математика”, 5В02600 – “Математика-физика”, 5В012700 -“Математика-информатика” мамандықтарының студенттері мен геометрияны тереңдетіп оқитын жоғары оқу орындарының студенттері мен оқытушыларына арналған.

© Абдрахманов Қ. 2024.

**Кіріспе**

Жоғары геометрия курсы көптеген салалар мен бөлімдерден тұрады. Бірінші бөлімінде аналитикалық геометрия курсы қарастырылған болатын. Бұл ұсынылған “Жоғары геометрия-2” оқу құралында геометрияның келесідей өзекті салалары мен бөлімдері қарастырылған: проективтік геометрия; жазықтықтағы геометриялық салулар; кескіндеу әдістемелері; аксонометрия; Монж әдісімен перспективалық салулар.

Бұл ұсынылып отырған оқу құралдарындағы материалдар авторлардың көп жылдардан бері педагогикалық институтта оқыған дәрістердің негізінде жазылды, және пайдаланған әдебиеттер тізімінде көрсетілген орыс тіліндегі әдебиеттер пайдаланылды.

Оқу құралындағы тараулар, бөлімдер реттері “Жоғары геометрия-1” оқу құралынан бастап жалғасып келеді.

Әр бір тарауда, сол тарауға тиісті теориялық мәселелер баяндалып көптеген түінді тұжырымдар мен теоремалардың дәлелдемелері келтірілген және олардың мәндерін аша түсетін мысалдармен жаттығулар орындалған. Әр бір тараудың соңында теориялық мәселерді қайталауға арналған сұрактар келтірілген.

Бұл оқу құралына материалдарды іріктеу, олардың көлемімен мазмұнын анықтау, педагогикалық университетердің математикалық мамандықтарының студенттеріне арналған Мемлекеттік стандарттарына сай құрылған және оқу жұмыс жоспарларында көрсетілген геометриялық пәндердің бағдарламасына сәйкес даярланды.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  | **IX-ТАРАУ. ПРОЕКТИВТІК ГЕОМЕТРИЯ.**  **§ 27. Проективтік кеңістік. Проективтік координаталар жүйесі.**  **27.1. Центрлік проекция. Меншіксіз элементтер**.  Үш өлшемді аффиндік А3 немесе евклидтік Е3 кеңістікте π′ және π жазықтықтары және оларда жатпайтын S нүктесі берілсін. π′-тін кезкелген M′ нүктесіне π-дің SM′∩π=М нүктесін сәйкестенсін. Мұндай сәйкестікті π′-ті S нүктеден π-ге проекциялау немесе S центрлі проекциялау дейді. F′∈π′ фигураның S центрлі проекциясы F∈π болсын. π мен S-тің орнын өзгерту арқылы F′-тін кейбір қасиеттері проекция, F – ке өзгерместен өз күйінше көшсе, кейбір қасиеттері өзгеруі керек, бұрмаланып проекцияланады. Француз ғалымы Понселе (1788-1867) центрлік проекциялауда фигураның өзгермейтін қасиеттерін проективтік қасиет деп атаған.  Фигураның осындай қасиеттерін оқып – үйренуге центрлік проекцияның өзара бір мәнді бейнелеу (биекция) болмайтыны үлкен кедергі жасайды. Мысалы М′∈π′ нүкте SМ′//π болатындай болып орналасса, онда М′-тін π-де S центрлі проекциясы болмайды, өйткені SМ′ пен π қиылыспайды. Осы сияқты N∈π нүкте S N//π′ болатын нүкте болса, онда N-нің π′-ге түп нұсқасы (яғни N бейнесі болатын N′ нүкте) болмайды.  Бұл кемістікті жою үшін, яғни центрлік проекциялаулы өзара бірмәнді бейнелеуге айналдыру үшін, кәдімгі евклидтік түзу а-ға оның меншіксіз нүктесі немесе шексіз алыстаған нүктесі деп аталатын бір нүктені (оны А∞ деп белгілейік) қосып, а түзуін кеңейтеді. Бұл нүктеде а түзуіне параллель болатын барлық түзулер қиылысады деп есептеледі. Демек А∞ нүкте өзара параллель түзулер центрі болады.  Жазықтықта әртүрлі бағытта әртүрлі түзулер өтетіндіктен және оның әрқайсысында бір-бір меншіксіз нүкте болатындықтан жазықтықта шексіз көп меншіксіз нүктелер болады. Сол меншіксіз нүктелер жиынын жазықтықтан меншіксіз түзуі дейді. Ол түзу бойымен сол түзу жатқан жазықтыққа параллель барлық жазықтықтар қиылысады деп есептеледі.  Меншіксіз нүктемен толықтырылған евклидтік түзуді кеңейтілген түзу, ал меншіксіз түзумен толыққан евклидтік жазықтықты кеңейтілген жазықтық дейміз.  Кеңейтілген түзу, кеңейтілген жазықтықпен кенейтілген евклидтік кеңістікті кеңейтілген кеңістік дейді. Кеңейтілген кеңістікте центрлік симметрия биекция (өзара бір мәнді бейнелеу) болады. Өйткені мұнда қиылыспайтын түзулер, жазықтықтар және түзу мен жазықтық болмайды.  Сонымен әрбір евклидтік түзуге бір меншіксіз нүкте, әрбір евклидтік жазықтыққа бір меншіксіз түзу қосылады.  **27.2. Проективтік кеңістік.** Нақты сандар өрісі R-де (n+1) өлшемді векторлық кеңістік V берілсін, оның нөль емес векторларының жиынын дейік.  Бос емес Р жиыны V векторлық кеңістік тудыратын (жасайтын) n өлшемді проективтік кеңістік делінеді, егерде  бейнелеуі табылып, ол Вейельдің төмендегі екі аксиомасын қанағаттандыратын болса:  10.  сюръективтік бейнелеу болса, яғни Р жиынын әрбір элементінің -те кемінде бір түп бейнесі болса  20.  теңдігі тек  векторлар коллинеар болған да ғана, тек сонда ғана орындалатын болса.  Вейльдің бұл екі аксиомасын проективтік кеңістіктің аксиомалары, ал Р ның элементтерін проективтік кеңістіктің нүктелері дейді.  Егер  бейнелеуде  вектор  нүктеге бейнеленетін болса, яғни болса, онда Х нүктені  вектор тудырды дейтін боламыз.  Векторлық V кеңістіктен екі, үш өлшемді  ішкі кеңістіктері тудыратын  проективтік кеңістік сәйкесінше проективтік түзу, проективтік жазықтық дейді.  кеңістіктерінде өзара коллинеар емес шексіз көп векторлар болатындықтан проективтік түзу мен проективтік жазықтықтарда да шексіз көп проективтік нүктелер болады.  **27.3. Проективтік жазықтық, проективтік кеңістік моделдері.**  Проекттивтік кеңістік анықтамасында Р жиынын элементтерінің табиғаты жайлы ештеме айтылмаған, сол сияқты  бейнеленуі қандай бейнелеу болатындығы туралы да ештеме жоқ. Егер проективтік кеңістік аксиомаларын қанағаттандыратын Р жиын және  бейнелеу табылса, онда ол аксиомалар жүйесі интерпретациялануы делінеді, ал табылған Р жиынын проективтік кеңістіктегі модель дейді. Осындай модельдер жасайық.  Үш өлшемді  евклидтік кеңістіктегі бір S нүктесінен өтетін барлық түзулерінің жиынын Р2 деп белгілейік. Векторлық кеңістік V ның әрбір нөль емес  векторына S нүктеден өтетін және  векторға параллель болатын а түзуін сәйкестендірейік. Сонда  бірленеді бейнелеу болады және бұл бейнелеуде проективтік кеңістіктің екі аксиомасы да орындалады. Сондықтан  жиынын (ол бір S нүктеден өтетін түзулер жиыны) проективтік жазықтықтың моделі болады. Бұл модельде S тен өтетін әрбір түзу проективтік нүктенің рөлін атқарады (проективтік нүкте болады), ал S нүктеден өтетін бір жазықтықта жататын түзулер жиыны проективтік түзу рөлін атқарады. 108-суретте a,b,c,d, ... түзулердің әрқайсысы проективті нүкте делінеді, ал бір жазықтық құрайтын d,c,f түзулер жиыны проективтік түзу болады. S  108 – сурет  d  a  b  c  Сөйтіп S нүктеден өтетін түзулер жиыны проективтік  жазықтықтың моделі болады.  Осы сияқты үш өлшемді проективтік кеңістік  -тің моделінде жасауға болады. Ол үшін векторлық кеңістік V жасайтын 4 өлшемді аффиндік немесе евклидтік кеңістік аламызда, оның S нүктесінен өтетін түзулерінің жиынын  деп белгілейміз. Ал,  бейнелеуін V-ның нөл емес  векторына S тен өтетін және  векторға параллель болатын а түзуін сәйкестендірілетіндігін айта аламыз. Бұл бейнелеу проективтік кеңістіктегі аксиомаларды қанағаттандырады. Сондықтан  үш өлшемді проективтік кеңістіктің моделі болады. Бұл модельде S нүктеден өтетін түзулер проективтік нүкте, ал евклидтік 4 өлшемді кеңістіктегі екі (үш) өлшемді құрайтын түзулерінің жиыны проективтік түзу (жазықтық) болады.  Проективтік жазықтықтың моделі үшін кеңейтілген евклидтік жазықтықты алуға да болады. Бұл кезде кәдімгі нүктелер мен меншіксіз нүктелер. Проективтік нүктелер, кәдімгі және меншіксіз түзулер проективтік түзу болады.  **27.4. Проективтік жазықтықтағы проективтік координаталар жүйесі.** Проективтік  жазықтықтың белгілі тәртіпте алынатын жалпы жағдайдағы (яғни кез келген үшеуі бір түзуде жатпайтын) жүйені проективтік жазықтықтағы проективтік координаталар жүйесі немесе проективтік репер дейді. Ол нүктелер  болса, оны -ден жазады және  проективтік репердің төбелері. Е барлық нүктесі,  түзулері координаттық түзулер делінеді (111 –а сурет).  Бұл нүктелерді жасайтын (тудыратын) векторлар  болса және олар мына шартты қанағаттандырса  (27.1)  Онда бұл векторлар жүйесі  реперге қарағанда келісілген делінеді.  A3  E2  E1  A2  E3  a)  A1  x  111-сурет  A3  E2  Х  A2  E3  б)  A1  x3  Е  E  E1  Бұл реперге қарағанда келісілген бірнеше векторлар жүйесі болуы мүмкін. Мұндай жағдайда сәйкес векторлар коллинеар болады. Мысалы,  реперге қарағанда  және  векторлар жүйесінің екеуіде келісілген болса, онда  (27.2) болатын  саны (27.4)табылады. Проективтік жазықтыққа  репер ендірілсін және жазықтықта Х нүкте берілсін (109 –б сурет). Проективті  жазықтықты үш өлшемді  векторлық кеңістік жасайтындықтан, ол кеңістік базисі үшін векторларды алуға болады. Сонда Х нүктені тудыратын  вектор ол базистерге тек бір түрде жіктеледі:  Осы жіктелудегі коэффициенттер ( вектордың координаталарын) Х нүктесінің проективтік координаталары делінеді және ол  деп жазылады.  векторлар (коллинеар векторлар) бір нүктені анықтайтындықтан Х нүкте координаталары үшін -ты алуға да болады. Сөйтіп берілген координаталар жүйесі нүкте координаталарын тұрақты көбейткішке дейінгі дәлдікте анықтайды. Сондықтан нүктенің проективтік координаталарын  деп қатынас түрде жазуға болады.  Ал, болатындықтан ал  болатындықтан  репер төбелерінің осы репердегі координаталары  болады.  Демек,  реперде  болса, онда бұл нүктені  вектор тудырады (анықтайды).  Теорема.  үш нүкте бір түзуде жатпау үшін  (27-3)  болуы қажетті және жеткілікті.  Дәлелі. Проективті  түзуді екі өлшемді векторлық кеңістік жасайды. Сондықтан А,В,С бір түзуде жатса және бұл нүктелерді тудыратын векторларды десек, олар  кеңістікте жасалуы керек. Демек олар коллинеар болуы керек. Сондықтан олардың координаталарынан жасалған анықтауыш д-ге тең болу керек. Сөйтіп А,В,С бір проективті түзуде жатса (27-3) дұрыс.  **27.5. Проективтік жазық пен проективтік түзудің кейбір қасиеттері.**  Проективтік түзу мен проективтік жазықтық евклидтік түзу мен жазықтыққа меншіксіз элементтер ендіру нәтижесінде шыққандықтан проективтік түзу мен жазықтықтан өзгешеліктері болуы керек. Олар мыналар:  1. Бір жазықтықта жатқан кез келген екі проективтік түзу міндетті түрде қиылысады (не кәдімгі не меншіксіз нүктеде), параллель түзулер болмайды. Параллельдік ұғым жоқ.  2. Проективтік түзу тұйық болады (109-б сурет).  Шынында да, егер М нүкте проективтік И түзуі бойымен С,Е,... бағытында қозғалса, онда ол нүкте түзу бойымен үздіксіз жүріп отырып,  нүктені басып өтіп Д,А нүктелер арқылы қайтадан орнына келеді. Өйткені S тен жүргізілген SM түзу И түзуіне параллель болғанда, олар меншіксіз  нүктеде қиылысады. Қалған жағдайда И-дың кәдімгі нүктесінде қиылысады. Үзіліс болмайды. Демек И тұйық болады.  109 а-сурет  И  S  Д  А  М  С  Е  3. Проективтік түзуді бір нүкте 2 сәулеге бөлмейді. Себебі проективтік түзу тұйық. Екі нүкте проективтік түзуді төбелері осы нүктелер болатын екі кесіндіге бөледі.Сол түзудің меншіксіз нүктесі  жатады. Оларды АВ,  деп белгілейді (109-б сурет).  А  В  109-б сурет  4. Барлық проективтік жазықтықтар өзара қиылысады (параллель болмаса кәдімгі, параллель меншіксіз түзу бойымен).  5. Проективтік түзу проективтік жазықтықты 2-ге бөлмейді, яғни түзудің бір жағы екінші жағының жалғасы болады. Евклидтік жазықтағы евклидтік түзу екі жарты жазықтыққа бөледі, яғни түзудің бір жағындағы нүктеден екінші жағындағы нүктеге бару үшін түзуді қимай өте алмайды.  Проективтік жазықтықта проективтік И түзуін қиып өтпей-ақ оның бір жағындағы А нүктеден 2-жағындағы В нүктеге өтуге болады (109-в сурет). Өйткені И түзуі АВ кесіндіні қиса, онда ол  кесіндіні қимайды (түзулер бір ғана нүктеде қиылысады).  В  А  И  109-в сурет  6. Екі проективтік түзу проективтік жазықтықты тек 2 облысқа бөледі (евклидтік геометрияда 4-ке бөледі). 109-Г суретте  мен  мен  бір тұтас жазықтықтар. Мысалы А мен В нүктелер бір жазықтықта жатады.  Өйткені АВ кесінді екі түзудің екеуіменде қиылысып жатыр. Сондықтан АВ түзудің  кесіндісі олармен қиылыспайды.  А  В  И1  И2  г)  3  б)  1  2  4  109-сурет  7. Проективтік үш түзу проективтік жазықтықты 4-ке бөледі (евклидтік жазықтықты үш түзу 7-ге бөледі). Олар 109-б суретте 1 мен , 2 мен , 3 пен  және 4 пен номерленбеген жазықтықтар.  8. Проективтік жазықтық біржақты болады (евклидтік жазықтық екі жақты (үстіңгі, астынғы жағы).  Проективтік жазықтықтың астыңғы, үстінгі жағы деген болмайды. Неміс математигі Мебиус 1865 ж, Листинг 1862 ж. бір жақты беттен оңай мысалын көрсетті  А  В  Д  В  А  Д  С  б)  а)  В,Д  А,С  С    110-сурет    АВСД тік төртбұрышын алып (110- сурет), оны бұрап А мен С, В мен Д төбелерін бір-біріне жапсырып қойса 110-б сурет шығады. Бұл бір жақты бет болады. Оны Мебиус жапырағы дейді. Бұл бет проективтік жазықтықтың мысалы бола алады.  **27.6. Проективтік жазықтықтағы проективтік координаталар жүйесі.** Енді керісінше (27-3) орындалсын. Онда  векторлар коллинеар болады. Сондықтан олар тудыратын нүктелер бір түзуде жатады.  Сонымен (27-3) үш нүктенің бір түзуде жату шарты болады. нүкте координата түзуінде, мысалы -де жатса, онда  болғандықтан нүктелер үшін 27-3 бойынша  (27.4)  бұдан . Сондықтан нүкте үшінші 3ші координат 0 болады , ал жатса болады.  **27.6. Проективтік түзудегі проективтік координаталар жүйесі.** Проективтік түзудегі белгілі тәртіпте алынатын  үш нүктеден тұратын жүйені проективтік түзудегі проективтік координата жүйесі немесе проективтік репер дейді. Оны  деп белгілейді.  мен  репердің төбелері, Е бірлік нүктесі делінеді. Егер бұл нүктелерді тудыратын  векторлар  (27-4) шартына бағынса, онда бұл векторлар R нүктеге қарағанда келісілген делінеді (27-4) тен  нүкте болатындықтан  векторлар R-реперге қарағанда келісілген. Сонымен  және  тең екеуіде R-ге қарағанда келісілген болса, онда  саны табылып  (27-5)  вектор  нүктелерді тудыратын  векторларға былайша болады. Х нүктені тудыратын өрнектелсе, онда  сандарынан Х нүктенің (R репердегі) түзудегі проективтік координаталары дейді және оны деп жазады. Проективті кеңістіктегі 2-аксиомасы бойынша  векторлар бір нүктені анықтайтындықтан  сандары Х нүктенің координаталары болса, онда сандарда Х нүктенің координаталары болады.  Сөйтіп, түзудегі проективтік координаталар жүйесі нүкте координаталарын сан көбейткішке дейінгі дәлдікте анықтайды. Сондықтан нүкте координатасын былайша  қатынас түрінде жазуға болады.  болатындықтан репер төбелерінің координаталары  болады.  Проективтік  жазықтықта  репер берілсін. Репер төбелерінен Е нүктені координатталық түзулерге проекцияласақ  нүктелер шығады да координаттық түзулер бойында  түзудегі координаталар жүйелері шығады (111-а сурет). Егер    111а - сурет  нүктені координата төбелерінен координата өстеріне проекцияласақ  (111-б сурет) нүктелер шығады. Олардың R репердегі координаталары  болады. Ал -ден -дегі координаталары болады. -нің -дегі, -тен -тегі координаталары, сәйкесінше  болады.  **Теорема**. E кеңейтілген түзу,  оның меншіксіз нүктесі болсын.  сол түзудегі проективтік репер болсын. E түзудегі меншікті нүктесі. М-нің бұл репердегі координаталары  болса, онда М нүктенің  аффиндік координаталар жүйесіндегі координатасы  болады (112-сурет)  Дәлелдеуі. Кеңейтілген жазықтықтағы E түзуден тыс S нүктесін алайық.  аффиндік координата жүйесі болсын (В төбесі,  бірлік векторы). Бұл жүйедегі М нүктені аффиндік координатасы х болсын. Демек  болады.  векторлары сәйкесінше  нүктелерді тудыратын векторлар болады.  В  Е  М  S  112-сурет  Ал, болатындықтан бұл векторлар  реперге қарағанда келісілген.  болатындықтан  реперде  болады. Шарт бойынша  репердегі М нүктенің координаталары  еді. Сондықтан  мен  пропорциясынан болу керек . Бұдан  (27-6)  **27.7.** **Түзудің теңдеулері**. Проективтік  жазықтықта  репер берілген. Бұл реперде  нүктелер берілсін. А мен В ны басып өтетін  түзуі бойынан  нүкте алайық. Онда бұл нүкте осы түзуде жатса ғана, тек сонда ғана (27-3) бойынша  (27.7)  болады. Міне осы екі нүктені басып өтетін түзу делінеді. Мұны 1-қатар элементтері бойынша жіктеп жазсақ  егер  десек (27.8)  түзу теңдеуі осындай түрге келеді.  (27.8)  Бұл  айнымалыларға қарағанда сызықтық теңдеу.  Сонымен проективтік түзудің теңдеуі түзу сызықтың теңдеу болады екен. Ол теңдеудегі санын түзудің координаталары дейді. Егер (27-8)-ді -ға көбейтсек,  те сол түзудің координатасы болатыны шығады (27-7) сол жағындағы анықтауыш 0 болғандықтан және  матрица болатындықтан (27-7)-нің 1-қатары қалған қатарлардың сызықтық комбинациясына тең болады:  (27.9)  Мұны проективтік түзудің параметрлік теңдеуі дейді.  Екі түзу  теңдеулермен берілсін. Бұл екі теңдеу бір түзуді анықтайтын болса, оның координаталары пропорционал болар еді.  Ол  матрицаның рангы 1-ге тең болады деген сөз. Демек берілген екі түзу қиылысу үшін олардың координаталарын жасалған матрицаның рангы 2-ге тең болу керек.  болатындықтан (27-7) бойынша координаттық түзулер теңдеуі мынадай болады: -теңдеуі   теңдеуі   теңдеуі  болады. Демек,  түзудің координаталары (0,1,0) болады.  **27.8. Координаталарды түрлердіру.** Проективтік жазықтықта екі R=(A1, A2, A3), E), R′=(A1′, A2′, A3′, E′) репер берілсін. Жазықтық М нүктесінің бұлардағы координаталары (х1, х2, х3), (х1′, х2′, х3′) болсын. R′ реперінің элементтері R реперге қарағанда былайша анықталсын: А1′=(а11, а21, а31), А2′=(а12, а22, а32), А3′=(а13, а23, а33), Е′=(а10, а20, а30). Мына матрицаны R реперлі R′ реперге Коши матрицасы дейді.  (27-10)  Егерде а11 + а21 + а31 = а10, а12 + а22 + а32 = а20, а13 + а23 + а33 = а30 болса, онда матрица бағаналары келісілген делінеді. Егерде олар келісілмеген болса, онда мына теңдеулер жүйесінен  k1, k2, k3 тауып, матрицаны былайша жазса  матрица бағаналары келісілген болып шығады. Осындай жағдайда М нүктесі екі базистегі координаталары арасында (кеңістіктегі координата жүйесін түрлендіру формуласы бойынша) мынандай байланыс болады  (27-11)  Мына проективтік жазықтықтағы нүкте координаталарын түрлендіру формуласы дейді.  Түзудегі нүкте координатасын түрлендіру формуласы мынадай болады  (27-12)  бұлардағы ρ қандайда бір тұрақты сан.  Ескерту: R – ден R′ - ке өту матрицасы бағаналары келісілмеген болса, онда (27-11), (27-12) формулаларды оң жақтары сәйкесінше к1, к2, к3 сандарға көбейтілуі керек.  **1-мысал.** Кеңейтілген евклидтік кеңістіктің π1 жазықтығы π2 жазықтығына жатпайтын S нүктеден проекцияланады. π1 жазықтықтың меншіксіз түзуінің π2 жазықтықтағы кескінін салу керек.  Шешуі. π1 жазықтықтан 0 нүкте алып, ол нүкте центрі болатын π1 –дің түзулер шоғын жүргізсек, ол түзулердің әрқайсысында бір-бір меншіксіз нүкте болады. Солардың жиынын π1 жазықтықтан меншіксіз түзуі болады (113-сурет)  **113-сурет**  α  A0  π1  O  α  O’  π2  Мысалы  түзуі O шоғында жатсын, оның меншіксіз нүктесі  болсын.  ден π2 жазықтықтағы бейнесін салу үшін  проекциялаушы түзуі мен π2 жазықтарымен қиылысу нүктесі А ны табу керек. Ол нүкте S тен а түзуіне параллель етіп жүргізілген түзуінің π2 мен қиылысу нүктесі болады. Өйткені параллель түзулер бір меншіксіз нүктеде қиылысады. Сөйтіп S нүктеден О шоқтығы түзулермен параллель етіп жүргізілген түзулер жиыны π1 –ге параллель  жазықтығын береді. Ал π2 мен -нің қиылысу түзуі π1 дегі меншіксіз түзудің бейнесі болады.  **2-мысал**. Проективтік И түзуінде  проективтік координата жүйесі берілген (114-сурет). Сол реперде  нүктелерді салу керек.  **Шешуі**. И түзуінен тыс кез келген S нүктесін аламыз. Сонда  векторлар координаттық,  нүктелер мен бірлік Е нүктесі тудыратын векторлар болады. SE –нің бойынан кез келген  нүкте алып, ол нүктеден  түзулерге параллель жүргізіп  нүктелерді табамыз. Сонда  векторлар  реперге қарағанда келісілген болады. Өйткені  болатындықтан  болады. Төбесі S нүктесі координаттық векторлары  болатыны координата жүйесіне  нүктені салу үшін ,  векторларды салып, олардан -ге параллель жүргізіп,  нүктені табамыз. Сонда  нүкте болады.  S  A2  A1  114-сурет  B  E  A2  A    E2  C2  C1  A3  Дәл осы сияқты В(1,2) нүктені салу үшін  салып  нүктені табады. Оны S нүктеден И түзуіне проекциялайды: . Сонда шыққан В нүкте іздеген нүкте болады.  **3-мысал.** И түзуінде  репер берілген. Осы түзуде жатқан М нүктенің координаталарын табу керек (115-сурет)  S  115-сурет  C1  C2      A1 E A2  Шешуі. И дан Т-ге S нүктесін алып S центрлігі  шоқ түзулерін жүргіземіз. Е ден -ге параллель жүргізіп  нүктелерді табамыз. Сонда  болатындықтан В нүктеден -ге параллель жүргізіп  нүктені табамыз. Сонда В нүктенің координаталары  болады.  **4-мысал**. Проективтік түзуде R реперден  реперде коши формуласы  болатын екі репер берілген. а)  реперде  болса, бұл нүктенің R репердегі координаты қандай болады. б) R реперде  болатын нүктенің  репердегі координаталары неге тең. а)  үшін . Сонда  нүкте үшін  . Сонда  б) Е нүкте үшін  Д нүкте үшін . Бұдан .  **5-мысал.**  нүктелерден өтетін түзу теңдеуі қандай болады.  Шешуі: түзу теңдеуі болады. Бұдан  . Сонда АВ түзуден координаталары (-1,1,3) болады.  **6-мысал**. екі түзудің қиылысу нүктесін табыңдар.  Шешуі. Бұл екі түзу қиылысу үшін мына матрицаның  рангі 2-ге тең болу керек. Сәйкес элементтер пропорционал болғандықтан рангы 2-ге тең.  бұдан  Сонда қиылысу нүктенің координатасы .  **7-мысал.**  түзулердің бір жақта жату шарты қандай.  Шешуі: Бұл түзулердің теңдеулердің толық жазсақ  Үш түзудің ортақ нүктесі болу үшін осы жүйенің О-ден өтсе шешімі болуы керек. Алгебрадан белгілі мұндай біртекті теңдеу жүйесінің 0-ден өзге шешімі болуы үшін оның анықтауышы 0-ге тең болу керек:  Міне осы үш түзудің бір жақта жату шарты болады.  **8-мысал.**  С(2,5) нүктелер біртекті емес координаталарымен берілген. Олардың біртекті координаталарын табу керек.  Шешуі.  проективтік координата жүйесі кеңейтілген евклидтік кеңістікте біртекті аффиндік координаталар жүйесі делінеді,  координаттық нүктелер меншікті нүкте. Ал, кеңейтілмеген аффиндік жазықтықтағы кәдімгі аффиндік координата жүйесі біртекті емес координата жүйесі делінеді.  жазықтықтағы меншікті нүкте координаты (х,у) болса, оның біртекті емес координаты (х,у,1) болады. Бағыттаушы векторы  түзумен анықталатын меншікті емес нүкте координаты біртекті координата жүйесінде (а,в,0) болады.  Біртекті координаты  болатын кәдімгі нүктенің біртекті емес координаты  болады. Осылар бойынша есептегі нүктелердің біртекті координаталары  болады.  Осылар бойынша есептегі нүктелерін біртекті координаталары  С(2,5,1) болады.  Сонда  түзудің біртекті координаталардағы теңдеуі  болады.  §**28. Проективтік геометрияның негізгі факторлары**  **28.1. Ауыстырымдылық принципі.**  1. Проективтік нүктелер мен проективтік түзулерден тұратын  проективті жазықтығын алайық. Ондағы барлық түзулердің жиынын *L* дейік.  жазықтығында *R* проективтік координата жүйесін ендірейік.  жазықтықтары мен *L* түзудегі координаталары  болатын А нүктесіне *L* түзулер жиынын осы *R* түзудегі координаталары  болатын *a* түзуін сәйкестіктендіретін  бейнелеуді қарастырайық. Мұндай сәйкестікте әртүрлі нүктені координаталары пропорцианал болмайтындықтан оларға сәйкестенетін түзулерде әртүрлі болады. Ал, бұл  бейнелеуі иньекция болады деген сөз. Сол сияқты *a* түзуі *L*-дегі  координатты түзуі болса, онда -ден  кординатты нүктесі мен *а* түзуінің түп бейнесі болады.  Сөйтіп *L* жиынында -де түп бейнесі болмайтын түзу болмайды, яғни *L* дің әрбір түзуі -дің қандайда бір нүктесінің бейнесі болады. Демек  бейнелеуі субьективті бейнелеу болады. Сонымен  бейнелеуі әрі иньекция, әрі субьективті болады. Сондықтан ол биетивті бейнелеу (өзара бір мәнді бейнелеу) болады. Ондай бейнелеудін кері бейнелеуі  болады.  Осылайша жасалған ,  бейнелеуінде нүктемен түзумен бір бірінде жату қатысы сақталады, яғни  түзуде жатса және  болса, онда  жатады.  Өйткені  теріс  болса онда  жатқандықтан (*в*-нің теңдеуі  болатындықтан) (\*) болады. Ал,  бейнелеудің жасалу ережесі бойынша  болады. Сондықтан (\*) теңдігі *В*-ның -ге жататынын көрсетеді.  Сонымен  түзуде жатса, онда  бейнелеуде *а* түзудегі бейнесі *А* нүктесінің бейнесінде жатады.  Осыларға сүйеніп мына тұжырымды дәлелдеуге болады.  бейнелеуде бір түзудің бойындағы жатқан нүктелерді, сол түзудегі бейнесі центрі болатын түзулер жиынын түзулеріне бейнеленеді.  **Дәлелдеуі:**  нүктелер  түзуінде жатқан және  болсын. Сонда  жататындықтан . Осы сияқты . Ал, бұл  түзулер - центрі болатын жатық түзулері деген сөз.  Сөйтіп  бейнелеуіндегі *U* түзудің нүктелері  нүкте центрі болатын жаққа бейнелейді және керісінше  нүктеден өтетін түзулер  түзуіндегі нүктелерге бейнеленеді.  2. Жоғарыда айтылғандарға сүйене отырып Евкклидтік геометрияда орындалмайтын проективтік геометрияға тән мынадай екі теореманы айтуға болады.  **1-теорама.** Проективтік жазықтықта нүкте, түзу және олардың өзара қатынасы жайлы бұл тұжырым таныс болса, онда ол тұжырымдағы «нүкте» деген сөзді «түзу», «түзу» деген сөзді «нүкте» деген сөзбен алмастырғандағы шығатын *Т1* тұжырымда дұрыс болады.  Мұны жазықтықтағы ауыстырымдылық (қосалқылық) принципі немесе кіші ауыстырымдылық принципі дейді.  жазықтықтағы нүктелер мен түзулерден және олардың арасындағы қатыстардан тұратын  фигура жайлы. *Т* тұжырым дұрыс болсын. -тің нүктелерінің  бейнелеуіндегі бейнелері мен -тің барлық түзулерінің  бейнелеуіндегі бейнелерінің жиыны  фигура жасасын. *Т*-дағы нүктені түзу мен, түзуді нүктемен алмастырғандағы тұжырым *Т1* болсын. *Т* мен *Т1*-ге нүкте мен түзудің өзара қатыстары өзгерген жоқ. Сондықтан *Т* дұрыс тұжырым болса, *Т1*-де дұрыс болады.  Ауыстырымдылықты тұжырымдарға мысалдар.   1. *А* мен *В* қандай нүктелер болса да *А* нүктеде, *В* нүктеде тиісті бір, тек бір *J* түзу болады.   Бұған ауыстырымдылығы (қосалқылық) тұжырым мынадай болады.  11. *а* мен *в* қандай түзулер болса да *а* түзуге де, *в* түзуге де тиісті бір, тек бір *J* нүкте болады.  Мұның екеуіде дұрыс: Мұның біріншісі екі нүктені басын тек бір түзу өтеді десе, екіншісі екі түзу тек бір нүктеде қиылысады дейді.   1. Кез келген нүкте мен түзуді басып тек бір жазықтықтан өтеді.   21. Кез келген түзу мен нүктені басып тек бір жазықтық өтеді.  3. Түзуге тиісті шексіз көп нүкте болады.  31. Нүктеге тиісті шексіз көп түзу болады.  4. Бір түзуде жатпайтын кемінде үш нүкте болады.  41. Бір нүктеде жатпайтын кемінде үш түзу болады.  Үш өлшемді проективтік кеңістікте үлкен ауыстырымдылық принцип ( кеңістіктегі ауыстырымдылық (қосалқылық) принцип) орындалады. Ол мынадай  **2-теорема.** Үш өлшемді проективтік кеңістікте нүкте, түзу, жазықтық және олардың өзара қатыстары жайлы бір *Т* тұжырым дұрыс болса, онда бұл тұжырымнан «нүкте», «түзу», «жазықтық» деген сөзді «жазықтық», «түзу», «нүкте», деген сөзбен алмастырғандағы *Т1* тұжырымда дұрыс болады.  Бұл *Т* мен *Т1* тұжырымдарды өзара ауыстырымды немесе қөпжақты тұжырымдар дейді.  Үлкен ауыстырымдылық приципке мысалдар   1. Кез келген екі жазықтыққа тиісті бір ғана түзу болады.   11. Кез келген екі нүктеге тиісті бір ғана түзу болады.  2. Түзу мен онда жатпайтын нүкте бір жазықтықта жатады.  21. Түзу мен онда жатпайтын жазықтық бір нүктеде жатады. (яғни бұл нүкте қиылысады)  3. Екі нүктеге тиісті бір ғана түзу болады.  31. Екі жазықтыққа тиісті бір ғана түзу болады.  Проективтік кеңістікпен жазықтықта ауыстырымдылық принциптерін орындалуы проективтік геометрияның жазықтықтағы және кеңістіктегі геометрияға бөлуден құтқарады. Жазықтық үшін дәлелденген теорема осы ауыстырымдымалы принципі бойынша кеңістік үшін дұрыс болады.  **28.2. Дезарг теоремалары.** Ж. Дезарг (1593-1662) француз математигі. Оның теоремалары үш төбелікке арналған.  Бір түзуде жатпайтын үш нүкте және олардан өтетін үш түзуден тұратын фигураны үш төбелік дейді.  Дезаргтың 1- теоремасы. ,  екі үш төбеліктің сәйкес төбелерін қиатын  түзулер бір *S* нүктеде қиылысса, онда сәйкес қабырғаларының қиылысу нүктелері , ,  бір түзуде жатады.  Дәлелі: а) ,  төбеліктер бір жазықтықта жатсын (116-а, сурет) және сәйкес төбеліктен өтетін.    116а-сурет  түзулер *S* нүктеде қиылсын.  түзуін алайық. Сонда төбе координаталары  болар еді.  Сонда -ның теңдеуі  болады. Бұдан . Демек  түзу бойындағы нүктелері 2- және 3 координаталары  болады екен. Сондықтан  деуге болады.  бойындағы нүктелердің  болады. Сондықтан  деуге болады.  -ның теңдеуі  бұдан .  -тің теңдеуі  бұдан .  Сонда нүкте координатасын табу үшін  мен  теңдеулерін бір жүйеге алып шешу керек  бұдан . Сонда .  Ал, . Сондықтан  Осы сияқты АВ-ның теңдеуі . Бұдан  -тың теңдеуі . Бұдан  . Бұдан  және .  Сонда С0 дың координата  болады. Осы сияқты В0 дың координатасы  болады.  нүктелер бір түзуде жататын болса, мына анықтауыш  болу керек. Шығарсақ  Демек, шынында да,  нүктелер бір түзу бойында жатады екен.  б) Енді АВС,  үш төбеліктер бір жазықтықта жатпасын және  түзулер бір S нүктеде қиылыссын. SA мен SB қиылысқандықтан АВ мен  бір жазықтықта жатады. Сондықтан олар қиылысады дейік. Осы сияқты   нүктеде қиылысады. АВ мен  жатқан жазықтық  мен  жатқан жазықтық β болсын. АВС үш төбелік   үш төбелік  жазықтықта жатыр. Сондықтан  нүктелер  мен  пен қиылысу сызығында жатады, яғни бір түзуде жатады.  Дезаргтың кері теоремасы. Егер екі үш төбеліктің сәйкес қабырғалары бір түзуде жататын үш нүктеде қиылысса, онда ол үш төбеліктің сәйкес төбелерін қосатын үш түзу бір нүктеде қиылысады.  **28.3. Түзудің төрт нүктесінің күрделі қатынасы**.  Проективтік И түзуінде А,В,С,Д төрт нүкте берілсін.  ол түзудегі проективтік координата жүйесі үшін алынсын. Д нүктенің бұл репердегі координаталары () болса, онда  санын берілген төрт нүктенің күрделі қатынасы дейді және оны былайша жазады.  (28-1)  Төрт нүктенің күрделі қатынасы жайлы төмендегі тұжырымдар дұрыс болады.  10. Егер  бір түзудің әртүрлі нүктелері,  кез келген нақты сан болса, онда бұл түзуде  болатын тек бір Д нүкте болады.  Дәлелі, реперде  болсын. Анықтама бойынша . Енді  үшін  десек, онда 4 нүктенің күрделі қатынасының анықтамасы бойынша . Демек  пен -ның координаталары пропорционал болып шықты. Олай болса ол екеуі бір нүкте болады.  20. Егер проективті түзудің  нүктелері үшін  болса, онда мен  беттеседі.  30. Проективтік И түзудің А,В,С, әр түрлі нүктелері болса, Д ол түзудің А-дан өзге кезкелген нүктесі болса және бұл нүктелердің түзуге ендірілген кез келген R репердегі координаталары  болса, онда бұл 4 нүктенің күрделі қатынасы  (28-2)  Дәлелі. И түзуге берілген R формуламен табылады, реперден өзге  реперін ендірейік. Егер десек R реперден -ге көшу матрицасы болады.  сандарын матрица бағаналары келісілген болатындай етіп алайық: . Бұдан .  Сонда R реперден R0 реперге көшудегі координаттың түрлендіру формуласы  болады.  D нүктенің R0 дағы координаталары  десек соңғы теңдіктен болар еді.  Бұдан  Сонда  дәлелдейді. (28-3)  Осы формулаға сүйеніп төрт нүктенің күрделі қатынасына байланысты мына формулаларды дәлелдейік.  10.  Дәлелі (28-2) формуламен тексеру арқылы жүргізіледі.  20. Нүктелер парын ауыстырғаннан күрделі қатынас өзгермейді, яғни (28-3)  болады. Ақиқаттығына (28-2) формуламен тексеру арқылы көз жеткізуге болады.  30. Екі пардағы нүктелер орнын қатарынан ауыстырғаннан күрделі қатынас өзгермейді, яғни (28-3)  (28-3) формуламен тексеру керек.  40.  (28-3-4)  Дәлелдеу үшін  реперін алайық. Бұл реперде А(1,0), В(0,1), С(1,1) болады,  дейік.  Сонда    Сонымен  50.  4 нүктеден  түрлі алмастыру яғни күрделі қатынас жасауға болады:    әр бағанада 1-2 қатардағы күрделі қатынас 20 бойынша тең болады. Ал, 30 бойынша әр бағанадағы 1-мен 3, 2 мен 4 – қатардағы күрделі қатынастар тең. Сонымен әр бағанадағы төрт күрделі қатыс өзара тең.  1-бағанадағы күрделі қатынас -ға тең болса, қалған бағанадағы күрделі қатынастар неге тең болатынын есептейік.  Сонымен  болсын. Сонда 2-бағана:  .  Сөйтіп 2-бағанадағы күрделі қатынастар -ге тең болады.  3-бағана. 40 бойынша . Бұдан . Сонымен 3-бағанадағы күрделі қатынастар 1-v –ге тең.  4-бағана. . Сөйтіп 4-бағанадағы төрт күрделі қатысқан төртеуі де -ге тең болады.  5-бағана.  6-бағана.  Ескерту: Егер проективтік түзуде A,B,C,D төрт нүкте беріліп  болса АВ нүктелер пары СD нүктелер парын бөлмейді (117-а сурет), ал  болса АВ нүктелер парын СD нүктелер парын болады (117-б сурет) делінеді.    А С В Д  u  u  A  C  D  B  a)  б)  117-сурет  Бөлмейді, бөледі дегенді қысқаша  деп белгілейді.  20,30,50 қасиеттерден, егер  болса, яғни  болса, онда  болатындықтан 2-бағанадағы күрделі қатыстар теріс болады, яғни нүктелер пары бірін-бірі бөледі.  Ал,  болғанда  болатындықтан 3-4-5-6 бағанадағы күрделі қатыстарға енетін нүктелер пары бірін-бірі бөлмейді.  **Теорема**: Егер А,В,С,Д нүктелер кеңейтілген  түзудің меншікті нүктелері, Е меншіксіз нүктесі болса, онда  (28-4),  (28-5) болады мұндағы  үш нүктенің жай қатынасы (28-5) болады.  **Дәлелі.** Кеңейтілген түзу  -да  реперін алайық, онда бұл реперде  болады,  дейік.  Сонда (28-2) бойынша      Бұлардағы  Түзудегі  аффиндік координата жүйесінде  болатын  десек    Ал,  болатындықтан    Ал, дәлелденді.  Бұл теорема 4 нүктенің күрделі қатынасының геометриялық мәнін ашады. Сонымен    **28.4. Түзулер шоғының төрт түзуінің күрделі қатынасы**  1-теорема. Проективтік U түзуде жатқан А,В,С,Д нүктелерді ол түзуде жатпайтын S нүктеден  түзуін проекциялағанда  нүктелер шықса, онда  болады.  Дәлелі.  және  реперлерін алайық, мұндағы Е нүкте SC түзуінің кез келген нүктесі (118-сурет)  118-сурет  S  D  A R  U C  A1  E  B1 C1 D1  R-репердегі нүктелер координаталары А(1,0,0), В(0,1,0), S(0,0,1), Е(1,1,1),  болсын.  AS –тен теңдеуі  ден  BS-тін теңдеуі  ден  болатындықтан және  жатқандықтан  болады да  болады. Мұны былайша  алуға болады. Сонда R реперден  реперге көшу матрицасы  болады.  Матрица бағаналары келісілген болу үшін  болу керек. Бұдан болады да R-ден  реперге өткендегі координатаны түрлендіру формуласы (27-11) мына түрге келеді    D-ның R-дегі координаттары -дегі координаттары  болсын, бірақ АВ-ның теңдеуі  жатқандықтан  болады да  болады.  Сонда Д нүкте үшін (\*) формула  болады. Мұны алғашқы екеуінен  (\*\*)  Координаттық түзуде жататын нүкте координаталары туралы теорема бойынша И дағы (А,В,С) реперде , ал -дегі  реперде  болады. Сондықтан . Бұдан (\*\*) ескерсек  болып теорема дәлелденеді.  Анықтама: S центрлі түзулер шоғы берілсін. Ол шоқтың a,b,c,d төрт түзуінің күрделі қатынасы деп, шоқты кез келген U түзумен қиғандағы қиылысу нүктелері  төрт нүктенің күрделі қатынасын айтады, яғни (118-сурет)  (28-7)  Жоғарыдағы теорема бойынша төрт түзудің күрделі қатынасы И түзуінің орнына байланысты болмайды. Төрт нүктенің күрделі қатынасының қасиеттеріне сай төрт түзудің күрделі қатынасының мынадай қасиеттері болады:  (28-8)  **2-теорема**. Кеңейтілген жазықтықта берілген шоқтың төрт  түзуінің күрделі қатынасы мынаған тең болады  (28-9)  **Дәлелі.** 119-суретте S пен И түзуі арасын һ десек  . Бұдан  . Бұдан  . Бұдан  . Бұдан  119-сурет  S  a  c  b  d  u  D  B  C  A    Бұларды мына өрнектегі орындарына қойсақ  болып шығады.  **3-теорема.** Проективтік жазықтық  реперде берілген  нүктелерді басып өтетін түзу параметрлік теңдеумен берілген:  .  Егер осы түзудегі  нүктеге   нүктеге  параметрлерге сай келсе, онда  төрт нүктенің күрделі қатынасы  (28-6) тең болады.  **Дәлелі.**  нүктелерді  нүктеден  координатты түзуге проекциялайық. Сонда  нүктелер пайда болады.  Ал,  түзудегі репер  болар еді.  бұл репердегі нүктелер координаттары ,  болады. Бұған (28.2) –ні қолдансақ    болып теорема дәлелденді.  **1-мысал.** Мыналарға: а) әртүрлі екі түзу б) коллинеар үш нүкте в) үш жүйелікке, ауыстырымдылық принцип бойынша ауыстырымды фигураны анықтаңдар.  Жауабы: а) әртүрлі екі түзуге, әртүрлі екі нүкте ауыстырымды, б) Коллинеар үш нүкте, бұл бір түзуде жататын үш нүкте деген сөз. Сондықтан оған бір нүктеде өтетін үш түзу ауыстырымды болады; в) Үш төбелік – деген үш нүктеден және оларды қос қостан басып өтетін үш түзуден тұратын фигура. Сонда оған ауыстырымды фигура үш түзу және олар қос-қостан қиылысатын үш нүктеден тұратын фигура болады. Ал, бұл тағыда үш төбелік, сондықтан үш төбелік өзіне-өзі ауыстырымды болады.  **2-мысал.**  проективтік кеңістікте а және в екі айқас түзу берілген. А нүкте ол түзулерде жатпайды. А нүктеден өтетін және а,в түзулердің екеуіменде қиылысатын бір ғана түзудің болатындығын дәлелдеңдер.  Шешуі. А түзуі және онда жатпайтын А нүктесі арқылы бір  жазықтығы өтеді, В түзуі және онда жатпайтын А нүкте арқылы бір тек бір  жазықтығы өтеді. Проективтік кеңістікте кез келген жазықтық қиылысатындықтан және А нүкте мен  ға ортақ болғандықтан мен  жазықтықтар А нүктеден өтетін И түзуімен Е бойымен қиылысады. Бұл түзу мен  ға ортақ, а түзу -де жатады. Сондықтан U мен а қиылысады, 2-жағынан И-да, в-да жазықтығында жатқандықтан бұл түзулері қиылысады.  **3-мысал.** Евклидтік жазықтықта АВСД трапеция берілген. Оның төбелері  төртбұрыштар жатыр және трапецияның параллель қабырғалары төртбұрыштың бір диагоналына параллель. Бұл кезде трапецияның параллель емес қабырғаларының төртбұрыштың екінші диагоналы бойында қиылысатынын дәлелдеңдер.  Дәлелі. Есеп 120-суреттегідей болсын: АВСД – трапеция  төртбұрыш .  120-сурет  B1    B C  A  D  A1 D1    C1  және  екі үш төбелік шықты. Олардың  мен  мен  қабырғалары нүктелерде яғни төртбұрыштың диагоналы  бойында қиылысып тұр.  ВС, АД,  параллель болғандықтан бұларда  меншіксіз нүктелерде қиылысады. Сондықтан Декарттың кері теоремасы бойынша  үш төбеліктен сәйкес төбелері бір нүктеде қиылысу керек, яғни ВА мен СД трапеция қабырғалары  бір нүктеде қиылысады. Ол L нүкте берілген төрт бұрыштың екінші диагоналында жатыр.  **4-мысал.**  нүктелер берілген. Осы нүктелердің бір түзуде жататынын дәлелдеңдер. А,В,С бір түзуде жатса, (27-3) бойынша мына анықтауыш 0-ге тең болу керек  С нүкте АВ түзуде жатады.  А,В,Д бір түзуде жатса  Д нүкте АВ түзуде жатады.  Демек А,В,С,Д бір түзуде жатады екен.  Осы нүктелерді  нүктеден  түзуіне проекцияласақ  координата жүйесінде бұл нүктелер координата  болады. Сонда  Мұны 28-4 тегі 2-теореманы пайдаланып былайда шешуге болады. Жоғарыдағы әдіспен А,В,С,Д нүктелердегі коллинеар екеніне көз жеткізгеннен соң А,В нүктелерді басып өтетін түзудің параметрлік теңдеуін құрамыз:  ден  С нүктеге сай келетін параметр  табу үшін  жатқандықтан  ден  Д нүктеге сай келетін параметрді табу үшін  орнына Д-ның координаттарын қоямыз.    Сонда (28-6) бойынша  болып шығады.  **5-мысал.** Бес түзу: а түзуі  в түзуі  с түзуі . d түзуі е түзуі  теңдеумен берілген. Мыналарды анықтаңдар.  а) а,в,с, d түзулері бір шоқта жататындығын дәлелдеу керек.  Үш түзу бір шоқта жатса олардың координаталарынан жасалған 3-ретті анықтауыш 0-ге тең болады. Тексерейік а,в,с үшін  . Бұл үш түзу бір шоқта жатады екен.  a,b,d үшін . Бұл үш түзуде бір шоқта жатады екен.  Демек а,в,с, d төрт түзу бір шоққа енеді.  б) а,в,с, d жатқан шоққа е түзуінің енбейтінін дәлелде.  а,в,е үшін    Сондықтан е түзуі а,в жатқан шоққа енбейді. Сондықтан а,в,с,d жатқан шоққа енбейді.  в) е түзудің а,в,с, d түзулермен қиылысу нүктесі А,В,С, D ларды табыңдар.  а мен е-ден , бұдан .  Сонымен А-ның координаталары  с мен е ден  Бұдан  Сонда  немесе  d мен е ден  Бұдан  бұдан  кез келген сан.  Сонда  г)  болатынын дәлелдеу керек.  бұл е түзу үшін, d түзу үшін  . Бұдан , D үшін  Сонда  .  Сонымен  **§29. Проективтік түрлендіру**  **29.1. Жазықтықты проективтік түрлендіру**.  Проективтік жазықтықты түрлендіру проективті делінеді, егерде бұл түрлендіруде түзу бойындағы нүктелер түзу бойында жататын нүктелерге сәйкестенетін болса және түзу бойындағы сәйкес 4 нүктенің күрделі қатынасы сақталатын болса.  Теңбе-тең түрлендіру проективтік түрлендіру болады. Проективтік түрлендіру жайлы кейбір теоремалар.  ***1-теорема***. Проективтік жазықтыққа  және  екі репер ендірілсін. Жазықтықтың М нүктесіне R репердегі координаты қандай болса  репердегі координаты дәл сондай болатын сол жазықтықтан  нүктесін сәйкестендіретіндей етіп жазықтықты түрлендіру (өзіне-өзін бір мәнді бейнелеу) ол жазықтықты проективтік түрлендіру болады.  Дәлелі. Проективтік жазықтықтың бір түзуі бойында жатқан және R репердегі координаталары  болатын төрт нүктеге сол жазықтықтың репердегі координаталары дәл осындай болатын  нүктелер сәйкестенсін.  А,В,С, D нүктелер бір түзуде жатса үш нүктенің бір түзуде жату шартын  қанағаттандыруы керек. Ал  нүктелерден координаталары да осындай болатындықтан оларда бір түзуде жатады.  Енді бұл 4 нүктенің күрделі қатынастарының тең болатындығын дәлелдейік. И түзуде жатқан  нүктелер f проективтік түрлендіруде  түзуінде жатқан  нүктелерге бейнеленсін.  координата төбелерінің ең болмағанда біреуі И түзуінде жатпайды. Мысалы  жатпасын. Онда  нүкте  түзуінде жатпайды. И дағы А,В,С,D нүктелерді  нүктеден  координаттық түзуге проекциялайық. Ол проекциялар  болсын. Бұл нүктелердің  репердегі координаталары  болады.  Сонда  дейік.  нүктелердің  нүктеден  түзуге проекцияланғандағы проекциялары  десек, бұлардың  репердегі координаталары  болады. Сонда алғашқыдан  d  C  D  121-сурет  B  M  A  d’  A1  C1  M2  D1  E3  B1  M1  болады. Демек  болады екен.  ***2-теорема***. Бұл проективтік И түзудің А,В,С үш нүктесін  екі проективтік түрлендірудің екеуі де, сәйкесінше  нүктелерге көшірсе, онда И дың кез келген М нүктесі үшін  болады. Дәлелі И-дан А,В,С –дан басқа М нүктесін алайық.  дейік. Енді  болатынын дәлелдейік.  мен  проективтік түрлендіру болғандықтан болады. Бұдан .  Демек, бұдан  Сөйтіп  болса кез келген М нүкте үшін  болады екен.  ***3-теорема***. Егер  проективтік жазықтықтың екі репері болса, онда R-ді  реперге көшіретін бір ғана проективтік f түрлендіру болады және бұл түрлендіруде  нүкте нүктеге бейнеленеді.  **Дәлелі**. 1-теорема бойынша R-ді  -ке көшіретін проективтік 1 түрлендіру болады. Өйткені ол түрлендіру R-дегі  нүктелерді  тегі координаттары дәл осындай болатын  нүктелерге көшіреді.  Егер  ал  қиылысу нүктелері болса, онда  болады. Сондықтан 2-теорема бойынша  түзудің кез келген нүктесі f түрлендіруде де, -түрлендіруде де  түзудің бір нүктесіне түрленеді, яғни  болады.  Осы сияқты  түзумен ( түзудің) кез келген нүктесі  түзудің бір ғана нүктеге көшеді.    122-сурет  M  Q  E1  M1 M2  S P E3  М нүкте координаттаса түзулерде жатпасын (122-сурет). Ол арқылы координаттық түзулерді  нүктелерді қиятын түзу жүргізейік.  Дәлелдеуіміз бойынша ,  болады. Сондықтан 2-теорема бойынша  Сөйтіп f және  түрлендірулер бірдей екен, яғни R реперді -ке көшіретін проективтік түрлендіру болады және ол түрлендірулерде  нүктеге көшеді.  **Салдар.** Егер проективтік f түрлендіруде репердің төбелері мен бірлік нүктесі инвариант болса, онда f теңбе-тең түрлендіру болады.  Проективтік түрлендірудің тағы мынадай қасиеттері бар.  1. Проективтік түрлендіруде бір түзу бойында жатпайтын нүктелердің бейнелерде бір түзуде жатпайды.  2. Проективтік түрлендіруде репер реперге көшеді.  3. Проективтік түрлендіруде түзу түзуге көшеді.  4. Проективтік түрлендіруде түзулер шоғы, түзулер шоғына көшеді.  **29-2. Гомология**. Бір түзу бойында жататын кемінде үш инвариант нүктесі болатын, теңбе-тең түрлендіру емес проективтік түрлендіруді **гомология** дейді.  Проективтік түрлендіруде түзу бойындағы үш нүкте инвариант болса, онда ол түзудің барлық нүктесі инвариант болады.  Өйткені А,В,С нүкте инвариант болса  болады да  болады.  Инвариант нүктелер жиынынан тұратын түзу гомология өсі делінеді.  Гомологияда жазықтықтың А нүктесі  нүктеге сәйкестенетін болса, бұл екеуін гомологиялы нүктелер дейді.  Гомология қасиеттері  1. Өзара беттеспейтін гомологиялы нүктелерден өтетін түзу бұл гомологияда инвариант түзу болады.  Дәлелі. Гомология өсі И болсын, А мен  гомологиялы нүктелер болсын (123-а сурет),  дейік. С инвариант нүкте болғандықтан бұл гомологияда  нүктеге көшетіндіктен АС түзуі  түзуіне көшеді, яғни  түзуі өзіне-өзі кемиді, инвариант болады.  A’  123-а сурет  Е  A  И  2. Гомологияда беттеспейтін сәйкес гомологиялы нүктелерден өтетін түзулер жиыны центрі осы гомологияның инвариант нүктесі болатын түзулер шоғын жасайды. (123-б сурет).  123-б сурет  B’  M  R  A’  M’  Q  И  S  L  A  B  P  Дәлелі. Г-гомология, И –оның өсі болсын. Бұл гомологияда ,  нүктелерге сәйкестенсін. Сонда  түзулер 1-қасиет бойынша инвариант түзулер болады. Сондықтан олардың қиылысу нүктесі  инвариант нүкте болады. М мен  кез келген гомологиялы нүктелер болсын. Сонда -тенде Т нүктеден өтетінін дәлелдеу керек. Ол үшін кері жориық, яғни  түзу Т-дан өтпесін. Онда  мен  түзулер Т-дан өзге нүктеде қиылысады.  нүктелері қиылыссын. Онда  нүктелер бір түзуде жатпайды және инвариант нүктелер болады. Гомология өсі М-дан  жалпы жағдайдағы нүктелер (кез келген үшеуі бір түзуде жатпайтындай) болатындай етіп S нүктесін алайық. Бұл кезде Г теңбе-тең түрлендіру болар еді. Ал, бұл гомология анықтамасына қайшы. Сондықтан  түзуі Т нүктеден өрбиді деген дұрыс емес, ол өтеді. Т нүкте, яғни гомологиясы сәйкес нүктелерден өтетін түзулерден қиылысу нүктесі, гомология центрі делінеді.  Гомология центрі гомология өсінен тыс жерде жатса, ол гомология гиперболалық гомология, ал гомология өсінде жатса, параболалық гомология делінеді.  Гомология өзінің өсі, центрі және бір пар гомологиялы нүктесі арқылы беріледі. Ал, бұл гомология өсі И, центрі Т және осы гомологияда өзара сәйкес А мен  нүктелер берілсе, онда кез келген Х нүктеге гомологиялы. а) Гомология осі И және гомологиялы  нүктелер және өстен тыс жатқан гомология центрі берілсін. (124-а сурет). X нүктеге гомологиялы X’ нүктені былайша салады (124-а сурет).  түзуі Т центрден өту керек. Алдымен АХ түзудің бейнесін салу керек. Ол үшін  нүктені табады. Сонда x0 өзіне өзі, А нүкте  нүктеге көшетіндіктен  түзуі  түзуіне көшеді.  P  а)  б)  124-сурет  A  A  A’  И  X  X  X0  P  X’  A’  И  X’  X0  Сонда X нүктесі нүктеге көшеді.  б) Гомология өсі И, А мен  гомологиялы нүкте, ал гомология центрі Т гомология өсінде жатсын. Осы кезде X нүктеге гомологиялы X’ нүктені былайша салады (124-б сурет).  бір түзуде жату керек. Мұнда табамыз. Сонда нүкте X-қа гомологиялы нүкте болады.  **29.3. Проективтік геометрия**. Проективтік жазықтықта проективтік түрлендіруге кері түрлендіруде проективтік түрлендіру болады. Ол группаны проективтік түрлендірулер группасы дейді. Егер F фигура  фигураны проективтік түрлендіру нәтижесінде шыққан болса, онда оларды проективтік эквивалентті фигуралар дейді.  Кез келген екі түзу, кез келген екі түзулер шоғы, кез келген репер проективті эквивалентті фигуралар болады.  Фигураларды проективтік түрлендіруде өзгермейтін қасиеттерін зерттейтін геометрия бөлігі проективтік геометрия делінеді. Оның негізгі инварианты-түзу бойындағы төрт нүктенің күрделі қатынасы болады.  Проективтік жазықтыққа  проективтік координата жүйесі ендірілсін. Жазықтықтың  нүктесі проективтік түрлендіруде  нүктеге, R репер  реперге көшуі.  реперден элементтері R реперге қарағанда былайша анықталған болсын.  онда бұл нүктелер координаталары өзара былайша байланысады.  (29-1) және  (29-2) болады.  Мұны проективтік түрлендірудің аналитикалық өрнегі дейді. Сонымен проективтік түрлендіру (29-1) түрдегі сызықтық теңдеумен анықталады.  Егер проективтік түрлендіру қандай да бір жазықтықтағы реперде (29-1) түрдегі аналитикалық формуламен берілсе және  болса, ол проективтік түрлендіру болады.  **29.4. Толық төрттөбелік. Гармоникалық нүктелер.** Проективтік түзу бойындағы  төрт нүктенің күрделі қатынасы  болса, онда  нүктелер пары  нүктелер парына гармоникалы бөледі немесе ол нүктелер пары гармоникалы түйіндес делінеді де  деп жазылады.  болса  болғаны. Демек гармоникалы нүктелер пары бірін-бірі бөледі, яғни  дан шығады.  (28-3) - тегі 50 формуладан болса  болатыны шығады.  Егер А,В,С бекітілген нүктелер болса  болатын бір ғана D нүкте болады, яғни нүктеге гармоникалы төртінші нүкте біреу ғана болады.  Анықтама. Проективтік жазықтықтың жалпы жағдайдағы  төрт нүктесі және олардан өтетін  алты түзуден құралған фигураны толық төрттөбелік дейді (125-сурет)  M2  M2  125-сурет  R  M1  M4  M3  Q2  Q1  Нүктелер – толық төрт төбеліктің төбелері, оларды қосатын түзулер қабырғалары делінеді.  Әр қабырғада екі төбе жатады, әр төбеден үш қабырға өтеді. Ортақ төбелі емес қабырғалар:  мен  пен  пен  қарама-қарсы қабырғалар делінеді.  Олардың қиылысу нүктелері А,В,Е диагоналдық нүктелер делінеді, ол нүктелерде басып өтетін АВ,АЕ,ВЕ түзулер диагоналдар делінеді.  Толық төрттөбеліктің мынадай қасиеттері бар.   1. Диагоналдық үш нүкте бір түзуде жатпайды. 2. Диагоналдық нүктелер төбелермен беттеспейді. 3. Ешбір төбе диагоналда жатпайды. 4. Әрбір диагонал түзу үшінші диагоналды нүктеден өтетін қарама-қарсы қабырғаларды екі нүктеде қияды.   Олар С мен D,  мен  және  мен  нүктелер.   1. Әр диагоналдағы диагоналдық нүктелер пары осы диагоналдың үшінші диагоналдық нүктеден өтетін қабырғалармен қиылысуынан шыққан нүктелер парын гармоникалы бөледі: . 2. Әрбір қабырғада жататын екі төбе осы қабырғадағы диагоналдық нүкте мен қалған екі диагоналдық нүктелерден өтетін диагоналдың осы қабырғамен қиылысуынан шыққан нүктелер парын гармоникалы бөледі: .   Бұл қасиеттердің кейбіреулерін дәлелдейік.  1-қасиеттің дәлелі.  реперін алайық. Онда  болатындықтан  түзудің теңдеуі  ден  болады.  түзудің теңдеуі . Бұдан  болады. Сондықтан осы екі түзуде де жатқан Е нүктенің координаты  болады. Дәл осы әдіспен қалған екі диагоналдық нүктелердің координаталарын тапсақ  болып шығады және . Сондықтан А,В,Е нүктелер бір түзуде жатпайды.  төбелердің бірде-бірінің координаталары осылайша табылған диагоналдық нүктелер А,В,Е-нің координаталарына пропорционал емес. Олай болса диагоналдық нүктелер төбелер мен беттеспейді. (2-қасиет дәлелденді)  Диагоналдардың координаталары бойынша олардың теңдеулерін құрып, ол теңдеулердің төбе координаталарын қанағаттандырмайтынын анықтау арқылы 3-қасиетті дәлелдеуге болады.  5-қасиетті дәлелдейік. А,В,С,D нүктелерді  нүктеден  түзуге проекциялайық. Сонда , Е, D нүктелер шығады. Сондықтан  (\*) болады.  Енді А,В,С,D нүктелерді  түзуге  нүктеден проекцияласақ , Е, D нүктелер шығады. Сондықтан  Соңғы екі теңдіктен  (\*\*)  Бұдан . Бұл  бола алмайды. Өйткені  мен  беттеспейді. 28.3-тің 10 формуласы бойынша  болса ғана 1-ге тең болады. Демек . Ал, бұл  (\*\*\*) деген сөз. Ал,  ден  болатыны шығады. Сонда (\*) дан  (\*\*\*\*) яғни . Мұндағы (\*\*\*) 6 қасиеттерін дұрыстығын, 5-тен дұрыстығын көрсетеді. 5 пен 6 қасиеттерін қалған теңдіктері де дәл осылай дәлелденеді.  Ескерту: Бір шоқтың a,b,c,d төрт түзуі берілсе және  болса, онда а,в түзулер парын гармоникалы түзулер шоғын И түзумен қисақ А,В,С,D нүктелері шығады. Сонда  болатын. Дәлелдеу бойынша  болатындықтан  түзулер пары  түзулер парын гармоникасы бөледі.  Ал, бұл толық төрт төбеліктен екі қарама-қарсы қабырғасы осы қабырғалардың қиылысу нүктелерінен өтетін екі диагоналын гармоникалы бөледі деген сөз.  Осыларды ескере отырып, мынадай тұжырымға келеміз. Егерде бір түзудің А,В,С,D нүктелері үшін  болса, онда екі пар қарама-қарсы қабырғаларының бір пары А нүктеден, екінші пары В нүктеден өтетін, қалған қарама-қарсы қабырғасының бірі С, екіншісі D нүктеден өтетін  толық төрт төбелік болады (125-сурет)  **1-есеп.** Бір түзудің үш нүктесіне төртінші гармоникалы нүктені салу керек.  Шешуі. И түзуінде А,B,С нүктелері берілген, осыған гармоникалы D нүктесін салайық. Бұл  болатын D нүктені салу керек деген сөз (125-суретті пайдаланайық).  Оны былай салады.  1-ден, И-түзуінде берілген А,В,С нүктелердің А нүктесінен И дан өзге  түзуін жүргізеді. (ол 125 –суретте  түзуі)  2-ден, оның бойынан екі нүкте алады (125-суретте ол  нүктелер). Оларды В нүктеге қосады (олар  түзулері)  3-ден,  түзуін жүргізіп  нүктені табады.  4-ден,  түзуін жүргізіп, оның  пен қиылысу нүктесі М1 –ді табады.  5-ден,  мен И түзуінің қиылысу нүктесі D-ны табады. Осы іздеген нүкте болады. Өйткені  толық төрттөбелік болғандықтан, ескертуде айтқанымыз бойынша болады.  2-есеп. Центрі S болатын түзулер шоғының а,в,с түзулеріне гармоникалы болатын төртінші d түзуін салу керек.  Салуды былайша жүргізеді. (126-сурет)  D  126-сурет  d  M3  M2  С  И  c  S  M1  M4  B  b  A  a    1. Шоқты И түзуі мен қияды. Оның а,в,с түзулер мен қиылысу нүктелерін А,В,С дейік.  2. А нүктеден И дан өзге  түзуін жүргізіп оның бойынан  нүктелер аламыз.  3.  түзулерін жүргізіп  нүктені салады.  4.  мен  түзулердің қиылысу нүктесін  дейік.  5.  нүктесін табамыз. Сонда іздеген  түзуі SD болады. Өйткені  болып төрттөбелік болғандықтан  болады. Сондықтан  болады.  3-есеп. Евклидтік жазықтықтағы түзу бойындағы үш нүктеге төртінші гармоникалы нүктені салыңдар.  Шешуі. Проективтік И түзуі бойында  төрт нүкте берілсе, олардағы АВ нүкте пары CD нүкте парын гармоникалы бөлетін болса болатын.  Ал,  ден    Сонымен  (яғни гармоникалы) болса  (\*) болады екен.  Енді  берілсін. S төбедегі ішкі ASB бұрышына SC, сыртқы бұрышы BST-ға SD биссектриса жүргізсек  болады. Сондықтан  нүктелер СD диаметрлі шеңберде жатады (127-сурет). Биссектрисасының қасиеті бойынша . Бұдан  (\*\*). Бұл А,В,С,D нүктелер гармоникалы болғандағы (\*) жағдаймен бірдей болып шықты. Осыған сүйеніп,  нүктелер берілсе, оған гармоникалы 4-нүктені былайша салады (127-сурет).  S  127-сурет  C  D  B  A  K  1. А,В нүктелерден өтетін шеңбер сызамыз.  2. АВ доғаның ортасы К мен С-ны қосып S нүктесін табамыз.  3. S –тен С S-ке перпендикуляр етіп түзу жүргізіп, оның АВ түзумен қиылысу нүктесі D-ны табамыз. Сонда D іздеген нүкте болады. Өйткені АВ доғаның SK ортасына перпендикуляр SC -ның ішкі бұрышының биссектрисасы болады, ал  болғандықтан SD сыртқы бұрыштың биссектрисасы болады. Сондықтан (\*\*) орындалады. Олай болса D нүкте А,В,С нүктелерге төртінші гармоникалық нүкте болады.  **§30.Проективтік жазықтықтағы екінші ретті сызықтар.**  **30.1 Екінші ретті сызық.** Координатары  проективтік координата жүйесінде мына түрдегі екінші дәрежелі бір текті теңдеуі қанағаттандыратын болсын (30.1)  Проективтік жазықтық нүктелерінің жиынын екінші ретті сызық не қисық дейді. Мұнда  нақты сандар.  Теңдеудің сол жағы -ке қарағанда квадраттық форма, оны сызық теңдеуінің квадраттық формасы дейді, ал оның матрицасын  сызық теңдеуінің матрицасы дейді. Оның нақты екінші ретті сызықтарын нақты дейді. Сызық тозғындамаған делінеді, егер матрица рангі  болса,  болса тозғындаған делінеді.  Проективтік түрлендірулерде екінші ретті сызықтың нақты дәрежесі де өзгермейді. Өйткені проективтік түрлендіруде  нүкте  нүктеге көшірілгендіктен сызықтың дегі бейнесі қандай болса бұл сызықтың -дегі бейнесі  тегі теңдеуіде сондай болады.  **1 теорема**. Кез келген проективтік түзу тозғындалмаған екінші ретті сызықпен екі нүктеден артық емес нүкте қиылысады.  Шынында да  түзуімен (30-1) мен берілген  сызығы кері жорып функция  болатынай етіп алсақ, бұл теңңдеуде  болар еді. Бұларды (30-1) қойсақ:  қойсақ , -ні қойсақ , -ті қойсақ  одан  болғандықтан . Демек . Сонда матрица  болып шығады. Олай болса берілген  сызығы тозғындаған сызық болды. Теорема дағыдай ол тозғындамаған сызық дегенге қайшы келеді. Олай болса кері жорып үш нүктеде қиылысады деген дұрыс емес екен.  **30.2** **Екінші ретті сызықтардың проективтік классификациясы**  Екінші ретті проективтік сызық бенерде (30-1) теңдеуімен берілсін. Оның сол жағы  түрдегі квадраттық форма. Үш өлшемді векторлы кеңістікте әруақытта базис табылып, ол базисте квадраттық форма мынадай нормаль түрге келетіні белгілі  (30.2) .  Мұндағы сызықтың нақты байланыстары мынадай жағдайлар болуы мүмкін.  1-жағдай.  бұл кезде  деуге болады. Сонда мынадай екі екенші нақты сызық шығады. 1.  (30.3) 2.  (30.4).  (30.3) ті қанағаттандыратын нақты нүкте жоқ. Мұндай сызықты 2-ші ретті нөлдік сызық дейді, ал (30.4) пен берілген сызықты 2-ретті овал қисығы дейді.  2-жағдай. . Бұл кезде  немесе түзу болады. Сонда мынадай 2- ретті сызық шығады 3. (30.5) 4. (30.6). (30.5) пен нақты  нүктеде қиылысатын жорамал түзуге нақты кездесетін сызық берілген  (30.6)- мен екі нақты түзуге ажырайтын сызық беріледі .  3-жағдай. , деуге болады. Сонда  (30.7) шығады, бұл беттесетін екі түзу ді анықтайды.  Сонымен (30-3,4,5,6,7) теңдеулермен сипатталатын 5 түрлі екінші ретті сызық ал, (30-3,4,5,6,7) ол сызықтардың канондық теңдеулері.  **30.3 Екінші ретті сызық пен түзуді өзара орналасуы**  ретінде (30.1) теңдеумен 2-ретті сызық және параметрлік теңдеумен  (30.8) түзу берілсін ( Демек бұл түзу  нүктелерден өтеді).  Егер (30.8)-ді (30.1) ге қойсақ, мынадай квадрат теңдеу шығады.  (30.9)  Мұндағы  (30.10).  (30.9) дан табылған әрбір  мен  сай (30.8) бен X() табылады.  Олар қиылысу нүктенің координаттары болады.  Мына өрнекті  былайша белгілейік. Сонда  10. Егер  болса, онда (30.9)-дың екі нақты шешімі болады. Демек түзу мен 2-ретті сызық 2 нүктеде қиылысады.  20.  болса, тек бұл шешім болады, түзу мен сызық жанасады.  30. Егер  болса олар екі жағынан нүктеде қиылысады. (комплекс жүйесінде қиылысады).  2-теорема. Тозғындамаған 2-ретті сызықтың әр бір нүктесінен бір ғана жанама түзу өтеді.  Дәлелі  нүкте 2-ретті сызықта жатсын.  нүктені қарастырайық  түзуі -ге жанама болу үшін  болуы керек.  жатқандықтан . Сондықтан соңғы теңдіктен . Бұлардан  жанама да жатуы үшін  болу керек. Сонымен  жанама болу үшін -дің координаталары мына теңдеуді қанағаттандыруы керек екен (30.11).  тозғындамаған болғандықтан  коэффициенттері қатарынан 0 болмайды. Сызықтың (30.11) бір түзудегі теңдеуі болады, яғни бір ғана түзуді анықтайды. Сөйтіп  дегі әрбір нүктесінен бір ғана жанама өтеді .  **30.4 Екінші ретті сызыққа қарағандағы түйіндес нүктелер**  Берілген тозғындамаған (30.1)  сызығына қарағанда  нүктелер түйіндес делінеді, егерде мына қатынас орындалса (30.12)  Бұл теңдіктен мыналар шығады.  10. Түйіндестік  нүктелерден өткеніне байланысты емес, өйткені .  20.  сызықта жатқан нүкте өзіне-өзі, тек сызыққа қарағанда, түйіндес болады. өйткені  болса  жатқандықтан болады.  30. Егер  нүкте -ге қарағанда  екі нүктемен түйіндес болса, онда  нүкте  түзуіне әрбір нүктесімен түйіндес болады. -дың кез келген нүктесі болсын. Онда  болады және  . Демек  мен X нүкте -ге қарағанда түйіндес.  40. (30.11) мен (30.12) салыстыра келе, мынадай қорытынды жасауға болады: Егер -де жатса, онда  мен  -ге қарағанда түйіндес болу үшін  нүкте  нүктеден жүргізілген жанамада жатуы керек, яғни  түзу -ге  нүктеде жанасуы керек.  50. Екінші ретті түзу тозғындамаған сызықта жатпайтын , екі нүкте ол сызыққа қарағанда түйіндес болу үшін  түзуі  сызығын , нүктелер парына гармоникалы болатын  екі нүктеде қиылысу керек, яғни  болу керек.  Дәлелі:  болсын,  сызығы (30.1) мен берілген  теңдеу  болады. Онда бұл  нүктелерге және  нүкте  де жатпайтындықтан  болады. Сондықтан болады. Сонда (30.9)-ды былайша жазуға болады.    Егер -лер  мен  нүктелерге сай келетін параметрлер болса,  нүктелері болады. Сондықтан Виет теоремасы бойынша .  Бұдан мен  түйіндес болу үшін, яғни  болу үшін  болуы керектігі шығады. Бұдан .  Төрт нүктенің күрделі қатынасы (28.6) бойынша, (P,Q,M1,M2). Қасиет дәлелденді.  60. Егер овал сызығы реперінде E=, теңдеуімен берілсе, онда нүктелердің осы сызық бойынша түйіндестігі шартымен анықталады. овал бойынша түйіндес болса, ондай үштөбелікті автополяр үштөбелік деп атаймыз.  Сөйтіп кез келген тозғындамаған екінші ретті сызық проективті жазықтың нүктелерін сол жазықтық түзулеріне бір мәнді белгіленеді. Бұл биективті бейнелеуді поляритет дейді.  (30-12) де  болатындықтан (30-12,14) формулалардан мынадай **теорема шығады:** L 2-ретті сызық берілсе және Q нүкте Р нүктенің полярында жатса, онда Р нүкте Q нүктенің полярында жатады.  Бұл теоремадан проективтік жазықтық нүктелер ол жазықтық түзулерін бейнелейтін  поляритетте -ді  түзуіндегі нүктелер жиыны центрі мен  түзуін полюсі болатын А түзулер жағына көшетіні шығады.  түзудегі 4 нүктенің күрделі қатынасы А жататын сәйкес 4 түзуінің қатынасына тең болады.  **30.5 Мысалдар.**  **1 мысал.** . Екінші ретті сызықты нормал нүкте қатысты проективтік түрін алыңдар.  **Шешуі.** 24,5 те баяндалған Лагранж әдісімен квадраттық форманы канондық түрге келтіреміз.  А) Ол үшін  енетін мүшелерді бір жақшаға топтаймыз.  мұнда . Былайша белгілейік . Мұны квадраттасақ  , мұны f-тең алсақ .  Мынадай түрлендіру енгіземіз  (\*)  Сонда .  Б) Енді  енетін мүшелері бір жақшаға аламыз. . Мұнда  былайша белгілейміз. , квадраттасақ , . Мұны -ке қоссақ .  Мынадай түрлендіру жасаймыз. .  Сонда  болып канондық түрге келді. Енді мынадай түрлендіру жасасақ . Екінші ретті сызық нормал түрге келеді  Бұл екінші ретті авал сызығы. Бұл есепті былайшада шығаруға болады. Берілген сызық матрицаның мәнін табамыз. .  Демек берілген екінші ретті сызық тозғындамаған. Сондықтан оның нормал түрі не  не  болады. Бірінші жағдайда екінші ретті сызық нақты, (0,0,0) ден басқа, нүктелер қанағаттандармау керек.  Берілген теңдеуді (1,0,1) нүкте қанағаттандырылуы керек . Демек берілген сызық екінші реттегі овал сызығы болады.  **2-мысал.**  нүктелерді басып өтетін екінші ретті сызықтың теңдеуін құру керек.  **Шешуі.** Екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуі мынадай еді. . Осындағы  алты коэффициентті тауып орнына қойсақ теңдеу құрылады. Оларды табу үшін 5 теңдеу жеткілікті. Сондықтан 5 нүкте екінші ретті сызықты бір мән ді анықтайды. Берілген нүктелер координаттарын біртіндеп теңдеуге қоямыз. А(1,0,0) қойсақ  қойсақ  шығады. D(2,2,1) ді қойсақ . Е(2,-1,2)-ні қойсақ . Бұлардан  екенін ескерсек  бұдан .  Осыларды теңдеуге қойсақ, ге қысқартсақ  немесе . Берілген 5 нүктеден өтетін екінші ретті сызық теңдеуі осындай болады.  **3 мысал.** А(1,1,0), В(-1,1,10) нүктелерден өтетін түзумен  екінші ретті овал сызығының қиылысу нүктесін табу керек.  Ол үшін АВ түзуінің параметрлік теңдеуден құрамыз. . Муны теңдеуге қойсақ , , . Бұдан , .  десек . Сонда қиылысу нүктесі . Бірінші қиылысу нүктесі (6,8,10). Екінші қиылысу нүктесі . Нүкте (-8,-6,10) немесе қысқартсақ .  **4 мысал.** екінші ретті сызықта, оның А(-1,1,2)нүктесінен жүргізілген жанаманың теңдеуін құру керек.  **Шешуі.** (30-11) бойынша жанама теңдеуі мынадай болады. .  Бізде орнына қойсақ .  немесе  **5 мысал.** А(1,0,1) нүктенің  екінші ретті сызыққа қарағанда поляритет теңдеуін құрыңдар.  **Шешуі.** Полярдың теңдеуі (30-14) бойынша мынадай болады . Бізде ,    **Ескерту.** 4 және 5 мысалдарды матрицалық жолмен былай шығаруға болады. Егер екінші ретті сызық теңдеуіндегі ағымдық нүкте координатын , сызықты матрицаның , десек, екінші ретті матрица арқылы былайша жазылады немесе .  Сонда 4-ші мысалдағы жанама теңдеуі  ден .  .  5-ші мысалда осылай шығады, бұл кезде  полюстін координаталары . Бұдан .  **6 мысал.** екінші ретті сызыққа қарағандатүзудегі полюсін табыңдар.  **Шешуі.** Полюс (30-15) бойынша мына жүйеден табылады.  Бізде  қалғандары 0 –ге тең. .  Сонда  Сонда полюс бұл есепті де матрица түрде жазып шығарып  координаттарын  -ке теңестіріп одан , бұдан , . Сонда  Бұдан . немесе .  **7-мысал.**  түзу бойынан . Екінші ретті сызыққа қарағанда А(-3,1,-3) нүктемен түйіндес болатын нүктені табыңдар.  **Шешуі.** Іздеген нүкте А(-3,1,-3) нүктемен полюсімен берілген түзуі қиылысу нүктесі болады. А нүктесінің полюсін табайық. ,  . Сонда  десек  Демек (1,-4,0).  **§31 Овал сызығы теориясының кейбір конструктивтік теоремалары.**  **31.1. Овал сызығының ішкі, сыртқы нүктелері.**  Проективтік жазықтықтың М нүктесі жазықтықтың бұл нүктеден өтпейтін екінші ретті овал сызығының ішкі нүктесі делінеді, егерде ол нүктеде қиылысатын болса. Егер М нүкте овал сызығында жатпаса және оның ішкі нүктесі болмаса, онда ол овал сызығының сыртқы нүктесі делінеді. Бұл анықтамадан овал сызығына жанама түзулерін жанасу нүктесімен өзге нүктелерінің барлығы овал сызығының сыртқы нүктесі болатыны шығады.  **1 теорема.** Мынадай теңдеумен берілген овал  (31-1) сызығы үшін  нүкте мына шартты  (31-2) қанағаттандырғанда ғана, тек санды ғана ішкі нүкте болады.  **Дәлелі.** М нүкте (31-1) мен берілген овал сызығының ішкі нүктесі болсын. Бұл кезде  дейік. Бұл жағдайда  түзуі (болсын) овал сызығын екі нақты нүктеде қимайды. Өйткені  түзумен теңдеуі  болатындықтан (30.3) тегі коэффициенттер (шарт бойынша),  болады да  болады. Сондықтан (30.3) бойынша түзу мен сызық нақты екі нүктеде қиылыспайды. Демек  деген дұрыс емес. Олай болса  болады.  Енді керісінше  болсын.  нүкте алсақ,  түзудің теңдеуі  болады да  болып шығады. Ал, бұл 30.3-10 бойынша  түзуі сызықты нақты екі нүктеде қиады деген сөз.  Сонымен (31-2) М нүктенің овал сызығының ішінде, ал мынау жағдайда сыртында жату шарты болады.  **31.2. Овал сызығына жанама.** Бұл туралы мынадай теорема бар.  **2 теорема.** Овал сызығының сыртқы нүктесінен оған екі, тек екі жанама түзу жүргізуге болады.  **Дәлелі.**  нүкте (31-1) екінші ретті овал сызығының сыртқы нүктесі болсын. Бұл нүктенің полюсі  түзуі болсын. Алдымен бұл түзудің овал сызығымен екі нақты нүктеде қиылысатынын дәлелдейік. Ол үшін А нүктеден сызықты нақты екі нүктеде (М1 және М2) қиатын түзу жүргізейік.  А  М1  М2  D1  D2  B  d  γ  133-сурет  Осы түзу бойынан А –мен бірге М1,М2 нүктелер парын гармоникалы бөлетін  нүктесін алайық. Сонда . В нүкте 30.5 бойынша А нүктені полярында жатуы керек. АВ түзуінің теңдеуі    болады. А сыртқы нүкте болғандықтан , А мен В сызыққа қарағанда түйіндес болатындықтан  болады және АВ түзуі сызықты екі нақты нүктеде қиатындықтан  болу керек. Осыларды ескерсек, соңғы теңдіктен  болады. Сондықтан В ішкі нүкте болады. Олай болса ол нүктеден өтетін кез келген нүктеде қиады. Ол нүктелер  болсын. Бұл нүктелерден сызыққа жанамалар жүргізсек, олар Ф нүктеден өтеді. Себебі *А* үшін *а* поляр болғандықтан және  нүктелер *а* түзуде жатқандықтан *А* мен *Д*1, *А* мен *Д2* түйіндес болады, ал *Д1* мен *Д2* *l-де* жатқандықтан А нүкте *Д1(Д2)* мен түйіндес болу үшін ол *Д1(Д2)* ден жүргізілген жанамада жатуы керек. Сонымен сыртқы А нүктеден овал сызығына екі жанама жүргізуге болады екен. А нүктеден  ден басқа  жанама жүргізуге болады десек, оның жанасу нүктесі *а* түзуінде жатуы керек, ал *а* түзуі *l* сызығымен теріс екі ақ нұүктеде қиылысатындықтан, ол нүкте *Д1* не *Д2* мен беттесуі керек, ал жанама  не  мен беттесуі керек. Демек тек екі ғана жанама жүргізуге болады.  **31.3. Овал сызығын жасау.** Овал сызығын жасау жайлы мынадай теоремалар бар.  **3 –теорема (Штейнер теоремасы).** (Якоб Штейнер (1796-1863) неміс математигі). Әр түрлі центрлі екі түзулер шоғы арасында біріншісінен екіншісі перспективтік емес проективтік бейнелеу орнатылған. Бұл кезде осы екі жақтың сәйкес түзулерінің қиылысу нүктелерінің жиыны центрлерден (нүктелерден) өтетін екінші ретті овал сызығын жасайды    S3  S2  S1  (134 –сурет).  **Дәлелі.**  түзуді  дейік. Оның түп бейнесі  болсын, яғни  болсын.  бейнлеу жақтың үш түзуі арқылы берілсін .  проективтік бейнелеу болмағандықтан  түзулер қос –қостан әр түрлі болады. Сондықтан  нүктелер бір түзуде жатпайды. Сондықтан  нүктелер репер  жасайды.  репердегі *l* жиынын теңдеуден құрайық.  үш төбелік қабырғаларында жатпайтын  нүкте алайық. Төрт түзуді нүктелі қатынасынан анықтамасы бойынша .  түзудегі  репердегі  -дегі координатасы  болады. Сондықтан болады. Осы сияқты  бұлардан . Сондықтан  бұдан  (31-3).  Егер Х нүкте *l –*де жатпаса, онда *.* Сөйтіп Х -тын координаталары (31-3) –ті қанағаттандырмайды. Егер Х нүкте  үш төбелік қабырғаларында жатса, оның координаталары (31-3) –ті қанағаттандыру үшін ол жиынға енетін  -нің берілген беттесуі керек. Сөйтіп (31-3) теңдеуі *l* жиынын теңдеуі болады. Бұл теңдеумен нақты нүктелері бар тозғындалмаған екінші ретті сызық анықталады, яғни овал сызығы анықталады. (31-3) сызыққа  нүктелерден жүргізілген жанамалар теңдеуі  болады.  Сондықтан мынадай салдар шығады.  **Салдар.** Егер  теоремеда айтылған бейнелеу болса, онда  және  түзулер сәйкесінше  және  нүктелерден сызыққа жүргізілген жанамалар болады.  **4 –теорема.(** Штейндердің кері теоремасы). Овал сызығы *l* және онда жатқан  нүктелер берілсін.  центрлі жақтың әрбір  түзуіне (*М* нүкте *l* ден кез келген нүктесі)  центрлі жақтың  түзумен сәйкестендірейік, ал  нүктеден жүргізілген жанамаға  жақтың  түзуін, ал  жақтың түзуіне  нүктеден жанамаға сәйкестендірейік.  Осылайша анықталған  бейнелеу  центрлі жақты  центрлі жаққа преспективтік емес проективтік бейнелеу болады. (135 –сурет)  screenshot.png  135-сурет  S1  S2  **Дәлелі.** Жазықтықтан  репер алайық. Мұндағы  берілген  сызығына  нүктелерден жүргізетін жанамалардың қиылысу нүктесі, ал  берілген сызықтың  мен  ден басқа кез келген нүктесі бұл репердегі  сызықтың теңдеуі (\*) болсын.  мен  нүктелер  де жатқандықтан  болады. Өйткені  ді (\*) –ге қойса  болады.  нүктелері  сызығына  және  нүктелерде жанама болатындықтан  болады. Сондықтан екінші ретті  сызықтың теңдеуі  болады. Ал,  нүкте бұл сызықта жататындықтан  болады. Сөйтіп  сызығын  репердегі теңдеуден (31-3) түрде жазуға болады екен.  центрлі жақтың  түзулерінен  жақтың  түзулеріне сәйкестендіретін  жақты  жаққа бейнелеу  -ді қарастырайық. Штейнер теоремасы бойынша бұл  бейнелеуде  және  жақтардың сәйкес түзулері  реперде (31-3) теңдеумен берілген сызық бойында қиылысады. Яғни  сызығы бойында қиылысады. Сондықтан  бейнелеуі  бейнелеу болады.  **Бұл теоремадан мынадай салдарлар шығады.**  1.Егер проективтік жазықтықта  жалпы жағдайдағы (яғни кез келген үшеуі бір түзуде жататын) бес нүкте берілсе, онда оларды басып өтетін бір ғана екінші реттегі сызық болады.  screenshot (1).png136-сурет  S2  S3  S1  центрлі жақтарда  ке  ке ке  сәйкестендірсек. Бұл Штейнердің 1 –теоремасы екінші ретті овал сызығын жасайды.  2.Егер проективтік жазықтықты жалпы жағдайдағы  төрт нүкте және  ден өтетін басқа нүктелерді бастайтын  түзу берілсе, онда бұл  нүктеден өтетін және  түзуге  нүктеде жанасатын бір ғана екінші ретті сызық болады.  Шынында да центрлері  және  болатын  жақтарды бір бөлікке сәйкестендіретін проективтік түрлендіру тура теорема бойынша бір екінші ретті сызық анықталады. (136 –сурет).  3. Проективтік жазықтықта  үш нүкте берілген және олар бір түзуде жатпасын.  -ны болып  -болып  түзулер жүргізілсін. Олар басқа нүктелерден өтпейтін болсын. Онда осы үш нүктеден өтетін және *а* түзуіне *А* нүктеде, *В* түзуіне *В* нүктеде жанасатын бір тек бір ғана екінші ретті сызық болады. (136 –сурет). Өйткені (*А*) жақты (*В*) жаққа сәйкестендіретін бір ғана проективтік бейнелеу болады. Ол бейнелеуде (*А*) жақтың *а*, *АВ, АС* үш түзулері (*В*) жақтың *ВА, в, ВС* түзулеріне сәйкестендіріледі. Ол сәйкестік екінші ретті сызық жасайды.  **31.4. Алты төбелік.** Жалпы жағдайдағы *6* нүкте және оларды тізбектегі қысатын *6* түзуден жасалған фигураны алты төбелік дейді. 137 *а,в* суреттерде  және  алты төбеліктер берілген.  screenshot (2).png  137-сурет  нүктелерді алты төбеліктен төбелері, оларға тізбектей қиатын  түзулерді қабырғалары дейді.  мен  пен  пен  қабырғалар қарама –қарсы қабырғалар делінеді. Жалпы мен  түзулер қарама –қарсы қабырғалар болады.  **5 –теорема.** **(Паскаль теоремасы). (**Б.Ғ.З Паскаль (1623-1662) франция физигі, математигі, механигі).  Екінші ретті овал сызығына іштей сызылған кез келген алты төбеліктің қарама –қарсы қабырғаларының қиылысу нүктелері бір түзудің бойында жатады. Ол түзуді Паскаль түзуі дейді  screenshot (3).png138-сурет  **Дәлелі.**  төбеліктің төбелері екінші ретті овал сызығында жатсын.  нүктелерден бір түзуде жатпайтын дәлелдеу керек. 4 –теорема бойынша овал сызығы -ді жанайтын  центрлі шоқты,  жаққа бейнелетін  проективтік бейнелеу болсын. Түзулерді  дейік. Проективтік  мен бейнелеуі  түзулері кез келген Х1 нүктесін түзуі  нүктесіне түзулердің қиылысу нүктесі Х нүкте  сызығында жататындай етіп  түзуді  түзуді бейнелейтін  проективтік бейнелеуін тудырады, яғни көшеді.  болатындықтан  перспективті бейнелеу болады, центрі  нүктесі болады. Өйткені 1,2 нүктелер 1’,2’ нүктелерге көшеді, ал  болатындықтан  нүктелер бір түзуде жатады.  **6 –теорема (Паскаль кері теоремасы).** Егер алты төбеліктін қарама –қарсы қабырғалары бір түзу бойында қиылысса, онда алты төбелектен төбелері бір екінші ретті овал сызығын жасайды. (34-сурет)  **Дәлелі.**  берілген алты төбелік болсын және оның қарама –қарсы қабырғаларының қиылысу нүктелері  бір түзуде жатсын.  түзулерді  түзулерге бейнелейтін  проективтік бейнелеуді қарастырайық. Штейнер теоремасы бойынша сәйкес түзулердің қиылысу нүктелері бір овал сызығын жасау керек және ол сызықта  нүктелер мен қатар  нүктелерде жатуы керек. Енді  нүктесінде сол овалда жататынын дәлелдейік. Проективтік  бейнелеу  түзуді  түзуге бейнелейтін  проективтік бейнелеуді тудырады (Мұндағы  түзулер). Ал,  болатындықтан  **20.** Егер проективтік жазызықтықты жалпы жағдайдағы  төрт нүкте  ден өтетін басқа нүктелерді баспайтын  түзу берілсе, онда бұл нүктеден өтетін және  түзуде  нүктеде жанасатын бір ғана екінші ретті сызық болады.  Шынындада центрлері  және  болатын  анықталды бұл бірлікке сәйкестендіретін проективтік түрлендіру  болады. Осы сәйкестік арқылы тура теорема бойынша бір екінші ретті сызық анықталады. (136-б сурет).  **30.** Проективтік жазықтықта А,В,С үш нүкте берілген және олар бір түзуге жатпасын. А –ны басып а, В –ны басып в түзулер жүргізілсін. Олар басқа нүктелерден өтпейтін болсын. Онда осы үш нүктеден өтетін және а түзуіне А нүктеде, В түзуден В нүктеде жанасатын бір тек бір ғана екінші ретті сызық болады. (136-в сурет). Өйткені (А) жақты (В) жаққа сәйкестендіретін бір ғана проективтік бейнелеу болады. Ол бейнелеуде (А) жақтан а,АВ,АС үш түзулері (В) жақтан ВА,в,ВС түзулеріне сәйкестенеді. Ол сәйкестік екінші ретті сызық жасайды.  **§32 Проективтік жазықтықта афиндік және евклид тік геометрияларды құру.**  **32.1. Автоморфизм.** Элементтері нүкте ден аталатын М жиынында G түрлендірулер тұратын әрекет етсін. М жиыныннан оның бір ішкі жиынын N –ді бөліп алайық. N жиынын нүктелерін сол N жиыныннүктелеріне бейнеленетін G группанын түрлендірулерін қарастырайық. Бұл түрлендірулер жиынын Г болсын. Мұндай түрлендірулерді N жиынға қарағанда автоморвты түрлендіру немесе автоморфизм дейді, ал жиынды М жиынын абсолютті дейді.  **1 –теорема.** М жиынын да N абсолют берілген және ж иында G түрлендірулер группасы әрекет етсін. Онда N жиынға қарағанда автоморфты болатын түрлендірулер жиыны Г берілген G түрлендірулер группасының ішкі группасы болады және Г -ге келетін әр бір түрлендіру жиынды өзіне -өзі түрлендіру болады.  Дәлелі. екі түрлендіру болсын. Демек болады. Сонда бұл екі түрлендірудің көбейтіндісі болатындықтан түрлендіруі Г –ге енеді .  болса болатындықтан болады, яғни Г түрлендіруіне кері түрлендіруі те Г жиынға енеді:  Сондықтан Г түрлендірулер жиыны G түрлендірулер группасының ішкі группасы болады.  Енді Г ның кез келген түрлендіруі жиынды өзіне өзін биективті бейнелейтініне көз жеткізейік.  Егер жатса, онда оның бейнесі жатады. Себебі жатады десек, ондаи болса бұл мүмкін емес, себебі шарт бойынша А нүкте N-де емес -де жатады. Сонымен болады. Демек түрлендірулер жиынды өзіне өзін биективті түрлендіреді.  Бұл теоремадан автоморфизм болатын ішкі группаны жиынды түрлендіру группасы ретінде қарастыруға болатыны шығады.   * 1. **Белгілеп алынған түзуі бар проективтік жазықтық геометриясы.**   1. Проективтік геометрияны аффиндік және евклидтік геометрия ұғымдарына сүйеніп құрып, оның негізгі қағыдалары мен таныстық.  Немістен ірі математиктерінің бірі Феликс Клейн (1849-1925) «Жаңа геометриялық зерттеулерге салыстырмалы шолу» деген лекциясында (ол 1872 жылы «Клейннің эрланген программалары» деген атпен басылып шықты) геометрияны группалық принципке бағыттады. Бұл схема бойынша геометрия қандайда да бір түрлендірулер группасындағы фигуралардың инвариянт болатын қасиеттерін зерттейтін ғылым. Сондықтан Клейн жолымен геометрияны құру үшін  1 –ден, элементтері нүкте деп аталатын қандай да бір жиын, яғни ол элементтер кеңістігі салу қажет.  2 –ден, ол кеңістікте әсер ететін, оның элементтерін түрлендіретін түрлендірулер группасы болуы қажет.  Өткен теоремаларда қозғалыс группасы (мұнда нүктелер арасы инвариант болады), ұқсас түрлендірулер группасы (мұнда фигураның сызықтық элементтері бірдей сандарға өзгереді), аффиндік түрлендірулер группасы (онда үш нүктені жай қатынасы инвариант болады). Проективтік түрлендірулер группасымен (оның инварианты торт нүктенің күрделі қатынасы) танысып, ол түрлендірулер группасындағы нүктелер жиынын (фигураладың) өзгермей қалатын қажеттерін анық білдік. Сол өзгермей қалатын (инвариант болатын) қасиеттер жиыны евклид аффиндік, прективтік геометриялар пәнінен, мазмұнын анықтайды, олар зерттейтін обьектілер болады.  Мұндағы мақсат жоғарыда айтылған геометриялардың кез келген схемасына кіретіні, яғни аффиндік веклидтік геометрияларын проективтік түрлендірулер группасының ішкі (бөлік) группаларының геометриясын болатынын көрсету. Проективтік геометрия ұғымдарына сүйене отырып аффиндік және евклид геометрияларды құру, олардың проективтік моделдерін жасау.  Ол үшін жоғарыда айтылған авторморфты түрлндіру группасын пайдаланамыз.  2. прективтік жазықтық болсын, оның бойынан кез келген бір проективтік түзуден алайық. нен да жатқан нүктелермен басқа нүктелерінің жиынын деп белгілейік. Демек фигура нүктелерінен тұрады.  проективтік жазықтықты үш өлшемді векторлық кеңістік, ал түзуді екі өлшемді кеңістік жасайтын еді.  кеңістіктен -ке енбейтін вектор алайық да, ның нүктелерін шығатын кеңістіктен әрбір векторын жататындықтай етіп нормалайық. Сонда ның М нүктесін тудыратын бір ғана нормаланған вектор болады. Егер векторлар ның М,N нүктелерін тудыратын нормаланған векторлар болса, онда жататындықтан жатады.  жиынды екі өлшемді кеңістікте берілген екі өлшемді афоримдік кеңістік ретінде қарастыруға болады. Өйтені афоримдік кеңістік ретінде қанағаттандыратындай бейнелеу құруға болады.  ның реттелген кез келген М, N нүктелеріне нің векторын сәйкестендірейік. Бұл сәйкестікті былайша жазайық  (32-1)  Осылайша құрылған бейнелеуі жиынында да аффиндік кеңістік аксиомаларын (22.1) қанағаттандырады.  1 –ден, ның кез келген М нүктесімен нің кез келген векторлары үшін болатын бір ғана N нүкте болады.  М нүктені тудыратын нормаланған вектор болса, онда векторларда нормаланған болады, себебі болып шығады. Бұл нүктелер беттеседі, бір нүктеге болады деген сөз.  2 –ден, ның нүктелерін тудыратын нормаланған векторлар десек болар еді.  Демек жиынды афоримдік жазықтық ретінде қарастыруға болады. Егер афоримдік жазықтықта кеңістелегн жазықтықта көшкіміз келсе ге қойып жиынды қарастыруымыз керек. Сөйтіп түзу кеңейтілген жазықтықты меншіксіз түзуші атқарады. Сондықтан кеңістелген жазықтықтың меншіксіз түзуі, оның нүктелермен меншіксіз нүктелері ал нүктелермен кәдімгі нүктелері дейді.   * 1. **Аффиндік геометрияның негізгі ұғымдары.**   Біз проективтік жазықтықта сайлап алынған түзу жәрдемімен афиндік жазықтығын анықтадық.  Енді афиндік геометрияның негізгі ұғымдарын проективтік тұрғыда анықтадық.  1. Проективтік жазықтықтың түзуінен басқа түзулерін деп белгілейік. Олар түзуімен меншіксіз нүктелерде қиылысады. түзуін А меншіксіз нүктесі болса нүктелер жиынын аффиндік түзу деп, оны *а* арқылы белгілейтін боламыз. Бұл кезде *А* нүктесі *а* түзуге келетін меншіксіз нүкте дейміз.  **2 –теорема.** Егер M,N нүктелер *l* түзуінде жатса, онда вектор түзуіне сай келетін меншіксіз нүктені тұрады.  2. Екі аффиндік түзу параллельденеді, егер бұл түзулерге сәйкес келетін меншіксіз нүктелер беттессе, яғни ол түзулер түзуі бойында қиылысса. Сондықтан а мен в түзу параллель болу үшін керек.  **3 –теорема.** Егер АВ//СД, АС//ВД болса АВ=CD, AC=BD және AB+AC=AD болады.  Дәлелі. Теорема шартынан мен , мен ның колениарнығы шығады. Сондықтан .  Үшбұрыштар аксиомасы бойынша . Бұдан . Бұдан мен коллениар болғандықтан . Сондықтан АВ=CD, AC=BD болады.   1. Егер жазықтықтан репер алынса (мұндағы нүктелер И0 түзудегі нүктелер), онда А2 жазықтықта репер анықталады (40-сурет).   Мұндағы бұл R реперді реперге сәйкес келетін репер дейді.  screenshot (4).png147-сурет  ***4-теорема***  А2 жазықтықтың М нүктесінің репердегі координаталары болса, ал оған сәйкес келетін репердегі координаталары (х,у) болса, онда  (32-2) болады.  Дәлелі. С,Е,М нүктелерді тудыратын нормаланған векторлар болсын. 2-теорема бойынша векторлар нүктелерін тудырады. 3-теорема бойынша . Сондықтан . Бұдан . Демек векторлар реперге қарағанда келісілген.  Нүктенің аффиндік координатасының анықтамасы бойынша . Бұдан . вектор М нүктені тудыратындықтан саны М нүктенің репердегі координаталары пропорционал болады:  Бұдан болып (32-2) шығады.  4. проективтік жазықтықта проективтік түрлендірулер жиыны группа болады. Оны проективтік түрлендірулер группасы деген едік. Бұл группаның жазықтықта белгілеп алынған И0 түзу нүктелерін сол түзу нүктелеріне көшіретін автоморфты f түрлендірулер жиыны Г десек, онда бұл проективтік түрлендірулер группасы деген едік. Бұл группаның жазықтықта белгілеп алынған И0 түзу нүктелерін сол түзу нүктелеріне көшіретін автоморфты f түрлендірулер жиыны Г десек онда бұл -ні проективтік түрлендірулер группасы G ішкі группасы болады. Ол -ның кез келген М нүктесін -нің нүктесіне көшіреді.  жазықтықтың репер алсақ, онда түзуінің теңдеуі . Бұл түзу өзіне -өзі түрленгендіктен жазықтықты проективтік түрлендіру формуласындағы (27-11) болады да түрлендіру формуласы  (32-3)  Мұнда және болып шығады.  Ал, -де болатындықтан (32-3) –тің 1-2 теңдеуінің екі жағын -ге бөлсек мынадай болып шығады.  (32-4) және  Мұндағы  Бұрын өткен аффиндік жазықтықтағы аффиндік түрлендіру формуласы да дәл осындай болатын. Сондықтан аффиндік жазықтықтағы аффиндік түрлендірулер группасы А мен жазықтықты түрлендірулер группасы Г изоморфты болады. Сондықтан жазықтықтағы аффиндік геометрияны жазықтықтың Г группадағы инвариант қасиеттерін зерттейтін геометрия деп айтуға болады.  5. Аффиндік түрлендірудің негізгі инварианты үш нүктенің жай қатынасы еді. Бұл ұғым жазықтыққа кәдімгі аффиндік жазықтықтағыдан ендіріледі.  проективтік жазықтық, И0 ондағы белгілеп алынған түзу болсын, -дегі аффиндік түзу болсын. Бұл түзуде әртүрлі А,В,С нүктелер берілсін (148-сурет). мен коллинеар векторлар болатындықтан болады. Мұндағы санын берілген А,С,В үш нүктенің жай қатынасы дейді де деп белгілейді. А,В,С нүктелер жатқан түзуге сәйкес келетін меншіксіз нүкте А0 болсын. Сонда (32-5) болады.  screenshot (5).png148-сурет    Дәлелі. реперін 148-суреттегідей етіп алайық. С-ның бұл репердегі координаталары (с, 0, 1) болсын. болатындықтан болады. Өйткені АА0 координаттық түзуде болады. Сондықтан түзудегі реперде бұл нүктелердің координаталары болады да  (\*) болады.  жазықтықтағы А,В,С нүктелердің реперге сәйкес келетін R репердегі координаталары (32-2) формула бойынша  болады. Ал,  болатындықтан . Бұдан Сонымен мұнымен (\*) дан болып (32-5)-і дәлел дейді.  6. Үш нүктенің жай қатынасына сүйеніп -де «арасында жатады» ұғымын ендіруге болады: С нүкте А мен В нүктелердің арасында жатыр делінеді, егерде  (32-6) болса.  Одан әрі кәдімгідей кесінді, сәуле ұғымдарын енгізуге болады. 42-суретте АВ,СD кесінді. Төбесі Е болатын сәуле көрсетілген (олар қалың сызық пен сызылған).  АВ кесіндінің ортасы С болса (АВ,С)=1 болады. Сонда (32-5) формула ортасы (АВ,С А0)= - 1 болып шығады, яғни С нүкте АВ кесіндінің ортасы болса кесінді ұштары сол кесінді ортасы мен меншіксіз нүктеге гармоникалы түйіндес болады.  screenshot (6).png149-сурет  Кесінді ұғымына сүйене отырып көпбұрыш, параллелограмм, трапеция ұғымдарын ендіруге болады. 43-суретте параллелограм трапеция:  screenshot (7).png150-сурет  себебі олар меншіксіз нүктеде (U0 түзу бойында) қиылысып жатыр. Сондықтан параллелограм болады. Осы сияқты . Себебі бұларда меншіксіз U0 түзуінде қиылысып жатыр. Демек параллелограм болады.  ал мен ЕТ параллель емес. Өйткені олар И0 түзуінде қиылысып жатқан жоқ. кез келген төртбұрыш қарама-қарсы қабырғалары U0 түзуі мен әр жерде қиылысқандықтан олар өзара параллель емес.  Фигуралардың кесінді, көпбұрыш, параллелограм, трапеция болуы Г группаға қарағанда инвариант қасиеттер болады.  7. U0 түзуі белгіленіп алынған проективтік жазықтықта екінші ретті сызық реперде мынадай теңдеумен берілсін.  (32-7)  Бұл сызықтың де жатқан нүктелерінің жиынын дейік. Бұл сызықтың реперге сәйкес келетін R аффиндік репердегі теңдеуі (32-2)формуласы бойынша мынадай болады  (32-8)  Егер десек, онда  а) болғанда сызық пен U0 түзу қиылыспайды. Бұл кезде А2 –дегі сызығын эллипс дейді (44-а сурет).  б) болса мен U0 екі нақты нүктеде қиылысады. Бұл кезде А2 –де сай келетін сызықты гипербола делінеді. 151-б суретте гипербола берілген. Оның А01В0, А02В0 бөліктері гипербола гипербола тармақтары болады.  Ол тармаққа А0,В0 нүкте енбейді.  в) болса U0 түзу сызыққа жанама болады. Оған сәйкес сызығы парабола делінеді (151 –в сурет)  U0 түзудің сызыққа қарағандағы полюсі бұл сызыққа сәйкес келетін А2 –дегі сызықтың центрі делінеді.  screenshot (8).png  151-сурет  Эллипс үшін U0 одан тыс жатқандықтан оның полюсі (эллипстің центрі) эллипстің ішінде жатады. Ол нүктеден өтетін түзу эллипспен екі жақты нүктеде қиылысады. Ол қиылысу нүктелер M,N болса, центр С болса, MN-ге сәйкес келетін меншіксіз нүкте А0 болса, болады. Гипербола үшін U0 онымен қиылысатындықтан оның центрі (U0 дың полюсі). Гиперболадан тыс жатады және А0 мен В0-ден жүргізілген жанаманың қиылысу нүктесі болады.  Параболада U0 оған жанасатындықтан оның полюсі М0 нүкте болады. Ол параболаға кірмейді сондықтан параболаның центрі болмайды.  45-суретте эллипстің центрі С, гипербола центрі Р берілген.  Екінші ретті сызықтың диаметрі деп И0 түзудің кезкелген нүктесінің екінші ретті сызыққа қарағандағы полюсын айтады. И0 –түзудің полюсінен өтеді. Сондықтан эллипс пен гипербола диаметрі олардың центрі С,Р нүктелерінен өтетін түзулер ғана болады. Параболаның диаметрі U0 түзудің онымен жанасу нүктесі М0 нүктеден өтетін түзулер шоғы болады.  screenshot (9).png  152-сурет  Егер сызықтың Х,У түзулері диаметрлері болса, Х0, У0 нүктелер оларға сай келетін меншіксіз нүктелер болса, онда х диаметр у диаметрге түйіндес делінеді, егерде түзуі нүктенің поляры болса. Бұл кезде түзу х0 нүктенің поляры болуы керек.  Әрбір түйіндес диаметрдің бірі екіншісіне параллель хорданы қақ бөледі (46-сурет).  Шынында да х,у –түйіндес диаметр болсын. е//у болсын. е түзу сызықты M,N нүктеде қисын, ал х диаметрді Т нүктеде қисын. нүкте е-ге сәйкес келетін меншіксіз нүкте болу керек. Сондықтан (32-5) формула бойынша , яғни Р нүкте MN –нің ортасы болады.  screenshot (10).png153-сурет  **32.4. Проективтік тұрғыдағы евклидтік геометрия.** 1. Координаттары нақты сандар немесе нақты сандарға келетін нүктелерді нақты нүкте. Кері жағдайда жорымал нүкте дейді. Мысалы нақты нүктелер, соңғы екі нүкте координаталарын -ге көбейтсе олар нақты санға айналады, ал D(1,і+2,і) жорымал нүкте. Барлық нақты және жорымал нүктелер жиынын комплекс жазықтық дейді.  Екі нүкте комплексті-түйіндес делінеді, егер олардың сәйкес координаталары түйіндес комплекс сандар болса. Мысалы мына нүктелер комплекс –түйіндес нүктелер. Мына нүктелерде  комплексті түйіндес болады. В2 нүкте координаталарын ге көбейтсе В1 нүкте координаталарына түйіндес координаталар шығады.    түзудің координаталары нақты сандар, не нақты санға санына көбейту арқылы келетін сандар болса түзу нақты, кері жағдайда жорымал түзу делінеді.  Әрбір нақты түзуде шексіз көп жорымал нүкте болады, сол әрбір жорымал түзуде, тек бір ғана нақты нүкте болады.  Комплексті –түйіндес екі нүкте арқылы нүкте түзу өтеді. Егер нақты а түзуінің комплексті-түйіндес нүктелері болса, онда ол түзудің А нүктесі үшін болатын бір ғана В нүктесі болады және болатын бір тек бір нақты нүктесі С болады.  Түзуді теңбе-тең емес түрлендіру f инволюция делінеді немесе инволюциялық түрлендіру делінеді, егерде ол өзіне кері түрлендірумен беттессе.  Инволюциялық нүктесі болмайтын инволюция эллипстік, ал екі инвариант нүктесі болатын инволюцияны гиперболалық инволюция дейді. Бұл екі инвариант нүкте осы инволюциядағы сәйкес, кез келген сай нүктені гармоникалы бөледі.  2. Евклидтік геометрияны құруда да аффиндік геометрияны құрғандағыдай Р2 проективтік жазықтықтан оның бір проективтік U0 түзуін белгілеп аламыз да, жазықтықты, онда құрылған аффиндік структураларымен қоса құрастырамыз.  Ондағы түрлендірулер группасына Гі –ді аффиндік А2 жазықтықты түрлендіру группасы Г-ның ішкі группасы болатындай етіп аламыз. Ол үшін U0 түзу бойынан кез келген екі комплексті-түйіндес екі нүкте (оларды циклдік нүкте дейді) аламыз. Бұл екі нүкте белгіленген U0 түзуін Uі деп белгілейік.  Проективтік U0 түзуінің нүктелерін сол түзудің нүктелеріне бейнелейтін проективтік түрлендіру группасы Г ішінен: а) не нүктені нүктеге, нүктені нүктеге сәйкестендірілген; б) не нүктені -ге, нүктені нүктеге сәйкестендірілетін түрлендірулердің жиынын Гі дейік. Онда f түрлендіруі Гі –ге кірсе ол Г-ге кіреді. Демек болады және болса, және болса болады. Сондықтан Гі түрлендірулер жиыны жазықтықтың нүктелерін сол жазықтық нүктелеріне бейнелейтін Г түрлендірулер группасына ішкі группасы болады.  Сонымен геометрияны құруға қажетті кеңістік (ол ) және оның нүктелерін түрлендіру группасы (ол Гі) табылды. Енді осы Гі түрлендірулер группасының аналитикалық өрнегін анықтайық. Ол үшін жазықтықтың циклдік нүктелердің координаталары болатын реперді ғана пайдаланамыз. Мұндай реперлер шексіз көп болады. Осындай репердің бірі болсын.  Егер реперді дегі В0 –ді U0 түзуден С нүктесін А2 жазықтықтан еркі алсақ, А0 нүктені мен жатқан U0 түзуден, Е нүктені одан тыс жататындай етіп А2 ден мына шарттарды орындайтындай етіп алсақ    Мұндағы таңдап алсақ (бұл таңдап алынған реперді дейік) ол реперде болады.  Әрбір осындай реперге А2 –ден аффиндік репер сай келеді. Оны декарттық репер дейміз. (154-сурет)  screenshot (11).png154-сурет  Ол R реперде, сондықтан репердегі проективтік түрлендіру формуласы мынадай еді.  (\*)  Мұндағы комплекс сан.  Гі түрлендірулер группасына коэффициенттерге қосымша талап қойылады.  F түрлендіру циклдік нүктені, циклдік нүктеге көшіретіндіктен, мынадай жағдай болуы мүмкін.  . Бұл кезде болғандықтан және болғандықтан (\*)-нің алғашқы екі теңдеуінен  Бұдан болатындықтан  -ні қойсақта болып шығады.  Осыны (\*)-ға қойып, осы жағдайды бір теңдікке алып жазсақ және десек  Мұндағы Гі группа түрлендіруінің аффиндік R репердегі аналитикалық өрнегі мынадай болады:  (32-9) Мұндағы  Бұған былайша анықталатын жаңа параметр ендірейік.  сонда  (32-10)  Бұрын өтілген ұқсас түрлендірудің аналитикалық өрнегі де дәл осындай еді. Сондықтан евклидтік жазықтықты ұқсас түрлендіру. Гі группамен изоморфта болады. Демек жазықтықтағы евклидтік геометрияны А2 жазықтық фигураларының Гі группа түрлендірулерінде инвариант болатын қасиеттерін зерттейтін геометрия ретінде қарастыруға болады.  Егер болса (32-10) мына түрге келеді.  (32-11)  Бұл параллель жылжыту түрлендіруінің аналитикалық өрнегі.  **Қайталау сұрақтары мен есептер.**   1. Центрлік проекциалау деген не? Центрлік прекциалаудың бір мәнді проекциалау (бейнелеу) еместігі және оған мысалдар келтір. 2. Центрлік проекциалауды өзара бір мәнді бейнелеу ету жолдары қандай? 3. Түудегі меншіксіз нүктесі деген не, ол қанша болады. Ол нүктені ерекшілігі неде? 4. Меншіксіз түзу деген не? Ондай түзу жазықтықта қанша болуы мүмкін? Ол түзудің ерекшілігі неде? 5. Кеңейтілген евклидтік аффиндік түзу, жазықтық, кеңістік деген не? Олар қалайша кеңейеді. 6. Кеңейтілген жазықтықта түзуді –түзуге центрлі бейнелеу бір мәнді бейнелеу болады ма, жоқ па? Себебі. 7. Субьективтік инъективтік бейнелеу деген не және оларға мысал келтір. 8. Векторлық 2, 3, *п* өлшемді кеңістік деген не? 9. Проективтік кеңістіктің аксиомалары қалай тұжырымдалады? 10. Проективтік кеңістік деп қандай кеңістікті айтады? 11. Проективтік түзу, проективтік жазықтық деген не? Оларда шексіз көп нүктелер болатынын қалай негіздеуге болады? 12. Проективтік жазықтық, проективтік кеңістік моделдері қандай? Ол моделдерді проективтік нүкте, түзулер үшін не алынады? 13. Проективтік түзу мен проективтік жазықтықтың қасиеттері. 14. Бір жақты бет деген қандай болады? Мебиус жапырағы деген қандай фигура болады? 15. Проективтік жазықтықта жалпы жағдайдағы үш нүкте деген қандай нүктелер? Түзу де жататын жалпы жағдайдағы үш нүкте болады ма жоқ па? 16. Жазықтықтағы проективтік координата жүйесі (реперді) қалай жасалады? Репердің төбелері, координата түзулері, бірлік нүктесі деген не? 17. Координата жүйесінің (репердің) төбелерін, бірлік нүктесін тудыратын векторлар қандай жағдайда реперге қарағанда келісілген делінеді? Бір реперге қарағанда келісілген бірнеше векторлар жүйесі болады ма, болса олар қандай шартта қанағаттандыруы керек? 18. Нүктенің проективтік координаты деген не, оны қалай табады? 19. Координата жүйесі нүкте координаталарын бір мәнді анықтайдыма, жоқ па? 20. Координата төбелерінен координаталары неге тең? Себебі. 21. Үш нүктенің бір түзуде жату шарты қандай? 22. Проективтік координата жүйесіндегі координаттары түзулерде жататын нүктелер координаталары неге тең болады? 23. Проективтік түзудегі координата жүйесі. 24. проективтік координата жүйесінің координата түзуіндегі нүкте координаталары.  1. Түзудің теңдеулері, түзудің параметр теңдеуі. Түзудегі координаталары деген не? 2. Координата түзулерін теңдеулері қандай болады. 3. Екі түзуді бейнелеу, қиылысу шарттары қандай. 4. Жазықтықта нүкте координаталарын түрлендіру формуласы. Бір реперден екінші реперге көшу матрицасы. Матрица бағаналары кеңейтілген түрге келтіруге болады? 5. Түзудегі нүкте координаталарын түрлендіру формасы. 6. Проективтік жазықтықтың репердегі нүктесін сол жазықтықтың сол репердегі түзуге сәйкестендірілетін бейнелеуде болса болатыны дәлелдеу жолы қандай.  1. бейнелеуде бір түзу бойында жатқан нүктелердің бейнесі нүкте болатын жоқ түзулерден жасайтылығы туралы тұжырымдама дәлелдеу. 2. Жазықтықтағы ауыстырымдылық принцпі қалай тұжырымдалады? Мысалдар келтір. 3. Кеңістіктегі ауыстырымдылық принцпі қалай тұжырымдалады? Мысалдар келтір. 4. Дезарг теоремалары және оларды дәлелдеу. 5. Түзудегі төрт нүктесінің күрделі қатынасы деген не. 6. Түзудегі төрт нүктесінің күрделі қатынасының қасиеттері. Нүктелерден жасалған әр түрлі орналасытыуларға күрделі қатынас неге тең? 7. Нүктелер парының бірін –бірі болуы мен болмауы. 8. және болатынын дәлелдеу.  1. Түзулер шоғы және оның төрт түзуідің күрделі қатынасы деген не? 2. Түзулер шоғын екі түзумен қиғанда шығатын нүкктелер үшін болатыны дәлелдеу. 3. формула не туралы айтады?  1. Шоқтың төрт түзуін күрделі қатынасы, оның қасиеттері. 2. Кеңейтілген жазықтықтағы шоқтың төрт нүктесінін күрделі қатынасын табу формуласын (28-9) қорыту. 3. Проективтік жазықтықты проективтік түрлендіру деген не? 4. Түрлендірудің проективтік түрлендіру болуы жалпы теореманы тұжырымдап, оны дәлелдеу. 5. Проективтік жазықтықты проективтік түрлендіру болуы, Жалпы теореманы тұжырымдап, онда оны кез келген нүктесі үшін туралы теорема. 6. u түзудегі R реперді u1 түзуден реперге көшетін бір ғана проективтік бейнелеу болатындығы жайлы теорема. 7. Проективтік түрлендіру қандай жағдай да тең –тең түрлендіру болады.  1. Гомология деген не? Оның қандай түрлері бар? 2. Гомологияның берілу тәсілі және нүктеге гомологиялы нүкте салу жолы қандай? 3. Проективтік түрлендірулер жиынын группа болатындығын дәлелдеу. 4. Проективтік геометрия деген не және оның зерттейтін объектілері қандай? 5. Проективтік түрлендіруді аналитикалық өрнегі. 6. Толық төттөбелік деген не? 7. Толық төрттөбелік және гармоникалық төртөбелік. 8. u түзудегі R реперді u1 түзудегі R1 реперге көшетін бір ғана проективтік бейнелеу болатындығы жайлы теорема. 9. u түзудегі u1 түзуге проективтік бейнелеудің преспективтік бейнелеу болуы жайлы теорема. 10. Түзуді проективтік түрлендірулер кезінде үш нүкте инвариант болса, ол түрлендіруді тен –тең түрлендіру болатындығы жайлы теорема. 11. Инволиация деген не? Ол туралы теоремалар. 12. Екінші ретті сызық анықтамасы мен теңдеуі. 13. Екінші ретті сызықпен түзудің қиылысуы. 14. Екінші ретті сызықтың классификадциялары. 15. Екінші ретті сызықпен түзудің өзара орналасуы. 16. Екінші ретті сызыққа жанама түзу жайлы теорема. 17. Екінші ретті сызыққа қарағанда түйіндес нүктелер. 18. Екінші ретті сызықта жатқан, жатпған нүктеге түйіндес нүктелер. 19. Нүктесі екі нүктеге түйіндес болса, онда не болады? 20. Овал сызығы теңдеумен берілсе, онда оған қарағанда нүктелердің түйіндесе болу шарты қандай болады.  1. Полюс және поляра деген не? Полярдың теңдеуі. 2. Полюсті табу. 3. нүкте нүктенің полярында жатса, онда нүкте қайда жатады?  1. Овал сызығына қарағанда нүктенің оның ішкі, сыртқы нүктесі болу шарттары. 2. Овал сызығына бір нүктеден жанама қалай, қанша жүргізіледі? 3. Штейнер теоремасы. 4. Центрлері О1,О2 нүктелер болатын екі шоқ берілсе, түзудің бейнелері қандай түзулер болады. 5. Штейнердің кері теоремасы қалай тұжырымдалады? 6. Жалпы жағдайдағы С нүктесі бір екінші ретті сызықты анықтайтындығы туралы теорема. 7. Штейнер теоремасынан салдарлары. 8. Алтытөбелік, алты қабырғалы деген фигуралар қандай болады. Олар өзара ауыстырымды болады ма, жоқ па? 9. Паскальдің тура және кері теоремасы. Теореманың шектік жағдайлары (салдарлары). 10. Паскаль түзуі деген не? 11. Брианшон теоремасы, дербес жағдайлары, Брианшон нүктесі. 12. Автоморфизм деген не? Абсолют деген не? 13. Белгілеп алынған түзуі бар проективтік жазықтық геометриясы. Аффин жазықтығы. 14. Аффиндік Г проективтік жазықтықты құру жолы. 15. Аффиндік жазықтықтың проективтік моделі. 16. Аффиндік жазықтықтың негізгі факторларын проективтік көзқараста анықтау. 17. Аффиндік түрлендірулер группасы. Афиндік түрлендірулердің аналитикалық өрнегі. 18. Аффиндік жазықтықтағы параллельдік, кешенді, параллелограм, трапеция, кесінді ортасы. 19. Эллипс, гипербола, парабола. Олардың центрі, диаметрі. 20. Проективтік тұрғыда евклидтік геометрияны құру. 21. Комплекс түйіндес нүкте деген не? 22. Циклдік нүкте деген қандай нүкте? 23. Евклид жазықтықтағы проективтік түрлендірудің аналитиакалық өрнегі. 24. Түзулердің перпендикулярлығы қалай анықталады. 25. Тік төртбұрыш, ромб, квадрат қалай анықталады және салынады. 26. Шеңбер қалай анықталады. Теңдеуі қандай? Центрлі деп нені айтады? 27. Кесіндінің, бұрыштың теңдігі қалай анықталады. 28. Реперде нүктені қалай салады. 29. Репердің нүктесі берілген, оның координатасын қалай табады? 30. Үш нүктеге төртінші гармоникалық нүктені қалай салады? 31. Шоктағы үш түзуге төртінші гармоникалық түзуді қалай салады? 32. Евклидтік жазықтықта үш нүктеге гармоникалық нүктені қалай салады? 33. Проективтік түзуді өзіне өзін проективті түрлендіру, ол үш нүктесімен берілсе 4 –нүкте бейнесі қалай салынады. 34. Екінші ретті сызық теңдеуі берілсе, онда оған қарағандағы нүктенің полярын қалай салады? 35. Екінші ретті сызықтың теңдеуі және бір нүкте берілсе, ол нүктенің берілген сызыққа қарағанда қалай орналасқанын қалай анықтайды? Егер ол нүкте сыртқы нүкте болса, ол нүктеден жүргізілген жанаманы қалай салады? 36. Екінші ретті сызық теңдеуі және түзу теңдеуі берілсе, ол сызыққа қарағандағы бұл түзудің полюсін қалай табады? 37. Овал сызығында жатқан бес нүктенің орны берілсе овал сызығын қалай салады? 38. Бес нүктесімен берілген овал сызығына бес нүктенің бірінен жүргізілген жанаманы қалай алады?   **Х тарау. Жазықтықтағы геометриялық салулар.**  **§33. Конструктивтік геометрия және оның аксиомалары. Салу құралдары. Негізгі салу есептері және салу есептерін шешудің жалпы схемасы.**  **33.1. Конструктивтік геометрия және оның аксиомалары.**  Фигураларды салу есептерін және ондай есептерді шешу әдістерін қарастыратын геометрияның бөлімін **конструктивтік геометрия** дейді.  Конструктивтік геометрияның негізгі ұғымы – геометриялық фигураларды салу. Геометриялық салуға арналған барлық есептерде берілген фигураларға сүйене отырып, берілген шарттарды қанағаттандыратын нақты бір фигураны салу талап етіледі және ол салуды қандай құралдармен орындау қажеттілігі көрсетіледі. Сонымен қатар қарастырылатын фигуралардың барлығы да бір жазықтықта жатыр деп есептеледі. Оны **негізгі жазықтық** дейді. Бұл жазықтықтың **негізгі элементтері** (объектілері) ретінде **нүкте, түзу және шеңбер** алынады. Бұл объектілер арасындағы негізгі қатыстар деп, олардың бір – біріне қарағанда өзара орналасуын, бірінің екіншісінде жатуын айтады.  Негізгі объектілер мен олардың әртүрлі біріктірмелерін жазықтықтағы **геометриялық фигура** дейтін боламыз. Осы негізгі объектілер(фигуралар) жәрдемімен басқа фигуралар анықталады. Мысалы А, В екі нүкте мен түзу жәрдемімен АВ кесінді, АВ сәуле, АВ түзу т.б анықталады. Сондықтан салуға арналған барлық есептерді берілген негізгі фигуралар (нүкте, түзу. шеңбер) арқылы басқа негізгі фигураны (нүкте, түзу. шеңберді) салу деп есептеуге болады.  Әрбір салуға арналған нақты есепті тұжырымдау мен шешуде әрбір элементі салынған фигура деп аталатын негізгі фигуралар (нүкте, түзу. шеңбер) жиыны Σ беріледі. Салынған негізгі фигура алғашқы ұғым, ол төмендегі екі шартты қанағаттандырады.  а) Салу есебі шартында берілген нүкте, түзуі шеңбер Σ жиынға енеді, яғни олар салынған деп есептеледі. Негізгі фигуралар жиыны Σ шекті болады.  б) Ең болмағанда салынған бір түзу болады. Әрбір салынған түзу мен шеңберде салынған екі нүкте болады.  Салу барысында Σ жинағы жаңа салынған нүктелер, түзулер, шеңберлер қосатын амалдар болады деп есептеледі. Мұндай әрбір амалды **салу қадамы** дейді.  Төмендегі тұжырымдар салу аксиомалары немесе постулаттары делінеді. Бұларда салудың қандай қадамын салуға болатыны айтылады.  П-1. Салынған екі нүктеден өтетін түзуді салу, яғни салынған екі нүктеден өтетін түзуді салынған түзу деуге болады.  П-2. Салынған нүктені центр етіп, салынған екі нүкте арасын радиус етіп шеңбер салу. Демек центрі мен радиусы берілген шеңберді салынған деуге болады.  П-3. Параллель емес екі түзудің қиылысу нүктесін салу. Демек салынған екі түзу параллель болмаса, олардың қиылысу нүктесі салынған деуге болады.  П-4. Салынған шеңбермен салынған түзудің қиылысу нүктесін салу, егер олар қиылысатын болса.  П-5. Салынған екі шеңбердің қиылысу нүктесін салу, егер олар қиылысатын болса.  Салу есебін жалпы түрде былайша тұжырымдауға болады: саны шектеулі салынған негізгі фигуралар F1, F2,.. .Fn  берілген және ізделіп отырған салынбаған F фигураның қасиетінің сипаттамалары берілген. Жоғарыда келтірілген П-1,2,3,4,5 постулаттарды пайдалана отырып, F фигураны анықтайтын салынған негізгі фигуралардың шекті жиынын табу керек.  **33.2. Салу құралдары және олардың аксиомалары.**  Жазықтықта салынған (яғни берілген) негізгі фигуралар (нүкте, түзу, шеңбер) жиыны Σ-ны жаңа салынған негізгі фигуралармен (нүктелермен, түзулермен, шеңберлермен) толықтыру үшін түрлі салу құралдары қолданылады. Ол құралдарға салу мүмкіндігін көрсететін түсініктемелер берілуі керек. Олар аксиома түрінде беріледі.  Салу құралдарына бір жақты және екі жақты сызғыштар, тікбұрыш, циркуль т.б жатады.  Ежелден қалыптасқан дәстүр бойынша салу құралы ретінде көбінесе циркуль мен сызғыш қабаттаса қолданылады. Сызғыш бір жақты, шкаласыз және шексіз деп есептеледі. Циркуль ашасы да шексіз деп есептеледі.  Демек циркуль мен сызғыш күнде қолданылып жүрген циркуль мен сызғыш емес, олар абстракцияланған сызғыш. Олардың салу мүмкіндігі де әртүрлі. Ол мүмкіндіктер мына аксиомаларда көрсетілгендей.  **Сызғыш аксиомалары:**  С-1 Салынған екі нүктені жалғайтын кесіндіні салу.  С-2 Салынған екі нүктеден өтетін түзуді салу.  С-3 Салынған нүктеден шығатын және салынған нүктені басып өтетін сәулені салу.  **Циркульдің аксиомалары:**  Ц-1 Центрі салынған нүкте болатын, радиусы салынған нүктелер арасы болатын шеңбер салу.  Ц-2 Центрі мен доғасы салынған шеңберді салу.  Сызғыш пен циркуль арқылы жоғарыда келтірілген бес постулатта айтылған салуларды және олардың комбинациясы түрінде берілген көптеген салуларды орындауға болады. Циркуль және сызғыш жәрдемімен салынбайтын да салу есептері болады. Олар туралы тиісті жерлерде айтылып, мысалдар келтіріледі.  **33.3. Салу есебі және оның шешімі.**  Геометриялық **салу есебі дегеніміз** алдынала берілген құралдарды пайдалана отырып, есепте берілген, салынған фигуралар жиынын және салынған фигураның олармен қатыстары туралы талаптарды ескере отырып сол фигураны салу.  Есеп шартын қанағаттандыратын әрбір салынған фигура сол салу есебінің **шешімі** делінеді. Кейде салу есебінің шартын қанағаттандыратын бірнеше фигура болуы мүмкін (Мысалы екі шеңберге 4 ортақ жанама жүргізуге болады, екі қабырғасы бойынша әртүрлі үшбұрыш салуға болады). Салу есебі **шешілді** делінеді, егер оның барлық шешімдері табылса.  Есеп шартын қанағаттандыратын фигуралар бір – бірінен формасы мен өлшемдері арқылы немесе тек жазықтықтағы орны арқылы ғана өлшенуі мүмкін. Соңғы жағдайда есепті бір ғана шешімі бар делінеді. Сондықтан есептің шешімі көп жағдайда өзара тең емес шешімдері ізделінеді. Шешімі шексіз көп болатын салу есептері де болады. Мысалы бір түзуге жанасатын шеңбер салу, есептерін қанағаттандыратын шексіз көп фигуралар болады. Мұндай есептерді **анықталмаған салу есептері** дейді. Ондай есептер есеп шарты жеткіліксіз берілген жағдайлардан туындайды. Ондай есептер шешілді делінеді, егер ол есепті шешудің жалпы жолы табылса. Мысалы А, В екі нүктені басып өтетін шеңбердің центрі АВ кесіндісі қақ ортасын оған жүргізілген перпендикуляр түзудегі кез-келген нүктесі болады, ал радиусы ол нүкте мен А нүктесі арасы болады.  Кейде есеп шартын қанағаттандыратын фигураның мүлдем болмауы мүмкін, болған күннің өзінде сайлап алынған құралдармен салынбауы мүмкін. Мысалы, көпцентрлі шеңберлерге ортақ жанама мүлдем болмайды. Мұндай жағдайда есеп шешілді делінеді, егер есеп шартын қанағаттандыратын фигураның жоқтығын дәлелдей алсақ.  Кейде есепке шарт ортақ қойылуы себепті есептің шешуі болмауы мүмкін. Мысалы 4 нүктені басып өтетін шеңбер салу, екі қабырғасы мен екі бұрышы берілген үшбұрыш салу есептерінде шарт артық қойылған. Мұндай есептерді **шарт артық қойылған** есептер дейді.  Жалпы n бұрышты бір мәнді салу үшін 2n-3 шарт берілуі керек. Сонда үшбұрышты салу үшін 2n-3=2·3-3= 3 шарт, төртбұрышты салу үшін 2n-3=2·4-3= 5 шарт берілуі керек. Салу есебін орындағанда есептеп барлық мүмкін жағдайларын қарастыру керек. Мысалы, шеңберге А нүктеден жанама жүргіз десе, онда А нүктесінің шеңбер ішінде, шеңбер бойында, шеңберден тыс жататын жағдайларын жеке – жеке қарастыру керек.  **33.4. Негізгі салу есептері**  Салу есептерін шешу ол есепті 1-5 постулатта айтылған қарапайым салуларға келтіру. Сөйтіп оны салу болып табылады. Бірақ салу есептері күрделі, салудың әрбір қадамын 1-5 постулатта баяндалған салуларға келтіру ұзаққа созылып кетеді. Көптеген күрделі салу есебінің шешілу құрамына кіретін қарапайым салу есептері болады. Ол есептер әдетте мектеп геометриясында қарастырылады. Егерде салу есептерінің шығарылу жалпы бірнеше сатыларға бөліп, ол сатылар осы негізгі салуларға келтірілсе, онда ол салу есебі шықты, іздеген фигура салынды деп есептеуге болады.  Сондықтан, салу есебін шешу ол есепті салудың 1-5 пастулаттарына және негізгі салу есептеріне келтіру болып табылады.  Циркуль және сызғыш арқылы салынатын негізгі салу есептері қатарына мына есептерді жатқызуға болады.   1. Берілген сәулеге оның ұшынан берілген кесіндіні өлшеп салу 2. Берілген сәуледен, берілген жарты жазықтықта берілген бұрышты өлшеп салу 3. Бұрыштың биссектрисасын жүргізу 4. Берілген кесіндінің орта перпендикулярын жүргізу 5. Кесіндінің ортасын салу 6. Үш қабырғасы бойынша үшбұрыш салу 7. Екі қабырғасы мен арасындағы бұрышы бойынша үшбұрыш салу 8. Бір қабырғасы мен оған іргелес екі бұрышы бойынша үшбұрыш салу 9. Берілген түзуге берілген нүктеден перпендикуляр түзу жүргізу 10. Берілген түзуге берілген нүктеден оған парарлель түзу жүргізу 11. Гипотенузасы мен бір сүйір бұрышы бойынша тікбұрышты үшбұрыш салу 12. Гипотенузасы мен бір катеті бойынша тікбұрышты үшбұрыш салу 13. Шеңберге оның берілген нүктесінен жанама жүргізу.   **Салуға мысалдар.**  **1-мысал.** Бір түзуге жатпайтын үш нүкте салу.  **Шешуі**: Салынған фигура қанағаттандыратын шартын б) -сы бойынша (§33.1) салынған бір түзу болады. Ол l болсын (157-а сурет). Ол түзуде салынған екі нүкте болады. Ол А мен В нүктелер болсын.  П-2 постулат бойынша салынған А нүктені центр етіп, салынған А,В нүктелер арасын радиус етіп (А, АВ) шеңбер салуға болады. Сол сияқты (В,ВА) шеңбер салуға болады. П-5 бойынша олардың қиылысу нүктелерін M,N-ді салуға болады. Осылайша A, M, В нүктелер бір түзуде жатпайды.  а)  l  M  А  N  В  N  б)  D  Е  C  F  B  157-сурет  K  l  A  **2-мысал**. Түзуде жататын және жатпайтын нүктелер салу.  **Шешуі.** ℓ түзуі және онда жатқан А,В нүктелері салынған деуге болады. 1-мысал бойынша бұл түзуде жатпайтын С нүкте болады. (С, АВ) шеңбер салуға болады. Ол шеңбер бойында жататын екі нүкте болады. Соның бірін Е дейік. (Е, ЕС) шеңбер салуға болады. Осы салынған шеңберлердің қиылысу нүктелерін салуға болады. Олар Д мен F болсын. Сонда Д нүкте ℓ де жатпайтын нүкте. Ал, ДС∩ ℓ=K жататын нүкте болады.  Алдағы жерде осы есептерге сүйеніп, түзуде жататын және жатпайтын нүктелер болады және олар салынған деп алатын боламыз.  **33.5. Салу есептерін шешудің жалпы схемасы.**  Салу есебін шешу сол салу есебін шешудің жолын анықтау, анықталған сол бойынша оны салу және ол есептің шешімі қандай жағдайларда болады, болса қанша болады, қандай жағдайда есептің шешімі болмайды деген сұрақтарға жауап іздеуден тұрады.  Оңай деген салу есебін шешудің өзі бірнеше қадамнан тұрады. Сондықтан салу есебін шешуде белгілі бір схеманы басшылыққа алған жөн. Ол схема бойынша салу есебін шешу 4 кезеңнен: Талдау, салу, дәлелдеу, зерттеуден тұрады. Әрине салу есебін шешуде бұл схеманы барлық кезде қатаң қолдану міндетті емес, кейде бұдан өзге жолдарды пайдаланған жөн болады. Дегенмен бұл схема геометриялық салу есебін шешуде көп жәрдем етеді.  Бұл схеманың мәні төмендегідей  **1.Талдау кезеңі.** Бұл кезеңде есеп шартында берілген фигуралар мен салынбақ фигура арасындағы қатыстарды анықтайды. Ол үшін есеп шешілген екен деп алып, салынған фигураның жоба суретін салады. Осы жоба суретті берілген фигуралар мен салынған фигуралар арасындағы қатыстарды талдай отырып, салынбақ фигураны салу қадамдарын белгілейді. Сөйтіп, талдау кезеңі есепті шешу, фигураны салу жолдарын іздестіру нәтижесінде ізделген фигураны салу қадамдарын тізбектей белгілеумен аяқталады.  **2.Салу кезеңі.** Бұл кезеңде талдау кезеңінде анықталған салу қадамдарын циркуль және сызғыш жәрдемімен бірінен соң бірінін тізбектей салады. Сонда талдау кезеңінде салынған жоба сурет іздеген фигураның нағыз суретіне айналады.  **3. Дәлелдеу кезеңі.** Бұл кезеңде салынған фигураның есептің барлық шарттарын шынында да қанағаттандыратынын дәлелдейді. Сөйтіп салынған фигураның шынында да іздеп отырған фигура екеніне көз жеткізіледі.  **4. Зерттеу кезеңі.** Бұл кезеңде мына сұрақтарға жауап беріледі:  а) Таңдап алған әдіспен есепті шешу әруақытта мүмкін бе, яғни циркуль және сызғыш жәрдемімен оны салуға болады ма?  б) Есептің қандай жағдайда шешімі бар және қанша, қандай жағдайда шешімі болмайды?  Міне осы сұрақтарға жауап іздеу зерттеу кезеңінің міндеті болып табылады. Яғни зерттеу бөлімінің міндеті есептің шешілу шарттарын және шешім санын анықтау. Бұл кезеңде есептегі барлық мүмкін жағдайларын қарастыру үшін әрбір салу қадамдарын зерттеген жөн.  О  О  А  С  В  А1  С1  А  В  А1  С1  Е1  D1  *а*)  б)  158- сурет  **Мысал.** Табаны және бүйір қабырғаларына жүргізілген медианалары бойынша сол үшбұрышты салу.  **Шешуі**. Есеп шарты бойынша салынбақ үшбұрышқа тиісті үш кесінді берілген (жазықтықта олар салынып қойылған): табаны *а*, медианалары m1,m2 кесіндіге тең болуы керек.  **Талдау.** Есеп шешілген, яғни табаны АС=*a1* медианалары *АА*1=m1, CC1=m2 болатын ∆АВС салынған дейік(158 а-сурет) АА1 ∩ CC1=0 дейік.  Онда медиана қасиеті бойынша  СО=2OC1; AO=2OA1 болу керек.  Демек СО=m2; AO=2/3m1;  Ал, О с1=1/3m2, OA1=1/3m1;  Үшбұрыш өзінің үш төбесімен толық анықталады. Табаны АС=ℓ ны салсақ А және С төбелер анықталады да, В төбені салу ғана қалады. Ал,В=АС1 және CА1 болғандықтан, В нүктені салу үшін С1 нүкте СО, А1 нүкте АО сәулелерінде жатқандықтан А1 мен С1 ді салу үшін Щ нүктені салу керек. Егер О нүкте салынса АО-ға АА1=m1 СО-ға CC1=m2 өлшеп салса В нүктесі табылады. Сонымен салу есебінің шешімі О нүктені табуға тірелді. ∆АОС –ны салсақ О нүкте салынады.  **Салу.** Талдауда анықталған салу қадамдарын еске ала отырып циркуль және сызғыш жәрдемімен мыналарды тізбектей саламыз:  2-1. Кез-келген ℓ түзуі бойына АВ=*а* кесіндіні өлшеп саламыз. (Салынған фигураның б) шарты бойынша ℓ түзуі болады. Ол түзу бойында салынған екі нүктенің бойында бірін А дейміз. Сонда 1-негізгі салу бойынша салынған ℓ түзудің салынған А нүктесінен *а* кесіндіні өлшеп салуға болады. Сонда ℓ=АС кесінді шығады).  2-2. Негізгі 6-салу бойынша үш қабырғасы АС=*а1*, АО=2/3m1, СО=2/3m2 бойынша ∆АОС –ны салуға болады. Соны саламыз.  2-3. АО1 СО сәулелеріне АА1=m1, CC1=m2 кесінділерді өлшеп саламыз(1-негізгі есеп)  2-4. АС1,СА1 түзулерінің қиылысу нүктесі В-ны табамыз. Сонда шыққан АВС іздеген үшбұрыш болады.  **Дәлелдеу.** Егер Д1 нүкте АО, Е1 нүкте СО кесінділерінің ортасы болса, Д1Е 1А 1С1 төртбұрыш параллелограм болады. (158б-сурет). Себебі ОД1=ОА1, ОЕ1=ОС1. Сондықтан А 1С1= Д 1Е1, А 1С1║Д 1Е1 болады. Д 1Е1 кесінді ∆АОС –ның орта сызығы болғандықтан Д 1Е1║АС және С1А1= Д1Е1=AC/2 болады. Демек С1А1 кесінді ∆АВС-ның орта сызығы болады. Сондықтан АА1,СС1 ол үшбұрыштың медианалары болады және салу бойынша CC1=m2, АА1=m1, АС=*а.* Демек салынған ∆АВС есеп шартын қанағаттандырады. Іздеген үшбұрыш болады.  **Зерттеу.** Салу кезінде орындалған әрбір салуды жеке-жеке қарастырайық.  2-1. Салу әруақытта мүмкін және бірмәнді орналасады.  2-2. Салу 2/3│m 2 –m 1 k a < 2/3│m 2 +m 1│ болған кезде ғана орындалады, салынады.  2-3. Салу әруақытта мүмкін және бірмәнді орындалады.  2-4. Салу әруақытта мүмкін және бірмәнді орындалады. Өйткені АС1мен СА1 қиылысады, егер олар параллель болады десек. АС=С1А1 болып,С1А1=1/2AC дегенге қайшы келер еді.  Сонымен есептің шешуі 2/3│m2 –m1│< a < 2/3│m2+m1│ болған жағдайда ғана болады және жалғыз ақ болады.  **Жазықтықтағы геометриялық салу есептерін шешудің**  **негізгі әдістері**  Орташа қиындықты және күрделі салу есептерін шешу үшін арнайы әдістер пайдаланылады. Олар негізінен мыналар:  1. Фигуралардың қиылысу әдісі немесе нүктелердің геометриялық орын әдісі.  2. Геометриялық нүктелер әдісі.  3. Алгебралық әдіс.  Біз бұларды жеке-жеке қарастырып мысалдар келтіреміз.  **§34 Салу есептерін шешудегі фигуралардың қиылысу әдісі**  **34.1.** **Қиылысу әдісі туралы түсінік**. Нүктелер жиынынан фигуралар жасалады. Белгілі бір қасиетке ие болатын, ортақ талапқа бағынатын жазықтық нүктелерінің геометриялық орны (қысқаша НГО)дейді.  F1,F2,…Fn фигуралардың ең болмағанда біреуіне енетін нүктелердің жиынын, ол фигуралардың біріктірмесі, ал бәріне де енетін нүктелердегі жиынын ол фигуралардың қимасы дейді.  Фигуралардың қиылысу әдісі (немесе НГО әдісі) салуға арналған есеп шартын өзара тәуелсіз екі шартқа бағынатын бір нүктені табуға, келтіруге мүмкін болатын салу есептерін шешу үшін қолданылады.  Егер М нүктесі Ш1 және Ш2  екі шартқа бағынатын болса, онда Ш2 шартын қоя тұрып, Ш1 шартқа бағынатын F1 фигураны, одан соң Ш1 шартты қоя тұрып, Ш2 шартты қанағаттандыратын F2 фигурасын салса, онда бұл екі фигураның қимасы F1 және F2 – нің кез-келген нүктесі Ш1-де, Ш2-де шартқа бағынар еді. Сондықтан оның кез – келген нүктесін М нүктесі үшін алуға болады. Одан әрі осы нүктені пайдалана отырып есеп шартын қанағаттандыратын фигураның өзі салынады.  **34.2.** **Көп кездесетін нүктелер жиыны.** Жоғарыда баяндалған фигуралардың қиылысу әдісін, салу жұмысына қолдана білу үшін, нүктенің қандай нүктелер жиынына жататының тезірек аңғару үшін түрлі шарттарға бағынатын нүктелер жиынының қандай фигуралар болатынын білу керек. Сондықтан көбірек кездесетін жиі қолданылатын кейбір нүктелер жиынын, нүктелердің геометриялық орнын келтірейік.  1º Жазықтықта бір нүктеден теңдей қашықтықта жататын нүктелер жиыны шеңбер болады.  2º А,В екі нүктеден қашықтықтары бірдей болатын нүктелер жиыны АВ кесіндінің орта перпендикуляры болады.  3º Берілген түзуден бірдей d қашықтықта жататын нүктелер жиыны ол түзуден d қашықтықта өтетін, оған параллель екі түзу болады.  4º Екі түзуден қашықтықтары бірдей нүктелердің жиыны, геометриялық орны.  а) егер ол екі түзу қиылысса, ол түзулер арасындағы бұрыштың биссектрисасы болады.  б) егер ол екі түзу параллель болса, онда олардың симметриялық осі болатын түзу болады (яғни ол түзулердің арасынан ортасынан өтетін оларға параллель түзу болады)  5º АВС үшбұрышымен тең шамалы және ортақ АС табанды үшбұрыштардың төбесінен жиыны В дан өтетін АС-ға параллель түзу болады. (яғни биіктігі ∆АВС –ның биіктігіндей болатын үшбұрыштар болады)  6º Берілген *а* кесінді берілген α бұрышпен көрінетін жазықтық нүктелерінің жиыны берілген *а*=АВ кесінді ұшынан өтетін және оған қарағанда симметриялы болатын екі шеңбер доғасынан тұрады (159-сурет). Ол шеңбердегі центрі АВ кесінді мен А нүктеде α бұрыш жасайтын АС түзуге А нүктеде жүргізілген перпендикуляр түзу мен АВ кесіндінің ортасынан оған жүргізілген перпендикуляр түзудегі қиылысу нүктесі болады.  α  А  r  O  В  160-сурет  O2  α  α  O1  M  B  A  159-сурет  Егер АВ=*а* диаметр болатын шеңбер сызсақ, онда ол шеңбер деп нүктелер *а* кесінді 90º-тық бұрышпен көрінетін нүктелер болады.  7º Берілген (О,r) шеңбер (яғни центрі О нүкте, радиусы r болатын шеңбер) α бұрышпен көрінетін В нүктелер жиыны радиусы берілген шеңбер радиусынан ұзақ болатын онымен концентрлі шеңбер болады (160-сурет). Ол шеңбердің радиусы берілген шеңбер радиусы ОА-ға А нүктеде перпендикуляр болатын түзумен сол ОА радиуспен О нүктеде бұрыш жасайтын түзудің қиылысу нүктесі В мен берілген шеңбер центрі О нүктесінің арасы ОВ кесіндіге тең болады.  8º О центрлі шеңбердің А нүктеден (бұл шеңбердің ішкі, сыртқы нүктесі болуы мүмкін) өтетін барлық хордаларының қақ орталарының жиыны диаметрі ОА болатын қандай да бір шеңбер болады. (161-а,б,в суреттер)  С2  С1  В2  В1  О1  О  С0  В0  *а*)  .  .  .  В1  В2  О  О1  С1  С2  В0  С0  б)  А  В  С  О  О1  С0  В0  *в*)  161-сурет  9º О центрлі шеңбердің бойында жатқан А нүктеден жүргізілген хордаларды m:n қатынаста бөлетін нүктелердің жиыны центрі ОА-да жататын А нүктеден өтетін (яғни берілген шеңберге А нүктеге жанасатын) шеңбер болады (162-сурет), λ= m:n=1 болса, ол шеңбер ОА кесінді диаметрі болатын шеңбер болады (161-в суреттегідей)  D  В  К  А  С  Т  О  О1  Е  162-сурет  10º А1В екі нүктеден әрқайсысын қанағаттандыратын квадраттарының айырымы тұрақты болатынын (Мысалы m2 болатын) нүктелер жиыны АВ кесіндіде жататын АД2-ДВ2=m2 шартын қанағаттандыратын Д нүктеден АВ-ға перпендикуляр етіп жүргізілген түзу болады.  11º Берілген А1В екі нүктеден әрқайсысының қашықтықтарының қосындысы тұрақты (Кесінді m-нің квадратына тең)болатын нүктелер жиыны АВ=*а* ның қақ ортасы центрі, радиусы **r =1/2√2m2-a2** болатын шеңбер болады.  12º Берілген А,В нүктелерден қашықтықтарының қатынасы тұрақты және 1-ге тең емес болатын нүктелердің жиыны центрі АВ түзуінде жататын шеңбер болады (оны Аполлония шеңбері дейді).  13º Екі шеңберге жүргізілген жанамалары теңдей болатын нүктелер жиыны шеңбердің центрлер сызығына перпендикуляр түзу болады (оны радикал осі дейді). Егер шеңбердің центрлері О1, О2 радиустары r1,r2 болса радикал ОС=О1Д2- О2Д2=- болатын О1О2 кесіндінің Д нүктесінен оған перпендикуляр етіп жүргізіледі. Егер екі шеңбер қиылысса радикал ось олардың ортақ хордасымен беттеседі.  14º Концентрлі екі шеңберге жанасатын шеңберлер центрінің жиыны радиусы r = болатын, оларға концентрлі шеңбер болады.  **Мысалдар.** Енді осы нүктелер жиындарын қолдану арқылы фигуралардың қиылысу әдісімен шешілетін салу есептеріне мысалдар қарастырайық.  **1-мысал.** Екі қабырғасы және сол қабырғалардың біріне жүргізілген биіктігі арқылы үшбұрышты салыңдар.  Бұл есепте әртүрлі үш кесінді берілген: а,в,һ  m  ℓ  h  B1  B2  F  E  C  B  A  D  a)  A  C  б)  163-сурет  **Талдау.** Есеп шешілген, ізделетін үшбұрыш салынған дейік. Ол ∆АВС болсын (163-а сурет). АС=в, ВС=а, ВД=һ (биіктік) болсын. Егер в=АС өлшеп салынса А,С екі төбе анықталады. Сонда үшінші төбе В-ны табу ғана қалады. Ол төбе екі шартқа бағынады. 1-ден оның С нүктеден қашықтығы *а*-ға тең болу керек, 2-ден АС түзуден қашықтығы Һ-қа тең болуы керек.  Егер 2-шартты (талапты) ескерсек В төбе центрі С нүкте, радиусы r =*а* болатын шеңберде жатуы керек.  Егер 1-шартты ескерсек В нүкте АС түзуге, одан һ қашықтықта жүргізілген параллель ℓ түзуде жатар еді.  Екі шартты да ескерсек В нүкте (С, r =*а*) шеңбер мен ℓ түзумен қиылысу нүктелерінің жиыны болуы керек.  **Салу.** Талдау кезеңінде анықталған есепті шешу (салу) қадамдарын, циркуль және сызғыш жәрдемімен, мына тәртіпте орындаймыз (163-б сурет)  а) Кезкелген d түзуі бойына АС=в кесіндіні өлшеп саламыз.  б) С центрлі *а* радиусты (С,r=*а*) шеңбер саламыз.  в) АС кесінді жатқан d түзуге перпендикуляр етіп m түзуін жүргізіп, оның бойына d түзуден бастап Һ кесіндіні өлшеп саламыз. Ол EF болсын.   1. Ғ нүктеден d түзуіне паралель етіп ℓ түзуін жүргіземіз 2. ℓ мен (С,а) шеңбердің қилысу нүктелері В1  мен В2 табамыз. 3. Ол нүктелерді А,С нүктелерге қосамыз. АВ1С, АВ2С үшбұрыштар шығады. Олар іздеген үшбұрыштар болады.   **Дәлелдеу.** Бұл үшбұрыштарда салу бойынша АС=в, СВ1=*а*, СВ2=*а* себебі В1 мен Внүктелер (С, r=a) шеңберде жатыр. Салу бойынша ℓ мен ACd түзулер арнасы Һ-қа тең және В1 мен В2 нүктелер ℓ түзуінде жатыр. Сондықтан В1 мен В2 нүктелердің АС-дан қашықтығы, яғни АВ1С, АВ2С үшбұрыштың АС табанына жүргізілген биіктігі Һ-қа тең.  Сонымен салынған АВ1С, АВ2С үшбұрыштар есепте айтылған үш талаптыда қанағаттандырады. Сондықтан олар ізделініп отырған үшбұрыштар болады.  **Зерттеу:** а,б, салулар әр уақытта бір мәнді орындалады.   1. салу екі түрлі орындалуы мүмкін: Һ кесінді АС түзуінен үстінгі және астынғы жарты жазықтығында өлшеп салынуы мүмкін. Сондықтан ЕҒ1=h немесе ЕҒ2=h болып F1 , F2 нүктелер табылады. 2. салуы да екі түрлі: біреуі Ғ1 екінші Ғ2 нүктеден АС түзуіне параллель етіп жүргізілуі мүмкін . 3. салу нәтижесінде АС-ның астынғы жарты жазықтығында В1 В2 , АС-ның төменгі жарты жазықтығында В11 В21 нүктелер шығады және АВ1С=АВ11С, АВ2С=АВ21 болады.   Бұл жағдайлар ℓ түзуі мен (С, r=a) шеңбер қиылысқан жағдайда ғана мүмкін. Олар қиылысу үшін h<*a* болуы керек. h=*a* болса ℓ түзуі шеңберге жанасады. h>*a* түзу мен қиылыспайды, В нүкте табылмайды.  Сөйтіп h˂*a* болғанда есептін екі шешуі болады. Олар АВ1САВ2С. h=*а* болғанда ℓ түзу шеңберге жанасады да В1=В2 =B болып бір ғана АВС шығады. Сөйтіп бұл кезде есептің бір шешуі болады.  Егер h˃*a* болса есептің шешуі болмайды.  **2-мысал.** ℓ түзуге жанасатын А нүктеден өтетін, радиусы r-ге тең шеңбер салу керек.  **Шешуі**. есеп шарты бойынша ℓ түзуі және А нүктесі салынып қойылған және r-кесіндісі берілген. Есеп шартын қанағаттандыратын r-радиусты шеңбер салу керек.  **Талдау.** А нүктесі, ℓ түзуі салынып қойылғандықтан шеңбердің центрі болатын О нүктені табу ғана қалды.  Есеп шешілген, О центрлі r радиусты шеңбер сызылған дейік. А нүктесін басып өтетін және ℓ түзуіне жанама болатын W шеңбер болсын. (164-сурет)  Байқасақ шеңбер центрі О екі шартқа бағынады: 1-ден ОА=r болу керек, 2-ден О нүктесінін ℓ түзуден қашықтығы d=r болу керек.  2-шартты ескермей тастап кетсек, 1-шартты қанағаттандыратын нүктелер А центрлі r-радиусты (A, r) шеңбердің кез-келген нүктесі болады.  Ал, 1-шартты ескермей тастап кетсек, 2-шартты қанағаттандыратын нүктелер ℓ түзуден 164-сурет  r қашықтықта оған параллель болып өтетін түзудің кез-келген нүктесі болады.  Сонда екі шартты да қанағаттандыратын нүктелер (A, r) шеңбермен ℓ түзудің қилысу нүктелері болады.  **Салу:** Сонымен былайша салынады екен.   1. А центрлі, r радиуста (A, r) шеңбер саламыз. Ол W болсын. 2. ℓ түзудің бойынан бір К нүкте алып, ол нүктеден ℓ түзуге перпендикляр етіп d түзуін жүргіземіз. 3. d түзуден КЕ1=КЕ2=r болатын Е1, Е2 нүктені саламыз. 4. Е1, Е2 нүктеден ℓ түзуіне параллель етіп ℓ1 ,ℓ2  түзулерді жүргіземіз. 5. Ол түзулердің берілген шеңбермен қилысу нүктелерін табамыз. Сол іздеген центр болады. Ал, (О1, r), (О, r) шеңберлер іздеген шеңберлер болады.   **Дәлелдеу.** О мен О1 нүктелер (A, r) шеңберде жатқандықтан А нүкте (О, r), (О1, r) шеңберлерде жатады. Салу бойынша ℓ1 мен ℓ түзу арасы r-ге тең болғандықтан және О мен О1 нүктелер ℓ1 жатқандықтан (О, r), (О1, r) шеңберлер ℓ түзуге жанасады.  Демек салынған (О,r), (О1, r) шеңберлер есеп шартын қанағаттандырады, іздеген шеңберлер болады.  **Зерттеу.** а,б –салулар әруақытта бір мәнді орындалады.   1. салу екі шешім береді Е1 және Е2 нүктелер шығады. 2. салу бір мәнді орындалады. 3. салуда мынадай жағдайлар болуы мүмкін:   **1-жағдай.** А мен ℓ түзуінің арасы 2r-ден кем болса, олар екі нүктеде қилысады. Есептің екі шешімі болады.  165б-сурет  **2-жағдай.** А мен ℓ түзуінің арасы 2r-ге тең болса, онда шеңбер мен түзу бір ғана нүктеде қилысады. Есептің бір шешімі болады.  **3-жағдай.** А нүкте мен ℓ түзудің арасы 2r-ден көп болса, онда шеңбермен түзу қиылыспайды. Есептің шешімі болмайды.  Егер А нүкте ℓ түзуінде жатса онда түзу шеңберге А нүктеде жанасады. Есептің екі шешімі болады.  **3-мысал.** Табаны, оған жүргізілген биіктігі және диагоналдар арасындағы бұрышы бойынша параллелограмм сызыңдар.  **Талдау**. Есеп шешілген табаны АВ=*а*, бұл қабырғаға жүргізілген биіктігі ЕҒ=h, диагоналдар арасындағы бұл қабырғаға қарайтын бұрышы А0В= болатын АВСD параллелограмм салынған болсын. (165-а сурет)  Егер *а*=АВ салсақ параллелограмның екі төбесі салынады. Енді диоганалдарының 165а-сурет  қилысу нүктесі О салынса параллелограмм салынады. О нүкте екі шартқа бағынады. Ол AВ-дан һ/2 қашықтықта жату керек және АВ=*а* кесінді бұрышпен көрінетін нүктелер жиынына кіру керек. Сондықтан салу жұмысын былайша жүргіземіз (165-б сурет)  **Салу:** а) Түзу бойынша АВ=*а* кесінді өлшеп саламыз.  б) АВ кесінді бұрышпен көрінетін нүктелер жиынын саламыз. Ол АВ мен бұрыш жасайтын АТ түзуіне А нүктеде жүргізілген перпендикуляр мен АВ-ның қақ ортасынан жүргізілген перпендикулярдың қиылысу нүктесі К центрі АК радиусы болатын шеңбер болады. (6 0 негізгі нүктелер жиыны)  в) АВ-ға ⊥ жүргізіп, оның бойына Һ кесіндіні өлшеп салып һ/2 болатын нүктеден d, h-тың ұшынан ℓ түзулерін АВ-ға параллель етіп жүргіземіз.  г) d-ның шеңбер мен қиылысу нүктелері О мен О1 табамыз.  д) АО∩ℓ=С, ВО∩ℓ=D, ВО1∩ℓ=D1, AО1∩ℓ=C1 нүктелерді табамыз. Сонда АВСD, AВС1D1 іздеген параллелограмм болады.  **Дәлелі** салу бойонша АВ⎢⎢d⎜⎜ℓ болғандықтан АО=ОС, BО=ОD. Сондықтан АВСD параллелограмм болады және АВ мен d, d мен ℓ түзулер арасы һ/2-ге тең болғандықтан параллелограмм биіктігі һ-қа тең болады. Салу бойнша ∠А0В= тең. Демек АВСD есептің үш шартында қанағаттандырады. Дәл осы сияқты А1В1С1D1-геесептің үш шартын қанағаттандырады. Сондақтан олар іздеген параллелограмм болады.  **Зерттеу:** а) салу әруақытта бір мәнді орындалады.  б)салу да АВ кесінді бұрышпен көрінетін нүктелер жиыны екі-симметриялы. Ұштары А мен В болатын доғалардан тұрады.  в) Салуда һ кесіндіні АВ мен анықталатын төменгі жарты жазықтықта өлшеп салуға болады.  г) Салуда екі нүкте О1 мен О2 шығуы бірғана нүкте шығуы (d түзу шеңберге жанама боған жағдайда) мүмкін және шеңбер мен d түзу қилыспауы мүмкін.  Сондықтан есептің шешуі екеу болуы, біреу болуы немесе тіпті болмауы мүмкін.  **§35. Радикалдық өсі және радикалдық центр**  Шеңберге арналган көптеген салу есептерін радикалдық өс және радикалдық центр ұғымдарына сүйеніп шешу қолайлы болады.  Олар төмендегідей екі теоремаға негізделген.  **1-теорема.** Шеңберге одан тыс жатқан нүктеден жүргізілген қиюшылардың шеңбермен қилысу нүктерінің берілген нүктеден қашықтықтарынан көбейтіндісі ол нүкте үшін тұрақты болады және олар нүктеден шеңберге жүргізілген жанама кесіндісінің квадратына тең болады. (166-а сурет)  SC1· SC2 = SB1 SB2= SA1· SA2=ST2 (35-1)  2-теорема. Шеңбердің ішке бір нүктесінен жүргізілген кез-келген хорданың осы нүкте арқылы бөлінген бөліктерінің көбейтіндісі тұрақты болады және олар сол нүктеден өтетін диаметр бөлігінің көбейтіндісіне тең болады. (166-б сурет)  SC1· SC2 = SB1· SB2= SA1· SA2 (35-2)  (166-а суретте)А1В2 ~А2В1  (S-ортақ, SB2A1=SB2A1),  сондықтан SA1 : SВ2=SB1 : SА2  SA1·SA2= SB1·SB2  STA2~STA1 а) 166-cурет b)  (S-ортақ STA1=SA2T)  Бұдан ST:SA1=SA2:ST, SA1· SA2=ST2  Демек (35-1) дұрыс  (166-б-суретте) C1B1S1~C2B2S2  бұдан Sℓ1:SB1=SB2:Sℓ2, Sℓ1·Sℓ2=SB1⋅SB2, A1B1S~A2B2S.  Бұдан SB1·SB2= SA1· SA2  Демек (35-2) формула дұрыс S нүктеден жүргізілген бағытталған S1, S2 кесінділердің көбейтіндісін S нүктенің (О,r=ОА1), шеңберге қарағандағы көрсеткіші дейді. Оны б(S) десек б(S)=SA1⋅SA2 .  Егер S нүкте шеңберден тыс жатса, S1S2 болады да б(s)=S1·S2=/S1//S2/cos 00 =SA1·SA2=ST2=SO2-r2>0  Егер S нүкте шеңберден ішінде S1S2  болады да б(s)=S1·S2=/S1//S2/cos 1800 =-SA1·SA2=ST2= (r+OS)(r- OS)OS2-r2  Егер S шеңбер бойында жатса S≡A1 болады да б(S)=SA1\*SA2=0 болады. Сонымен S нүкте қайда жатсада ол нүктенің (О, r) шеңберге қарағанда дәрежесі мынадай болады.  б(S)=0S2- r2 (35-3)  Екі шеңберге қарағанда дәрежесі теңдей болатын нүктелер жиынын ол нүктенін сол шеңберлерге қарағандағы радикалды осі дейді.  (О1, r1), (О2, r) екі шеңберге қарағандағы М нүктенің дәрежесі бірдей болса, онда (35-3) бойынша О1М2- r12=О2M2-r22 болады да О2М2- О1M2= r22-r12 болып шығады. Мұндай шартты қанағаттандыратын М нүктелер жиыны (яғни екі нүктеден қашықтықтарының квадраттарының айрымы тұрақты болатын нүктелер жиыны) шеңберлердің центрлік сызығына перпендикуляр түзу болады. Сондықтан радикалдық осьтің бір нүктесін тапса ол ось саналады. Ондай нүкте үшін мысалы оларға ортақ жанаманың қак ортасын алуға болады.   1. b) c)   167-сурет  М1М2 ортақ жанама М жанасу нүктелері М1 мен М2 –нің қақ ортасы болса (167-а сурет) М1М =М2M болғандықтан МО22-r22= МО12-r12 болады да М радикалдық өсте жатады. Екі шеңбер қилысса (167-б сурет) онда қилысу нүктелерін қосатын А1А2 түзу радикалдық өс болады. Өйткені оның бойынан алынған кез-келген М нүкте үшін МA1·МA2=МT22, МA1·МA2=МT12, болады, яғни МT22= МT12 болады.  Егер екі шеңбер жанасса радикалдық өс олардың жанасу нүктесінен жүргізілген ортақ жанама болады. (167-в сурет).  Өйткені бұл кездеде ортақ жанамадан алынған кез-келген М нүкте үшін М022-r22=M012-r22  болады.  Егер екі шеңбер концентрлі болса, олардың радикалдық өсі болмайды.  **Теорема.** Егер W1(О,r), W2(О,r), W3(О,r) үш шеңбердің центрлері бір түзуде жатбаса, онда олардың алғашқы радикалдық өсьтері *а12, а13, а23*қос-қостан бір нүктеде қиылысады.  **Дәлелі** W1,W2 шеңбердің радикалдық өсі *а12* мен W1,W3 шеңберлердің радикалдық өсі *а13* қиылысады. Өйткені олар қиылысып жатқан О1О2 және О1О3 нүктелеріне сәйкесінше, перпендикуляр болады.  Ол нүкте М болсын. Одан М нүктенің W1 мен W2, W1 мен W3 шеңберге қарағандағы дәрежелері теңдей болады. Сондықтан М нүктенің W2, W3  шеңберге қарағандағы дәрежесіде оларға тең болады.  Демек *а23* түзуі де М нүктеден өтеді.  Үш шеңберге қарағандағы дәрежелері бірдей болатын бұл нүкте сол үш шеңбердің радикалдық центрі делінеді.   1. b)   168-сурет  Радикалдық центрді пайдаланып кез-келген екі шеңбердің радикалдық өсін салуға болады.  1-есеп. W1 (О1,r1)W2(О2,r2) екі шеңбер берілген. Солардың радикалдық өсін салу керек. (168-суретте) өзара қилыспайтын екі шеңбер берілген, ал б-суретте бірінің ішіне бірі орналасқан екі шеңбер берілген.  Олардың радикалдық өсін салу үшін екі жағдайда да W1,W2 шеңберді W3 шеңбермен қиған. W1 менW3, W2 менW3 шенберлердін радикалдық өсітері *а13, а23* бір М нүктеде қилысады. Ол бұл үш шеңбердің радикалдық центрі болады. Сондықтан ол нүктеден W1,W2 шеңбердің центрлік сызығына жүргізілген перпендикуляр *а12* берілген W1 және W2 шеңбердің радикалдық өсі болады.  Екі шеңбердің қилысу нүктесінен оларға жүргізілген жанамалар өзара перпендикуляр болатын болса ол шеңберлер өзара ортогональ делінеді.  **2-теорема.** Концентрлі емес екі шеңбердің екеуіне де ортаганал болатын шеңберлердің центрі осы екі шеңбердің радикалдық өсінің бұл шеңберлердің ішіне енбейтін нүктелерінін жиыны болады.  **2-есеп.** Берілген А,В,С үш нүктеден жүргізілгенжанамалары берілген а,в,с кесінділерге тең болатындай етіп шеңбер салу керек.  **Талдау.** Есеп шешілген, W (О,R) шеңбер іздеген шеңбер болсын (169-сурет). Онда ол шеңберге АА1 жанама болады және АА1=*a* болады. Осы сияқты ВВ1, СС1 – лерде жанама болады және ВВ1=в, СС1=с болады. Демек СС1ОС1,  АА1⊥ОА1, ВВ1⊥ОВ1 болады. Сондықтан А1 нүктеW1(А,*а*), В1 нүкте W2(В,в), С1 нүкте W3(С,с) шеңберде жатады және ол шеңберге О нүктеден жүргізілген жанамалар W шеңбердің радиусы R-ге тең болады. Сөйтіп О нүктеден W1W2W3 шеңберге жүргізілетін үш жанама ОС1 =ОА1 =ОВ1=R өзара тең болады. Сондықтан О бұл үш шеңбердің радикалдық 169-сурет  центрі болады.  **Салу.**Тізбектей төмендегі салуларды орындаймыз.  а) W1 (А1*а*), W2 (В1в), W3 (С1с) үш шеңберді саламыз.  б) Үш шеңбердің радикалдық центрі О нүктесін саламыз.  в) О нүктесін W1 центрге жанама жүргізіп жанасу нүктесі А1-ді табамыз.  г) О нүктеніцентр етіп R=ОА1 радиуспен шеңбер саламыз.  Осы іздеген шеңбер болады.  **Дәлелдеу.** Салу бойынша ОА1=R радиусты шеңбер сызғандықтан О нүктесінен W1 шеңберге қарағандағы дәрежесі δ(О1W1) = ОА12 = R2 >O болады. Ал, О радикалдық центр болғандықтан δ(О1W2) =δ(О1W3) =δ(О1W1) = R2 >Oболады. Сондықтан О нүкте W3, W2 шеңбердің сыртында жатады. Демек О нүктесінен бұл шеңберге жанама жүргізуге болады. Осы жанамалар ОВ1, ОС1болсын. О нүктесінен W2,W3, шеңберге қарағандағы дәрежесі δ(О1W2)=ОВ12,δ(О1W3)=ОС12 болады. Ал, ОВ12=ОС12 =ОА12 болғандықтан ОВ1=ОС1=ОА1=R болады. Сондықтан В1,С1нүктелері W шеңберде жатады. Ал, ОА1 түзуі W1 шеңберге жанама болғандықтан ОА1⊥АА1, болады. Демек АА1 түзуі W(О1R) шеңберге жанама болады және W1 шеңбердің радиусы ретінде АА1 =*a* болады.  Осы сияқты ВВ1,СС1 түзулері де W(О1R) шеңберге жанама болады және ВВ1=в, СС1=с болады. Сөйтіп W(О1R) іздеген шеңбер болады.  **Зерттеу.** Есептің шешуі болу үшін А,В,С нүктелер бір түзуде жатпауы керек. Шешімі біреу болады.  **3-есеп.** А,В нүктелерді басып өтетін және берілген W(О1R) шеңберді диаметрлі қарама қарсы нүктелерде қиатын шеңбер салу керек.  Есепте А,В екі нүкте және W(О1,r) шеңбер салынып қойылған.  **Талдау.** Есеп шешілген ізделіп отырған шеңбер W2 болсын (170-сурет)  Онда А,В нүктелер W2 шеңберде жатады және W1 мен W2 –нің қиылысу нүктелерін қосатын N1N2 кесінді диаметр болады. 170-сурет  Сондықтан N1N2=*a12*түзуі W1, W2 шеңберлердің радикалдық өсі болады және ол АВ түзуімен бір С нүктеде қиылысады. Сондықтан W2 шеңберді А,В,N1 нүктелерден өтетін шеңбер ретіндесалуға болады.  Ал, А мен В берілген, N1-дітабу керек. N1-дісалу үшін С нүктені табу керек. С табылса СО1 түзуін жүргізіп N1 нүктені табар едік.  Егер А,В нүктелерді басып өтетін және W1 шеңбермен қиылысатын W3 шеңбер жүргізсек W3, N1 шеңбердің радикалдық өсі *а13* пен АВ түзуінің қиылысу нүктесі С нүктені берер еді. С нүкте W1,W2,W3 шеңбердің радикалдық центрі болады.  **Салу** а) А мен В нүктелерді басып өтіп W1 шеңбермен қиылысатын кез-келген W3 шеңберін жүргіземіз.   1. Қиылысу нүктелері М1 мен М2-ні тауып *а13*=M1M2 радикалдық өсін саламыз. 2. *а13* ∩АВ=С нүктесін саламыз. 3. С01 түзуін жүргізіп оның W1 шеңбермен қиылысу нүктелері N1 және N2 нүктелерді саламыз. 4. А1,В1,N1 нүктелерді басып өтетін W2 шеңберді саламыз. Сол іздеген шеңбер болады.   **Дәлелдеу.** Үш шеңбердің қос-қостан қилысу сызығының қилысу нүктесі болғандықтан С нүкте W1,W2,W3 шеңбердің радикалдық центрі болады. Сондықтан СN1 түзуі W1 мен W2 шеңбердің радикалдық өсі болады және ол шеңберді N2 нүктеде қиады. Сөйтіп N2 нүкте А,В,N1 нүктелер арқылы өтетін W2 шеңберде жатады. Салу бойынша N1N2 диаметр.  Демек, W2 шеңбер есеп шартын қанағаттандыратындықтан іздеген шеңбер болады.  Біз шеңбер центрі О1 нүктенің А мен В нүктелерден бірдей емес қашықтықта орналасқан жағдайын қарастырады. Егер АО1=BО1 болса, онда О1 нүктеден АВ ⎢⎢СD болатын СD диаметрін жүргіземіз (171-сызба). Сонда іздеген шеңбер А,В,С,D нүктелердің кезкелген үшеуінен өтетін шеңбер ретінде салынады.  171-сурет  **Зерттеу.** Егер А,В нүктелер шеңберлі диаметрлі қарама-қарсы нүктелері болса есептін шексіз көп шешуі болады. АВ хорда болса есептін шешімі болмайды. Басқа жағдайларда есептін бір шешімі болады.  **4-есеп** берілген А,В нүктелерінен өтетін және W1 шеңбермен жанасатын шеңбер салу керек (172-сурет)  **Талдау.** Іздеген шеңбер W2  дейік. Онда А мен В нүктелер W2 де жатады және W1 мен W2  жанасады. Т жанасу нүктесі болсын. Егер Т-ны тапсақ іздеген шеңбер Т,А,В нүктелерден өтетін шеңбер салынады. W1 мен W2  шеңбердің радикалдық өсі Т нүктеден ол шеңберге жүргізілген ортақ *а12* болады. Егер *а12* АВ=М нүкте белгілі болса  172-сурет  Т-ны W1-ге жанама жүргізу арқылы табуға болады. Ал, М қосымша жүргізілген W3  шеңбермен W1 –дің радикалдық өсі *а13*пен АВ-ның қилысу нүктесі болады.  **Салу**. а) А,В нүктелерінен өтетін W1 шеңбермен қилысатын кез-келген W3 шеңберін саламыз.  б) W3 пен W1 дің қилысу нүктелерін бастыра *а13*түзуін жүргіземіз. Ол W1 мен W3  тің радикалдық өсі болады.  в) *а*13  АВ=М нүктені табамыз.  г) М нүктеден W1 шеңберге жанама жүргіземіз. Т жанасу нүктесі болсын.  д) Т,А,В нүктелерден өтетін W2 шеңберді саламыз. Сол іздеген шеңбер болады.  **Дәлелдеу**. М нүкте үш шеңбердің қос-қостан алғандағы радикалдық осьтерінең қилысу нүктесі болғандықтан, сол үш шеңбердің радикалдық центрі де болады.  Сондықтан MT2=MA⋅MB болады. Сөйтіп МТ түзуі W2 шеңберге де жанама болады. Ал, бұл W1 және W2 шеңберлер Т нүктеде жанасады деген сөз. Сондықтан W2 іздеген шеңбер болады.  **Зерттеу.** М нүктеден W1 шеңберге екі жанама жүргізуге болатындықтан есептің екі шешімі болады. А,В нүктелердің бері W1 шеңбердің ішінде екіншісі сыртыда жатса есептің шешімі болмайды.  **Салу есептерін геометриялық түрлендірулер жәрдемімен шешу.**  Көптеген салу есептерін шешуге геометриялық түрлендіру әдістерін үлкен табыспен қолдануға болады.  Салу есебін шешу барысында берілген немесе ізделінетін фигуралармен қатар олардан немесе олардың бөліктерінен қандайда бір түрлендіруді пайдалану нәтижесінде шыққан басқа фигураларды қарастыруға тура келеді. Оны салу оңайырақ болуы мүмкін. Ол фигураны салған соң оны кері түрлендіру арқылы ізделінетін фигура салынады.  Осы түрлендіруде түрлендірудің қандай түрі (қозғалыс, симметрия, параллель, жылжыту, бұру, ұқсас түрлендіру, т.б.) қолданылғандығына байланысты салу әдісі де осылай айтылады (мысалы, салудағы симметрия әдісі, параллель жылжыту әдісі, ұқсас түрлендіру әдісі т.б. аталады.)  **§36. Салу есебін шешуде қозғалысты пайдалану.**  Бұл әдіс, салу есебін шешу барысында салынған немесе салынбақ фигураларды, олардың бөліктерін қозғалыстың ыңғайлы түрі арқылы түрлендіріп салуға қолайлы түрге келтіруге мүмкін болатын жағдайларда қолданылады.  **36.1. Параллель жылжыту әдісі.** Салу есебін шешу барысында берілген фигураларды не олардың бөліктерін немесе ізделетін фигураны бір – біріне жақындатуға тура келеді. Осындай жағдайда параллель жылжыту әдісін қолданған жақсы нәтиже береді. Бұл әдіс әсіресе көпбұрыштарды салуда пайдалы. ­­Өйткені көпбұрышты параллель жылжыту арқылы олардан салуға мүмкіндік беретін элементтері белгілі үшбұрыш шығарып алуға болады. Содан соң қайта жылжыту арқылы ол үшбұрышты ізделетін фигураға айналдыруға болады.  **1-мысал.** Екі қарама–қарсы қабырғасы және 3 бұрышы берілген төртбұрышты салу керек.  **Шешуі**. Төртбұрышты салу үшін 2*п*-3=2·4-3=5 шарт берілуі керек. Есепте 5 шарт берілген (2 қабырға, 3-бұрыш).  **Талдау.** Ізделген төртбұрыш салынған дейік (173-сурет). Ондағы ВАD=*,* АВС=, АDС=, АD=*a*, ВС=b болсын. Егер ВС қабырғаны векторға параллель жылжытсақ ол АЕ жағдайға келеді де,  AED шығады. Мұның үш элементі белгілі:  АD=*a*, AE=b, EАD=ВАD-ВАE=ВАD-(180-CВА)=  *-*(180-)=*+*-180. Сол үш бұрышты салып, оның АЕ қабырғасын векторға параллель жылжытса іздеген АBCD төртбұрыш шығады.  **Салу.** а) AD=*a* кесіндіні салып, А нүктеде AD мен жасайтын бұрышы *+*-180 болатын АЕ түзуін жүргізіп оның бойына АЕ=в кесіндіні саламыз.  б) Е нүктеден АЕ түзуімен бұрыш жасайтын ЕС сәулесін саламыз.  в) D нүктеден АD мен бұрыш жасайтын DС түзуін жүргіземіз. 173-сурет  г) ЕС мен DС сәуелерден жылысу нүктесін С дейік.  д)С нүктеден ЕА-ға, А нүктеден ЕС-ға параллель түзулер жүргізіп олардың қилысу нүктесін В десек, іздеген АBCD төртбұрыш шығады.  **Дәлелдеу.** АЕС=, AB//EC болғандықтан ЕAB=180- болады.  Сонда ВАD=ЕAD+ЕAB=(*+*)-1800+180-=болады.  Салу бойынша АDС= және AD=*a.* Параллелограмның қарама-қарсы қабырғасы болғандықтан BC=AE=b. Сөйтіп, салынған төртбұрыш есептің 5 шартында қанағаттандырады. Сондықтан AВСD іздеген төртбұрыш болады.  **Зерттеу.** Есеп шешуі үшін берілген*+*+<4d және *,*,-ның әр қайсысы 2d дан кем болуы керек. Үшбұрыш AЕD салыну үшін AD+AE>ED>/AD-AE/ яғни a+b>ED>a-b болуы керек.  Жоғарыда айтылған салулардың барлығы бірмәнді орындалады. Сондықтан есептің бір шешімі болады.  **2-мысал.** W1(О1, r1), W2(О2, r2) екі шеңбер, *l* түзуі және m кесінді берілген. *l* түзуіне параллель болатын. m-ге тең болатын бір ұшы W1(О1, r1), екінші ұшы W2(О2, r2) шеңберде жататын кесінді салу керек. (174-сурет)  **Талдау.** Есеп шешілген, ізделінген АВ кесінді салған дейік. Егер жазықтықты векторға паралель жылжытсақ, W1(О1, r1) шеңбер W3(О3, r1) шеңберге көшер еді, ал А нүкте В нүктеге көшер еді. Сондықтан В нүкте W2(О2, r2) шеңберде жатар еді. Сөйтіп АВ кесінді салынар еді.  **Салу:** а) *l* түзуіне СD=m кесіндіні өлшеп саламыз.  б) О1 нүктені векторға параллель көшіреміз, яғни О1 нүктеден *l* түзуіне параллель жүргізіп, оның бойына О1О3=CD=m кесіндіні өлшеп саламыз.  в)W3(03, r1) шеңберін саламыз.  г) W3,W2 шеңберлердің қиылысу нүктесі В-ны табамыз.  д) О3 пен В-ны жалғаймыз.  174-сурет  е)О1-ден О3В-ға параллель жүргізіп оның шеңбермен қиылысу нүктесі А-ны табамыз.  А мен В жалғайтын АВ кесінді іздеген кесінді болады.  **Дәлелдеу.** СD=m етіп салынғандықтан О1О3//CD, О1О3=CD болғандықтан О1О3=m және О1О3// *l* болады. Ал, О1А мен О3В әрі тең, әрі параллель болғандықтан О1АВО3 параллелограмм болады. Сондықтан АВ// О1О3//*l* және AB=m болады. Ал, А нүкте W1 шеңберде жатқандықтан, В нүкте W3 шеңбер және W2 шеңбердің қиылысу нүктесі болғандықтан В нүкте W2(О2,r2) шеңберге жатады. Сөйтіп АВ кесінді есеп шартын қанағаттандырады, іздеген кесінді болады.  **Зерттеу.** Жоғарыда келтірілген *a-е* салулардың барлығыда бірмәнді орындалады. Сондықтан W3 шеңбер W2 шеңбермен қиылысса онда есептің екі шешімі болады: А,В және А1В1 кескінділер. Егер олар жанасса бір шешімі болады. Ал қилыспаса шешімі болмайды.  **36.2.** **Симметриялық әдісі.**  Салу есебін шешуде, кейде ол есепте берілген L1 сызықпен бақса берілген L2 сызықты түрлендіруден шыққан L21 сызықтың қиылысу нүктесін табуға келтіруге болады. Мұндай салу есептерін шешуде түрлендірудің осьтік симметрия түрін пайдаланған ұтымды болады.  **1-мысал.** *а,в,с* үш түзу берілген. Бір диогоналы *а* түзуінде жататын және берілген m кесіндіге тең болатын, қалған 2 төбесінің бірі *в*, екіншісі с түзуінде жататын ромбы салу керек. (175-сурет)  **Талдау.** Есеп шешілген, ромб салынған болсын:  АС=m, Bb, Dc, A1cа. Сонда ромбыны салу оның тағы бір (мысалы D төбесін) төбесін салуға тіреліп тұр. Өйткені АС=m кесіндіңі салу арқылы А,С төбелері салынды. Егер енді D төбе белгілі болса, онда АС-ға қарағанда D-ға симметриялы нүктені салса В табылады.  175-сурет  Егер В нүкте АС-ға қарағанда D нүктеге симметриялы болса, онда D нүкте *в* түзуге симметриялы *в*1 түзуде жатуы керек. Сондықтан ол с мен *в*1 түзулердің қилысу нүктесіболады.  **Салу:** Төмендегі салуларды тізбектей орындаймыз.  а) *в* түзуге *а*-түзуіне қарағанда симметриялы болатын *в*1 түзуді саламыз.  б) с және *в*1 түзулерінің қиылысу нүктесі D-ны табамыз.  в) D нүктеден *а* түзуіне перпендикуляр болатын DВ түзуін жүргіземіз.  г) DВ және *в* түзулердің қиылысу нүктесі В-ны табамыз.  д) DВ мен *а* түзулердің қиылысу нүктесі О-ны табамыз.  е) О нүктеден *а* түзуіне ОА=m/2, ОC=m/2 кесінділерін өлшеп салып А мен С нүктелерін саламыз.  Сонда АВСD іздеген ромбы болады.  **Дәлелдеу.** Салу бойынша АС=AO+OC=m/2+m/2=m және АСа, Dс, B*в*. *в*1 мен *в* түзулер *а* түзуіне қарағанда симметриялы болғандықтан, D*в*1 және DB*a* болғандықтан В мен D нүктелер симметриялы болады. Сондықтан ОВ=ОD болады және BDАС болады.  Демек ABCD ромб болады (Диагоналдары бір-біріне перпендикуляр және олар бірін-бірі қақ бөліп) және есептен шарттарын қанағаттандырады.  Сондықтан ABCD іздеген ромб болады.  **Зерттеу.** *в*-ға симметриялы *в*1 түзуі с түзуіне параллель болса есептің шешімі болмайды (D табылмайды.)  Түзулер *в*1=С (беттесе) есептін шексіз көп шешімі болады. *в*1 мен C түзулер *а* түзуден тыс нүктеде қилысса есептің бір шешімі болады, ал *а* түзуінде қиылысса есептін шешуі болмайды.  **2-мысал.** Берілген А0,В0,С0 нүктелер қабырғаларының қақ ортасы болатын үшбұрыш салыңдар.(176-сурет)  **Талдау.** Есеп шешілген, ABC іздеген үшбұрыш болсын. Одан оның төбелері А0,В0,С0 нүктелерге қарағанда сәйкесінше В және С, С мен А, А мен В симметриялы болады.  Сондықтан симметрия ұғымын пайдалаланып, кез-келген D нүкте алып, DС0 түзінің бойына DС0=С0Е, ЕВ0 түзуін жүргізіп оның бойына ЕВ0=B0F, ҒА0 түзуінің бойына ҒА0=А0N кесінділерін өлшеп 176-сурет  салсақ, DN кесінді В нүктеден өтеді және сол нүктеде қақ бөленеді. Себебі симметрия ережесі бойынша DB=AE, DB//AE; , AE=FC, AE//FC; FC=BN, FС//BN. Бұлардан DB=BN, DB//BN.  **Cалу.** а) D нүкте алып DС0 түзуге DС0=C0E, ЕВ0 түзуге ЕВ0=B0F, ҒА0 түзуге ҒА0= А0N нүктелерін салып D,N-ді қосамыз.  б) DN кесіндінің ортасы В-ны табамыз.  в) ВС0 түзуін жүргізіп, оның бойынан АВ0=С0A болатын А нүктесін саламыз.  г) АВ0 түзуін жүргізіп оның бойынан АВ0= В0С болатын С нүктесін саламыз. Сонда АВС іздеген үшбұрыш болады.  **Дәлелдеу.** Салу бойынша DB=AE=FC=BN, DB//AE//FC//BN. Сондықтан C0DB=C0AE болады, бұдан АC0= C0B. Осы сияқты AEВ0=В0FC, бұдан AВ0=В0C; СҒА0=N А0B, бұдан ВА0= А0C.  Демек А0В0С0 нүктелер AВС-ның қабырғаларының орталары. Сондықтан AВС іздеген үшбұрыш болады.  **Зерттеу.** А0В0С0 нүктелер бір түзудің бойында жатбаса есептін шешімі болады және ол біреу- ақ болады. Ал, ол нүктелер бір түзудің бойында жатса есептің шешімі болмайды.  **36-3. Бұру әдісі.** Салу есебін орындауда кейде фигураны немесе оның бір бөлігін бұрып жаңа фигура шығару және оның басқа фигураларымен байланысынан іздеген фигураны салу жолының байқалып қалуы жиі кездеседі.  **1-мысал.** Квадраттың центрі О және оның қарама-қарсы қабырғаларында жатқан Е, Ғ нүктелер бойынша сол квадратты салу керек.  177-сурет  **Талдау.** Есеп шешілген, ABCD квадрат салынған болсын ЕАВ, ҒDC қабырғаларда жатсын, О центр болсын. Е-ні басып өтетін түзу мен Ғ-ті басып өтетін түзулердің параллель екені белгілі. Егер ол түзулерді центр О-нүктеден 900-қа бұрсақ олар өзара қиылысып квадрат шығады.  **Салу.** а) Е нүктені бастыра *l*1 түзуін жүргіземіз.  б) Ғ нүктеден *l*1-ге параллель етіп *l*2 түзуін жүргіземіз.  в) О нүктеден *l*1 мен *l*2 перпендикуляр етіп m  түзуін жүргіземіз. Қиылысу нүктелері  K, N болсын. Сонда ОК=ON  г) KN=m түзуін О нүктеден 900-қа бұрамыз.  Содан *l*11, *l*21 өзара параллель түзулері шығады. Олардың қиылысу нүктелерін  *l*1∩*l*21=A, *l*1∩ *l*11=B, *l*11∩ *l*2=C, *l*2∩ *l*21=D десек ABCD іздеген квадрат болады.  **Дәлелдеу.** АВ//СD салу бойынша, КNК1N1 - 900-қа бұрғандықтан. Сол бұру ережесі бойынша *l*11⎢⎢*l*21 және *l*1⊥ *l*11, *l*2⊥ *l*21 ОК=ОК1=ОN=ОN1 жәнеКNК1N1 болғандықтан АВСD квадрат болады.  **Зерттеу.**Жоғарыда айтылған салулардың барлығы орындалады және бір мәнді орындалады.  **2-мысал.** а,b және оларда жатпайтын 0 нүктесі берілген. О нүктенің центрі етіп а,b түзелер мен қиылысу нүктелері арасындағы доғасы -ге тең болады. Шеңбер салу керек.  **Талдау.** Есеп шешілген W шеңбері сызылған дейік. (178-а сурет)  АОВ = болсын. Егер а түзуді 0 нүктеден бұрышқа a) 178-сурет b)  бұрсақ А нүкте В нүктеге келереді. Сондықтан В нүктені b түзу мен *а* түзуді бұрышқа бұрғандағы оның бейнесі *а1* пен қиылысу нүктесі ретінде салуға болады. Одан әрі (О,ОВ) шеңбер салыналды.  **Салу.** а) *а*ОТ түзуін жүргізіп, Т нүктені анықтаймыз. (178-б сурет)  б) ОТ-ны бұрышқа бұрамыз. Сонда ол ОТ1 ал *а* түзуі *а*1 түрге келеді.  в) *а*1∩*в*=B болсын.  г) (О,ОВ) шеңбер саламыз. Сол іздеген шеңбер болады. Ол *а* түзуді А нүктеде қисын.  **Дәлелдеу.** Егер В нүктені О нүкте айналасынан бұрышқа кері қарай бұрсақ *а*1 түзу *а* түзу жағдайына келеді, ал В нүкте А нүктеге келеді. Демек АОВ=болады.  **Зерттеу.** Есеп шартында бұрышқа бұру бағыты айтылмаған. Сондықтан *а* түзуді (ОТ кесіндіні) сағат тілі қозғалысы бағытында бұрышқа, оған кері бағыта бұрышқа бұруға болады. Сондықтан *а*/ және  *а*// екі түрлі түзу шығуы мүмкін. Олар параллель болмайды, арасындағы бұрыш 21800.  Егер *а*// -де, *а*/-ді *в*-ны қисса есептің екі шешуі болады.  Егер *а*/-пен *а*// -тің бірі *в*-ға параллель болса есептің бір шешуі болады.  Егер *а*/-пен *а*// -тің бірі *в*-мен беттессе есептің шешуі көп болады.  **§37. Салу есептернің шешудегі ұқсас түрлендіру әдісі**  Салу есептерін шешуге ұқсас түрлендіру әсересе гомотетияның қасиеттерін пайдалану көп кездеседі. Салу есептерін талдау барысында, келесі бір түрлендіруді пайдаланса салынбақ фигура Ғ шығатын басқа бір Ғ1 фигураны оңай салуға болатынын байқауға болады. Бұл әсіресе есеп шартына тек бірғана кесінді енген кезде көп кездеседі. Осындай жағдайларда ұқсас түрлендіруді (гомотетияны) қолдану нәтижелі болады.  Ұқсас түрлендіре әдісінің мәні мынадай. Алдымен іздеген Ғ фигураға ұқсас есепте берілген шарттардың тек біреуінен басқасын толық қанағаттандыратын Ғ1 фигураны салады. Содан соң есептін қалған бір шартын қанағаттандыратын және салынған Ғ1 фигураға ұқсас фигура ретінде іздеген фигура Ғ салынады. Салынған аралық Ғ1 фигураны берілген Ғ фигураға гомотетиялы етеіп салған дұрыс болады.  Бұл әдісті пайдаланғанда мыналарды есекру керек.   1. Егер екі фигура ұқсас болса, онда ұқсастық коэффиценті ол фигуралардың кез-келген сәйкес кесінділерінің қатынасына тең болады. 2. Егер *а,в,с,.*.. және *а1,в1,с1,*... ұқсас фигуралардың сәйкес кесінділері болса, онда ұқсастық коэффицент үшін .т.б. қатынастарды алуға болады.   Мысалдар қарастырайық.  **1-мысал**. Екі бұрышы мен периметрі бойныша үшбұрыш салу керек.  **Талдау.** Есепте екі бұрыш: , жәнебір кесінді Р берілген. егер үшбұрыш периметрі Р-ға тең болсын деген талапты ескермесек, онда екі бұрышының бірі , екіншісі болатын шексіз көп үшбұрыштар салуға болады.  Іздеген AВС салынған дейік. Мұндағы ВАС =, АСВ =, және АВ+ВС+АС=Р болсын (179-сурет)  АС-дан С1 нүкте алып СВ-ға параллель С1В1 кесіндісін салайық. Сонда AВС~AB1C1 болады. Сондықтан егер АС1+С1В1+В1А=P1 десек, онда (\*) болады.  АС түзуінін бойына АD=P кесіндісін өлшеп салып В1С1//ВС жүргізсек AВD~AB1D1  болады да (\*\*) болады. (\*) мен (\*\*) ден АD1=P1 болады.  **Салу:** а) Бір бұрышы В1АС1 =екінші бұрышы АВ1С1= болатын кез-келген AВ1С1 саламыз.  б) А нүктеден АС1 сәулеге АС1+С1В1+В1А=Р1 болатын кесінді саламыз. Ол AD1 болсын.  в) АС1 сәулеге А нүктеден Р кесіндіні өлшеп саламыз. Ол АD болсын. 179-сурет  г) D1B1-ге D-дан DB параллель түзуін жүргізіп В нүктесін саламыз.  д) В-дан В1С1//ВС жүргізіп С-ны табамыз. АВС іздеген үшбұрыш болады.  **Дәлелдеу.** ВАС = салу бойынша. Салу бойынша АВ1С1= және В1С1//ВС. Сондықтан АСВ=.  AВС-ның периметрін Ро десек, онда AC1B1~AВС-дан (\*\*\*), AD1B1~ADВ-дан Сонда (\*\*\*) мен -ден болсын Р0=P шығады.  Сонымен AВС-ның периметрі есеп шартында айтылған Р кесіндіге тең екен. Сондықтан ол іздеген үшбұрыш болады.  **Зерттеу.** AB1C1 салыну үшін +<180 болуы керек. Көрсетілген салулар бірмәнді орындалатындықтан есептің бір шешімі болады, ал +˃180 болғанда есептің шешімі болмайды.  **2-мысал.** Үшбұрыштың төбесіндегі бұрышы және табанымен сол табаңға жүргізілген биіктігінің косындысы берілген.  Сол шартты қанағаттандыратын тең бүйрлі үшбұрышты салу керек.  **Талдау.**  Есепте үш шарт берілген: 1- төбедегі бұрышы- болсын, 2-бүйір қабырғалары тең болу керек. 3-табаны мен биіктігінің қосындысы m-кесіндіге тең болуы керек.  Алғашқы екі шартты қанағаттандыратын шексіз көп үшбұрыш болады. Соның бірі A1BC1 болсындейік (180-а сурет), онда  A1BC1= және A1B=C1B.  Берілген үш шарттында қанғаттандыратын үшбұрышты, центрі В нүкте болатын, BA1C1-ға гомотетиялы болатын үшбұрыштар ішінен іздейміз.  BAC ізделінетін үшбұрыш болсын. Онда AC//А1С1 болады, BD биіктік болады.  180а-сурет  Осы гомотетияда А1 нүкте А нүктеге сәйкестенсе, онда D1 нүкте DС1 нүкте С нүктеге сәйкестенеді.  Осы A1BC1 үшбұрышты ABC-үшбұрышқа сәйкестендіретін гомотетия коэфиценті k-ны табайық. Шарт бойынша BD+AC=m.  A1BC1 –ны өзіміз салғандықтанBD1+A1C1=m1 табаламыз. Сонда коэффициент k= болады.  Осыны ескеріп A1BC1 арқылы ABC –ны салуға болады. (180-б сурет)  **Салу.** а)Кез-келген В нүктеден В= болатын бұрыш саламыз.  б) Оның қабырғаларынан ВА1=ВС1 болатын А1,С1 нүктелерді аламыз да А1С1 кесіндісін саламыз.  в) А1С1-ға етіп BD1 сәулесін жүргіземіз. Оның бойына D1Е1=A1C1 кесінді саламыз. Сонда ВЕ1=BD1+A1C1=BD1+D1E1=m болсын.  г) ВЕ1 сәулеге ВЕ2 =m кесіндіні өлшеп саламыз.  д) Е2 –ден Е1А1-ге параллель жүргізіп, оның ВA мен қиылысу нүктесі А-ны табамыз.  е) А нүктеден А1С1-ге параллель етіп АС-ны жүргіземіз. Сонда АВС іздеген үшбұрыш болады.  **Дәлелдеу.** Салу бойынша В бұрышы берілген бұрышына тең ВD1А1С1, АС//А1С1  180б-сурет  болғандықтан ВД⊥АС. Сондықтан ВД биіктік. Ал, ACB~A1В1С1 болғандықтан  Сондықтан , ал BD1+A1C1=m1 Демек BD+AC=m.  Сөйтіп AВC берілген үш шартты да қанағаттандырады. Сондықтан іздеген фигура болады.  **Зерттеу.** Барлық салулар бірмәнді орындалады. Сондықтан есептің тек бір шешімі болады.  **3-мысал.** Табанындағы екі бұрышы және Р периметрі бойынша үшбұрыш салу керек.  **Талдау.** Есеп шешілген, іздеген AВC болсын (181-сурет). Онда ВАС =*,*ВСА = және АВ+ВС+СА=P берілген параметр. Егер АВ-ны А нүктеден, ВС-ны В нүктеден бұрын АС жатқан түзуге көшірсек, А1С1=A1A+АС+СС1=AB+AC+BC=P болар еді және АА1В, С1СВ үшбұрыштар тең бүйірлі болғандықтан АА1В =, С1СВ = болады.  Бұлар AВC үшбұрышын салуға мүмкіндік береді.  **Салу.** а) А1С1=P кесіндіні өлшеп саламыз.  б) А1 нүктеден А1С1 мен бұрыш, С1 нүктеден бұрыш жасайтын түзулер жүргізіп олардың қиылысу нүктесі В-ны табамыз.  в) А1В-ның қақ ортасы А0 мен С1В-ның қақ ортасы С0-ды табамыз.  г) А0-дан А1В-ға, С0-дан С1В-ға перпендикуляр жүргізіп олардың АС түзумен қиылысу нүктелері А мен С-ны табамыз. Сонда AВC іздеген үшбұрыш болады.  **Дәлелдеу.** А1В-ның қақ ортасынан оған А0А перпендикуляр етіп жүргізілгендіктен А1А=AB болады. Дәл осы сияқты СВ=СС1 болады. Сондықтан А1А+АС+СС1=АВ+АС+СВ=P болады.  Үшбұрыштың сыртқы бұрышының қасиеті бойынша  ВСА = ВСА =  Демек AВC іздеген үшбұрыш болады.  **Зерттеу.** +<180 болғанда ғана есептің шешуі болады және шешім біреу-ақ болады. Өйткені б-салуда А1В, С1D түзулерді А1С1-дің екінші жағынан өлшеп салуға болады. Бірақ нәтижеде шығатын үшбұрыштар тең болады.  **4-мысал.** АВС үшбұрышқа іштей, сүйір бұрышы болатын екі төбесі үшбұрыш табаны АС-дан жататын, қалған төбелері бүйір қабырғаларда жататын ромбы салу керек. (182-сурет).  181-сурет  **Шешуі.**  Ромбының екі төбесі АС-да жататындықтан оның оған қарсы қабырғасы АС-ға параллель болады. Сондықтан салуды былайша жүргіземіз.  182-сурет     1. АВ-дан Ғ1 нүкте алып, ол нүктеден АС-ға параллель түзу және ол түзу мен бұрыш жасайтын Ғ1Е1 түзуін жүргіземіз.Параллель түзуге Ғ1К1=F1E1 саламыз. К1-ген F1E1-ге параллель жүргізіп N1-ді саламыз. Сонда Ғ1К1N1E1 бір сүйір бұрышы , екі төбесі АС-да жататын ромбы болады.  1. АК1∩ВС=К нүктені салып, КҒ//К1Ғ1, КN//К1N1, EF//E1F1 жүргіземіз. Сонда ЕҒКN іздеген ромбы болады.   **Дәлелі.** ҒК//Ғ1К1, КN//К1N1, болғандықтан AҒК~AҒ1К1, AКN~AК1N1.  Сондықтан . Бұдан Е1Ғ1=F1K1=K1N1 болғандықтан ЕҒ=FK=KN=ЕN және сәйкес қабырғалары параллель болғандықтан ЕҒК=Е1Ғ1К1=. Сондықтан ЕҒКN іздеген ромбы болады. Есептің әруақытта шешуі болады және ол жалғыз-ақ болады. Өйткені салулар бірмәнді анықталады.  §**38.Инверсия және оны салу есептерін шешуге қолдану.**  **38.1. Инверсия және оның қасиеттері.**  **І.** Инверсия анықтамасы. Жазықтықта О центрлі, r радиусты I(О,r) шеңбер сайлап алынсын. Жазықтықтың, О нүктеден өзге, әрбір М нүктесіне сол жазықтықтан ОМ сәуледе жататын және  ОМ·ОМ/=r2 (38-1)  болатын М/ нүктесін сәйкестендірейік . Бұл сәйкестік жазықтықта өзара бірмәнді түрлендіру болады. Бұл түрлендіруді I(О,r) шеңберге қарағандағы инверсия немесе жайғана инверсия дейді.  I(О,r)-инверсия шеңбері О инверсия центрі. r2 инверсия дәрежесі делінеді. М/ нүктені М нүктеге инвертті нүкте дейді. ОМ·ОМ/=r2-тан ОМ/·ОМ=r2  болатындықтан М нүкте М/ кеинвертті болса, М/-тен М-ге инвертті болатыны, яғни инверсия өзара қайтымды сәйкестік болатыны шығады.  **ІІ.** Инверсия шеңбері үшін О мен r тұрақты (өзгермейтін)болғандықтан (38-1)–ден инверсия шеңберінің ішкі бөлігін құрайтын нүктелер шеңбердің сыртқы нүктелеріне, ал сыртқы нүктелер ішкі нүктелерге бейнеленетіні, шеңбер бойындағы нүктелер өзіне-өзі инвертті болатыны шығады.  М  Т1  Т2  W  J  O  O1  M1  **.**  **.**  **.**  **.**  183 - сурет  I(О,r) инверсия шеңбері және одан тыс (сыртында) жатқан М нүктесі берілсе. Ол нүктеден шеңберге МТ1, МТ2 екі жанама жүргізуге болады. Т1 және Т2 нүктелер ОМ-диаметрі болатын W(O1,O1M) шеңбермен I(О,r) шеңбердің қиылысу нүктесі болады (183-сурет). Сондықтан ОМ⊥Т1Т2 болады.  ОТ1⊥Т1М болатындықтан ОТ1М тікбұрышты үшбұрыш болады. Т1М1 оның гипотенузасына түсірілген биіктігі болғандықтан ОМ/·ОМ= Оr2  болады. Мұны (38-1) мен салыстырсақ М нүктеге М/ нүкте және керісіншеМ/ нүктеге М нүкте инвертті болатыны шығады. Бұдан берілген нүктеге инвертті нүктені салу жолы шығады.  Шеңберден тыс жатқан М нүктеге инвертті М/  нүктені былайша салады.  1º ОМ сәулесін жүргізеді.  2º М нүктеден шеңберге ОТ жанама жүргізеді.  3º Жанасу нүктесі Т-дан ОМ-ға ⊥ жүргізіп, оның табаны М/  нүктені табады.  Сол М/  нүкте берілген М нүктеге инвертті нүкте болады. Егер М шеңбер бойында жатса, оған инвертті М нүктені табу үшін  1-ден, О М/ сәулесін жүргізеді.  2-ден, М/ нүктеден О М/ сәулеге ⊥ тұрғызып, оның шеңбермен қиылысу нүктесі Т-ны табады.  3-ден, Т нүктеден ОТ радиуске перпендикуляр (яғни І шеңберге Т нүктеден жанама) жүргізіп, оның ОМ/ сәулемен қиылысу нүктесі М–ді табады. Сол берілген М/  -ке инвертті нүкте болады.  **ІІІ.**Инверсияның аналитикалық өрнегін табу үшін координата жүйесінің басы үшін инверсия центрі О нүктесін аламыз. Сонда бұл координата жүйесіндегі О(о,о) болады. М(х,у) нүкте берілсін оған инвертті нүкте координаты М'(х',у') дейік.  Сонда мен векторлар коллинеар болатындықтан =λ болады. Бұдан координатаға көшсек х'=λx, у'=λy болып, векторлардың скаляр көбейтіндісі ·λ=xх'+yу'=r2 болады. Бұдан xλх+yλу=r2 болатындықтан λ= болады да, х'=; y'= (38-2)  Инверсия өзара қайтымды сәйкестік болатындықтан (38-2) ден  x=, y=, (38-3) болады.  Бұл (38-2), (38-3) формулалар инверсиясының аналитикалық өрнегі болады.  **Ескерту.** Инверсия центріне инвертті нүкте болмайды. Егер евклидтік жазықтық кеңейтілген жазықтық болса, онда центрге инвертті нүкте жазықтықтың меншіксіз нүктесі болады.  **1-теорема.** І(О,r) шеңбер мен инверсия берілсін. Инверсия центрінен өтпейтін түзу инверсия центрінен өтетін шеңберге, ал центрден өтетін түзу өзіне-өзі бейнеленеді.  **Дәлелі**. а) *а*-түзуі центрден өтпейтін болсын (184-сурет) және ол түзудің алынған координата жүйесіндегі теңдеу Ах+Ву+С=0 (1\*) болсын. Мұның І(О,r) инверсиядағы бейнесін табу үшін (х,у)-ті (38-3) пен анықталатын (х',у')-пен алмастыру керек. Сонда ++C=0 немесе ++С()=0 (2\*) Мұны былайша түрлендірсек  (х’+)2+(y’+)2= (3\*)  Ал, бұл центрі О1(), радиусы R= болатын шеңбердің теңдеуі және бұл теңдеуді инверсия шеңберінің центрінің координаталары (О,О) қанағаттандырады. Сондықтан центрден өтпейтін түзуге центрден өтетін шеңбер инвертті болады екен.  Берілген *а* түзудің бағыттаушы векторы ал ОО1 түзуінің бағыттаушы векторы өзара ортоганал. Өйткені олардың скаляр көбейтіндісі болады.  Демек *а* түзуі инверсия шеңбері І мен салынған W шеңбердің центрлерін қосатын ОО1 түзуіне перпендикуляр болады екен, яғни ОО1 ⊥*а*.  б) Берілген *а* түзуі І(О,r) инверсия шеңберінің центрінен өтсін. Онда ол түзудің (1\*) теңдеуіндегі С=О болады да оның бейнесі (2\*) мына түрге келеді. +=0, +=0. Бұл Ах+Ву=0 теңдеуімен бірдей. Сондықтан инверсия центрінен өтетін түзу өзіне–өзі бейнеленеді.  **2-теорема**. І(О,r) шеңбермен берілген инверсияда инверсия центрінен өтпейтін шеңбердің бейнесі центрден өтпейтін шеңбер болады және О нүкте бұл шеңберлердің центрлер сызығында жатады, ал центрден өтетін шеңбер бейнесі центрден өтпейтін түзу болады.  **Дәлелі.** Инверсия шеңбері І(О,r) болсын. W1(О1,r1) шеңберді қарастырайық. Бұл шеңбердің теңдеуі ++ Ах+Ву=0 (4\*) болсын.  Мұны былайша түрлендірейік (х+)2+(у+)2= (5\*)  Ал, бұл центрі О1(), радиусы R1= болатын шеңбер.  Мұндағы (х,у)-ты (38-3) бойынша (х/,у/) пен ауыстырсақ W1(О1,r1) шеңбердің бейнесі болатын W2 фигураның теңдеуін аламыз.  *Ықшамдасақ,*  *Мұны түрлендірсек*  Ал, бұл центрі О2(), радиусы R2= болатын W2 шеңберді анықтайды. Бұл теңдеуді инверсия центрінен координаталары (О,О) қанағаттандырмайды. Сондықтан W2  инверсия центрінен өтпейтін шеңбер. Инверсия центрі О(о,о), берілген W1 шеңбердің центрі О1(), бұл W1 шеңбердің бейнесі W2 шеңбердің центрі О2() болғандықтан , векторлардың координаталары пропорционал.  Сондықтан олар коллениар болады. Демек О,О1, О2 нүктелер бір түзудің бойында жатады.  Егер берілген W1 шеңбер, инверсия центрінен өтетін шеңбер болса, онда оның теңдеуіндегі С=0 болады да оның бейнесінің теңдеуі (6\*) мына түрге келеді. + +=0 немесе Ах/+Ву/+r2=0, ал бұл центрден өтпейтін түзу теңдеуі (бос мүше бар). Мұның бағыттауыш векторы векторлардың скаляр көбейтіндісі ·=0 болғандықтан О,О1,О2 нүктелерден өтетін түзу *а*/ түзуіне перпендикуляр болады.  **3-теорема**. Егер W1-шеңбер, не түзу болсын, ол W2 шеңберге инверсия центрінен басқа М нүктеде жанама, онда бұл инверсиядағы олардың бейнелері фигуралар М-нің бейнесі М/ нүктеде жанасады.  Өйткені W1 мен W2 фигуралар М нүктеде жанасса, онда М/ нүкте бейнелерге ортақ жалғыз-ақ нүкте болады. Демек олар М/ нүктеде жанасады.  **4-теорема.** W1, W2 сызықтардың (олар шеңбер, түзу болуы мүмкін) М нүктедегі олар арасындағы бұрышы мен бұл сызықтардың бейнелері тен М-нің бейнесі М/ нүктедегі олар арасындағы бұрышы тең болады. (Жанасу нүктесіндегі сызықтар арасындағы бұрыш нөлге тең болады).  **38.2. Инвертті фигураларды салу жолдары.**  Берілген инверсия шеңберіне қарағанда берілген нүктеге инвертті нүктені салу жолдарын білеміз. Енді түзуге, шеңберге инвертті болатын фигураны салу жолдарын қарастырамыз.  1-салу. Инверсия І(О,r) шеңбермен берілген. Осы шеңберге қарағанда берілген *а* түзуіне инвертті фигураны салу керек.  **Шешуі**. а) Егер түзу инверсия центрінен өтсе онда оның бойынан, алынған кез келген М нүктеге инвертті болатын М/ нүктеде сол түзудің бойында жатады.  Өйткені М-ге инвертті нүкте ОМ сәуледе жатуы керек. Сондықтан центрден өтетін түзу өзіне-өзі инвертті болады және түзудің шеңбердің ішінде жатқан нүктелері шеңбердің сыртында жатқан нүктелерге және керісінше бейнеленеді.  б) берілген *а* түзуі инверсия шеңберінің центрінен өтпесін.  W  a  J  T  M1  O1  O  M  184 - сурет  **1-жағдай**. *а* түзу І шеңбермен қиылыспасын (184-сурет) оған инвертті фигураны салу үшін:  1-ден, Инверсия центрі О нүктеден *а* түзуіне перпендикуляр түсіреді, оның табаны М нүктесі болсын.  2-ден, М нүктеге инвертті М/ нүктесін салады (ОТ жанама жүргізіп, жанасу нүктесі Т дан ОМ-ге ⊥ Т М/ жүргізеді).  3-ден, Диаметрі ОМ/ болатын шеңбер сызады. Осы шеңбер 1-теорема бойынша берілген *а* түзуіне инвертті фигура болады.  **2-жағдай.** Берілген *а* түзуі І инверсия шеңберіне жанама болсын, жанасу нүктесі М дейік.  Бұл кезде М-ге инвертті нүкте М-нің өзі болады да *а* түзуіне инвертті фигура ОМ диаметрі болатын (яғни І шеңберге М нүктеде іштей жанасатын) шеңбер болады.  **3-жағдай**. Берілген а түзу инверсия шеңбері І –ды А және В екі нүктеде қисын.  Бұл кезде А өзіне-өзі, В нүкте өзіне-өзі инвертті болады және түзу центрден өтпейтіндіктен оның бейнесі болатын шеңбер О нүктеден өту керек. Сондықтан инверсия шеңберін А,В нүктеде қиатын түзуге А,В,О үш нүктеден өтетін шеңбер инвертті болады.  **2-салу.** Инверсия І(О,r) шеңбермен берілген. Осы шеңберге қарағанда берілген W1(О1, r1) шеңберге инвертті фигураны салу керек.  **Шешуі.** **1-жағдай**. Берілген W1(О1, r1) шеңбер инверсия шеңбері І(о,r) мен қиылыспасын (185-а сурет)  B  W1  A  T2  O  O2  W2  J  A1  B1  T1  O1  *a*)  B  W1  A  T  O  O2  W2  J  B1  O1  *б)*  A1  T  W1  W2  O  J  A  *a*  B1  *a*  J  B  T  O  W1  г)  O1  в)  О1  W1  В  J  Д  Д1  А  О  W2  С1  С  д)  185 - сурет  Бұл кезде: 1. ОО1 түзуін жүргізіп, оның берілген W1 шеңбермен қиылысу нүктелері А мен В ны табады.  2. А және В нүктелеріне инвертті нүктелер А' пен В' салады.  3. Сонда диаметрі А' В' болатын W2(O2,r2) шеңбер берілген W1(O1,r1)  шеңберге инвертті шеңбер болады.  **2-жағдай**. W1(O1,r1) шеңбер инверсия шеңберіне жанасатын болсын (185-б сурет). Бұл кезде жанасу нүктесі А өзіне-өзі инвертті болады.   1. ОО1 түзуін жүргізіп жанасу А және қиылысу В нүктесін анықтайды. 2. В нүктеге инвертті В/ нүктені салады. 3. Сонда В/А диаметрі болатын W2(O2,r2) шеңбер берілген W1(O1,r1) шеңберге инвертті фигура болады.   **3-жағдай**. Берілген W1(O1, r1) шеңбер инверсия шеңбері І(о,r)–мен концентрлі болсын (185-в сурет).  Онда 1. О нүктеден кез келген *а* түзуін жүргізеді.  2. *а* түзу мен W1 шеңбердің қиылысу нүктесі А-ны табады.  3. А нүктеге инвертті А/ нүктесін салады.  Сонда берілген W1(O1,r1) шеңберге радиусы ОА/ центрі О болатын W2(O1ОА/) шеңбер инвертті шеңбер болады.  **4-жағдай**. Берілген W1(O1,r1) шеңбер инверсия центрінен өтсін (185-г сурет)  Бұл кезде: 1. ОО1 түзуі мен инверсия шеңберінің қиылысу нүктесі В-ны табады.  2. Табылған В нүктеге инвертті В/ нүктені табады.  3. В/  нүктеден ОО1 түзуіне перпендикуляр етіп *а* түзуін жүргізеді.  Сонда центрден өтетін W1 шеңберді4 бейнесі, 2-теорема бойынша центрден өтпейтін ОО1-ге перпендикуляр болатын *а* түзуі болады.  **5-жағдай**. Инверсия центрінен өтпейтін онымен екі нүктеде қиылысатын W1(O1, r1) шеңбер берілсін (185-д сурет)  Егер шеңберлер А және В нүктеде қиылысса, онда W1 шеңберге инвертті фигура сол қиылысу нүктелерінен өтетін шеңбер болады.  1. ОО1 түзуін жүргізіп, W1 шеңбердің  диаметрі қарама-қарсы СД нүктелерін табады. 2. С1Д нүктелерінің инвертті нүктелері С11, Д1 -ті табады.  Сонда А1В1С1/, Д/ төрт нүктенің үшеуінен өтетін шеңбер іздеген W2 шеңбер болады, яғни Д/С/ диаметрі болатын шеңбер болады.  **38.3. Салу есептерін инверсия жәрдемімен шешу**  Салу есептерін шешуге инверсияны пайдалану берілген немесе салынбақ фигураларды не олардың бөліктерін инверсиялық түрлендіру арқылы берілген есепті салынған немесе оңай салынатын салуларға келтіру жолымен жүреді.  Есепті шешуде инверсияның жоғарыда айтылған қасиеттерімен қатар, төмендегі тұжырымдарды да пайдаланған жөн.   * Инверсияда инвертті шеңберлердің центрі инвертті болмайды. * Инверсия шеңберіне ортогонал шеңбер өзіне–өзі түрленеді. * Өзіне-өзі түрленетін шеңбер инверсия шеңберіне ортогонал болады. * Инвертті екі пар (А мен А/ және В мен В/) нүктелерден өтетін шеңбер инверсия шеберіне ортогонал болады.   **1-есеп**. І(о,r) инверсияда М нүкте М/ нүктеге көшкен. Бұл инверсияда N нүктеге инвертті нүктені қалай салады.  **Шешуі.** Инверсия анықтамасы бойынша О,М,М/  нүктелер бір түзуде жатады (186-сурет). N нүкте бұл түзуде жатпасын.  а) ОN түзуін жүргізіп, оның бойына ОМ=OM1 болатын М1 нүкте салады.  б) ОМ түзуінің бойына ON=ON1 болатын N1 нүкте салады.  в) М/ нүктеден N1M1 -ге параллель жүргізіп ОN түзуімен қиылысу нүктесі N/ нүктені табады. Сол берілген инверсияда N нүктеге инвертті нүкте болады.  N|  М  М1  N  М1  N1  О  186-сурет  **Дәлелі**. ОМ=OM1, ОN=ON1 , О ортақ болғандықтан ∆ОМ1N1=∆OMN және ∆ОN1M1 ~ ∆ОM/N/ болады. Сондықтан OM1 : ON1=ON/:OM/ Бұдан OM1·OM/,= ON1· ON/, ON1/ OM/ = OM1/OM/ Ал, бұл М нүкте M/ нүктеге инвертті болса, N нүкте N/ -ке инвертті болады деген сөз.  Егер Nнүкте ОМ түзуінде жатса, онда ON·ON/= ОМ·OM/ болатындықтан OM:ON=ON/: OM/  болады да OM: ON=t десек ОМ түзуінің бойына ON/ =t·OM/  болатын N/ нүктені салу керек, яғни берілген ОМ, OM/, ON кесіндіге төртінші пропорционал кесіндіні салу керек.  **2-есеп**. Бір төбесі инверсия центрімен беттесетін, оған қарсы төбесі инверсия шеңберінде жататын квадратқа инвертті болатын фигураны салу керек. (187-сурет)  C  J  O  W2  W1  A1  B  A  C1  187-сурет  **Шешуі.** І-инверсия шеңбері ОАВС берілген квадрат болсын. Оның ОА, ОС қабырғалары центрден өтетін түзулерде жатыр. Сондықтан ол түзулер өзіне-өзі бейнеленеді, яғни АО қабырғаның бейнесі ОА сәулесінің А/ нүктеден ары қарайғы бөлігі болады. А/ нүкте А-ға инвертті нүкте. Ол W2(A,AB) шеңберге жатады. Сонда ОВ⊥А/В болу үшін АВ=АА/ болу керек.  Дәл осы сияқты С/ нүкте мен С инвертті және С/ нүкте W3(С,СB) шеңберге жатады.  В нүкте инверсия шеңберінде жатқандықтан ол өзіне-өзі инвертті болады.  АВ мен ВС қабырға инверсия центрінен өтпейді. Сондықтан 1-теорема бойынша олар жатқан түзуге инвертті фигура, центрден өтетін шеңберлер болу керек. Ол шеңберлер центрі ОА/ және ОС/ кесінділердің ортасы, яғни А1С нүктелер болу керек. Ал, АВ мен ВС кесінді болғандықтан бұлардың бейнелері ол шеңберлердің В мен А/ , В мен С/ нүктелері арасындағы доғалары болады. Сонда квадраттың ішкі бөлігі ОС/  сәуле С/В, ВА/ доғалар және ОА/ сәулелермен шектелген жазықтық бөлігі болады.  **3-есеп**. Берілген W1(O1,r1) шеңберге жанасатын және берілген *а* түзуге оның А нүктесінде жанасатын шеңбер салу керек.  **Талдау**. Есеп шешілген, іздеген W2 шеңбер салынған дейік (186a-сурет). Берілген W1 шеңбер, *а* түзу, ол түзуде жатқан А нүктеден және салынбақ W2 шеңбер жиынынан тұратын фигураны F дейік. А нүктеден берілген W1 шеңберге АТ жанама түзу (Т – жанасу нүктесі) жүргізейік те І(А,АТ) шеңберін салайық. Оны инверсия шеңбері үшін алайық. Осы инверсияға қарағанда F фигура инвертті F/ фигураны іздейік. Бұл инверсияның А-инверсия центрі болады. W1 шеңберге инвертті фигураны салу үшін АО1 түзуінжүргізіп, оның W1 мен қиылысу нүктелері Д1 мен Д2 -ні табамыз. Оларға инвертті , нүктелерді тауып ,диаметрлі шеңбер салу керек. Ол шеңбер десек, бұл W1 шеңбермен инвертті болады.  t  W21  J  W2  *a*  A  O1  O2  T  W1  K  188-сурет  D1  N  D2  W1  O1  W21  W21  W21  A  *a*  W1  O1  W21  A  *a*  *б)*  Q11  Q21  O2  *a)*  *в)*  Қиюшының қасиеті бойынша АД1·АД2=АТ2 . Демек Д1 мен Д2 нүктелер өзара инвертті болады. Сондықтан W1 шеңбер өзіне-өзі инвертті болады. Берілген *а* түзуі инверсия центрі А-дан өтетіндіктен бұл түзуде өзіне-өзі инвертті болады. (Сөйтіп W1=W1/, *а*=*а*/).  Ал, салынбақ W2 шеңбер инверсия центрінен өтетіндіктен оған инвертті фигура инверсия центрінен өтпейтін түзу болу керек және ол түзу АО2 –ге перпендикуляр болу керек және ол ке жанасу керек, өйткені W1 мен W2 жанасады.  Демек, ⎜⎜ *а*/(≡*а*) болу керек.  Бұлар іздеген шеңберді салуға мүмкіндік береді. Сонда F/ фигура шеңбер, *а*/ түзу және А нүктеден тұрады.  **Салу**. 1-іздеген W2 шеңбер берілген *а* түзуге оның А нүктесінде жанасу үшін оның центрі А нүктеден *а*≡ *а*/ -ға перпендикуляр t түзуін жүргіземіз.  2- О1 нүктеден t-ға параллель жүргізіп оның W1= шеңбермен қиылысу нүктесі К-ны саламыз.  3- К нүктеден t түзуге перпендикуляр түзу жүргіземіз. Ол болады.  4- КА мен W1 шеңбердің қиылысу нүктесі N-ді саламыз.  5- О1N мен t түзулердің қиылысу нүктесі О2-ні саламыз.  Сонда О2N радиусын О2 центрлі W2 шеңбер іздеген шеңбер болады.  **Дәлелдеу**. Салу бойынша АN·АK=АТ2 . Демек, N мен К нүктелері центрі А1 радиусы АТ болатын І(А,АТ) инверсия шеңберіне қарағанда инвертті болады. Ал, W1 шеңбер мен оның бейнесі беттесетіндіктен К=W/∩. Сондықтан W1 мен W2 шеңберлер К-ға инвертті N нүктеде жанасуы керек және түзу центрден өтпейтіндіктен оның бейнесі W2 шеңбер центрден өтуі керек.  ∆О1КN ∆О 2AN, О1К=O 1N болғандықтан О2N=O2A. Демек W2 іздеген шеңбер болады.  **Зерттеу**. Егер *а* түзуі W1 шеңберді қимасы онда есептің бірғана шешімі болады. Егер *а* түзу шеңбермен А нүктеде жанасса есептен шексіз көп шешуі болады (188-б сурет). Бұл кезде О1А түзуден кез келген О нүктесі-центр, радиусы ОА болатын шеңбер *а* түзуіне де, W1 шеңберге де А нүктеде жанасады. Егер *а* түзуі W1 қиатын болса және А нүкте қиылысу нүктенің бірімен беттесе, онда есептің шешуі болмайды. Қалған жағдайларда есептің шешуі біреу болады.  **38.4. Аполлоний есебі және оның жіктік түрлері.**  Аполлоний Перский біздің дәуірімізге дейінгі III – ғасырда өмір сүрген Грек математигі. Салуда негізгі объектілер болып табылатын нүкте, түзу, шеңбердің бірі болмаса бірі болатын үш фигура берілсін. Осы үшеуінеде жанама болатын W шеңберін салу керек болсын.  Бұл есеп - лардың нүкте, түзу, шеңбердің қайсысы болуына байланысты 10 есепке бөлінеді. Олар мыналар:   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  | |  | Нүкте | Нүкте | Нүкте | |  | Нүкте | Нүкте | Түзу | |  | Нүкте | Нүкте | Шеңбер | |  | Нүкте | Түзу | Түзу | |  | Нүкте | Түзу | Шеңбер | |  | Нүкте | Шеңбер | Шеңбер | |  | Түзу | Түзу | Түзу | |  | Түзу | Түзу | Шеңбер | |  | Түзу | Шеңбер | Шеңбер | |  | Шеңбер | Шеңбер | Шеңбер |   Нүкте түзуде (немесе шеңберге) жанама делінеді, егерде ол нүкте түзуде (шеңберде) жататын болса.  Сонда 1-мен үш нүктесінен өтетін шеңбер салу, 2-ші екі нүктеден өтетін және берілген түзуде жанама болатын шеңбер салу. 5-ші берілген нүктеден өтетін және берілген түзу мен шеңберде жанасатын шеңбер салу. 7-ші үш түзуде жанасатын шеңбер салу, 10-шы берілген үш шеңберде де жанасатын шеңбер салу есебі болады.  Соңғы есеп, яғни шеңберлерге жанама болатын шеңбер салу есебі. Аполлоний есебі делінеді, ал қалған 9 есеп оның шектік жағдайлары делінеді.  Бұл 9 есептің 6-ын инверисияны қолданып бір жолмен шығаруға болатынын көрсетуге болады, ол жағдайлар -ның ең болмағанда біреуінің нүкте болатын жағдайлары яғни 1-6 жағдайлар.  **1-есеп:** А нүкте және негізгі объектілер берілсін. А нүктеден өтетін мен -ға жанасатын шеңбер салу керек. Бұл есепті инверсия әдісін қолданып шеңбер, - түзу болатын жағдай үшін шешейік. А нүкте мен -да жатпасын.  **γ**  O  K1  A  K2  W1  J  W  С  T2  β1  O1  E  β  C1  E1  T1  **γ**1  189 - cурет  **Талдау:** Есеп шешілген іздеген W шеңбер салынған дейік. Берілетін -шеңбер, -түзу. А нүкте және ізделетін шеңбер W–дан тұратын фигураны F дейік. Центрі А болатын шеңберін қиятын шеңберді инверсия шеңбері үшін алайық (189 сурет). Осы инверсия шеңбері I-ға қарағанда F-ке инвертті F' фигураны анықтайық. Ол мыналардан тұрады: Салынбақ W- шеңбер инверсия центрі А нүктеден өтетіндіктен оған инвертті болатын фигура центрден өтетін W' түзу болады. Центрден өтпейтін центрден өтпейтін ' шеңбер инвертті болады. Центрден өтетін түзуге центрден өтетін ' шеңбер инвертті болады. Ал, W шеңбер шеңберге де түзугеде жанама болғандықтан W' түзу ' шеңбергеде, ' шеңберге жанасуы керек. А инверсия центрі болғандықтан оған инвертті нүкте болмайды. Егер W' түзуді салсақ онда Wшеңбер W' түзуге инвертті шеңбер ретінде салынар еді.  Сөйтіп есеп берілген ', ' екі шеңберге ортақ W' жанама жүргізуге тірелді.  **Салу:** 10 **А** нүктені центр етіп, шеңберді қиатын I шеңберін жүргіземіз. Т1, Т2 қиылысу нүктелері болсын. Оны инверсия шеңбері үшін аламыз.  20 А нүктесі берілген түзуіне перпендикуляр түсіреміз. С табаны болсын, оған инвертті С/ нүктені табамыз. АС/ диаметрі болатын шеңбер сызамыз. Ол түзу бейнесі болады. Оны' дейік.  30 шеңбер центрден өтпегендіктен оның бейнесі центрден өтпейтін шеңбер болады және инверсия центрі бұл шеңбердің центрлік сызығында жату керек. Сондықтан АО1 түзуден жүргізіп Е нүктені тауып, оған инвертті Е/ нүктені табамыз.  Ал, инверсия шеңберімен қиылысу нүктелері Т1 мен Т2 өздеріне өздері көшеді. Сондықтан шеңбердің бейнесі Т1, Т2, Е/ нүктелерді басып өтетін ' шеңбер болады.  40 ', ' шеңберлерге ортақ жанама жүргіземіз. Ол W/ түзуі болады. Ол W шеңбердің бейнесі болады.  50 W/ түзудің бейнесіW шеңберді саламыз. W/ түзуі ', ' шеңберлерге жанама болғандықтан W шеңбері түзуімен шеңберге жанама болады.  Дәлелдеуін салу мен қатар жүргізелік.  **Зерттеу**. Егер менфигураларына А нүктеден өтетін жанама шеңбер бар болса, /,' шеңберлерге жанасатын W/ түзуде болады. Ол түзу қанша болса есептің шешуі де сонша болады.  Егер А нүкте шеңбердің ішінде жатса және түзу шеңбермен қиылысбаса есептің шешуі болмайды. Егершеңбер мен түзу жанасып жатса және А шеңберден тыс жатса есептің бір шешімі болады. Егер түзумен шеңбер қиылысса, А шеңбер ішінде жатса екі шешімі болады. Жалпы бұл есептің 5 шешімі болады. Бұлар 190-шы суретте көрсетілген.  а)  γ  β  А  О  β  γ  в)  W1  W2  А  А  б)  β  γ  W  А  W3  W2  W1  β  γ  г)  γ  β  А  W3  W4  д)  W2  W1  190 – сурет  **а) жағдай**. А нүкте шеңбердің ішінде жатыр және мен қиылыспайды. Есептің шешімі болмайды. А нүктеден өтетін шеңбер -ны екі нүктеде қияды.  **б) жағдай.** мен жанасады. А нүкте оларда жатпайды. Бұл кезде тек бір шешім болады.  **в) жағдай.** мен қиылысқан және А нүкте шеңбер ішінде жатады. Бұл кезде есептің екі шешімі болады. Олар W1, W2 шеңберлер.  **г) жағдай.** Есептің үш шешімі бар. Олар W1, W2, W3 шеңберлер. Бұл жағдайларда А нүктесі түзуінде де, шеңберінде де жатады деп алдық.  А нүкте:  а) мен-ның бірінде жатуы мүмкін.  б) екеуінің қимасында жатуы мүмкін.  а) жағдайында мен екі нүктеде қиылысып, А сол нүктенің бірі болса, есептің шешімі болмайды, ал А нүктесі жанасса шексіз көп шешімі болады.  б) жағдайда жоғарыда қарастырылған жалпы жағдаймен бірдей болады.  **2 – есеп.** (Аполлоний есебі) W1 (O,r1), W2 (O2,r2), W3 (O3,r3) үш шеңберге де жанама болатын шеңбер салу керек. Шешуі: r1,<r2, r,<r3 дейік. (191 суретте). Іздеген шеңбер W(O,r) болсын. О2 нүктені центр етіп r2-r1 радиуспен V3 шеңберін жүргізейік. О нүктені центр етіп r+r, радиуспен V1 шеңберін жүргізейік. Бұл шеңбер W1-дің центрінен өтіп, V2 мен V3 шеңберлерге жанасар еді.  Сонымен салу былайша жүргізіледі.  O2  Т3  W3  V3  О3  О  К2  Т2  W2  V2  V1  W  К1  К3  191 - сурет  W1  О1   1. V2(O2, r2-r1) шеңбер саламыз. 2. V3(O3,r3-r1) шеңбер саламыз. 3. O1 нүктеден өтетін V2, V3 шеңберлерге жанасатын V1 шеңберін саламыз. Оның центрі О, радиусы R болсын. 4. O1O∩ W1=K1, O3O∩ W3=T3, OO3∩W=K3,OO2∩W=K2, OO2∩V2=T2. 5. W (O,OK1) шеңберін саламыз. Осы іздеген шеңбер болады.   **Дәлелдеу:** Салу бойынша K1 ∈W1, K∈W, K2∈W, K3∈W жатыр. Енді K2 –нің W2–де, K3-тің W3-те жататынын дәлелдеу керек, яғни О2К2=r2, О3К3=r3, екенін дәлелдеу керек.  О2К2=O2T2+T2K2=r2-r1+r1=r2; O3K3=O3T3+T3K3=r3-r1+r1=r3.  Демек W шеңберде жататын К2, К3 нүктелер сәйкесінше W2,W3 шеңберлерде де жатады екен. Демек W шеңбер W2 шеңбермен К2 нүктеде, W3 шеңбермен К3 нүктеде жанасады, ал W мен W1 шеңберімен К1 нүктеде жанасатыны салу бойынша рас. Сондықтан W шеңбер іздеген шеңбер болады. Сөйтіп үш шеңберге жанасатын шеңбер салу бір нүктеден өтетін және берілген екі шеңберге жанасатын шеңбер салуға тіреледі екен. Бұл алғашқы 1-есептің бір түрі.  Берілген шеңберлердің өзара орналасу тәртіптеріне қарай есептің бірнеше шешімі болуы мүмкін.  Егер үш шеңбердің бірі қалған екеуінің бірінің ішінде жатса, есептің шешімі болмайды. Олар концентрлі болсада, есептің шешімі болмайды (192-а сурет). Егер үш шеңбер бір нүктеде бірімен-бірі жанасатын болса, есептің шексіз көп шешімі болады. (192- Б сурет). Қалған жағдайларда есептің шешімі 1-ден 8-ге дейін болуы мүмкін.  Мысалы 192-в суретте: W1,W2,W3 үш шеңбер өзара қиылысып жатыр. Бұл кезде есептің 8 шешімі (1 – 8 шеңберлер) болады. Ал 192-г суретте үш шеңбер қос-қостан жанасып жатыр, бұл кезде есептің екі шешімі болады. Олар 1, 2 шеңберлер.  W3  W2  W1  б)  1  2  3  4  5  а)  W3  W3  W1  W2  W1  2  1  W2  7  5  8  4  3  6  в)  2  W1  W2  W3  1  г)  192 - сурет  **3-есеп.** W шеңбер, ол шеңберде жатқан А нүкте және ДС хорда берілген. А нүктеден ДС хорданы АЕ·АВ=m2 болатындай Е нүктеде қиятын АВ түзуін (В нүктеде жататын нүкте) жүргізу керек. (193 сурет), m- берліген кесінді.  B  N  C  D  W  J  M  A  E  193-cурет  **Шешуі:** I(A, m) шеңбер жүргізіп, оны инверсия шеңбері үшін алайық. Ол W шеңберді M, N нүктелерде қисын. Онда бұл инверсияда W шеңберге MN түзуі инвертті болар еді. (Центрден өтетін шеңберге центрден өтпейтін түзу инвертті болады). MN∩СД=Е нүктеде қиылыссын. АЕ∩W=В болсын. Сонда АВ іздеген түзу болады. Өйткені Е мен В инверсия шеңбері I(A,m)- ге қарағанда инвертті.  Сондықтан АЕ·АК= m2  Егер А нүкте не Д, С нүктемен беттессе есептің шешімі болмайды. Өйткені бұл кезде АК мен СД беттеседі.  Егер инверсия шеңбері W шеңберді СД нүктеде қиса, онда АД=АС=m болады да АЕ·АВ=m2 болу үшін АК диаметрі болу керек. Есептің бір шешімі болады. Егер инверсия шеңбері W шеңбері мен жанасса немесе қиылысбаса есептің шешімі болмайды. Өйткені К нүктеде жанасса А мен К диаметрлі қарама-қарсы нүкте болады да АЕ·АВ‹ m2 болады. Өйткені АВ=m, АЕ<m. Ал I мен W шеңберлер қиылысбаса АЕ·АВ< m2 болады. Өйткені бұл кезде АВ< m, АЕ<m.  **§39. Салу есептерін шешудің алгебралық тәсілі.**  Салу есептерін шешудің алгебралық тәсілінің мәнісі төмендегідей. Салынбақ F фигураны салуды қандайда бір х кесіндіні салуға алып келеді. Қажетті теоремаларды пайдалана отырып бұл кесіндінің ұзындығын берілген кесінділердің ұзындықтары арқылы өрнектейтін x=f(a,b,c,…) формуланы анықтайды. Сол фигураға сүйене отырып осы ұзындыққа сай келетін кесіндіні салады. Осылайша салынған кесіндіні пайдалана отырып ізделінетін F фигураны салады.  **39.1. Формула арқылы берілген кесінді**  Есеп шартында *а,в,с, ... l* кесінділері беріліп, бұл кесінділердің ұзындықтарынан x=f(a,b,c,…l) (39-1) формула жасалған болсын.  Бұл өрнек К дәрежелі біртекті өрнек делінеді, егерде f(at,bz,ct,…,lt)=tк f(a,b,c,…,l) (39-2) болса. Бұл К=1 болғанда бір дәрежелі біртекті өрнек болады.  Мысалы *x=a+2b-3с* өрнегі *at+2вt-3сt=t(a+2b-3с)* болатындықтан 1 дәрежелі біртекті өрнек.  *x=а2+3в2* өрнегі 2 дәрежелі біртекті өрнек болады. (39-1) формуламен анықталатын *х* қандай жағдайда әртүрлі өлшеу бірлігінде тек бір ғана кесіндінің ұзындығын өрнектейді деген сұрақ туады. Оған мына теорема жауап береді.  **1- Теорема.** Берілген а, в, ...,l кесінділердің ұзындықтары арқылы (39-1) формуламен анықталған х кез келген өлшем бірлігінде бір тек бір ғана кесіндінің ұзындығын анықтау үшін f(a,в,...l) бір дәрежелі біртекті өрнек болуы қажетті және жеткілікті.  Қажеттілігінің дәлелі: m- бірлік кесінді болсын. Осы бірлік кесінді (бірлік өлшем) кезіндегі *а, в, ...,l* кесінділердің ұзындықтары а, в, ...,l болсын, ал бірлік кесінді үшін басқа m/ кесінді алған кездегі олардың ұзындықтары а', в', ..., l' болсын. Онда a'=ta, в'=tв, ...l/=tl болады да x'=f (a', b', …, l')=f(ta, tв, …, tl)=tf(a,в,…,l) болар еді. Шарт бойынша х пен х' сандары бір ғана х кесіндінің ұзындығын анықтайды. Сондықтан х'=tх болады. Яғни f(ta, tb, …, tl)=tf(a,b, …, l). Сөйтіп f(a,b, …, l) бір дәрежелі біртекті өрнек болады.  Енді керісінше f(a,b, …, l) үшін f(ta, tb, …, tl)=tf(a,b, …, l) болсын. ã, в, ..., l кесінділердің m, m', бірлік кесінділердегі ұзындықтары болатын сандар a'=ta, в'=tв, …, l'=tl теңдікпен байланысатындықтан x'=f(a', b', …, l')=f(ta, tb, …, tl)=tf(a,b,…,l) болады. Демек х пен х/ сандары бір кесіндінің ұзындығын анықтайды.  **39.02. Қарапайым формуламен берілген кесінділерді салу.**  Формула арқылы берілген кесіндіні циркуль және сызғыш жәрдемімен, егер ол кесіндінің ұзындығы берілген кесінділердің ұзындықтары арқылы санды рациональдық амалдармен (қосу, алу, көбейту, бөлу, арифметикалық квадрат түбір табу) және рационал сандармен өрнектеуге болатын жағдайда ғана салуға болады.  Мектеп геометрия курсында циркуль және сызғыш жәрдемімен төмендегі формулалармен берілген кесінділер жолы қарастырылады.  10 х=а±в Түзу бойына *а* кесіндіні, оның келген жерінен *в* кесіндіні  өлшеп салады.  20 х=а:m Мұндағы m, n сандар, а- кесінді. Оны алдымен mа (m рет а  кесіндіні салу) кесіндіні салу, содан соң оны n- ге бөлу  жолымен салады.  30 х= (мұндағы а кесінді, m- сан). АК=а кесінді m(=5)- ге бөлу үшін  АК мен кез келген бұрыш жасайтын в түзуін жүргізіп оның  бойына кез келген t кесіндіні m рет өлшеп салып,  табылған 1,2,3,4,5, ..., m нүктелерінің соңғысын В- ға қосып,  қалған бөлу нүктелерінен mB- ға параллель түзулер жүргізеді.  Сонда АА1=A1A2=A2A3=A3A4=A4Вболады.  **Салу жолы 194- суретте көрсетілген**  A  1  2  3  4  A1  A2  A3  A4  5=m  194-сурет  A  B  E  C  D  c  a  x  b  195-сурет  40  х=. Салу жолы 195-суретте көрсетілген. 195-суретте с:*а*=*в:х*,  х=. Мұнда ВЕ⎟⎟СД.  50  Салу жолы 196- суретте көрсетілген. АВ=а+в диаметр болатын  шеңбер сызылып АВ⊥СД жүргізілген. Сонда СД=х болады.  (мұнда АС=*а*, СВ=*в, а:х=х:с).*  A  B  D  C  b  a  0  x  196-сурет  A  B  C  a  b  197-сурет  60 Салу жолы 197-суретте берілген СА=*а*, СВ=*в* және АССВ.  АВ=*х* болады АВ2=АС2+СВ2  70 Салу жолы 198-суретте берілген. Шеңбер диаметрі АВ=*а*,  катет АС=*в*, СВ=*х*. Сонда ВС2=АВ2-АС2 болады.  сурет  Басқа формуламен берілген кесінділерді салу жолын осы формулаларға келтіруге болады.  A  B  C  a  b  x  198-сурет  **1-мысал**  *х =а* (*п*–натурал сан, *а*-кесінді). Егер болып жіктеме деуге болады. Бұл 50 салу.  Егер болса болады. Бұл 60 салу.  **2-мысал** . Алдымен кесіндіні салады. Содан соң кесіндіні салады (бұлар 40 салулар).  **3-мысал** болса болады. Сонда кесінді . Содан сан кесінді салынады. Бұлар 60,70,50 салулар.  **4-мысал**  болса, алдымен . Содан соң салынады. Сонда шығады саламыз. Одан сан салып, ең соңынды салынады.  **5-мысал** Өлшем бірлігі l болған кездегі ұзындығы санға тең х кесіндісін салу керек. Мұны жуықтап тауып, оны 5-ке қосып, шыққан санның жуықтап квадрат түбірін тауып, l бірлік өлшемді сонша рет қайталап салу арқылы есепті жуықтан шешуге болады.  Кесіндіні дәл былайша салуға болады. деуге болатындықтан кесінділерді тізбектеп саламыз.  **6-мысал**  бұл өрнек 1-дәрежелі берітекті өрнек сондықтан мұныда циркуль және сызғыш жәрдемімен салуға болады. Мұны былайша түрлендіріп жазуға болады.  сонда  кесінділерді тізбектей саламыз.  **39.3. Салу есебін шешудің алгебралық тәсіліне мысалдар.**  **1-есеп.** АВС үшбұрышы берілген. Оның табанына, бұл үшбұрыш ауданынан ауданы 2 есе кіші болатын үшбұрыш қиятындай етіп, параллель түзу жүргізу керек.  **Талдау.** Есеп шешілген іздеген түзу жүргізілген болсын (200-сурет). Ол бүйір қабырғалар мен А1,С1 нүктелерде қиылысын.  Сонда болсын.  А  А1  В  С  С1  l  200-сурет  түзуі салынады, егер ВА1 кесінді салынса, ВА1=*х* дейік.  Сонда ~ болғандықтан болу керек. Бұдан (\*) х-тің саламыз.  **Салу.** а) , мұндағы в0 салу бойынша х1 салынады.  б) х1 кесіндіні қақ бөліп *х*-ні табамыз.  в) ВА сәулесіне ВА1=х кесіндіні өлшеп саламыз.  г) А1 нүктеден АС-ға параллель жүргізіп оның ВС мен қиылысу нүктесі А1-ді салсақ, іздеген түзуі – А1С1 түзуі шығады.  **Дәлелдеу**. Салу бойынша . Сондықтан ~  Өлшеп салуымыз бойынша Үшбұрыштардың ұқсастығынан . Демек, іздеген түзу болады.  **Зерттеу.** Барлық жоғарыда орындалған салулар бір мәнді орындалады. Сондықтан есептің бір ғана шешімі болады.  **2-есеп.** Берілген екі нүктеден өтетін және берілген түзуге жанасатып шеңбер салу керек.  A  B  W2  W1  L1  L2  0  d  E  201-сурет  **Талдау.** А мен В нүктелер түзуі берілген (201-сурет). Есеп шешілген іздеген шеңбер W1 салынған дейін. Онда бұл шеңбер А1В нүктелерден өту керек және түзуіне оның бір нүктесінде (мысалы Е нүктеде) жанасу керек. Сол жанасу нүктесі Е салынса, онда центр О табылады. Ал, Е табылады егерде АВ∩ = Д мен Е-ні қосатын ДЕ кесінді табылса. Сонымен есепті шешу ДЕ кесіндісін салуға тірелді.  Қиюшы мен жанаманың қасиетті бойынша ДЕ2=ДВ⋅ДА болады. Ал, түзуі, А мен В нүктелері салынып қойылғандықтан ДВ=*в*, ДА=*а* кескінділер белгілі. Сонымен ДЕ2=*а⋅в* формула бойынша ДЕ-ні салуға болады.  **Салу.** а) АВ = Д нүктесін саламыз.  б) ДВ⋅ДА=ДЕ2, *а⋅в*=ДЕ2=*х2* бойынша ДЕ=*х* кесіндіні табамыз.  в) Д нүктесінен түзуі бойына ДЕ=*х* кесіндіні өлшеп салып Е және Е1 нүктелерді табамыз.  г) Е нүктесін түзуге перпендикуляр яғни l1 түзуін жүргіземіз.  д) АВ кесіндінің қақ ортасы Т нүктені тауып сол нүктеден АВ-ға перпендикуляр етіп 2 түзуін жүргіземіз.  е) 1 2 =0 іздеген центр болады.  ж) О центрлі ОА радиусты W1(О,ОА) шеңбер жүргіземіз. Сол іздеген шеңбер болады.  **Дәлелдеу.** W1 шеңберді ОА радиуспен сызғандықтан және О нүкте 2 түзуде жататындықтан (яғни АТ=ТВ болғандықтан) Ол А нүктесінде, В нүктесінде басып өтеді.  Салу бойынша ДЕ2=ДВ⋅ДА болғандықтан ДЕ түзуі А мен В -дан өтетін шеңберге жанама болады. Сөйтіп W1 шеңбер мен шартын қанағаттандырады. Демек іздеген шеңбер болады.  **Зерттеу.** ДЕ2 =АВ⋅АД –ны Д нүктеден өлшеп салу екі жолмен іске асады Е және Е1 нүкте шығады. Егер Е1 ден -ға перпендикуляр түзу жүргізіп оның 2 мен қиылысу нүктесі О1-ді тауып, W2(О1,О,А) шеңбер жүргізссе бұл шеңберде есеп шартын қанағаттандырады. Сондықтан есептің екі шешімі болады.  Егер А мен В нүктелердің екеуінде түзуінде жатса немесе екеуі түзудің екі жағында жатса, есептің шешімі болмайды. Егер екі нүктенің түзуде біреуі жатса, онда есептің бір шешімі болады. Ол шеңбердің центрі, егер А жатса, -ға А нүктеде жүргізілген перпендикулярмен АВ кесіндінің қақ ортасынан жүргізілген перепендикулярдың қиылысу нүктесі болады.  **39.4. Квадрат теңдеу түбірлермен салу.**  1. (39-3) квадрат теңдеу берілсін. Мұндағы *а, в* кесінді ұзындықтары, сондықтан а>0, в>0 болады.  Теңдеуді шешсек. (39-3а)  Түбірден -ден кіші сан шығады. Сондықтан бұл кезде болады. Бірақ кесінді ұзындығы теріс сан болмайды. Демек (39-3) түрдегі квадрат теңдеудің оң шешімі болмайды.  Сондықтан ол теңдеудің түбірлерін салуға болмайды.  2. (39-4) квадрат теңдеу берілсін. Оның шешімі:  (39-4а)  бұл кезде де түбір астынан ден аз сан шығады да болады.  а) Ал, түбір шығу үшін болу керек. Екі түбірі болады. Демек екі шешімі болады.  б) Егер *а=2в* болса, х1=х2=болады. Түбір біреу-ақ болады. Сондықтан бір шешімі болады.  в) *а<2в* болса, *х1,х2* - Комплекс сандар болады да, теңдеудің нақты шешімі болмайды.  Енді осы түбірлерді циркуль және сызғыш жәрдемімен салу жолын қарастырайық.  10 Катеті СВ=в, гипотенузасы АВ= болатын АСВ тікбұрышты үшбұрыш саламыз. (202 сурет)  А  В  С  D  w  202-сурет  20 W(А,АС) шеңбер саламыз  30 W(А,АС) шеңбер мен АВ гипотенуза жатқан АВ түзуінің қиылысу нүктелері Е мен Д –ны белгілейміз. Сонда сурет бойынша ВД=ВА+АД=ВА+АС=ВА+  Сонымен квадрат теңдеудің түбірлері х1=ВД, х2=ВЕ болады екен. Сөйтіп ВД, ВЕ кесінділердің ұзындықтары (39-4) квадрат теңдеудің түбірлері болады.  3. (39-5) квадрат теңдеуі берілсін. Оның шешуі (39-5а)  Бұл жағдайда болады. Демек теңдеудің бір шешімі болады, ол *х*1. Оны салу үшін 202 суретте деп алайық. Сонда болады. Сөйтіп бұл кезде (39-5) теңдеудің түбірі ВЕ кесіндісі болады.  4. (39-6) квадрат теңдеуі берілсін.  Шешсек . Бұдан теңдеудің бір шешімі болады. Ол *х*1.  202 суретте десек болады. Сонымен бұл кезде ВД кесіндінің ұзындығы (39-6) квадрат теңдеудің түбірі болады.  **3-есеп.** Берілген шеңберге бүйір қабырғасы мен табанына жүргізілген биіктігінің қосындысы бойынша тең бүйірлі үшбұрыш салу керек.  **Талдау.** Берілген шеңберді W дейік. Ол берілгендіктен центрі, радиусы белгілі. Центрін О, радиусын r дейік. Оны іштей тең бүйірлі ∆АВС салынған дейік. Бұл үшбұрышта AB=BC, AB+BD=m BD –ны тапсақ ∆АВС салынады. BD=*х* дейік. Онда АB=*m-x* болады.  AD2=BD∙DE=*x*(*2r*-*x*)  AB2=AD2+BD2, (*m-x)*2=x(*2r*-*x*)2+*x*2  m2-2mx+x2=2rx-x2+x2, x2-2(m+r)x+m2=0  Осының шешімі ВД болады. Бұдан х1>0, x2>0 болады. Сол түбірлерді салайық.  **Салу.** а) О нүктеден сәуле жүргізіп, оның шеңбермен қиылысу нүктесін В дейік. Оның бойына ВК=m саламыз. Сонда ОК=r+m болады.  б) ОК-ны диаметр етіп W1 шеңберін саламыз.  в) К-ны центр етіп КВ=m радиуспен W2 шеңберін саламыз.  г) W1∩ W2=L дейік. Сонда  д) О-ны центр, OL-ді радиус етіп W3 шеңберін саламыз. Ол КД түзуімен N,M нүктелерде қиылыссын.  Сонда  Сонымен біз іздеген ВД кесінді КМ және КN болады екен. Егер ВЕ диаметрге ВД=KM кесіндіні өлшеп салып, Д нүктеден ВЕ –ге перпендикуляр жүргізсек ∆АВС шығады және АД=ДС болғандықтан АВ=ВС болады. АВ+ВД=m болады.  **Дәлелдеу. С**алу бойынша  . Сөйтіп ВМ=AB.  Ал, салу бойынша BM+MK=m еді. Демек AB+MK=m, AB+BD=m. Ал, АС⊥ВЕ болғандықтан АD=DC. Демек салынған ∆АВС есеп шартын қанағаттандырады.  **Зерттеу.** Үшбұрыш r радиусты шеңберге іштей сызылу үшін, оның қабырғалары диаметрден үлкен болмау керек яғни x<2r болу керек. Бізде  x1<2r, x2>2r Сондықтан квадрат теңдеудің екінші түбірі есеп шартын қанағаттандырмайды. Демек есептің тек бір шешімі болады.  **4-есеп.** Шеңбер және одан тыс жатқан А нүктесі берілген А нүктеден шеңберге оның сыртында жатқан бөлігі ішінде жатқан бөлігінен 2 есе ұзын болатын қиюшы жүргізіңдер.  **Талдау.** Шеңбер мен А нүктесі берілгендіктен шеңбер центрі О, радиусы r және А0 қашықтықтар белгілі (203 сурет) АВ- тапсақ В нүктесі, АВ түзуін жүргізу арқылы С нүктесі белгілі болады.  W  C  0  D  B  A  203-сурет  АB=x десек, шарт бойынша АD=*a*, шеңбер радиусы r дейік. Сонда AB∙AC=AD∙AE болады .  Бұдан  Сонда кесінділерді салсақ АВ=x кесінді табылады. W1(A,x) шеңбер жүргіземіз. Ол шеңберді В нүктеде қиса іздеген қиюшы АВС болады.  **Дәлелі.** 2-сурет бойынша АВ=AD(AD+2r)    Сөйтіп болып шықты.  Есептің екі шешімі болады. Егер W мен W1 шеңбер екі нүктеде қиылысса бір шешімі болады, егер олар жанасса.  **39.5 Дұрыс көрбұрыштарды салу.**  Барлық қабырғалары өзара, барлық бұрыштары өзара тең болатын көпбұрышты дұрыс көпбұрыш дейді.  Мектепте дұрыс үшбұрыш, дұрыс төртбұрыш (квадрат), дұрыс алты және сегіз көпбұрыштар қарастырылады.  Дұрыс көпбұрышты салу есебі шеңберді теңдей бөліктерге болу есебі мен бірдей. Шеңберді теңдей бөліктерге бөлу (дұрыс көпбұрышты салу) есептерін шешуде мына төмендегі теоремалар мен қағидаларды басшылыққа алу керек.  10. Егер n натурал саны өзара жай р мен q сандарының көбейтіндісіне n=pq жіктелетін болса, онда шеңбердің теңдей n бөлікке бөліну мүмкіндігі, сол шеңбердің жеке-жеке теңдей p және q бөліктерге бөліну мүмкіндігімен бірдей.  Шынында да шеңбер теңдей n бөлікке бөлінетін болса, оны р бөліктен топтасақ теңдей q бөлік, ал q бөліктен топтасақ теңдей р бөлік шығады. Сөйтіп шеңбер теңдей р және q бөлікке бөлінеді.  Енді керісінше шеңбер теңдей р бөлікке бөлінсін және теңдей q бөлікке бөлінсін. Мынадай анықталмаған qx-py=1 (39-7) теңдеу құрайық. p мен q өзара жай сандар болса, мұндай теңдеудің бүтін түбірлері болатыны сандар теориясынан белгілі. Мұны n=pq –ға бөлсек  шығады. Бұдан .  Сонымен шеңбердің бөлігін шығарыа алу үшін шеңбердің х рет алынған бөлігінен, у рет алынған бөлігін шегеру керек екен.  Мысалы шеңберді 15-ке теңдей бөлгендегі, оның бөлігін табу үшін 5х-3у=1 теңдеу құрып, оның бүтін шешімін табу керек. Ол х=2, y=3 болады.  Сондықтан шеңбердің -ін табу үшін 2 рет қайталанған бөлігінен, 3 рет қайталанған бөлігін шегеру керек. Шеңбердің бөлігі 1200, бөлігі 720. Сонда 2∙1200-3∙720=240  Сөйтіп шеңберді теңдей етіп 15 бөлікке бөлу үшін центрлік бұрышы 240 болатын бұрыш салу керек.  20. Енді шеңберді теңдей n- ге бөлудің алгебралық жолын қарастырайық.  *z=x+iy* комплекс санына декарттық координата жазықтығында координаталары (*х, у*) болатын z нүктесі сәйкес келеді. Бұл кезде *z=x+iy* комплекс санын z нүктенің аффлексі дейді.  Енді центрі О нүктесі, радиусы r болатын W(O,r) шеңбер берілсін. Сол шеңберді теңдей етіп n бөлікке бөлу керек болсын. (204 сурет) Жеңілдету үшін r=1 дейік О нүктеден өзара перпендикуляр бағытта х және у өстерін жүргізейік. Ох пен шеңбердің қиылысу нүктесін А0 дейік. Оның координаталары А(1,0) болады.  0  y  A3  A2  A1  A0  An-1  An-2  204-сурет  Сонда шеңберді теңдей n бөлікке бөлу  (39-8) нүктелерді салу болып табылады.  Сонда А0 нүктеге 1 саны сай келеді  А1 нүктеге саны сәйкес келеді.  А2 нүктеге саны сәйкес келеді.  -----------------------------------------------------------------------  Аn-1 нүктеге саны сәйкес келеді.  Бұл сандардың барлығыда zn-1=0 (39-9) теңдеудің түбірлері болатыны және ол теңдеудің бұлардан өзге түбірлерінің болмайтыны алгебрадан белгілі.  Сөйтіп шеңберді n-ге бөлу (n қабырғалы дұрыс көпбұрышты салу) есебі zn-1=0 теңдеудің түбірлерін салуға тірелді.  Сондықтан циркуль мен сызғыш арқылы n – қабырғалы дұрыс көпбұрышты салу үшін zn-1=0 теңдеудің түбірлері шекті рет қолданылатын негізгі рационалдық амалдар (қосу,алу, көбейту, бөлу, квадрат түбір табу) арқылы өрнектелуі қажетті және жеткілікті.  zn-1=0 теңдеудің 1- ден өзге түбірлері (яғни мұны z-1-ге бөлсек) мына теңдеудің түбірлері болады.  zn-1+zn-2+…+z2+z+1=0 (39-10) Мұны шеңберді бөлу теңдеуі дейді.  Егер n- жай сан болса, шеңберді іштей сызылған дұрыс n-бұрышты көпбұрышты салу үшін А0 –ден өзге тағы бір А1 төбесін салса жеткілікті. Өйткені алгебрада 1-дің алғашқы түбірін 2,3,... дәрежеге шығару арқылы  zn-1=0 теңдеуінің барлық түбірлерін табуға болады деген теорема дәлелденді. Ал, бұл геометрияда Аt төбесі табылса A0At доғаны өлшеп салу арқылы n-2 қадамнан кейін барлық төбелерін анықтауға болады деген соң  Егер (\*) десек онда    болады. Сонымен (39-11)  Егерде десек, соңғы екі теңдіктен болады.  Осы тендікпен (\*) дан (39-12)  Сонымен алгебралық жолмен шенберді циркуль және сызғыш жәрдемімен теңдей n- бөлікке бөлудің жалпы әдісі (39-10) теңдеудің түбірлерін салуға болады ма, болса қалай деген мәселені зерттеуге тіреледі.  Мысалдар қарастырайық а) n=5 болсын. Бұл шеңберді бөлу тендеуі (39-10) мынадай болады: z4+z³+z²+z+1=0 (\*1) бұл тендеудің қандайда бір түбірін, мысалы (\*2) циркуль және сызғыш жәрдемімен салуға болар болмасын анықтайтын (\*3) десек (\*4) болады. z саны (\*1)-ді қанағаттандырады. Сондықтан бұл мына тендеуді де (\*5) қанағаттандыруы керек. Өйткені z5-1=0, z5=1 болғандықтан z5-k=z-k болады. Себебі болады. Сондықтан болып (\*5) және (\*1) тендеу мәндес болады. (\*3)-ті квадраттасақ . Бұдан болатындықтан (\*5) немесе (\*6) түбірге келеді.  Бұл квадрат теңдеуді шешсек:  және  Циркуль және сызғыш жәрдемімен ұзындығы ге тең u1 кесіндіні салуға болады. Сондықтан нүктені салуға болады.  Сөйтіп шеңберді циркуль және сызғыш жәрдемімен теңдей етіп 5 бөлікке бөлуге болады. Сондықтан 5 қабырғалы дұрыс көпбұрышты циркуль және сызғыш жәрдемімен салуға болады.  б) n=7 болсын. Бұл кездегі шеңберді бөлу тендеуі (39-10) мынадай z6+z5+z4+z3+z2+z+1=0 (\*7) болады .  Мұнда z7=1 болатындықтан z6=z7-1=z-1, z5=z7-2=z-2, z4=z7-3=z-3 болады. Сонда (\*7) мына түрге келеді z-1+z-2+z-3+z3+z2+z+1=0 (\*8)  Егер десек , .  Бұдан болады да (\*8) тендеу мына түбірге келеді  бұдан (\*9). Алгебрада мынадай теоремалар бар.  а) Аға мүшесінің коэффиценті бір, ал қалған мүшелерінің коэффициенттері бүтін сандар болатын жоғары дәрежелі алгебралық тендеудің бөлшек түбірі болмайды және бүтін түбірі болса, ол бос мүшенің бөлгіші болады. Бұдан мысалда бос мүше 1. Оның бүтін бөлгіші болмайды. 1 мен-1 ол шеңберге түбір емес. Демек (\*9) рационал шешімі жоқ.  б) Коэффициеттері рационал сандар болатын үшінші дәрежелі теңдеудің рационал түбірі болмаса онда оның түбірлері квадрат радикал арқылы өрнектелмейді.  Сондықтан осы екі теорема бойынша (\*9) тендеудің түбірлері квадрат радикал арқылы өрнектелмейтіндіктен, рационал түбірлері болмайтындықтан ол тендеудін түбірлерін яғни сол түбірлерге тең болатын кесінділерді циркуль және сызғыш жәрдемімен салуға болмайды. Сөйтіп шенберді теңдей етіп 7-ге бөлуге, 7 қабырғалы дұрыс көпбұрышты циркуль және сызғыш арқылы салуға болмайды.  в) Осы тұрғыдағы зерттеулерді жүргізе отырып немістің ұлы математигі К.Ф Гаусе (1777-1855) 1796 жылы дұрыс көпбұрыштың циркуль және сызғыш жәрдемімен салынуы жайлы мынадай теореманы дәлелдеді.  **Гаусс теоремасы**. Дұрыс n қабырғалы көпбұрыш циркуль және сызғыш жәрдемімен салыну үшін қабырға саны n былайша n=2m p1,p2…pk жіктелуі қажетті және жеткілікті. Мұндағы m оң бүтін сан не О, ал p1,p2…pk өзара тең емес 2²t+1 түрдегі жай сандар (Бұл түрдегі жай сандарды Ферма жай сандары дейді).  Теореманы дәлелсіз аламыз.  Егер n=р жай сан болса, бұл ешқандай санға жіктелмейді. Сондықтан n=p қабырғалы дұрыс көпбұрыш салыну үшін оның Ферма жай саны болуы керек (сонда m=0, К=1 болады да n=20 ∙р=1∙р=р болады)  Егер t=0,1,2,3,4 болса n=22t+1 саны сәйкесінше 3,5,17,257,65537 болады және бұлардың барлығында жай сандар. Сондықтан циркуль және сызғыш жәрдемімен дұрыс үшбұрышты, дұрыс бес бұрышты, дұрыс он жеті, дұрыс 257, дұрыс 65537 қабырғалы көпбұрыштарды салуға болады. (Бұлар m=0, к=1 жағдайға сай келеді).  n=7,11,13 жай сандар берсек бұлар Ферма жай саны емес. Сондықтан 7,11,13 қабырғалы дұрыс көпбұрыштар циркуль және сызғыш жәрдемімен салынбайды.  Егер m=0, к=2 болса n=20 Р1∙Р2=Р1Р2 болады.  Р1 =3, Р2 =5 десек (бұлар Ферма жай сандар және 3≠5).  Сондықтан n=Р1Р2 = =3∙5=15 қабырғалы дұрыс көпбұрышты циркуль және сызғышпен салуға болады.  Р1=3, Р2 =17 болса n=Р1Р2=3∙17=51 болады (3 пен 17 Ферма жай саны). Сондықтан 51 қабырғалы дұрыс көпбұрыш циркуль және сызғыш жәрдемімен салынады.  360=23∙35∙5 саны Гаусс теоремасын қанағаттандырмайды. Сондықтан шеңберді тендігі етіп циркуль және сызғышпен 360-қа бөлуге болмайды, яғни 10-тық бұрышты салуға болмайды. 9 қабырғалы дұрыс көпбұрышта циркуль және сызғыш жәрдемімен салынбайды. Өйткені 9=3∙3 мұнда 3 Ферма жай саны, бірақ екеуі Р1=3=Р2 тең.  **1-есеп.** Дұрыс үшбұрыш салу (205-сурет), квадрат салу (206-сурет), дұрыс алты бұрыш салу (207-сурет) мектеп курсында қарастырылады.  207-сурет  206-сурет  205-сурет  O  O  F  E  D  C  B  A  D  С  В  А  А  В  С    205-суретте түзу бойына АС=а кесінді өлшеп салынып, (А, а) және (С,а) шенберлер жүргізілген. Олардың қиылысу нүктесі В болса АВС іздеген үшбұрыш болады. Өйткені АВ=СВ=АС=*а*.  206-суретте өзара перпендикуляр АС,ВД түзулері жүргізіліп, олардын бойына ОА=ОС=ОВ=ОД=*в* кесінділер салынып, олардың үштары қосылған. Сонда шыққан АВСД квадрат (дұрыс төртбұрыш) болады. Себебі ∆ОАВ=∆ОВЕ=∆ОСА=∆ОДА болғандықтан АВ=ВС=СД=ДА төрт төбедегі бұрыштары өзара тең (олар 90°тан).  207-суретте АВО дұрыс үшбұрыш салынып, онын ВО,АО қабырғалары сызылып ВО=ОЕ ,АО=ОД салынып ВС//ОД жүргізіліп С нүктесі табылған. СО-ны сызып СО=ОҒ салынып Ғ нүкте табылған. Сонда шыққан АВСДЕҒ дұрыс алты бұрыш болады. Себебі салу бойынша ∆АОВ=∆ЕОД және АС=АВ=ВО сондықтан бұларға ОД=ОЕ=ДЕ лерге тең. Ал, ВСДО мен АОЕҒ параллелограмм  болғандықтан АВ=ВС=СД=ДЕ=ЕҒ=АҒ. Төбедегі бұрыштары тан болады.  **2-есеп.** Шенберді теңдей етіп 3-ке, 4-ке, 6-ға бөлу 208-а,б,в суретте көрсетілген.  r радиусы О центрлі W (O,r) шеңбер берілген. 208-а суретте кез келген ДВ диаметр (Д,ВО) шеңбер сызылған. Сонда ΔАВС тең қабырғалы үшбұрыш болады. ДС=ДА=r, ДСВ=90º болғандықтан АВ=ВС= ВС²=ВК\*ВД; 3r²=ВК\*2r; ВК=3r/2, КД-2К-3r/2=r/2  B  A  C  D  0  B  A  D  C  B  A  F  C  D  E  a)  Б)в)  В)  208-сурет  Сонда (2/АС)²=ВК\*КД=r/2\*3r/2=3r/4 АС²=3r² сөйтіп АС=АВ=ВС=r√3. Сондықтан АВ,ВС,АС доғаларда өзара болады 208-б-суретте центерден АС және оған перпендикуляр ВД диаметір жүргізілетін ол шенберді тендей етіп 4 доғаға бөледі 208-в суретте кезкелген АД диаметр және (А,АО)(Д,ДО) шенбер сызылған. Олар шенбермен В,Ғ және С,Е нүктеде қиылысса, онда АВСДЕҒ дұрыс алты бұрыш АВ=АО=АҒ=r, ДЕ=ДО=ДЕ=r болғандықтан <АОВ=60º <ДОС=60º сондықтан <ВОС=180º-(60º+60º)=60º демек ∆АОВ=∆ВОС сондықтан ВС=АВ, осы сызықты ЕҒ=АҒ. Сөйтіп АВ=ВС=СД=ДЕ=ҒҒ=ҒА сондықтан бұл қорлар кіретін доғалары тең. Сөйтіп шенбер тендей 6 бөлікке бөлінеді және оның хордалары шенберінің радиусы r-ге тен.  Осылайша шенберді 3,4,6-ға тендей бөлгеннен кейін, шыққан доғаларды тендей етіп 2-ге бөлу арқылы (өабырғаларды 2 еселеу арқылы)шенберге тендей етіп 6,12,24,48,…,7,8,16,32,64,… бөліктерге бөлуге болады.  А1  А2  А3  А4  А5  А6  А7  А8  А9  А10  О  209-а*-*сурет  В  А  В  С  О  209-б-сурет  3-есеп. Шенберді тендей етіп 5ке,10ға бөлу керек (209-сурет). Шешуі 0 центірлі r радиусты w (0,r) шенбер берілсін. Ол тендей етіліп 10-ға бөлінген болсын. Сонвм бері А1А2=х дейік онда <А1АО2=10/360=36º, ал <ОА1А2=<ОА2А1==72º болар еді. А2В кесінді <А1АО2нын биссектрисасы болсын. Онда <А1А2В=<ВА2О=36º болады да ∆А1А2В~∆А1А2О болады. бұдан А1А2:А2В=А1А2, мұндағы А1А2=х, А1О=r, А1В=А1О-ВО=А1О-ВА22=А1О-А1А2=r-х х/ r-х=r/хбұдан х²+rх-r²=0(\*)  10 қабырғалы дұрыс көпбұрышты қабырғалы х ден (\*) тндеудін шешімі болады екен. Оны шешсек х1/2=2/-r±√r²+4r²=2/-r±√5: х1=2/-r+√5>0; х2=2/-r-√5<0. Демек тендеудің бір ғана түбірі болады және ол х=2/(√5-1)ге тең болады екен. Сонымен (\*)теңдеуді х=-r/2 + +r²(\*\*)шешуіе салу керек. Оны салу үшін ОА=r/2, АВ=r болатын содан сон (О,ОА)шенбер жүргіземіз. Сонда ВС кесінді есептін шешуі х болады. өйткені ВС=ОВ-ОС=√ОА²+АВ²-ОС=- r/2=- r/2 +болсын (\*\*) шығады. Осы ВС кесінді А1 нүктесінен бастап А1А2=ВС,А2А3=ВС,…өлшеп салсақ тендеу тендей 10-ға бөлінеді.  Сонымен r радиусты шенберді іштей сызылған 10 қабырғалы дұрыс көпбұрыштын қабырғасын а10= r\*2/√5-1 (39-13) болады екен.  Дұрыс көпбұрышты қабырғаны 2 еселеу формуласы мынадай еді  (39-14) осыдан n=5 десек (39-15) болып шығады.  Осыларды ескере отырып шенберді тендей етіп 5-ке, 10-ға бөлінудің мынадай оңайырақ жолымен ұсынуға болады.  (0,ґ) шенбер берілсің а) онвн өзара перпендикуляр АВ,СД диаметрлерін жүргізеді (210-суретте)  В  К  А  С  Е  О  D  210-сурет  б) АО радиустын қақ ортасы Ені табады  в) (Е,ЕС) шенбер жүргізіліп онын АВ диаметрмен қиылысу нүктесі К-ны табады.  Сонда ОК кесінді деп шенберге нүктесі сызылған дұрыс 10 қабырғалы көпбұрыштын қабырғасы а10 болады,ал СК кесінді бұл шенберге іштей сызылған 5 қабырғалы көпбұрыштын қабырғасы а5 болады. Cонымен а10= ОК, а5=СК. Дәлелі болсын (39-13)пен бірдей.  Ал, болып (39-15) пен бірдей болып шықты.  Осы кесінді А нүктеден өлшеп салып шенбер тендей болып 5-ке бөлінеді.  Шенбер 5-ке бөлінген соң қабырғаны 2 еселеу арқылы ол шенберді 10,20,40,… қа тендей бөлуге болады.  Ескерту. Циркул және сызғыш жәрдемімен салынбайтын дұрыс көпбұрыштарды басқа құралдарды қосымша қолдану арқылы салуға блады.  Практикалық жұмыстарда жуықтап салу қолданылады.  Мысалы шенберді тендей етіп 7-ге бөлу үшін онын қабырғасын сол шенберге іштей сызылған дұрыс үшбұрыштын қабырғасынын жартысына мөлшерде тен деп алуға болады. деп алғанда шеңберді 7-11 бөлу 211-суретте орындалған 7-ге бөлінген сан доғаны 2-ге тен бөлу арқылы шенберді 7,14,28,56,… бөліктерге бөлкуге болады.  211-сурет  1  2  3  4  5  6  7  О  В  С  А  Е  F  D  O  VIII  VII  VI  V  IV  III  II  I  212-сурет  4-есеп. Шенберді тендей етіп n-ге бөлу керек. (212-сурет)  Шешуі (0,r) шенбер берілсін. Оны тендей етіп n-ге бөлу үшін: а) өзара перпендикуляр СД және АВ диаметрлерін жүргізеді  б) СД диаметді тендей етіп n-ге (мысалда 8-ге бөлінген) бөледі  в) (Д,ДС) шенберін жүргізіп оның АВ түзумен қиылысу нүктелері Е,Ғ –ті табады.  г) Ежәне Ғ нүктелерді СД диаметр бөлінген тақ немесе жүп нүктелерге қосып, онын берілген шеңбермен қиылысу нүктелерін табады. Сол 1-8 нүктелер арқылы шенбер тендігі n(=8) бөлікке бөлінеді.  5-есеп. Қабырғасы а берілген , n қабырғалы дұрыс көпбұрыш салу керек (213-сурет)  А  В  С  D  E  F  В1  213-сурет  Салу жолы түзу бойына В1В=2а кесінді өлшеп салады.  б) В1В кесінді диаметр етіп жарты шенбер сызады. Центірі А нүктесі  в) жарты шенберді теңлей етіп n-ге бөледі(6-ға бөлінген)  г) А-ны бөлу нүктелерін қосатын сәулелер жүргізеді  д) (В,а) шенбер жүргізіп С, (С,а) шенбер жүргізіп Д нүктесін, (Д,а) шенбер жүргізіп Е, (Е,а) шенбер жүргізіп сәуле бойынан С,Д,Е,Ғ нүктелерді тауып, оларды бір-біріне тізбектей қосып АВСДЕҒ дұрыс n(=6) қабырғалы көпбұрыш шығады.  Бұл әдіспен жарты шенберді циркул және сызғыш жәрдемімен n-ге бөлуге болатын n қабырғаны дұрыс көпбұрыштарды салуға болады. мысалы жарты шенберді циркуль және сызғыш жәрдемімен 7-ге,9-ға бөлуге болады. сондықтан n=7, n=9 қабырғалы көпбұрышты әдіспен салуға болады.  **§40. Циркуль және сызғыш жәрдемімен салынбайтын салу есептері.**  Циркуль және сызғыш жәрдемімен салынбайтын есептер көп. Мысалы тек төртбұрышты іштей, параллелограмды сырттай шеңбер салуға үш нүктені бастыра түзу жүргізуге әруақытта бола бермейді. Өйткені есеп шартын қанағаттандыратын мұндай фигура болмауы мүмкін. Кейде ондай фигура болғанымен оны циркуль және сызғыш жәрдемімен салу мүмкін емес. Бұл бапта біз соңғы жағдайдағыдай есептерді қарастырамыз. Бұл салада төмендегі 2 теореманы басшылыққа аламыз.  1-теорема. Ұзындығы х берілген кесінділердің ұзындықтары а,в,с,...е арқылы рационалдық амалдар шекті қолдану арқылы өрнектеуге болатын болса, онда ол кесіндіні циркуль және сызғыш жәрдеміміен салуға болады.  2-теорема. Берілген кесінділер арқылы х кесіндіні циркуль және сызғыш жәрдеміміен салуға болатын болса, онда оның кесіндінің ұзындығын берілген кесінділердің ұзындықтары арқылы рационал амалдарды шекті рет қолдану арқылы өрнектеуге болады.  **40.1. Бұрыштың трисекциясы туралы есеп.**  Бұл есеп былайша тұжырымдалады: Циркуль және сызғыш жәрдемімен кез-келген берілген бұрыштан 3 есе кіші бұрышты салыңдар.  **Шешуі:** φ бұрышы берілген α бұрышы бұдан 3 есе кіші болсын: φ=3α. Гипотенузалары 2-ге тең, бір сүйір бұрышы φ, α болатын екі АВС, А1В1С1 тікбұрышты үшбұрыштар салайық. АС= А1С1 =2, <ВАС = φ, В1А1С1 = α болсын, АВ =а, А1В1 = α дейік.  φ  α  A  B  C  A1  C1  B1  a)  б)  214-сурет    Егер АВС-ның қабырғалары арқылы А1В1С1үшбұрыштың х қабырғасын салсақ, онда α бұрышы салынар. Сондықтан, АВС-ның қабырғалары арқылы А1В1 =х кесіндіні салуға болар болмасын зерттейік.  **40.2. Дөңгелектің квадратурасы туралы есеп.**  Бұл есеп былайша тұжырымдалады:  Берілген дөңгелекке ауданы тек квадрат салу керек.  **Шешуі:** Дөңгелек радиусын r десек, ауданы πτ2 болады. Квадрат қабырғасын х десек, мұның ауданы х2 болады. Сонда х2 = πr2 ,. квадраттың қабырғасы х-ты 2πr және r/2 кесінділердегі геометриялық ортасы ретінде салуға болады.  Егер де r =1 десек l =2 π болады.  1766 жылы Швейцария математигі Иосиф Ламберт (1728-1777) π-санының иррационал сан болатынын, aл 1882 жылы Ф.Линдеман π-санының трансцендентті сан болатынын дәлелдеі. Сондықтан 2-теорема бойынша l =2π, l =2πτ кесінділерін циркуль және сызғыш арқылы салуға болмайды. Сондықтан квадрат қабырғасы болатын х кесіндісін циркуль және сызғыш арқылы салуға болмайды. Дөңгелектің квадратурасы туралы есеп циркуль және линейка арқылы шешілмейді.  **40.3. Кубты екі еселеу есебі.** Бұл есеп былайша тұжырымдалады. Берілген кубтан көлемі 2 есе көп болатын куб салу керек.  Шешуі: берілген кубтың қырын а, ізделетін кубтың қырын х десек, х3 =2а3 болу керек. Іздеген куб қыры осы теңдеудегі шешімі болу керек. Егер а =1 десек, х3 =2, х3-2 =0 теңдеуішығады. Бұл үш дәрежелі теңдеу рационал сандар өрнегіне келтіреміз, яғни оның рационал түбірі жоқ. Сондықтан 2-теорема бойынша теңдеу түбірін циркуль және сызғыш жәрдеміміен салуға болмайды.  Бұл есепті жуықтап былайша шешуге болады. Тең катетті тік бұрышты АВС үшбұрышын салады. АВ =ВС =а болсын, онда АС =а 2 болады.  АД =1/6 АС кесіндісін саламыз.  Ескерту. Циркуль және сызғыштан басқа құралдар мен сол сияқты тек циркулмен , тек сызғышпен салу есептерін шешуге болады.  Бұлар жайлы мынадай теоремалар бар.   1. Италия ғалымы Лоренцо Маскерани (1750-1800) одан бұрын геометрик Георга Мон (1640-1697) циркульдің жеке өзінің салу мүмкіндіктерін көп зерттеген. Мор Маскерони теоремасы: циркуль және сызғышпен салынатын кез-келген есеп тек циркульмен де салынады. 2. тек сызғышпен салу мәселесімен Ламберт, Брианшон, Швейцар геометригі Штейнер (1796-1863) айналысты. Бұл жөнінде Штейнерден мынадай теоремасы бар: циркуль және сызғыш жәрдеміміен шешілетін кез-келген есепті тек сызғыш жәрдеміміен салуға болады. 3. Циркуль және сызғыш жәрдеміміен шығатын кез-келген салу есебін   а) бір ғана екі жақты сызғышпен салуға болады  б) бір ғана берілген бұрышпен салуға болады  в) циркуль және шектелген сызғышпен салуға болады.    **Қайталау сұрақтары мен есептер**   1. Конструктивті геометрия және оның аксиомалары. 2. Салу құралдары және олардың жеке-жеке алғанда салу мүмкіндіктері қандай? 3. Геометриялық салу есебінің шешімі деген не? 4. салуға арналған геометриялық есепті шешу деген не? 5. Салу есебін шешу жалпы схемасы қандай? 6. Негізгі салу есептерін шешу жолдары   а) Берілген бұрышқа тең бұрышты қалай салады?  б) Түзуге оның нүктесінен перпендикуляр жүргізу және нүктеден түзуге перпендикуляр түсіру жолы қандай?  в) Түзуге параллель түзу жүргізу жолы қандай?  г) Бұрыштың биссектрисасын салу  д) Екі қабырғасы мен арасындағы бұрышы, бір қабырғасы мен екі бұрышы, үш қабырғасы бойынша үшбұрыш салу жолы.  е) Тік бұрышты үшбұрыш салу, бір катеті мен гипотенузасы, гипотенузасы мен бір сүйір бұрышы бойынша  ж) Шеңберге жанама жүргізу жолы қандай?   1. Салу есебін шешудегі фигуралардың қиылысу әдісінің мәні қандай? 2. Көп кездесетін нүктелер жиынын атаңдар   а) берілген кесінді берілген бұрышпен нүктелер жиыны не болады?  б) Шеңбер және А нүкте берілген. А нүктеден өтетін түзулердің қақ ортасының жиыны не болады? Нүкте шеңбер ішінде , бойында және тыс жатуы мүмкін.  в) Шеңбер бойында жатқан нүктеден жүргізілген хордалардың m׃n қатынаста болатын нүктелер жиыны не болады?  г) Екі нүктеден қашықтықтарының қатынасы тұрақты болатын нүктелер жиыны не болады?  9. Екі шеңбердің радикалды осі деген не? Екі шеңбердің әртүрлі орналасуындағы олардың радикалдық осін қалай салады?  10. Үш шеңбердің радикалдық центрі деген не?  11. Қандай шеңберлер ортасынан бөлінеді?  12. Концентрлі емес екі шеңберге де ортасынан болатын шеңбер центрі қайда жатады?  13. Радикалдық өс пен центрді салу есебін шешу.  14. Қандай жағдайда салу есебін шешуге қозғалысты қолданады: параллель жылжыту, симметрия, бүру?  15. Салу есептерін шешудегі ұқсас түрлендірулерді қолданылуы.  16. Инверсия, оның қасиеттері.  17. Инверсия шеңберінен тыс, оның бойында, ішінде жатқан нүктелерге инверсия нүктені салу.  18. Инверсия центрінен өтетін және өтпейтін түзуге инвертті фигураны салу.  19. Инверсия центрінен өтетін және өтпейтін шеңберге инвертті фигураны салу.  20. Салу есебін шешуге инверсияны пайдалану.  21. Аполлонии есебі және оның шектік түрлері қалай тұжырымдалады және қалай шешіледі?  22. Біртекті өрнек деген не? Қандай жағдайда формула бір кесіндінің ұзындығын анықтайды?  23. Салу есебін шешудегі алгебралық тәсілдің мәні қандай?  24. Дұрыс көпбұрыш деген не? Ол қандай жағдайда циркуль және сызғыш жәрдемімен салынады?  25. Шеңберді бөлу теңдеуі деген не?  26. Дұрыс көпбұрыштың циркуль және сызғыш арқылы салынуы жайлы Гаусс теоремасы қалай тұжырымдалады?  28. Дұрыс үшбұрыш, квадрат, алтыбұрыш, 5 бұрыш салу жолдары қандай?  29. Шеңберді қалайша жуықтап 7-ге бөлуге болады?  30. Шеңберді п-ге бөлу жолы  31. п қабырғалы көпбұрышты салу.  32. Берілген кесінділер арқылы берілген кесіндіні циркуль және сызғышпен салынуы, салынбауы шарты.  33. Циркуль және сызғыш жәрдеміміен шешілмейтін есептер (бұрышты 3-ке бөлу, дөңгелектегі квадратурасы кубты екі еселеу) және оларды көмекші құралдармен салу жолдары.  34. Шеңберді циркуль және сызғышпен 11,12,25,100,360- қа бөлуге болады ма?        **ХІ тарау. Кескіндеу әдістемелері**  **§41. Кескіндеудің теориялық негіздері**  **41.1. Параллель проекция.** Заттың кескінін салу, ол затты жазықтыққа проекциялау жолымен іске асады. Проекциялаудың түрлі жолдары бар. Соның бірі параллель проекциялау.  Үш өлшемді евклидтік кеңістікте жазықтығы және онда жатпайтын векторы берілсін.  Кеңістіктің кез келген нүктесінен векторға параллель етіп жүргізілген түзу жазықтықпен М нүктеде қиылыссын. Онда М нүктені нүктенің жазықтығындағы вектор бағытындағы параллель проекциясы дейді. Егер проекциялау бағыты жазықтығына перпендикуляр болса, онда проекциялау ортогонал проекциялау делінеді. проекция жазықтығы, проекциялау бағыты делінеді.  Кеңістікте фигура берілсе, оның әрбір нүктесінен векторға параллель түзулер жүргізіп, олардың жазықтығымен қиылысу нүктелерінің жиынынан тұратын жазық фигураны шығарып алуға болады. Бұл фигураны фигураның жазықтықтағы бағыттағы проекциясы дейді.  Параллель проекциялаудың кейбір қасиеттері төмендегідей.   1. Түзудің жазықтықтағы бағыттағы параллель проекциясы нүкте болады, егер түзу проекция бағытына параллель болса, қалған жағдайда түзу болады. Өйткені түзудің әр нүктесінен векторға параллель етіп жүргізілген түзулер жиыны жазықтық болады. Ол жазықтық жазықтығымен түзу бойымен қиылысады (217 а – сурет). 2. Параллель түзулердің параллель проекцияларыда параллель түзулер болады. Өйткені параллель жазықтықтардың жазықтықпен қиылысуынан шыққан түзулеріде параллель болады (217 б – сурет). 3. Параллель проекциялауда түзу бойындағы үш нүктенің жай қатынасы сақталады. болады. Дәлелі Фалес теоремасынан шығады (217 в–сурет). Бұл теорема бойынша болады. 4. Параллель проекциялауда бір түзу бойында және параллель түзулер бойында жататын үш нүктенің қатынасы өзгермейді. 217 г–суретте .     а)  а  а    б)  *217 – сурет*  **41.2. Аффиндік бейнелеу.** жазықтықты жазықтыққа өзара бірмәнді бейнелеу (биекция) аффиндік бейнелеу делінеді, егерде бұл бейнелеуде жазықтықтағы түзу түзуге бейнеленетін болса және ол түзулер бойындағы үш нүктенің жай қатынасы сақталатын болса.  жазықтықты өзіне - өзін аффиндік бейнелеу ол жазықтықты аффиндік түрлендіру делінеді.  жазықтықты бағытта жазықтыққа параллель проекциялау **-**ті  **-**ге аффинді бейнелеу болады. Өйткені параллель проекциялауда түзу түзуге көшеді және ол түзу бойындағы үш нүктенің жай қатынасы сақталады. Сол сияқты, жазықтық жазықтықты жазықтыққа параллель проекциялаумен жазықтықты аффиндік түрлендірудің көбейтіндісі де аффиндік бейнелеу болады. Өйткені мұның екеуінде де түзу түзуге сәйкестенеді және түзулер бойындағы үш нүктенің жай қатынасы сақталады.  в)  С  В  А  С  В  А  г)      *217 – сурет*  **1–теорема.** жазықтыққа **,**  жазықтыққа репер ендірілсін. Онда реперді реперге көшіретін жазықтықты жазықтыққа аффинді бейнелеу жалғызақ болады және бұл бейнелеуде тің репердегі координаты (х,у) болатын нүктесі дің репердегі координаты да (х,у) болатын М нүктесіне бейнелейді, яғни сәйкестенеді.  Дәлелі. §13.1–дің 60 қасиетіндегідей дәлелденеді. Тек ондағы түрлендіру деген сөзді бейнелеу деген сөзбен алмастырса жеткілікті.  жазықтықтың фигурасы жазықтықтың фигурасын аффиндік бейнелеу нәтижесінде шыққан болса, онда бұл екі фигураны бір–біріне аффинді – эквивалентті дейді.  Бұл анықтама мен 1–теоремадан мен жазықтықтарда жатқан кезкелген екі үшбұрыш өзара аффинді–эквивалентті болатыны шығады. Өйткені репер үшбұрыштан тұрады. Сондықтан репер реперге көшеді деген сөз. үшбұрышы үшбұрышқа көшеді деген сөз. Демек кезкелген үшбұрышты басқа үшбұрыштың аффиндік бейнесі ретінде қарастыруға болады.  **2–теорема.** жазықтығында кезкелген , жазықтығында кезкелген төртбұрыш берілсін және олардың диагоналдары нүктелерде қиылыссын. Бұл екі төртбұрыш аффинді – эквивалентті болу үшін  шарттың орындалуы қажетті және жеткілікті.  Дәлелі. , төртбұрыштары аффинді – эквивалентті болсын. Ал бұл ны төртбұрышқа бейнелейтін аффинді бейнелеу бар деген сөз (218–сурет). Бұл бейнелеуде түзулері түзулерге көшетіндіктен нүкте нүктеге көшеді. Аффиндік бейнелеуде үш нүктенің жай қатынасы сақталатындықтан (41 – 1) теңдік орындалады.  E        E  D  C  B  A  *218 – сурет*  Енді керісінше (41–1) орындалсын. реперді реперге көшіретін аффиндік бейнелеу болады (1–теоремаға сай). (41–1) орындалатындықтан, яғни болатындықтан болады. Сондықтан бейнелеуде түзу түзуге көшеді. Ал болғандықтан нүкте нүктеге көшеді. Сөйтіп нүктелер бейнелеуде нүктелерге көшеді, яғни төртбұрыш төртбұрышқа көшеді. Сондықтан бұл төртбұрыштар өзара аффинді– эквивалентті болады.  **41.3. Кескін.** Мектеп оқулықтарында кеңістік денелерін, сол сияқты жазық фигураларды жазықтыққа кескіндеу (салу) параллель проекциялау жолымен іске асады. Евклидтік кеңістікте жазықтығы (оны проекция жазықтығы немесе кескіндеу жазықтығы дейді) және оған параллель емес вектор берілсін. Кеңістіктегі фигураның бағыттағы жазықтықтағы кескіні дейді. Сөйтіп, кезкелген фигураның жазықтықтағы кескінін салу үшін алдымен ол фигураны жазықтыққа параллель проекциялау керек, содан соң ол проекцияны ұқсас түрлендіру керек екен. Әрине проекцияны одан әрі түрлендірмей оны фигураның кескіні үшін алуға да болады (бұл кезде ұқсас түрлендірудің рөлін теңбе – тең түрлендіру атқарады).  Кескін туралы мынадай теоремалар бар.  **3–теорема.** Өзара қиылысатын және жазықтықтарында жатқан және фигуралар берілсе, онда фигура фигураның кескіні болуы үшін ол фигуралардың өзара аффинді–эквивалентті болуы қажетті және жеткілікті.  С  В  А      *219 – сурет*  Дәлелі. жазықтықтағы фигураның жазықтықтағы кескіні фигура болсын (219 – сурет). Бұл кезде тің ке аффинді–эквивалентті болатынын дәлелдейік. фигура -тің -дегі параллель проекциясы болсын. Параллель проекциялау аффинді бейнелеу болатындықтан мен өзара аффинді эквивалентті болады. кескін болғандықтан ол -ға ұқсас болады. Сондықтан мен -те аффинді – эквивалентті болады. Сондықтан пен -те аффинді эквивалентті болады. Енді керісінше пен -те аффинді эквивалентті болсын. -тің -тің кескіні болатыны дәлелдейік. пен аффинді эквивалентті болғандықтан -ті -ке көшіретін аффиндік бейнелеуі болады. -тен реперді нүктелер екі жазықтықтың қиылысу сызығында жататындай етіп алайық. Оның бейнелеудегі бейнесі реперін қарастырайық. -ден нүктесін болатындай етіп алайық да -ті -ге бағыты бойынша проекциялайық. Сонда репер реперге көшер еді, яғни болады. Ал, болатын ұқсас түрлендіру болсын. Сонда аффиндік бейнелеу болады және ол пен беттеседі.  Демек F фигура тін кескіні болады.  **4–теорема.**  және жазықтықтарда жатқан және төртбұрыштар аффинді–эквивалентті болса, онда жазықтығы табылып, төртбұрыштың жазықтыққа перпендикуляр бағыттағы жазықтыққа түскен проекциясы төртбұрышы берілген төртбұрышына ұқсас болады (220 – сурет).                F  F  E  E  D  С  В  А  O  *220 – сурет*  Дәлелі. Шарт бойынша -ны -ге көшіретін аффиндік бейнелеу болу керек. дегі шеңбермен оның бейнелеудегі бейнесін ны қарастырайық. Егер де шеңбер болса, онда ұқсас түрлендіру болады. Сондықтан ~ болады. Бұл кезде жазықтық үшін жазықтықтың өзін алуға болады. өстері өзара тең емес (мысалы ) эллипс болсын. арқылы нүктелердің түпнұсқасын. мен эллипстің түйіндес диаметрі болатындықтан мен шеңбердің өзара перпендикуляр диаметрлері болады. жазықтыққа перпендикуляр кесіндіні болатындай етіп жүргізейік. нүктелер анықтайтын жазықтықты мен белгілейік. бағыттағы бейнелеуі аффиндік болады және реперді реперге көшіреді. Ал, тікбұрышты теңбүйірлі үшбұрыш болатындықтан өзара ұқсас болады. Сонымен дағы және дегі алдын ала берілген төртбұрыштар ұқсас болады.  **5. Польке–Шварц теоремасы.**  жазықтықтың кезкелген төртбұрышының белгілі ретте қарастырылатын төбелері, берілген реперге тән аффиндік репердің кескіні болады.  Дәлелі. кесінділерден болатындай етіп нүктелерін алайық (221-сурет). түзуіне перпендикуляр болатын жазықтығын жүргізейік.  *221 – сурет*  реперден -дегі ортогонал проекциясы болсын. нүктелер -дегі нүктесіне проекцияланады. Сонда болатындықтан және төртбұрыштар аффинді-эквивалентті болады. 4-теорема бойынша жазықтық табылып ол жазықтықтағы дің бағыттағы проекциясы төртбұрышы төртбұрышына ұқсас болады. нүктелер бір түзуде жатқандықтан нүкте ның, жазықтықтағы параллель проекциясы. Сол сияқты нүктелер нүктелердің бағыттағы параллель проекциялары. Сөйтіп төртбұрыш репердің -дағы проекциясы. Енді жазықтықты жазықтыққа көшіретін қозғалысты қарастырайық. Бұл қозғалысты дің бейнесі , ал төртбұрыштың бейнесі болсын. Сөйтіп репердің -дегі проекциясы берілген төртбұрышқа ұқсас болады. Олай болса дің кескіні берілген реперге тең.  Жоғарыда айтылған теориялық мәселелерден кескін салу процесінде әр уақытта есте болатын мынадай тұжырымдар шығады.  1. Заттың кескінін салу үшін жазықтыққа (дәптер парағына, жазу тақтасына т.б. шектелген жазықтық бөлігіне) оны параллель проекциялайды. Бұл проекция оны қарастыруға қолайсыз түрде болуы немесе параққа симай қалуы, немесе тіпті кішкене болып кетуі мүмкін. Сондықтан проекцияны өзімізге қолайлы түрде келетіндей етіп ұқсас түрлендіреді. Содан шыққан фигураны кескін дейді.  2. Параллель проекциялауда жалпы жағдайдағы түзудің проекциясы түзу, параллель және қиылысқан түзулердің проекциялары параллель және қиылысатын түзулер болады. Түзу бойындағы үш нүктенің жай қатынасы, параллель кесінділер қатынасы өзгермейді.  3. Аффиндік бейнелеуде үшбұрыш үшбұрышқа түрленеді, сондықтан олар аффинді – эквивалентті болады.  4. Екі төртбұрыш аффинді–эквивалентті болу үшін олардың диагоналдарының қиылысу нүктесі сәйкес диагоналдары бірдей қатынаста болуы керек.  5. Екі пен фигура берілсе фигура фигураның кескіні болуы үшін олар аффинді–эквивалентті болуы керек.  6. Егер және төртбұрыштар аффинді–эквивалентті болса, онда дің ға ұқсас болатын проекциясы әруақытта табылады.  7. Кезкелген төртбұрыш, берілген кезкелген тетраэдрге ұқсас тетраэдрдің кескіні бола алады.  **§42. Жазық фигураларды кескіндеу**  Жазық фигуралардың кеңістіктегі түрліше біріктірмелерінен кеңістік денесі жасалады. Сондықтан жазық фигураларды кескіндеу тәсілдерін білу өте қажет. §41–де айтылғандай кезкелген фигураның кекіні бұл фигураға аффинді–эквивалентті фигура болу керек. Сондықтан егер көпбұрыш болса, онда оның бейнесіде (проекциясы, кескіні) көпбұрыш болады және олар аттас көпбұрыштар болуы керек. Сөйтіп үшбұрыш кескіні де үшбұрыш, төрт, бес, ..., *n* бұрышты көпбұрыштардың кескіндеріде төрт, бес, *..., n* бұрышты көпбұрыштар болуы керек. Бірақ, параллель проекциялауда кесінді ұзындығы, бұрыш шамасы сақталмайтындықтан тік бұрышты үшбұрыш, тік төртбұрыш, тең қабырғалы үшбұрыш, квадраттың кескіндерінің сәйкесінше тікбұрышты үшбұрыш, тік төртбұрыш, тең қабырғалы үшбұрыш, квадрат болуы міндетті емес.  Мектеп оқулықтарында кездесетін жазық фигуралардың кескінін салу жолдарын қарастырайық. Кескін проекция жазықтығына бір бағытта параллель проекциялау жолымен салынады деп есептейміз. Сондықтан, салу процесінде параллель проекциялау қасиеттерін қатаң түрде басшылыққа алу керек. Кескіні салынбақ фигура берілген, онда қажет болса түрлі өлшеулер жүргізуге болады деп есептеледі.  1 – теоремада жазықтықта берілген репердің (яғни үшбұрыштың) кескіні кезкелген репер (яғни) үшбұрыш болатыны дәлелденді. Сондықтан жазық фигураларды кескіндеуде ол фигураның бір түзуде жатпайтын кезкелген үш нүктесінің кескінін еркін салуға (тек олар бір түзуде жатбауы керек) болатыны шығады.  Нақты фигураларды кескіндеу жолдарын қарастырайық.  **1°. Үшбұрышты кескіндеу.** Жоғарыда айтуымыз бойынша (1– теоремада бойынша) кезкелген үшбұрыштың кескіні кезкелген үшбұрыш болады. Үшбұрышты кескіндегенде оның бұрышының шамасы да, қабырғаларының тең болу – болмауыда сақталмайды.  Оқу процесінде, әдістемелік мақсатпен тікбұрышты, доғал, сүйір бұрышты үшбұрышты тік, доғал, сүйір бұрышты үшбұрыш етіп салу; тең бүйірлі, тең қабырғалы, әртүрлі қабырғалы үшбұрыштарды тең бүйірлі, тең қабырғалы, әртүрлі қабырғалы үшбұрыш етіп салу кездеседі, тіпті солай етіп салу пайдалы да, бірақ міндетті емес. Кезкелген үшбұрыш кезкелген үшбұрышқа аффинді–эквивалентті болады.  **2°. Төртбұрышты кескіндеу.** Төртбұрышқа төртбұрыш ғана аффинді–эквивалентті болады. Демек төртбұрыштың кескіні төртбұрыш болады. Бірақ кезкелген төртбұрыш кезкелген төртбұрышқа кескін бола бермейді. Екі төртбұрыштың бірі екіншісіне кескін болу үшін, олар 2–теорема шартын қанағаттандыруы керек. Ол төртбұрыштардың сәйкес диагоналдары қиылысу нүктелері арқылы теңдей қатыста болуы керек, яғни , төртбұрыштардың диагоналдары нүктелерде қиылысса, онда болуы керек (222– сурет).            Е  С  А  В  *222 – сурет*  Берілген төртбұрыштың кескінін былайша салады. төрт нүктенің үшеуінің кескінін еркін саламыз. Ол *А,В,С* нүктелер болсын. АС–ның бойынан болатын *Е* нүктені табамыз, ол нүктенің кескіні болады. Өйткені параллель проекциялауда бір түзу бойындағы кесінділер қатынасы сақталуы керек. Одан әрі болатын нүктесін саламыз. Сонда берілген төртбұрыштың кескіні болады.  **3°. Көпбұрыштың кескіні.** қабырғалы көпбұрыш берілсін (Біздің мысалда болсын. Оны дейік).  Шешуі: Берілген 5 төбенің 3 – еуін бір түзуде жатпайтындай етіп, еркін кескіндейміз. Олар тың кескіні нүктелер болсын. пен тің қиылысу нүктесі болсын. Қиылысу нүктенің кескіні кескіндердің қиылысу нүктесі болады. *ВЕ* нің бойынан болатын *К* нүктені табамыз. Одан әрі болатын *С* нүктені табамыз. тауып, болатын нүктені тауып, соның жәрдемімен болатын нүктені табамыз (223–сурет). Осы әдіспен төбелердің кескінін саламыз.  N  K  D  Е  С  В  А      *223 – сурет*  **4°. Параллелограмды кескіндеу.** Параллель проекциялауда параллель түзулер параллель түзулер, қиылысатын түзулер қиылысатын түзулер болып проекцияланатындықтан параллелограмның кескіні параллелограмм болады. Параллелограмның диагонналдары бірін–бірі қақ бөлетіндіктен кезкелген төртбұрыш үшін орындалуға тиісті (41–1) талаптар кезкелген параллелограмм үшін орындалады.  Параллель проекциялауда кесінді ұзындығы, бұрыш шамасы сақталмайтындықтан тік төртбұрыштыңі, квадраттың, ромбының кесінділері де параллелограмм болады.  Әдістемелік мақсатта тік төртбұрыштың бұрыштарын тік; квадраттың бұрыштарын тік, қабырғаларын тік етіп, ромбының қабырғаларын тең етіп кескіндейді, бірақ теория бойынша бұлайша кескіндеу міндетті емес.  **5°. Трапецияны кескіндеу.** Параллель проекциялауда параллель түзулер параллель түзулер болып, қиылысатын түзулер параллель болмай кескінделетіндіктен трапецияның кескіні трапеция болады. Бірақ кезкелген трапеция кезкелген трапецияға кескін бола бермейді. Бір трапеция екінші трапецияға кескін болу үшін олардың параллель қабырғаларының (табандарының) қатынасы сақталуы керек.  D  О  С  В  А        *224 – сурет*  Сондықтан 224–суретте көрсетілген трапеция үшін трапеция кескін бола алады. Өйткені олардың бүйір қабырғалары қиылысады, ал табандары параллель және . Сонымен қатар төртбұрыштар үшін орындалуға тиісті (41 – 1) шарттар бұл трапециялар үшін де орындалады. Шынында да ~, ~ болғандықтан болады.  Демек . Сондықтан трапеция трапецияның кескіні болады.  **6°. Шеңберді кескіндеу.** Кезкелген екі эллипс бір–біріне аффинді– эквивалентті болады. Эллипстің (және оның дербес түрі шеңбердің) параллель проекциясы жалпы жағдайда эллипс болады. Шеңбердің центрі эллипстің центрі болып, ал шеңбердің өзара перпендикуляр диаметрлері эллипстің өзара түйіндес диаметрлері болып кескінделеді.  Сөйтіп шеңбердің кескінін салу эллипс салуға тіреледі. Эллипсті салудың түрлі жолдары бар.  а)  N              O  C  D      M      В  А  б)    O  N  D  C      *225 – сурет*  1) 225 а–суретте өстері *2а, 2в* арқылы эллипсті салу жолы көрсетілген. Радиустары болатын концентрлі екі шеңбер сызамыз. Олардың өзара перпендикуляр диаметрлерін жүргіземіз. Кезкелген радиус жүргіземіз. Ол ішкі шеңберді сыртқы шеңберді ден ға параллель жүргіземіз. Олардың қиылысу нүктесі эллипстің нүктесі болады. Осы әдіспен т.б. нүктелерді тауып, оларды жатық сызықпен қосса эллипс шығады. Ол эллипстің үлкен өсі сыртқы шеңбердің, кіші өсі ішкі шеңбердің диаметріне тең болады.  2) 225 б–суретте түйіндес диаметрлері мен берілген эллипсті салу жолы көрсетілген. диаметр болатын шеңбер сызылған, оның ға перпендикуляр диаметрі болсын. Сонда эллипстің АВ диаметрі шеңбердің диаметріне сәйкестенеді және олар беттеседі. Сонда эллипстің *АВ* ға түйіндес диметрі шеңбердің диаметріне перпендикуляр диаметріне сәйкестенеді. Сөйтіп шеңбердің нүктесі эллипстің , нүктесі , нүктесі , нүктесі нүктелеріне сәйкестенеді екен. Сондықтан шеңбердің нүктесіне сәйкес келетін эллипс нүктесін табу үшін ден *АВ*–ға перпендикуляр жүргізіп, нүктені табамыз. ден ға, нүктеден параллель түзулер жүргізсе, олардың қиылысу нүктесі М эллипстің нүктеге сәйкес келетін нүктесі болады. Осы әдіспен сәйкес т.б. нүктелерді тауып, жатық сызықпен қоссақ эллипс салынып шығады.  Мысалдар қарастырайық.  **1–мысал.** Дұрыс алтыбұрыш берілген, оның кескінін салыңдар.  Шешуі. дұрыс алтыбұрыш болсын (226 а–сурет). Оның кескінін әртүрлі жолмен салуға болады. Мұның кезкелген үш төбесінің кескінін (бір түзуде жатпайтын үш нүктемен) еркін кескіндеуге болады. Ол үш нүкте үшін тың кескіні *А,В,О* ны алсақ, онда *АО* мен *ВО* ны сызып болатындай етіп нүктені салуға болады. Бір түзуде жатқан кесінділер қатынасы өзгермейтіндіктен бұлар пен тың кескіні болады. Одан әрі *А* – дан *ОЕ* – ге *ОА* – ға параллель жүргізіп олардың қиылысу нүктесі ты табуға болады. Ол төбенің кескіні болады. Өйткені параллель түзулердің кескіні де параллель болады. *В* дан ға, дан *ОВ* – ға параллель жүргізіп *С* нүктені табамыз. Сонымен дұрыс алты бұрыштың кескіні салынып бітті.            O  F  E  D  C  B  A  б)  a)  *226 – сурет*  Әрине алдымен тың кескіні үшін кезкелген параллелограмды салып, оған тең етіп параллелограмды салып, *А* мен ты ны қоса салса да берілген алты бұрыштың кескіні шығады.  **2–мысал.** Дұрыс бесбұрыштың кескінін салыңдар.  Шешуі. Кезкелген дұрыс көпбұрышқа сырттай шеңбер сызуға болады (227 – сурет).  F  E  D  C  B  A      1  2  3  *227 – сурет*  Көпбұрыштың диагоналдары нүктеде қиылыссын. Теңдей доғаларға тірелген іштей сызылған бұрыштар болғандықтан болады. Сондықтан ~ болады. Бұдан болады. Ал, ромбы болғандықтан . Соңғы екі теңдіктен . Демек нүкте диагоналды орта және шеткі қатынаста «алтын қима» бөледі екен. Бұл қасиет параллель проекцияда да сақталады және соңғы теңдік бойынша нүкте орнын, кесінді ұзындығын салуға болады.  Ал, практикада дұрыс бесбұрышты былайша салған оңай десек. Соңғы теңдікті былайша жазуға болады . Бұдан . Сонда . Міне осыны пайдаланып дұрыс бесбұрышты жазықтан кескіндейді. Өзара қиылысатын екі түзу алып (227 б – сурет) бір кесіндіні тың бір жағына 3 рет (ол ) екінші жағынан 2 рет (ол ) өлшеп салады, одан осы немесе басқа бір кесіндіні тен бастап 2 рет (ол ), екінші жағынан 3 рет (ол ) өлшеп салады. қабырғаларға параллелограмм салады. Сонда *А* төбе табылады. Нүктелерді бір – біріне кесіндімен жалғаса дұрыс бесбұрыштың кескіні шығады.  **3–мысал.** Шеңбердің кескіні эллипс берілген. Сол эллипсте шеңбердің центрінің, диаметрінің кескінін салыңдар.  Шешуі. Эллипстің өзара параллель кезкелген екі хордасын салып, олардың қақ орталарынан өтетін түзу жүргіземіз. Оның эллипспен қиылысу нүктелерінің арасы сол эллипстің диаметрі болады. Ол диаметрдің қақ ортасы эллипстің центрі болады. Олар шеңбердің диаметрі мен центрінің кескіндері болады.  Егер эллипстің бір диаметрі салынған (кескінделген) болса, онда ол диаметрге параллель хорда жүргізіп оның қақ ортасынан центр арқылы өтетін түзу жүргізсе, онда оның эллипспен қиылысу нүктелерінің арасы берілген диаметрге түйіндес диаметр болады. Олар шеңбердің өзара перпендикуляр диаметрлерінің кескіні болады.  **4-мысал.** Шеңберге іштей сызылған дұрыс үшбұрышты кескіндендер.  Шешуі. Шеңберді іштей сызылған дұрыс үшбұрыштың бір қабырғасы болатыны белгілі. Егер нүкте -тың қақ ортасы болса, онда болады да  (228 а – сурет).          а)  D  C  B  A  E  O  б)  *228 – сурет*  Демек дұрыс үшбұрыш болса нүкте радустың қақ ортасы болады екен.  Шеңбердің кескіні эллипс болады. Шеңбердің диаметрінің кескіні эллипстің диаметрі. центрінің кескіні -эллипс центрі болады. Кеіндінің қақ ортасы ол кесіндінің кескінің қақ ортасы болып өзгермей проекцияланатындықтан эллипстен диаметрінің радиусының қақ ортасы нүкте нүктенің кескіні болады. Эллипстен диаметріне түйіндес диаметрге нүктеден параллель етіп хордасын жүргізіп, оның ұштарын нүктеге қосамыз. Сонда шыққан тең қабырғалы үшбұрыш болады.  **5-мысал.** Шеңберді сырттай дұрыс үшбұрыш сызылған. Осының кескінін салу керек.  Шешуі. Шеңбердің кескіні кез келген эллипс болады. Сондықтан кез келген эллипс саламыз. Оның кез келген диаметрін жүргізіп (ол болсын). Оны сызып, оның бойына кесінді салып нүктені табамыз. нүктеден, нүктеден эллипске жанамалар жүргінді. (229–сурет). Олардың қиылысуынан шыққан шеңберге сырттай сызылған дұрыс үшбұрыштың кескіні болады.  E  D  C  B  A  O  а)        б)  *229 – сурет*  Өйткені шеңберден диаметрін сызып (229 б – сурет) салып, және нүктеден шеңберге жанамалар жүргізуге олардың қиылысуынан шыққан тең қабырғалы үшбұрыш болады, шеңберге жанама. бұрыш үшін биссектриса. болғандықтан болады. Жанасу нүктелерін десек, десек . Сонда болсын болады да болады.  Параллель проекциялауда жанасу нүктесі болып проекциланатындықтан, кесінді ортасы сақталатындықтан, перпендикуляр бағыттар түйіндес болып түрленетіндіктен -тың кескіні болады.  **6-мысал**. Шеңберді іштей, сырттай сызылған квадраттың кескіндеу керек.  Шешуі. Шеңбердің кескіні эллипс болады. Оның түйіндес екі диаметрлерінің ұштарын қосатын төртбұрыш шеңберді іштей сызылған квадраттың кескіні болады. Ал, түйіндес диаметр ұштарынан эллипске жүргізілген жанамалардың қиылысуынан шыққан төртбұрыш шеңберді сырттай сызылған квадраттың кескіні болады.  **7-мысал. -**тың кескіні берілген. Осы кескінде биссектрисаның кескінін салыңдар.  Шешуі. Проекциялағанда бұрыш шамасы өзгеріп кетеді, бірақ нүкте қабырғаны қандай қатынаста бөлсе, -тың кескіні нүкте -тың кескінін -ны сондай қатыста бөлу керек. Сондықтан болатын нүктені тауып -ға қоссақ кесінді биссектрисаның кескіні болады (230 – сурет).      D  C  B  A  *230 – сурет*  Егерде кескін берілген нүктеден жүргізілген биссектрисаның кескінін сал десе, онда болатын нүктені тауып, оны -ға қосады. Сонда кесінді бұрыштың биссектрисасының кескінін бейнелейді.  **8-мысал.** Тең бүйірлі тікбұрышты үшбұрыштың кескіні салынған. Сол кескінде қабырғасы берілген тікбұрышты үшбұрыштың катетіне тең және гипотенузасына тең болатын квадраттардың кескіндерін салыңдар.  O  D  C  B  A        *231 – сурет*  Шешуі. Тікбұрышты тең бүйірлі тың кескіні салынып қойылған (231–сурет). *АС* – гипотенузаның, *ВС* мен *ВА* – катеттің кескіндері болсын. Егер ны параллелограмға дейін толықтырғанда параллелограмм шықсын. Бұл параллелограм қабырғасы берілген тікбұрышты үшбұрыштың катетіне тең болатын квадраттың кескіні болады. Өйткені квадрат болады. ны созып, оның бойынан нүктені тапқан соң, мен ны созып салсақ параллелограмм шығады. Ол берілген тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасына қабырғасы тең болатын квадратты кескіндейді. Өйткені салу бойынша *АС* қабырға тың, нүктелер сәйкесінше нүктелердің кескіні. Ал, қабырғасы гипотенузаға тең болатын квадрат.  **§43. Кеңістіктегі денелерді кескіндеу**  Кеңістік денелерінің жазықтықтағы кескінін салу Польке–Шварц теоремасына негізделген. Ол теорема бойынша кеңістік реперін (яғни кеңістік денесінің кезкелген үшеуі бір түзуде жатпайтын 4 нүктесін) еркін алып, олардың кескінін жалпы жағдайдағы 4 нүктемен (яғни кезкелген төртбұрышпен) кескіндеуге болады.  Кеңістік денесі ол денені анықтайтын бет арқылы, ал бет оны қоршаған түзу, сызықтар арқылы, ал түзу екі нүктесі арқылы анықталатыны белгілі. Сондықтан кеңістік денесінің кескінін салу үшін оны анықтайтын нүктелердің кескінін салса жеткілікті. Мысалы төртбұрышты пирамида кескінін салу үшін, оның 5 төбесінің кескінін салса болғаны.  Бұл бапта мектеп оқулығында көп кездесетін көпжақты денелердің, айналу денелерінің кескінін салу мәселесімен айналысамыз. Салу процесінде параллель проекциялауды қолданамыз. Сондықтан параллель проекциялау қасиеттерін пайдаланамыз.  **1. Тетраэдрді кескіндеу.** Тетраэдр өзінің төрт төбесімен толық анықталады. Польке–Шварц теоремасы бойынша кеңістік денесінің бір түзуде үшеуі қатарынан жатпайтын 4 нүктесін кезкелген үшеуі қатарынан бір түзуде жатпайтын 4 нүктемен еркін кескіндеуге болады. Сондықтан тетраэдрдің кескіні кезкелген формадағы еркін алынған төртбұрыш болады.  S  C  B  A  S  B  A  C  C  B  A  S  *232 – сурет*  232 – суреттегі фигуралардың кезкелгенін тетраэдрдің кескіні үшін алуға болады. Оның біріншісінде кескін дөңес төртбұрыш, басқасында ойыс төртбұрыш арқылы берілген. Олардың барлығында да тетраэдр төбесінен кескіні , табанының кескіні . Берілген дененің кескінінде көрінбейтін бөлігі штрих сызықпен сызылған, ол кескіннің көрнекілігін арттырады. Бұл кескіндердің ішіндегі көрнекісі деп біріншісін алуға болады.  **2. Параллелепипедті кескіндеу.** Параллелепипед тік, тікбұрышты және көлбеу болуы мүмкін. Олардың жақтары тік төртбұрыш, параллелограмм болады. Польке–Шварц теоремасы бойынша оның 4 төбесінің кескінін еркін салуға болады. Қалғандарын параллель проекциялау әдісімен есептеп салады. Еркін салынатын 4 нүктенің 3 – еуін параллелепипедтің табанын кескіндеуге, қалған біреуін екінші табанын кескіндеуге пайдаланамыз.  Кеңістікте параллелепипед берілсін (233 а–сурет). Оның кезкелген 4 нүктесінің (мысалы төбелерінің) кескінін еркін алайық. Ол болсын (233 б, в, г–суреттер) ны параллелограмға толықтырып ны табамыз. Бұл параллелограмның төбелерінен ге параллель түзулер жүргіземіз. нүктеден ға параллель жүргізіп қиылысу нүктелері мен ді табамыз (). ден ға, ден ға параллель жүргізіп, олардың қиылысу нүктесі ді табамыз. Осымен параллелепипедті кескіндеу аяқталады. Іздеген кескін болады. 233 б, в, г–суреттің кезкелгені тік, тікбұрышты, көлбеу параллелепипедтің кескіні болады.                а)  D  C  B  A          б)  *233 – сурет*  Әдістемелік мақсатта көрнекілігін арттыру үшін параллелепипедтің көрінбейтін сызықтарын штрих сызықпен сызады және тік, тікбұрышты параллелепипедтің бүйір қырларын дәптер жиегіне параллель етіп салады. Бірақ бұлайша салу міндетті емес.          D  C  B  A  г)          C  B  A  в)  D  *233 – сурет*  **3. Призманы кескіндеу.** Призманың табаны кезкелген қабырғасы көпбұрыш, бүйір жақтары параллелограмдар болатыны белгілі. Бұл кезде кескіні еркін салынатын 4 нүктенің 3 – еуін табанындағы көпбұрышты кескіндеуге, ал қалған біреуімен басқа табанының бір төбесін кескіндейміз.                    E  C  D  B  A  *234 – сурет*  (бізде ) қабырғалы призма берілсін (234–сурет). Призма табанының төбелерін нүктелермен еркін кескіндейік. диагоналдарын жүргіземіз. Олардың диагоналмен қиылысу нүктелері болсын. нүктелердің кескіндері нүктелер тың кескіні ВЕ–де жатуы керек және қатысты қанағаттандыруы керек. Одан әрі сәулелерін жүргізіп, олардың бойынан сәйкесінше, және шарттарын қанағаттандыратын және нүктелерін анықтаймыз. Сонымен кескін анықталды. Бұл нүктелерден қырына параллель түзулер жүргізіп, олардың нүктеден қырларға параллель етіп жүргізілген түзумен қиылысу нүктелері және нүктелерді табамыз. Бұл нүктелерден түзулеріне параллель жүргізіп қиылысу нүктелері мен ді табамыз. Сонымен призманың кескіні салынып бітті.  Егерде болса, нүктелерді тауып табанының 6,7... төбелерін табамыз.  **4. Пирамиданы кескіндеу.** Пирамиданың табаны 3,4,5,...*n* қабырғалы көпбұрыш, бүйір жақтары ортақ төбелі үшбұрыштар болады. Оның табаны қанша қабырғалы көпбұрыш болса да, оның 3 төбесін еркін кескіндейміз. Осы 3 төбенің жәрдемімен (призма табанының төбелерін салған әдіспен) қалған төбелерінің кескінін саламыз. Еркін кескінделген 4 нүктенің қалған біреуін пирамида төбесін кескіндеуге пайдаланамыз. Ол нүктені пирамида табаны болатын көпбұрыштың сыртынан аламыз да, оны табанының барлық төбелеріне қосамыз. Сонымен пирамиданы кескіндеу жұмыс аяқталды.      D  C  B  A  *235а – сурет*  Қиық пирамиданы алдымен толық пирамида етіп салып, одан соң табанына параллель жазықтықпен қиған жөн. Кері жағдайда сурет қате болуы мүмкін. Мысалы қиық пирамида 235а – суретте қате кескінделген. Өйткені қырлары бір нүктеде қиылыспайды.  **5. Айналу денелерін кескіндеу**  **а) Цилиндрді кескіндеу.** Дөңгелек цилиндрді қарастырайық. Ондай цилиндр тік немесе көлбеу болуы мүмкін және табандары өзара тең дөңгелектер болады. Мұндай цилиндрлердің кескінін салудың жалпы ережесі мынандай.  Алдымен кезкелген эллипс салады да, оны цилиндрдің табаны деп қабылдайды. Оның центрінен кезкелген бағытта түзу жүргізеді (ол цилиндрдің өсінің кескіні болады). Ол түзу бойынан, салынған эллипстің сыртында жатқан кезкелген бір нүктесін алып, оны екінші табанының центрі үшін қабылдайды. Центрі осы нүкте болатын бас бағыттары салынған эллипстің бағытымен бірдей болатын және оған тең болатын эллипс салады. Бұл цилиндрдің екінші табанының кескіні болады.  Осы салынған эллипстерге ортақ «шеткі» жанамалар жүргізеді. Олардың жанасу нүктелері эллипстің диаметрі қарама–қарсы нүктелері болады. Бұл нүктелер жалпы жағдайда эллипс өстерінің ұштары бола бермейді. Осымен цилиндр кескінделіп бітеді (236 а – сурет).  б)    D  C  B  A  O  а)  *236 – сурет*  Мектепте тік дөңгелек цилиндр қарастырылады. Ондай цилиндрдің екі табаны, параллель жазықтықтарда жататын өзара тең дөңгелектер болады. Цилиндр өсі, жасаушылары бұл жазықтықтарға перпендикуляр болады. Жасаушылар жиыны цилиндрлік бет жасайды. Бізге дөңгелек, тік цилиндр (236 б–сурет) берілсін. Оның өсі проекция жазықтығы ге (парақ жазықтығына) параллель болатындай етіп орналастырылсын. Проекциялау бағытын цилиндр өсін басып өтетін, жазықтығына перпендикуляр болатын жазықтыққа параллель болатындай етіп алайық. Осындай жағдайда кескін көрнекі болады. Егер проекциялау бағыты табан жазықтығына параллель болса кескін тік төртбұрыш болып шығып, цилиндрге ұқсамай (көрексіз болып) қалады.  Проекциялау бағытын осылайша таңдап алған кездегі цилиндрдің дегі кескінінің қандай болатынын қарастырайық. цилиндрдің жоғары табаны дөңгелек, центрі нүкте, ал өзара перпендикуляр диаметрлері болсын. ты жазықтығына параллель етіп алайық. Цилиндрдің жасаушылары болсын. Бұлардың шеңбермен түйісу нүктелерінен шеңберге жанамалар жүргізейік.  Жоғарыда келісілген бағытта цилиндрді жазықтыққа проекцияласақ шеңбер эллипске, шеңбердің өзара перпендикуляр диаметрлері эллисптің өзара түйіндес диаметрлері -ға (олар эллипстің өстері болады) проекцияланады. Ал, (және ) түзулер арқылы анықталатын жазықтық ге перпендикуляр болатындықтан олардың проекциялары беттесіп кетеді. Сондықтан ( шеңберге жанама болғандықтан) олардың проекциялары мен түзулер эллипске жанама болады (236 б – сурет).  Кескін көрнекі болу үшін проекциялау бағытын болатындай етіп алу керек. Ол үшін проекциялау бағытын сол бағытта нүктеден жүргізілген түзу табан жазықтығын болатын нүктеде қиятындай етіп алу керек (236 г – сурет). Осылай етіп проекциялағанда ~ болады. Бұдан екенін ескерсек , ал болғандықтан болып шығады. эллипстің кіші, АВ үлкен өсі болады және цилиндр өсінің проекциясында жатады.  Жоғары табан салынған соң, табанына перпендикуляр сәуле жүргізіп нүкте центр болатын өстері эллипстің өстеріне тең және бағыттас болатын эллипс салу керек. Одан әрі , шеткі (контурлық) жасаушыларды жүргізу керек. *А* мен *В*, мен диаметрлі қарама – қарсы нүктелер болулары керек, яғни проекцияда (кескінде) цилиндрдің дәл жартысы көрініп тұруы керек.  Цилиндр өсін және эллипстің үлкен өсін *АВ*–ны проекция жазықтығына параллель етіп қойғандықтан олардың қатынасы сақталып проекцияланады, яғни болады. Мұны кескін салуда, есеп шығаруда ескеру керек.  **1–мысал.** Цилиндрге сырттай сызылған тікбұрышты параллелепипедті кескіндеңдер.  Шешуі. Цилиндрдің табандары эллипс болады. Шеңберді сырттай сызылған тікбұрышты параллелепипедтің табаны шеңберге сырттай сызылған квадрат болады, ал квадраттың кескіні параллелограмм болады. Сондықтан салуды мына тәртіпті жүргіземіз (237 – сурет).    *237 – сурет*  1 – Цилиндр кескінін саламыз. Оның табаны эллипс болады.  2 – Бір табанынның түйіндес екі диаметрін жүргіземіз. Ол болсын.  3 – Бұл диаметрдің ұштарынан эллипске жанамалар жүргіземіз. Олардың қиылысуынан шыққан параллелограмм шеңберге сырттай сызылған квадраттың кескіні болады.  4 – Цилиндрдің 2 – табанының центрі ден ға параллель жүргізіп параллелограмның төбелері ден ге параллель жүргізіп ол табанда сырттай сызылған параллелепипедтің кескіні болады.  **1–мысал.** Цилиндрдің өзара перпендикуляр екі өстік қимасының кескінін салу керек (238 – сурет).  *238 – сурет*  Шешуі. Цилиндрдің өстік өстік қимасы деп цилиндр мен оның өсі арқылы өтетін жазықтықтың қиылысуынан шығатын тік төртбұрышты айтады. Егер екі өстік қима шеңбердің өзара перпендикуляр диаметрлері арқылы өтсе, онда ол қималарды өзара перпендикуяр болады.  Сондықтан эллипстің өзара түйіндес екі диаметрін (мысалы *АВ* мен ) салып, олардың ұштарынан екінші табанымен қиылысқанға дейін жасаушылар жүргізсе цилиндрдің өзара перпендикуляр өстік қималарының кескіні болады.  **2-мысал Конусты кескіндеу.** Мектеп курсында негізінен тік дөңгелек конус қарастырылады. Көлбеу конуста кездеседі. Конусты кескіндеу, алдымен оның табаны дөңгелектің (шеңбердің) кескіні – эллипсті салудан басталады. Ол эллипстің центрін тауып, ол нүктеден кезкелген бағытта түзу жүргізіп (ол конус өсінің бейнесі болады), ол түзу бойынан шеңбер контурынан тыс жататын бір нүкте алып (ол конус төбесінің кескіні болады). Ол нүктеден табаны эллипске екі жанама жүргізеді. Ол жанамаларды конустың контурлық «шеткі» жасаушылары дейді. Олардың жанасу нүктелері диаметрі қарама – қарсы нүктелер болмайды. Конустық кескінде жартысынан көп бөлігі көрініп тұрады. 239 а – суретте контурлық жасаушылар *АС* диаметр, конус өсі.  б)  *239а – сурет*  Кеңістікте жазықтығы және тік дөңгелек конус берілсін (239 б – сурет). конус табаны болатын шеңбердің өзара перпендикуляр диаметрлері болсын. конус өсін, диаметрін проекция жазықтығы ге параллель болатын етіп конусты орналастырайық. Проекциялау бағытын, бұл бағытқа конус төбесі тен жүргізілген түзу табан жазықтығығн шеңберден тыс болатын нүктеде қиятындай етіп және жазықтығы жазықтығына перпендикуляр болатындай етіп таңдап алайық. нүктеден шеңберге жанамалар жүргізейік. Сондағы кесінділер конустың контурлық жасаушылары делінеді. Осылайша орналасқан конустың жоғарыда таңдап алынған бағыттағы жазықтықтағы кескіні қандай болатынын анықтайық. Конустың табаны шеңбердің проекциясы эллипске, ал шеңбердің диаметрлері эллипстің түйіндес диаметрлеріне, төбесі нүктеге проекцияланады және болғандықтан болады. Сөйтіп *АВ* эллипстің үлкен, кіші өсі болады және конус биіктігінің проекциясы мен бір түзуде жатады (239 в – сурет). жазықтығы проекциялау бағытына параллель болғандықтан пен тың проекциялары да беттесіп кетеді. Сондықтан контурлық жасаушылардың проекциялары мен эллипске оның нүктелерінде жанасады. пен шеңберге жанама болғандықтан болады. Ал, (себебі болғандықтан болады. Сондықтан бұлардың проекциялары болады. Демек центрден өтпейді, яғни мен диаметрлі қарама – қарсы нүктелер болмайды. Сөйтіп конустың кескіні 239 в – суреттегідей болады.  а)  S  А  С  В  О  в)  D  S  N  M  C  B  A  О  *239 – сурет*  **3–мысал.** Конусты сырттай сызылған табаны ромб болатын пирамиданы кескіндеу керек.  Шешуі. Алдымен конустың кескінін саламыз. Оның табаны қандайда бір эллипс болады. *О* – ның центрі болсын, эллипстің кезкелген бір диаметрін жүргізіп, оның бойынан конус табанынан тыс жататын болатын *А,В* нүктелерді алып, ол нүктелерден эллипске жанамалар жүргіземіз. Олардың қиылысу нүктелері болсын. Сонда параллелограмм шеңберге сырттай сызылған ромбының кескіні болады (240 – сурет). нүктелерді конус төбесінен кескіні пен жалғасақ іздеген пирамида болады.  Егер эллипстің кезкелген екі диаметрін жүргізіп, олардың ұштарынан эллипске жанама жүргізсе, ол жанамалардың қиылысу нүктесі ромбының төбелерінің кескіні болады (Егер диаметрлер түйіндес болса, онда квадрат болады).  б)  E  C  B  A  S  K  O  S  D  C  B  A  O  а)  б)  *240 – сурет*  **4–мысал.** Конусты іштей сызылған, табаны дұрыс үшбұрыш болатын, пирамиданы кескіндеңдер,  Шешуі. Конустың кескіні берілген. Оған іштей, табаны дұрыс үшбұрыш болатын пирамиданы салу үшін эллипсті іштей дұрыс үшбұрыштың кескіні ны салады. Ол үшін кезкелген *ВЕ* диаметрін жүргізіп, *ЕО* радиустың қақ ортасы *К* нүктеден *ВЕ* диаметрге түйіндес *АС* хорда жүргізеді. Сонда дұрыс үшбұрыштың кескіні болады. *А,В,С* төбелерді конус ке қоссақ іштей мызылған пирамида шығады (240 б – сурет).  **в) Шарды кескіндеу.** Шардың жазықтықтағы кескінін салу үшін, оның әрбір нүктесінен проекциялау бағытына параллель түзулер жүргізу керек. Сонда сол бағыттағы шарға жүргізілген жанамалар жиыны цилиндрлік бет жасайды. Ол проекция жазықтығымен жалпы жағдайда эллипс жасап қиылысады (241 а – сурет). Сол эллипс сызығын шардың көрінісі дейді. Сол көрініспен шектелген жазықтық бөлігі шардың жазықтықтағы кескіні болады. Бірақ ол кескін көрнекі емес (шарға ұқсамайды). 241 а – суретте шар, оның жазықтықтағы кескіні, шар көрінісі.  N  M  B  A  O  C  D  д)  γ  M  N  B  A  C  D  O  F  б)  а)  О  *241 – сурет*  Шар кескіні көрнекі (өзіне ұқсас) болу үшін шарды жазықтыққа ортогонал проекциялайды. Бұл кезде шардың көрнекісі (абрисі) шеңбер болады. Шар кескіні осы шеңбермен шектелетін дөңгелек болады. 241 б – суретте шардың оның центрінен өтетін жазықтықтағы ортогонал проекциясы берілген. Ондағы шар, шардың штрихтелген үлкен дөңгелегі оның проекциясы, шеңбер шардың көрінісі.  Шар кескінінің көрнекілігін арттыру үшін оның көрінісі (абрисі) болатын шеңбермен қатар, оның үлкен дөңгелегінің бірін (экваторын) және оған перпендикуляр болатын диаметрдің шармен қиылысу нүктелерін (оны шардың полюстері дейді) қоса кескіндейді. Экватор жазықтығын проекция жазықтығына перпендикуляр болмайтындай етіп алу керек. Кері жағдайда экватор кескіні кесінді болады да, кескін көрнекілік болады.  г)  K  L  E  T  B  A  О  C  D  M  N  в)  O  N  C  D  B  A  M    *241 – сурет*  Сонымен щардың кескінін (241 г – сурет) салу үшін:  1–ден, сол шардың радиусына тең радиуспен шеңбер сызады (бұл шардың көрінісі (абрисі) болады, оның өзара перпендикуляр диаметрлерін жүргізеді.  2–ден, шардың экваторының (ол шеңбер болады) кескіні болатын эллипс салады. Ол үшін шардың бір диаметрін (әдетте горизонталь орналасқан диаметрін, ол болсын) эллипстің үлкен өсі *АВ* үшін алады. Оған перпендикуляр болатын диаметрін диаметр бойынан еркін алады, бірақ болу керек, және болу керек. Өстері болатын эллипсті салуды білеміз (§42–де қарастырғанбыз). Сол әдіспен шардың экваторының кескінін саламыз.  3–ден, салынған экваторға сай келетін шар полюстерін кескіндейміз. Шардың экватор жазықтығы проекция жазықтығы мен бұрыш жасасын (241 в – сурет). мен дің қиылысу сызығында жатқан диаметр *АВ* мен бұған перпендикуляр болатын диаметрлер салынса онда эллипс экватор – шеңбердің ортогонал проекциясы болғандықтан *АВ* эллипстің үлкен өсі, ал кіші өсі диаметрдің ортогонал проекциясы болады. диаметр де жатқандықтан болады. Өстері болатын эллипс берілген шардың ортогонал проекциясы болады.  Сонда 241 в–суреттен . Мұндағы шар радиусы ны еркін алып осы формуладан оған сай келетін ды табуға болады. Егер 241 г–суреттегідей экватор кескіні ға *С* нүктеден жанама жүргізсек шығады. Бұл үшбұрыштан болады. Мұны мен салыстырсақ болып шығады.  Салынған экваторға сай келетін шар полюстері десек, экватор жазықтығына перпендикуляр болатындықтан болады. Сондықтан болып, мен бір түзуде жатады және мен нүктелер *О* нүктеге қарағанда симметриялы болады. түзуі проекция жазықтығымен бұрыш жасайтындықтан (241 в–сурет). Ал, 241 г–суреттегі дан болатындықтан ны ескерсек болады. Демек диаметрге кесінділер өлшеп салсақ нүктелер табылады. Бұлар полюс кескіндері болады. Сонымен 241 г–суреттегі болатындықтан , болады.  Полюстер диаметрдің ұштары болғандықтан *М* шардың көрінетін бетіне жатса, көрінбейтін жартысында жатуы керек. Міне сондықтан да 242–сурет дұрыс кескін емес. Егер нің екеуі де шар абрисінде жатса, онда экватор *АВ* кесіндімен беттесуі керек.  B  A  O  N  M  F  K  E  L  C  D  *242 – сурет*  Кейде шар кескінінің көрнекілігін одан әрі арттыру үшін шардың абрисі, экваторы, полюстерімен қатар шардың бір немесе екі меридианасын қоса кескіндейді. Ол үшін шар экваторының кезкелген екі түйіндес диаметрін жүргізеді. Ол болсын (242–сурет). Одан соң өстері мен болатын және мен болатын эллипстер салады. Меридиана диаметрін бастыра жүргізілетін жазықтықтың шармен қиылысу сызығы (шеңбер) болғандықтан, меридианалар шар полюсінен өтеді.  **Ескерту:** Шар ортогонал проекцияланатындықтан шарға тиісті фигураларда ортогонал проекциялануы керек.  **5–мысал.** Шарға іштей дұрыс төртбұрышты пирамида салу керек (243 – сурет).  D  A  B  C  S  O  *243 – сурет*  Шешуі. Біріншіден, шардың көрінісін (абрисін) саламыз. Ол шеңбер болсын. Екіншіден, шардың кезкелген параллелін жүргіземіз. Ол эллипс болсын. Үшіншіден, эллипсті іштей квадраттың кескіні ны саламыз (ол түйіндес диаметрлермен ұштарын қосатын параллелограмм болады. Төртіншіден, шардың абрисінен не оның ішінен бір нүктесін аламыз (пирамида дұрыс болған кезде үшін шардың бір полюсін алған жөн), ол пирамида төбесінің кескіні болады. Оны нүктелерге қоссақ шарды іштей сызылған табаны квадрат болатын пирамида кескінделіп шығады.  **§44. Аксонометрия. Аксонометриялық координаталар жүйесі**  Кеңістік денелерін жазықтыққа параллель проекциялау арқылы олардың кескінін салу жолымен таныстық. Ол жолмен салынған кескін көрнекі (яғни оригиналға ұқсас) болады, бірақ ол кескін метрикалы анықталмаған болады, яғни ол кескін бойынша оригиналдың өлшемдерін анықтауға болмайды. Сондықтан техникада кескіні бойынша оригиналдың өлшемдерін анықтауға мүмкіндік беретін проекциялау әдістері қолданылады. Мұндай кескіндерді қайтымды кескін дейді. Қайтымды кескінді салуға аксонометриялық проекциялау және Монж әдістері жатады. Аксонометриялық проекциялау әдісімен салынған кескін әрі қайтымды әрі көрнекі болады. Бұл әдіс координаттық әдіске негізделген.  **44.1. Аксонометриялық проекция.** Үш өлшемді аффиндік немесе евклидтік кеңістікке аффиндік немесе тікбұрышты декарттық координата жүйесі ендірілсін. Егер оның координаттық векторлары болса, онда болатын берілген аффиндік координаталар жүйесіне сай келетін аффиндік репер делінеді.  Кеңістіктің нүктесінің координата жазықтық – тарындағы, сәйкесінше координата өстеріне параллель проекцияларын арқылы белгілейік (244 а–сурет). Сонда сынық сызық нүктенің координаттық сынық сызығы делінеді. Егер нүкте координаталары болса, онда  (44–1)  a)  z  y  x  в)  z  M  y  O  *244 – сурет*  Осы сынық сызықты салу арқылы нүкте салынады. нүктені және оның проекциялары нүктелерді координата жүйесімен қоса координата жазықтықтарына және жазықтыққа параллель болмайтын вектордың бағытында қандай да бір жазықтығына параллель проекциялайық (244 б–сурет). Сонда нүктелері және түзулері шықсын. Бұл кезде берілген аффиндік репердің кескіні, ал сынық сызығы нүктенің координаттық сынық сызығы кескіні болады (244 б, в – сурет).  Параллель проекциялағанда бір түзуде жатқан кескінділер қатынасы сақталатындықтан  (44–2)  Бұл теңдіктерден, егер репердің жазықтықтағы кескіні берілсе, онда нүктенің репердегі координаталары бойынша тің жазықтықтағы кескіні *М*–ді салуға болатыны көрінеді. Ол үшін (44–2) бойынша векторларды салса болатыны, *М*–іздеген кескін болады.  z  y  x  б)  *244 – сурет*  Нүкте кескінін осылайша сала білген соң, нүктелер жиыны фигураның кескіні ті салу қиын болмайды. Кескін салудың бұл баяндалған әдісі **аксонометриялық проекциялау әдісі** делінеді. *О*– аксонометриялық координата жүйесінің басы, өстері– аксонометрия өстері делінеді (Аксонометрия өс бойынша өлшеу деген сөз). аксонометриялық координата жүйесі делінеді.  Польке–Шварц теоремасы бойынша репердің жазықтықтағы кескіні үшін ол жазықтықтың жалпы жағдайдағы кезкелген 4 нүктесін алуға болады. Демек аксононметриялық координат жүйесінің төбесін және өстерін еркін алуға болады. Бірақ нүктелердің кезкелген үшеуі бір түзуде жатбауы керек, яғни жалпы жағдайдағы 4 нүкте болу керек.  **44.2. Аксонометриялық проекцияның түрлері.** Егер кесіндіні қандайда бір бағытта проекциялағанда *АВ* кесінді шықса, онда мына санды  (44–3)  осы бағыттағы бұрмалану коэффициенті дейді.  Сонда өстері бағытындағы бұрмалану коэффициенттерін десек, олар мынаған тең болады  (44–4)  Егер баста берілген координата жүйесі тікбұрышты декарттық координата жүйесі болса бірлік векторлар болады да ( болады) өстері бойынша бұрмалау коэффициенттер болады. Бұл кезде кесінділердің ұзындықтарын аксонометриялық бірлік дейді, олар сәйкесінше өстері бойынша бұрмалану коэффициенттер болады.  Егер координата жүйесін жазықтығына проекциялау бағыты (яғни бағыты) жазықтығына перпендикуяр болса (перпендикуляр болмаса), онда аксонометрия тікбұрышты (қиғаш бұрышты) аксонометрия делінеді.  Аксонометрия бұрмалану коэффициенттеріне қарай былайша болады:   * Егер болса изометрикалы аксонометрия делінеді; * Егер болса диметрикалы аксонометрия делінеді; * Егер бір–біріне тең болмаса триметрикалы аксонометрия делінеді.   Аксонометриялық проекция проекиялау бағыты мен проекция жазықтығының қалай алынуына (орнына) байланысты болады.  Аксонометриялық проекциялаудың төмендегі 5 түрі кең қолданылады.   1. Тікбұрышты изометрикалы аксонометрия 2. Тікбұрышты диметрикалы аксонометрия 3. Қиғаш бұрышты фронтальды изометрикалы аксонометрия 4. Қиғаш бұрышты горизонтальды изометрикалы аксонометрия 5. Қиғаш бұрышты фронтальды диметрикалы аксонометрия   Бұларға қысқаша шолулар жасайық.  **44.3. Тікбұрышты аксонометриялық проекция.**  **1. Іздік үшбұрыш.** Мұнда берілген координата жүйесі жазықтығына перпендикуляр бағытта проекцияланады. Сонда тікбұрышты аксонометриялық проекция делінеді. болған кезде өстері жазықтығын *А,В,С* нүктелерде қисын. Сонда аксонометриялық өстер: х–өсі *ОА*, у–өсі *ОВ*, –өсі *ОС* түзулері болады. Осы кезде шыққан ны іздік үшбұрыш дейді (245–сурет).  O  C  A  B  y  x  z    *245 – сурет*  Егер және түзулері арқыл жазықтық жүргізсек ол жазықтығын жазықтығы бойымен қияды және болатындықтан бұл жазықтық ге перпендикуляр болады. жазықтығы жазықтығынада перпендикуляр болады. Өйткені жазықтыққа өсі перпендикуляр және ол жазықтықта жатыр. Сондықтан болады. Демек іздің ның *С* төбесінен жүргізілген биіктік өсі болады екен. Осы сияқты х өсі *ВС* – ға, у өсі *АС* – ға жүргізілген биіктікпен беттеседі. Сөйтіп іздік үшбұрыштың биіктіктері тікбұрышпен аксонометриялық өстер болады, ал ол биіктіктердің қиылысу нүктесі аксонометриялық координата жүйесінің төбесі болады.  **2. Аксонометриялық масштаб.** Аксономатриялық координата өстеріне масштабты салу жолын қарастырайық. Ол үшін 245–суреттегі ны *АВ*, ны ВС, ны *АС* түзулері айналасынан бұрып жазықтығымен беттестірейік. Сонда 246–сурет шығар еді және нүкте нүктелерге көшеді. Мұнда . Сондықтан егер нүктеден бастап және нүктелерден ға параллель түзулер жүргізсек х өсінде , у өсінде кескінділер аламыз, олар кесінділердің аксонометриялық кескіні болады.  Осы сияқты немесе кесінділерге немесе нүктеден өлшеп салып тен ке параллель жүргізсек өсінің бойынан кесінді аламыз. Ол тің аксонометриялық проекциясы болады. Сөйтіп аксонометриялық өстеріне аксонометриялық масштабты салуға болады (246 – сурет).  z  С  В  А  О  *246 – сурет*  **3. Бұрмалану коэффициенттері арасындағы байланыс.** 245–суретте болғандықтан болады. Ал, , , дейік. Сонда , , . Бұдан тікбұрышты аксонометрияда бұрмалану коэффициенті 1–ден кіші болатыны көрінеді. Бұлардан . Сөйтіп, өс бойынша бұрмалану коэффициенттері арасында мынадай қатыс болады екен.    (44 – 5)  **4. Шеңбердің аксонометриялық проекциясы.** координата жазықтығында жарты шеңбер жатсын. Оның бағыттағы проекциясы , бұл жарты эллипс болады. Оның үлкен өсі шеңбер диаметрі , кіші жарты өсі болады (247–сурет). ты салу үшін бағыттағы бұрмалану коэффициенті ті білуіміз керек. болатындықтан, егер десек . Ал, . Сөйтіп . Осы сияқты координата жазықтығындағы шеңбердің бұрмалану коэффициенті .  Сонымен координаттық жазықтықта жатқан щеңбердің радиусының бұрмалану коэффициенті сәйкесінше өстері бойынша бұрмалану коэффициентімен мынадай қатыста болады екен  (44 – 6)  **44.4. Тікбұрышты изометрикалы проекция.** Егер қарастырылып жатқан тікбұрышыт аксонометрия изометрикалы болса, онда болады да, (44 – 5) бойынша  (44 – 7)  Ал, шеңбердің изометрикалық проекциясы эллипстің кіші өсінің бұрмалану коэффициенті  (44 – 8)  O  F  D  z  у  Е  С  В  х  А  *247 – сурет*  Егер проекция жазықтығы координата өстерінен теңдей кесінділер қиса, яғни болса, онда болғандықтан , болып іздік үшбұрыш тең қабырғалы болады (247–сурет). Сондықтан және болады. Сонымен тікбұрышты изометрикалы аксонометрияның өсі 248 а–суреттегідей болып орналасады және ұзындығы а болатын кесінді 0,82а болып кескінделеді.  z  y  x  a)  x  y  z  O  r  r  б)  3 – бірлік  3 – бірлік  5 – бірлік  5 – бірлік  О  x  y  z  в)  *248 – сурет*  Тікбұрышты изометриялы аксонометриялық өсті салу жолы 248 б, в – суретте көрсетілген. 248 б–суретте *О* нүктені центр етіп кезкелген радиуспен жарты шеңбер салынған, *О* нүктеден шеңбер диаметріне перпендикуляр тұрғызылған, ол өсі болады. нүктеден радиуспен шеңбер сызылады. Олардың қиылысу нүктелерін *О*–ға қоса х,у өстері шығады. 248 в–суретте 5,3 бірлік кесінділер өлшеп салынған. Сонда гипотенуза х,у өстері болады. Техникалық сызбаларда деп алады. Сондықтан фигура проекциясы проекцияның дәл мәнісін есе ұлғайып кескінделеді. Осылай етіп кескіндегенде координата жазықтығында жатқан радиусты шеңбердің проекциясы эллипстің үлкен өсі , ал кіші өсі болып проекцияланады. Бұлайша алынатын тікбұрышты аксонометриялық проекцияны келтірілген (немесе практикалы) изометриялы аксонометриялы проекция дейді.  **1–мысал.** Тікбұрышты изометрикалы аксонометриялық проекцияда кубтың кескіні қандай болады.  OI  z  y  x  *249 – сурет*  Шешуі. Алдымен тікбұрышты аксонометриялық координата жүйесін саламыз (249–сурет). Одан соң кескінделген кубтың шын мәніндегі қырының 0,82 бөлігін әр координаттық өске өлшеп саламыз. Сонда шыққан 249–сурет сол кубтың кескіні болады (егер әр қыры 100см кубтың кескінін салу керек болса 249–суреттегі қырлар 82см етіп салынады.  **2–мысал.** Тікбұрышты изометрикалы аксонометрияда қырлары 30,40,50см болатын тікбұрышты параллелепипедтің кескінін салу керек (250–сурет).  B  A  y  x  z  O  C  30  40  50  *250 – сурет*  Шешуі.  1. Тең қабырғалы саламыз, оның биіктіктерін жүргіземіз. Сонда ол биіктіктердің қиылысу нүктесі *О* тікбұрышты изометрикалы аксонометриялық координата жүйесінің басы, ал үшбұрыш биіктіктері өстер болады. Өстер арасындағы бұрыштар 120° тең болады.  2. Координата жүйесін реконструкциялаймыз, яғни ны, ны *АС* және *ВС* қабырғалар айналасынан бұрып бұл үшбұрыштарды жазықтығымен ( жазықтығымен) беттестіреміз. Ол үшін *АС,ВС* диаметр болатын шеңберлер сызып, *О* – ның х, у өстермен қиылысу нүктесі ті табамыз. нүкте бұрғанда осы нүктелермен беттеседі.  3. нүктені *А,С* нүктелерге нүктені *В* нүктеге қосамыз.  4. өлшеп саламызда нүктеден ға, нүктеден ға, нүктеден ға параллель жүргізіп х өсінен , у өсінен , өсінен ті табамыз. Сонда сәйкесінше 30,40,50см кесінділердің кескіні болады. одан әрі қырлары болатын параллелепипед саламыз. Сол іздеген тікбұрышты параллелепипед болады.  **44.5. Диметрикалы тікбұрышты аксонометрия.** Бұл кезде екі өс бойынша бұрмалану коэффициенті бірдей, ал үшінші өс бойынша бұрмалану коэффициент оларға тең болмайды.  Техникалық сызуларда тікбұрышты диметрикалы аксонометриялық проекцияның мынадай болатын дербес түрі көп қолданылады. Бұдан  (44 – 9)  Сонда (44 – 5) бойынша болып, бұдан  (44 – 10)  болып шығады. Ал, координата жазықтығында жатқан шеңбердің проекциясы эллипстің кіші өсінің бұрмалану коэффициенті (44 – 6) бойынша  (44 – 11)  болады. Сонда радиусты шеңбердің проекциясы болатын эллипстің үлкен өсі , кіші өсі ( жазықтығында), үлкен өсі , кіші өсі ( жазықтығында) болып, осы сандар арқылы салынады.  y  B  z  x  A  C  О  a)  x  О  A  y  z  C  б)    *251 – сурет*  Тікбұрышты диметрикалы проекция кезіндегі аксонометриялық өстерді салу жолын анықтайық.  Ол үшін 251 а–суретте қарастырайық. дейік болғандықтан болады. Бұлардан . Сондықтан болатынын ескерсек,  . Ал, тікбұрышты тең бүйірлі дан . ; . Сонда . Гипотенузасы 4, қарсы катеті 3 болатын тікбұрышты үшбұрыштың бұрышы болады. Осы бұрышты салайық. Ол үшін өсін жүргізіп, оның бойына кесінді саламыз (251 б – сурет). *ОС*–ны диаметр етіп шеңбер сызып, *О* – ны центрі *С*, радиусы 3 шеңбермен қиып нүктені табамыз. Сонда болады,  болады. ді созып саламыз. Сонда болады.  A  T  y  z  x  О  в)  г)  1:2  1:1  1:1  О  x  y  z  *251 – сурет*  Сонда *ОА* түзуі х, түзуі у, *ОС* түзуі өсі болады. тікбұрышты диметрикалық аксонометрия жүйесінің өстері осылайша салынады. таблицадан тапсақ болады. Сондықтан болады. Сонымен қатар екенін ескеріп өсіне перпендикуляр болатын түзуге , оған перпендикуляр етіп салса болады. Сондықтан *ОА* түзуі х өсі болады. ке биссектриса түзуі у болады.  Практикада етіп алады. Мұны келтірілген (немесе практикалық) тік бұрышты диметрикалы проекция дейді. Бұл кезде кескін есе үлкейіп кескінделеді. Мәселен координата жазықтықтарында жатқан шеңбердің проекциясы эллипстің үлкен өсі , кіші өсі болады, ал шеңбер жазықтығында жатса эллипстің үлкен өсі , кіші өсі болады.  251 г–суретте болған кездегі кубтың проекциясы кескінделген. Мұнда өстері бойынша бұрмаланбай, ал у өсі бойынша 2 есе кеміп проекцияланған.  **44.6. Қиғаш бұрышты аксонометриялық проекция.** Бұл кезде натурал координата жүйесі проекция жазықтығы ге перпендикуляр болмайтын бағытта проекцияланады, яғни мен *Т* өзара перпендикуляр болмайды. Сонда қиғаш бұрышты аксонометриялық координата жүйесі болады. Өстер бойынша бұрмалану коэффициенттер проекциялау бағытына сай түрліше болуы мүмкін (1 ден аз да, тең де, көп те бола алады).  O  y  z  x  45°  a)  б)  O  30°  y  z  x  *252 – сурет*  Қиғаш бұрышты аксонометриялық проекциялар ішінде **фронтальды проекция** көп қолданылады. Бұл проекция жазықтығы натурал координаттық жазықтықтардың біріне параллель етіп қойылған жағдайда шығады.  а) Егер проекция жазықтығы вертикал координаттық жазықтықтардың біріне, мысалы жазықтығына параллель етіп қойылса, онда болады. Сондықтан х және өстері бойында кескін бұрмаланбай өз күйінше проекцияланады. Демек болады. Бұл кезде у өсі еркін алынады, яғни ол өстерімен түрлі бұрыштар жасауы мүмкін. Осындай аксонометриялық проекцияны **қиғаш бұрышты фронтальды** аксонометрия дейді.  д)  120  150  90  1:2  1:1  1:1  z  x  y  1:2  1:1  1:1  90  135  135  y  x  z  в)  )  120  150  90  1:2  1:1  1:1  z  x  y  г)  *253 – сурет*  Егер бұл жағдайда проекциялау бағытын у өсі бойындағы бұрмалану коэффициенті ні 1–ге тең болатындай етіп алсақ, **қиғаш бұрышты фронтальды изометрикалы** аксонометриялық проекция шығады. Бұл кезде және у өсі х–өсінің созындысымен 45° жасайтындықтан болып орындалады: . Сондықтан (252 а – сурет) у өсі х өсімен 30°, 60° жасай бағытталатын жағдайларда қолданылады. Бұл кездерде және  болады.  б) Егерде проекция жазықтығы горизонталь орналасқан натурал координаттық жазықтық ке параллель орналасса, онда болады да  болады. Егер проекция бағытын ті 1–ге тең болатындай етіп алсақ оны **қиғаш бұрышты горизонталь** изометрикалы аксонометриялық проекция дейді. Бұл кезде  болады (252 б – сурет). у өсінің горизонталь бағытпен 45°, 60° жасай орналасқан жағдайлары да кездеседі.  B  A  C  D  O  y  x  z  z  y  x  а)  O  *253 – сурет*  в) Егерде вертикал натурал жазықтықтың бірі проекция жазықтығына параллель болса (мысалы болсын), онда болады. Осы кезде проекциялау бағытын болатындай етіп алсақ, мұны **фронтальды диметрикалы** қиғаш бұрышты аксонометрия дейді.  Қиғаш бұрышты диметрикалы аксонометрияның ішінде болатын және болатын түрі көп қолданылады. Мұны **кабинеттік проекция** деп атайды. Мұндағы өстер 252 в – суреттегідей болып орналасады. Сонымен қатар және болатын жағдайларда жиі кездеседі. Бұл соңғы үш жағдайдағы кубтың кескіні 253 а, б, в – суреттерде берілген.  z  y  x  б)  O  z  y  x  в)  O  *253 – сурет*  Шеңбердің кабинеттік проекциядағы кескіні 253 г–суретте кескінделген. өстеріндегі бұрмалану коэффициенттері болғандықтан шеңбердің диаметрлері те бұрмаланбай бейнеленеді, яғни болады. Ал, хОу – те бұрмаланбайды екі есе кемиді. те бұрмаланбайды. екі есе кішірейіп кескінделеді.  **§45. Аксонометриялық кескінде нүкте, түзу және жазықтықтың берілуі.**  Кеңістікте репер және нүкте берілсін. Бұл нүктенің координата жазықтықтарындағы өстерге параллель проекциялары болсын (254 а–сурет). 254 б–суреттегі , олардың жазықтықтағы аксонометриялық кескін болсын. М–ді нүктенің **аксонометриялық проекциясы**, ал ді нүктенің **екінші проекциялары** дейді.  а)    M  z  х  у  O  б)  *254 – сурет*  Егер кескін жазықтығы де нүктенің аксонометриялық проекциясы *М* және кезкелген екінші проекциясының біреуі (мысалы ) берілсе онда нүктенің кеңістіктегі орнын дәл табуға болады. Ол үшін тен у өсіне параллель жүргізіп х өсімен қиылысу нүктесі ты табады. Сонда сынық сызығы нүктенің координаттық сынық сызығы тің кескіні болады. Сондықтан нүктенің репердегі координаталары ті (44 – 2) формула бойынша табуға болады. Сол арқылы нүктенің кеңістіктегі орны анықталады. Сонымен аксонометриялық проекцияда кеңістіктің нүктесі кескін жазықтығы де өзінің аксонометриялық проекциясы *М* – мен екінші проекциясының бірі (мысалы ) арқылы беріледі екен. Кескінде нүкте *М* мен арқылы берілсе, онда М мен нүктелер өсіне параллель түзу бойында жатуы керек. Керісінше өсіне параллель түзуде жатқан *М* мен нүктелер аксонометриялық проекциясы *М*, екінші проекциясы болатын қандай да бір нүктені анықтайды. Сондықтан кеңістікте «аксонометриялық проекциясы *М* нүкте, екінші проекциясы нүкте болатын нүкте берілсін» деудің орнына « нүкте берілсін» дей салады (255 а–сурет).  Егер нүкте координата жазықтығында жатса, онда *М* мен беттеседі.  z  А3  А  О  у  х  а)  б)  a3  а  х  у  z  О  А3  А  в)  В3  В  х  у  z  О  *255 – сурет*  Кеңістікте түзу кескінде өзінің аксонометриялық проекциясы а және екінші проекциясы арқылы (255 б–сурет) немесе өзінің екі нүктесі арқылы (255 в–сурет) беріледі. 255 г–суретте координата жазықтығында жатқан түзу кескінделген. Мұнда мен беттесіп жатыр. 255 д–сызбада түзу және ол түзуде жататын нүктемен ол түзуде жатпайтын нүкте кескінделген. нүкте түзуде жатса, онда жатуы керек. нүктенің аксонометриялық проекциясында жатқанмен екінші проекциясы нүкте те жатқан жоқ. Егер болса да нүкте түзуде жатпайды. нүкте түзуде жатса жатуы керек.  в  z  в3  О  у  х  г)  а3  а  А3  А  В  z  В3  О  у  х  д)  *255 – сурет*  Проекциялауда қиылысып жатқан түзудің проекцияларыда қиылысып жататындықтан және түзулердің қиылысу нүктесінің проекциясы сол түзулердің проекцияларының қиылысу нүктесі болатындықтан түзулердің аксонометриялық проекцияларынан қиылысу нүктесі мен екінші проекцияларының қиылысу нүктесі өсіне параллель түзу бойында жатуы керек (256 – сурет). Сөйтіп болса болуы керек. Мұндағы , түзулер, нүкте.  O  y  x  z  а)  в3  а3  в  а  A3  A  б)  в3  а3  в  а  A3  A  в)  A3  в3  а3  в  а  *256 – сурет*  Егер түзулер параллель болса, олардың проекциялары да параллель болатындықтан болса, онда болады.  256 а – суретте түзулер нүктеде қиылысып жатыр.  256 б–суретте түзулер өске параллель жазықтықта жатыр. Сондықтан олардың екінші проекциялары беттесіп кетеді:и .  256 в–суретте түзулер проекциялау бағыты ға параллель жазықтықта жатыр.  256 г–суретте өзара параллель түзулері кескінделген  256 д–суретте түзулер өсіне параллель жазықтықта жатыр. Сондықтан беттесіп кетеді.  256 е–суретте түзулері проекциялау бағыты ға параллель жазықтықта жатыр.  O  y  x  z  г)  в3  в  а3  а  д)  в3  а3  а  в  е)  в3  а3  в  а  *256 – сурет*  Жазықтық кескінде өзінің үш нүктесі, немесе бір нүктесі мен ол нүктеден өтпейтін бір түзу арқыл, немесе параллель екі түзу, немесе қиылысатын екі түзу арқылы берілуі мүмкін. Себебі бұл 4 жағдайдың төртеуінде де бір ғана жазықтық анықталады (257 – суреттер).  а)  A  A3  O  y  x  z  A3  A  б)  а3  а  в)  в3  а3  в  а  A3  A  г)  в3  в  а3  а  *257 – сурет*  Жазықтық 257–суретте өзінің нүктесі , , арқылы берілген, 257 б – суретте нүкте және оны басып өтпейтін түзуі арқылы берілген, 257 в – суретте қиылысатын, 257 г – суретте параллель болатын түзулер арқылы берілген. Олардың бірінен екіншісіне өтуге болады. Мысалы а) жағдайдағы мен қоса б) жағдай шығады, б – дағы А нүктеден а – ға параллель жүргізсек г) жағдай шығады.  Егер 257 а) жағдайдағы нүктелерді қосса жазықтық АВС және жазықтықтар арқылы беріледі.  258 – суретте жазықтық кескінде үшбұрыштың аксонометриялық проекциясы және екінші арқылы берілген. Осы жазықтықта жататын түзуді салу үшін АВ – дан М нүкте алып ден М нүктенің өсіне параллель проекциясы ті тапқан. Сонда нүкте түзуінде жатады. Дәл осы сияқты нүкте түзуінде жатады. нүктелер түзулерде жатқандықтан олар жазықтықта жатады. Сондықтан олардан өтетін түзуде жазықтықта жатады. нүктеде осы жазықтықта жатады., ал нүкте бұл жазықтықта жатпайды. Себебі жатыр, ал Т нүкте де жатқан жоқ.  y  x  z  C  A3  K3  M3  T3  B3  O  B  T  M  K  A  C3  N3  N  *258 – сурет*  Егерде түзу координата жазықтығын нүктеде қиятын болса, яғни нүкте түзудің жазықтықтағы болса, онда нүктенің аксонометриялық проекциясы М мен екінші проекциясы беттеседі. Сондықтан бұл нүктеде тің аксонометриялық проекиясы а және екінші проекциясы түйіседі. Сондықтан кезкелген түзудің кескініндегі ізін салу үшін мен тің қиылысу нүктесі М – ді салу керек (259 – сурет).  а)  m3  m  М  в)  M3  D3  C3  B3  A3  M  D  C  B  A  б)  N  в3  М  в  а3  а  *259 – сурет*  Егер жазықтығы координата жазықтығын түзу бойымен қиса, онда түзуі жазықтықтың жазықтықтағы ізі делінеді.  Сонда тың аксонометриялық проекциясы *а* мен екінші проекциясы беттеседі.  Сөйтіп тың дегі ізінің кескіні *а* түзуі болады.  Егер түзу жазықтықта жатса, онда ол түзудің ізі сол жазықтықтың ізінд жатуы керек.  **1 – мысал.** 259 б – суретте қандай фигуралар кескінделген.  Шешуі: Онда екі түзу кескінделген және ол түзулер қиылыспайтын, параллель емес айқас түзулердің кескіні. Мұнда . Бірақ, *MN*  түзуі проекциялаушы түзуге параллель емес (*M,N* нүктелер бір вертикал түзуде жатқан жоқ). Сондықтан ол екі нүкте оригиналда бір нүктені анықтамайды, яғни түзулер қиылыспайды. Сонымен қатар а мен в, пен параллель емес, демек пен түзулер параллель де емес. Сондықтан олар айқас түзулер.  **2 – мысал.** Кескінде төрт нүкте берілген. Осы 4 нүкте бір жазықтықта жатыр ма, жоқ па.  Шешуі: берілген (259 в – сурет). Егер мұндағы нүктелер бір түзуде жатбаса, онда олар жазықтығын анықтайды. Егер те осы жазықтықта жатса, онда түзуі тің бір қабырғасы мен қиылысуы керек дейік. Онда бір вертикал түзудің бойында жатуы керек. Сондықтан 259 в – суреттің біріншісінде 4 нүкте бір жазықтықта жатқан жоқ. Ол төртбұрыш емес, екіншісінде олар бір жазықтықта жатыр.  **§46. Толық және толық емес кескін**  Кескін жазықтығы де кеңістік денесі тың кескіні берілсін. Егер бұл кескін тың жалпы жағдайдағы 4 нүктесін тен алынған аффиндік репердің кескіні деп алғанда, фигураны анықтайтын нүктелер, түзулер, жазықтықтар бұл кескінде берілген болса, онда тың дегі кескіні толық кескін делінеді.  Өткен бапта айтқанымыздай кеңістік нүктесі кескінде берілген делінеді, егерде ол нүктенің аксонометриялық проекциясы мен екінші проекциясы берілсе.  B1  C1  D1  A1  D  C  B  A  *260 – сурет*  Түзу кескінде берілген делінеді, егер оның екі нүктесі берілген болса, жазықтық берілген делінеді, егерде оның кескінде үш нүктесі берілген болса (немесе жазықтықты анықтайтын басқа элементтері берілсе).  Бұрын §43 – те салынған пирамида, призма, параллелепипед, конус, цилиндр, шар кескіндері толық кескіндер болады. Мысалы 260 – суретте параллелепипед кескінделген. Оның *В1А1D1С1* төрт нүктесін кеңістікте берілген репердің кескіні үшін алсақ, онда параллелепипедтің барлық төбелері, барлық қырлары, барлық жақтары кескінде берілген болып шығады. Шынында да нүкте кескінде берілген, өйткені кескінде оның аксонометриялық проекциясы *А1* мен екінші проекциясы А берілген (салынған). Осы сияқты нүктелері де берілген. Кеңістіктің нүктесі де кескінде берілген. Өйткені бұл нүктенің аксонометриялық проекциясы да, екінші проекциясы да *А* нүктенің өзі болады ( нүкте репердің координаттық жазықтығында жатыр, сондықтан болады). Осы сияқты төбелерде берілген.  Төбелер кескінде берілгендіктен оларды жалғайтын қырлар да, солар арқылы жасалған жақтарда кескінле берілген.  Сөйтіп параллелепипедті анықтайтын төбелер, қырлар, жақтар 260 – суретте (кескінде) берілген. Сондықтан ол сурет (кескін) толық кескін болады.  **1 мысал.** 261 а – сурете 6 жақты кеңістік денесінің кескіні, ал 262 а – суретте үшбұрышты пирамида мен түзуінің кескіні берілген. бұл кескіндер толық емес (261 – а, 262 – а суреттер толық емес сурет). Өйткені ол суреттердегі нүктелерді кеңістіктегі репердің кескіні десек нүктелер берілген, ал 261 а – суретте (кескінде) нүкте берілген (аксонометриялық проекциясы берілген екінші проекциясы кескінде берілмеген), ал 262 а – суретте нүктелердің аксонометриялық проекциялары берілгенмен, екінші проекциясы берілмеген.  S  C  B  D  A  а)  D3  K  C  B  D  S  A  б)  *261 – сурет*  Бұл кескіндерден қосымша нүктелер алу арқылы, оларды толық кескінге айландыруға болады. Толық емес кескінге оны толық кескінге айландыру үшін қосуға қажетті нүктелер санын ол кескіннің **толымсыздық коэффициенті** дейді.  Егер 261 а – суретте бір нүкте, мысалы *SD* түзуі мен *АВС* жазықтығының қиылысу нүктесі *К* – ны қосса (яғни қосымша анықтаса) онда ол кескін толық кескінге айланады. Шынында да кескінде берілсін. Онда *АК* түзуі *ASD* жазықтықта жатады (261б–сурет). нүктенің аксонометриялық, ал *А* екінші проекциясы болғандықтан, ал нүктенің *К* аксонометриялық проекциясы болғандықтан түзуі үшін аксонометриялық, ал *АК* екінші проекциясы болады. Ал, нүкте жазықтықта жатқандықтан, егер нүктеден ке параллель түзу жүргізсек, ол *АК* – мен қиылысады. Ол болады. Өйткені нүкте нүкте үшін екінші проекция болады (проекция жазықтығы *АВС* жазықтық). Сөйтіп нүкте кескінде анықталды. Сондықтан 261 б – сурет толық кескін болады. Себебі, көп жақтың барлық төбелері, барлық кесінділері мен жақтары кескінде (суретте) берілген болып шықты.  N  M  S  C  B  A  а)  K  M3  N3  N  M  S  B  C  A  б)  *262 – сурет*  262 б – сурет толық кескінге айналу үшін ол кескінде қосымша екі нүкте берілуі керек. Ол екі нүкте үшін нүктелердің екінші проекциялары нүктелерді алуға болады немесе « нүктелер түзудің және жақтармен қиылысу нүктелерінің аксонометриялық проекциялары» деген сөйлем есеп шартына қосымша тіркелуі керек. Сонда ол толық кескінге айналады. Шынында да 262 а – сызбадағы нүктелер түзудің жақтармен қиылысу нүктелерінің аксонометриялық проекциялары деген сөйлем есеп шартына енсе, онда нүктелерін табуға болады. Сонда түзудің аксонометриялық, ал *АК* екінші проекциясы болады. Сондықтан *М* нүктеден ға параллель етіп жүргізілген түзудің *АК –* мен қиылысу нүктесі нүкте нүктенің екінші проекциясы болады. Демек кескінде берілген болады. Осы сияқты нүктені *А* – нүктеге жалғасақ түзудің аксонометриялық, ал екінші проекциясы болады. Сондықтан нүктеден ға параллель етіп жүргізілген түзудің мен қиылысу нүктесі нүкте нүктенің екінші проекциясы болады. Демек, нүкте кескінде берілген нүкте болады. Сондықтан 262 – суретті анықтайтын барлық элементтер кескінде берілген болып шықты. Демек ол толық кескін (сурет) болады.  **3 – мысал.** Жазықтық бір нүкте және одан өтпейтін бір түзу арқылы берілген. Осы кескіннің толық кескінін дәлелдеңдер (263 а – сурет).  Шешуі. Кескіннің толық екенін анықтау үшін ол суретте кескінделген фигураның әрбір нүктесінің берілгенін немесе проекциялау арқылы кескіндеуге болатынына көз жеткізу керек.  Бізде жазықтық нүкте және одан өтпейтін түзуі арқылы берілген. Демек кескінде нүктелер берілген. *МАВ* жазықтықтан кезкелген *С* нүктесін алайық, болсын. *К* берілген *АВ –* жатқандықтан *К3* нүкте *А3В3* – те жатуы керек. Сондықтан *К* нүктеден проекциялаушы түзу (яғни *АА3 –* ке параллель түзу) жүргізіп, оның *А3В3* пен қиылысу нүктесі *К3* – ты табамыз. Сонда *С* нүкте *АСК* – да жатқанқандықтан *С3* нүкте *М3К3* – те жатуы керек. Сондықтан *С* нүктеден *КК3* – ке параллель жүргізіп оның *М3К3* пен қиылысу нүктесі *С3* ті табамыз. Сөйтіп кескінде кезкелген нүкте берілген (анықталған) болып шықты. Олай болса ол кескін толық кескін болады.  C3  B3  K3  A3  M3  B  C  K  A  M  а)  T  N  S3  T3  N3  C3  C3  B3  B3  A3  A3  S  S  B  B  C  C  A  A  б)  *263 – сурет*  **4–мысал.** Үшбұрышты призма мен үшбұрышты пирамиданың біріктірмесінен жасалған көпжақты фигураның кескіні берілген (263 б–сурет). Ол неге толық емес кескін және оны қалайша толық кескінге айналдыруға болады.  Шешуі. Егер кеңістік репері тің кескіні үшін төртбұрышын алсақ (*АВС* – проекция жазықтығы), онда пирамиданың төбелері кескінде анықталған (берілген). Өйткені үшін аксонометриялық, ал *А* екінші проекция болса (яғни ішкі проекциялау бағыты болса), онда болып 4 төбеде суретте берілген. Сондықтан ол нүктелерден жасалған қырларда, жақтарда берілген. Бірақ бұл кезде призма төбелері кескінде берілмеген (өйткені терді бағытында проекция жазықтығы *АВС* – ға проекцияласақ олардың екінші проекциялары табылмайды.  Керісінше, егер проекция жазықтығы үшін призманың төменгі табаны ті алсақ, ішкі проекциялау бағыты үшін призманың бүйір қырларының бағытын алсақ, онда призма төбелері анықталған, ал пирамида кескіні торлық емес болады. Өйткені нүктенің екінші проекциясы кескінде берілмеген. Сондықтан 263 б – суреттің біріншісі толық кескін емес. Оны толық кескінге айландыруға болады. Ол үшін қосымша тағы бір нүктені кескінде анықтау керек. Ол үшін тің проекциялау бағыты призма қырына параллель болған кездегі тің призма табанындағы 2 – проекциясы көрсетілсе жеткілікті (363 б – суреттің екіншісі).  Шынында да берілсе онда призманың анықтайтын да, пирамиданы анықтайтын да кезкелген нүкте кескінде берілген деуге болады. Мысалы жақта жатқан *Т* нүкте берілсе нүктені тауып, одан *ВВ3* ке параллель жүргізіп, оның *В3С3* – тің қиылысу нүктесі ті табуға болады. *Т*  нүктеден ке параллель жүргізіп, оның тің қиылысу нүктесін табуға болады. Ол тің екінші проекциясы болады. Сөйтіп кезкелген *Т*  нүкте кескінде берілген нүкте болады.  **§47. Позициялық және метрикалық есептер**  **47.1. Позициялық есептер.** Кеңістікте екі фигура беріліп, олардың қандайда бір бағыттағы жазықтықтағы проекциялары болсын. Осы фигуралардың екеуіне де артық нүктелерді кескіндеу есептерін **позициялық есептер** дейді.  Егер кескін толық болса позициялық есептердің шешімдері болады. Егер кескін толық емес (толымсыз) болса, онда ондай кескінде есепті шешу үшін кескінде кейбір элементтерді еркін алуға тура келеді.  Жазықтық көпжақты дененің (фигураның) **қима жазықтығы** делінеді, егер ол жазықтықтың екі жағында да көпжақтың нүктелері болатын болса.  Қабырғалары берілген көпжақ жақтары мен қима жазықтықтың қиылысуынан шыққан – кесінділер болатын көпбұрышты **көпжақтың қимасы** дейді.  Тетраэдрдің 4 жағы болатындықтан оның жазықтықпен қиылысқандағы қимасы үшбұрыш, не төртбұрыш болады (264 а – сурет). Параллелепипедте 6 жақ болатындықтан, оның жазықтықпен қиғандағы қимасы үшбұрыш, төртбұрыш, бесбұрыш, алтыбұрыш болуы мүмкін (264 б, в, г – суреттер).  б)  4  4  3  3  3  2  2  2  1  1  1  в)  5  4  3  2  1  г)  6  5  4  3  2  1  4  3  3  2  2  1  1  B  C  A  S  а)  *264 – сурет*  **47.2. Қима салуға мысалдар.** Фигуралардың қимасын салу есептері позициялық есептерге жатады. Қима салуға мысалдар қарастырайық.  **1–мысал.** Бесбұрышты призма берілген. оның қырларында нүктелер жатыр. Осы үш нүкте арқылы анықталатын жазықтығымен берілген призманың қиылысуынан шығатын қиманы салу керек (265 – сурет).  Шешуі. Бесбұрышты призмада 7 жақ болатындықтан берілген нүктелердің қырларда жату жағдайларына қарай қима үшбұрыш, төртбұрыш, бесбұрыш, алты және жеті бұрышты көпбұрыш болуы мүмкін.  265 а – суретте қима қима жазықтығының табан жазықтығындағы ізін пайдалану әдісімен, ал 265 б – суретте сәйкестік (ішкі проекциялау) әдісін пайдалану жолымен салынған.  Егер берілген кескіндерде төртбұрышты кеңістік репері тің кескіні деп қарасақ, онда призманың барлық төбелері кескінде берілген болып шығады. Сондықтан сурет толық кескін болады. Призманың төбелері және оның қырларында жататын нүктелер кескінде берілген (анықталған).    M  N  K  L  E  D  C  B  A  а)  б)  K  N    E  D  C  B  A  *265 – сурет*  1. Кескінді қима жазықтығының ізіне сүйеніп салайық (265 а–сурет). қырларында жатсын. Үш нүктені басып бірғана жазықтық өтеді. Осы жазықтықпен призма қырларының қиылысу нүктелерін тапсақ, қиманы тапқан болып шығамыз. Табан жазықтығын қима жазықтығына дейік.  Біріншіден, шарт бойынша нүктелер қима жазықтығында жатыр. Сондықтан түзуде қима жазықтықта жатады. түзудің табан жазықтығындағы ізі түзумен екінші проекция түзудің қиылысу нүктесі болады. Оны дейік. Осы сияқты нүктелерде қима жазықтықта жатқандықтан нүкте түзудің табан жазықтықтағы ізі болады. Сондықтан түзуі мен жазықтықтың қиылысу сызығы болады.  Екіншіден, болса, онда бұл нүкте түзудің ізі болу керек. мен нүкте жазықтықта жатқандықтан түзуде де жатады. жазықтықта нүкте де, түзуде жатады. Сондықтан ға параллель да сол жазықтықта жатуы керек. Сондықтан және қиылысады. Оны дейік. Сонымен қатар нүкте жазықтығында жатады, себебі түзуде де жатады, ал . Демек қима жазықтығын анықтайтын кесінділер болады. Дәл осы әдіспен нүктені табамыз. Бұл нүктеде де жатады.  Сонымен іздеген қима болады.  2. Енді осы қиманы сәйкестік (немесе іштей проекциялау) жолымен салайық (265 б – сурет).  1) және жүргіземіз, болсын. нүкте да жатқандықтан нен бүйір қырларына параллель жүргізіп бойынан нүктені табамыз. Сонда нүкте тің аксонометриялық, ал екінші проекциясы болады.  2) Дәл осы әдіспен нүктені тапсақ, онда призма қырына параллель жүргізіп түзуі бойынан нүктені табамыз. Сонда нүкте тың аксонометриялық, ал екінші проекциясы болады. қимада жатқандықтан да, да осы қима жазықтығында жатады.  3) болғандықтан бір жазықтықты анықтайды. нүкте сол жазықтықта жатқандықтан болғандықтан да сол жазықтықта жатады. Сондықтан мен бір нүктеде қиылысады және мен қима жазықтығында жатқандықтан да қима жазықтығында жатады. Осы сияқты десек, қима жазықтығында жатады. Сөйтіп іздеген қима болады. Біз мұнда астыңғы табанның төбелері үстінгі табанның төбелеріне сәйкес деп алдық. Олар сәйкес болғандықтан өзара параллель түзулерін жасайды. Осыған сүйеніп ға, ге сәйкес нүктелерді таптық. Осындай сәйкестікті пайдалана отырып қиманың басқа төбелерін таптық.  **2 мысал.** Үшбұрышты пирамиданың кескіні және қырында жатқан жақтарында жатқан нүктелерді басып өтетін жазықтық пен пирамиданың қиылысуынан шығатын қиманы салу керек (266 – сурет).  K  N  R  M  T  L  E  S  C  B  A  *266 – сурет*  Шешуі. нүктелері жақта жатқандықтан нүктелерде қиылысуы керек. нүктелер жазықтықта жатыр. Сондықтан нүктелерде қиылысуы керек ді жүргіземіз. Сонда төртбұрышы пирамида мен жазықтықтың қимасы болады.  **47.3.** **Метрикалық есептер.** Егер кеңістікте репер беріліп оның координаттық векторларын –тің ұзындықтары мен арасындағы бұрыштары белгілі болса (демек векторлардың скаляр көбейтінділерін анықтау мүмкін болса) ол репер декарттық репер делінеді: Мысалы ортонормалаған репер декарттық репер болады. Егер кеңістікте декарттық репер берілсе, онда бұл репердегі нүкте координаталары арқылы ол нүктелермен арақашықтықтарын, бұрыш шамаларын, нүкте мен түзу, нүкте мен жазықтық арасын т.б. осы сияқты сандық сипаттағы есептерді (ондай есептерді метрикалық есептер дейді) дәл шешуге болады.  Егер проекция жазықтығында декарттық кеңістік репердің кескіні R берілсе, онда ол кескін жатқан кеңістік фигурасы -тің толық кескіні F бойынша оригинал - ке тиісті метрикалық есептерді шешуге жеткіліксіз болады. Мысалы фигураның нүктелерінің аксонометриялық проекциялары А мен В, екінші проекциялары арқылы нүктелердің шын мәнініндегі арақашықтығын табуға болмайды. Ал, бұл мұндай метрикалық есептерді шешуде кескін жазықтығы - де репер кескіні R – дің берілуі жеткіліксіз деген сөз.  Сондықтан кескін жазықтығы –дегі R – ден басқа, –ті қозғлысқа дейнгі дәлдікте анықтауға мүмкіндік беретін қосымша мәліметтер, шарттар, сандар (оларды метрикалық параметрлер дейді) берілуі керек. Олар берілсе фигураның нүктесінің аксонометриялық және екінші проекциялары арқылы нүктенің репердегі координаталарын табуға, сөйтіп оригиналға қатысты кез келген метрикалық есептерді шешуге болады.  Егер кеңістік фигурасы болса –ті (сондықтан фигураны) қозғалысқа дейінгі дәлдікте анықтау үшін 6 параметр, ал жазық фигура болса 3 параметр қажет болады. Мұның себебі кеңістіктегі декарттық репер 6 параметрмен (векторлардың ұзындықтары және олар арасындағы бұрыштар) анықталады, ал жазықтықтағы декарттық репер 3 параметрмен ( вектор ұзындықтары және олар арасындағы бұрыш) анықталады.  Көптеген жағдайда кеіңстік репері ті ұқсастыққа дейінгі дәлдікте анықтаумен шектеледі. Бұл жағдайда кеңістік фигурасы болса ті ұқсастыққа дейінгі дәлдікте анықтау үшін 5 параметр ( бұрыштар мен  қатынастар), ал жазықтық фигурасы болса 2 параметр ( бұрыш және қатынас) жеткілікті.  фигураның кескіні *F* ***Евклидтік анықталған*** кескін делінеді, егерде ол кескінге репердегі кескіні *R* мен параметрлерді кескін *F* толық болатындай және алынған параметрлер реперді кеңістікте ұқсастыққа дейінгі дәлдікте анықтайтындай етіп ендіруге болтын болса. Сонымен фигураның кескіні –ке репер кескіні *R*–ді *F* толық кескін болатындай етіп тіркеуге мүмкін болса және –текті қозғалысқа дейінгі дәлдікте анықтайтын 6 параметр берілсе, онда ол кескінге сүйене отырып  *F* оның кескіні болатын фигураның өзін салмағанмен оған тең болатын фигураны салуға болады, ал 5 параметр *F* берілсе оның кескіні болатын фигураны салмағанмен оған ұқсас болатын фигураны салуға болады.  Егерде кескін беріліп (267 – сурет) бұл *F* кескін кубтың кескіні деген қосымша мәлімет берілсе онда бұл кескін : 1–ден, толық кескін болады. Өйткені ол кескінге репердің кескіні тіркесек (яғни төртбұрышты репердің кескіні деп алсақ) онда бұл кескінді анықтайтын барлық төбелер кескінде берілген.      C  D  A  B  *267 – сурет*  Екіншіден, бұл кубтың кескіні делінгендіктен оригинал туралы мыналар бізге белгілі болады: Демек оригинал туралы осы 5 мәлімет белгілі (5 параметр берілген). Сондықтан бұл кескін евклидтік анықталған кескін болады және ол кескін оригиналды ұқсастыққа дейінгі дәлдікте анықтайды.  Егер 267 – сурет беріліп, бұл тік бұрышты параллелепипедтің кескіні десе, онда бұл кескін 1 – ден, толық кескін болады. Өйткені репердің кескіні десек параллелепипедтің барлық төбелері кескінде берілген болып шығады.  Үшіншіден, бұл тікбұрышты параллелепипедтің кескіні дегендіктен бұрыштыр тік екені ғана белгілі (3 параметр белгілі).  Демек бұл кезде 267 – сурет евклидтік анықталған кескін болмайды. Ол евклидтік анықталған кескін болу үшін оригинал туралы тағы да 2 параметр керек. Ол екі параметр үшін салдарын алуға болады.  B  C  B  A  *268 – сурет*  Егер бұл екеуі берілсе кескін евлидтік анықталған кескін болады, яғни оригиналды ол ұқсастыққа дейінгі дәлдікке анықтайды. 268 – суретте параллелограмм салынған.  Егер –ны жазықтың репері –тің кескіні десек, параллелограммның барлық төбелері кескінде берілген болады. Демек бұл толық кескін болады. Егер ол кескінге қосымша бұл квадраттың кескіні десе, онда оригиналда екені белгілі болады. Сондықтан, (яғни 2 параметр белгілі) болғандықтан 268 – сурет евклидтік анықталған кескін болады. Сондықтан, ол кескін оригиналды ұқсастыққа дейінгі дәлдікте анықтайды.  Егер 368 – сурет тік төртбұрыштың кескіні десе, онда оригинал туралы тек екені ғана белгілі. Сондықтан кескін бұл кезде евклидтік анықталған кескін болмайды. Оны евклидтік анықталған кескінге айналдыру үшін бір параметр керек. Ол үшін қатынасты алуға болады. Осы шарттан кейін кескін толық кескін болады.  **Метрикалық есептерге мысалдар.**  **1 – есеп.** Кескін жазықтығында тең бүйірлі, қабырғасы табанымен 500 жасайтын үшбұрыштың кескіні берілген. Бүйір қабырғаларына жүргізілген биіктіктерін кескіндеңдер.  Шешуі. Есептің шарты бойынша осы үшбұрыштың кескіні екені белгілі (269 – сурет).  ВВ  С  А  500  *269 – сурет*  ны жазықтықтағы репердің кескіні десек, нүктенің аксонометриялық проекциясы да екінші проекциясы да А нүкте болады. Сондықтан нүкте кескінде берілген. Дәл осы сияқты нүктелерде кескінде берілген. Сондықтан суреттегі толық кескін болады. Есептің шартында екі параметр (шарт) берілген. Сондықтан кескін евклидтік анықталған кескін болады. және аффинді эквивалентті болады.  АС қабырғаның ұшынан онымен 500 бұрыш жасайтын түзулер жүргізейік, олар нүктеде қиылысссын. Сонда тең бүйірлі және табанындағы бұрыштар тең.  жүргізейік, сонда биіктік болады. мен аффинді – эквивалентті. Сондықтан ны бағытында проекцияласақ шығу керек. нүктеден ге параллель түзу жүргізіп нүктені табайық. Сонда ол бүйір қабырғаға жүргізілген биіктік табанының кескіні болады. Сондықтан кесінді қабырғаға жүргізілген биіктіктің кескіні болады. дан АС – ға параллель жүргізіп нүктені тапсақ екінші бүйір қабырғаға жүргізілген биіктіктің кескіні болады.  **2–есеп.** Кескін жазықтығында квадратттың кескіні параллелограмм және сол жазықтықта жатқан түзуі мен нүктенің кескіндері берілген. нүктеден түзуге жүргізілген перпендикулярдың кескінін салу керек (270 – сурет).  Шешуі. түзулерін жүргізіп, олардың –мен қиылысу нүктелері Е мен F–ті табамыз. жүргізіп МЕ–ден Т нүктесін табамыз.  D  C  B  A  M  T  Q  NN  L  F  R  E  K  *270 – сурет*  Есептің шарты бойынша . Сондықтан МЕ мен өзара перпендикуляр түзулерді кескіндейді. Демек кескіні болатын үшбұрыштың биіктігін кескіндейді. Енді жүргізсек сол үшбұрыштың екінші биіктігінің кескінін аламыз.  Демек десек кескіні болатын үшбұрыштың үшінші биіктігінің кескіні болады, яғни кесінді ке перпендикуляр кескіні болады. Сөйтіп түзуі М–нен ге жүргізілген перпендикулярдың кескіні.  **3–есеп.** Проекция жазықтығында центрі болатын шеңбердің кескіні – центрі О болатын эллипс және шеңбер жатқан жазықтықта жатқан кесіндінің кескіні АВ берілген.  Қабырғасы кесіндінің ұзындығына тең болатын тең қабырғалы үшбұрыштың кескінін салу керек (271 – сурет).  N  Q  P  K  L  M  C  B  A  O  *271 – сурет*  Эллипстен АВ – ға параллель диаметрін және оған түйіндес диаметрін жүргіземіз. кескіндінің қақ ортасынан ге параллель болатын хордасын жүргіземіз. Сонда шыққан дұрыс үшбұрыштың кескіні болады. А – дан ге, В – дан ге параллель жүргіземіз. Олар С нүктеде қиылыссын. Сонда шыққан қабырғасы болады. Өйткені ол тең қабырғалы үшбұрышына ұқсас. Сондықтан натурал жағдайда тең болатын кесінділердің кескіндері.  **4 – есеп.** 272 – суретте дұрыс пирамиданың дұрыс кескіні берілген. Осы пирамиданың бір жағында жатқан нүктеден табан жазықтығына перпендикуляр жүргізілген. Сол перпендикулярдың кескінін салу керек (272 – сурет).  E0  OO  C  B  A  F  D  E  S  *272 – сурет*  Шешуі. Пирамида дұрыс болғандықтан оның төбесінен табан жазықтығына жүргізілген перпендикуляр диагоналдардың қиылысу нүктесіне түседі. биіктіктің кескіні болады. нүкте жағында жатсын. Е оның кескіні болсын. дейік, ны жүргізейік. Е – ден ға параллель жүргізейік. Ол ты нүктеде қисын. Сонда іздеген перпендикулярдың кескіні болады.  **5** – **есеп.** 273 – суретте төртбұрышты дұрыс пирамида және үстінгі төбелері оның қырларында, астынғы төбелері табанында жататын оған іштей сызылған куб кескінделген. Сол кескін бойынша пирамиданың қарама – қарсы бүйір қырлары жасайтын қиманың шын мәніндегі формасын анықтау керек (273 – сурет).  а)  K  T  L  F  E  O  S  D  C  B  A    б)  *273 – сурет*  Шешуі. Бұл кескін евклидтік анықталған және толық кескін. ның шын мәніндегі формасын анықтау керек, яғни ке ұқсас үшбұрыш салу керек. Ұқсастыққа дейінгі дәлдікте салу үшін оның бір қабырғасын еркін алуға болады. Ол болсын. Оны АС – ға тең етіп салайық та, оның бойынан болатын нүктелерді алайық.  Енді кескіні болатын тік төртбұрыштың шын формасын салайық. Оның табаны болады, ал биіктігі гипотенузасы болатын тең бүйірлі тікбұрышты үшбұрыштың катетіне тең болады, яғни ға тең болады. Сондықтан нүктелерден ға перпендикуляр тұрғызып, олардың бойына кесінділерді өлшеп салсақ, сөйтіп түзулерін жүргізсек, олар нүктеде қиылысса, іздеген қиманың шын формасы үшбұрышы болады.  **§48. Кескіндеудің Монж әдісі**  Француз математигі Гаспар Монж (1746–1818) сызба геометриясының негізін қалаушылардың бірі. Оның кеңістік денесін жазықтыққа кескіндеу әдісі денені өзара перпендикуляр екі жазықтыққа ортогонал проекциялап, ол жазықтықтарды беттестіру арқылы дененің екі проекциясын бір жазықтыққа келтіріп, оларды қатар қойып зерттеуден тұрады. Осылайша жасалған суретті (кескінді, сызбаны) эпюр дейді. Оны қос картиналы сызба, сурет немесе комплексты сызба (сурет) депте атайды.  Сонымен екі проекция жазықтығын алып, оның біреуін горизонтал орналастырады (оны горизонтал проекция жазықтығы деп атайды және H әріпімен белгілейді) екіншісін бұған перпендикуляр етіп, вертикал орналастырады (оны фронтал проекция жазықтығы деп атайды және V әріпімен белгілейді). Бұл екі жазықтықтың қиылысу сызығын V/H деп немесе жайғана х деп белгілейді де проекция өсі деп атайды. (374 а – сурет)  Денені өзара перпендикуляр үш жазықтыққа (горизонтал, фронтал және профил) проекциялауға да болады.  Монж әдісінің жақсы жағы ол әдіспен жасалған кескін (сурет) бойынша, қиын емес есептеулер арқылы кескінделген дененің (оны оригинал дейміз) өлшемдерін дәл анықтауға болады, ал кемістігі кескін кескінделген денеге (оригиналға) ұқсамайды, яғни көрнекі болмайды. Сондықтан Монж әдісімен кескіндеу техникалық жұмыстарда қолданылады, ал педагогикалық жұмыстарда сирек қолданылады.  Монж әдісімен нүкте, түзу, жазықтық және олардың өзара орналасуларын кескіндеу жолдарын қарастырайық.  **48.1. Нүкте кескіні.** Кеңістікте х түзуі бойымен қиылысатын өзара перпендикуляр горизонтал орналасатын H, оған перпендикуляр болып вертикал орналасатын V жазықтықтары берілсін (274 а – сурет). Кеңістіктен А нүктесін алайық. Бұл нүктені H және V жазықтықтарына ортогонал проекциялайық. А нүктенің H жазықтықтағы проекциясын сол А әріппен 1 индексі арқылы А1 деп, V жазықтықтағы проекциясын сол А әріппен 2 индексі арқылы А2 деп белгілейік. А нүктені проекцияларымен қоса А(А1,А2) деп жазатын боламыз. А,А1,А2 нүктелерден өтетін (АА1А2) жазықтығы х өсін Ах нүктеде қисын. Бұл жазықтық проекция жазықтықтарының екеуіне де перпендикуляр болады және H жазықтықты АхА1, V жазықтықты АхА2 түзулері бойымен қиады. АА1АхА – тік төртбұрыш болады. H жазықтығын сағат тілі қозғалысы бағытымен 90° - қа бұрсақ ол вертикал күйге келіп, V жазықтығымен беттеседі. Бұл кезде А нүктенің фронтал проекциясы А2 өз орнында қалып А1 нүкте 90° - қа бұрылып А2 мен бір вертикал түзу бойына орналасады (274 б – сурет). АхА2=АxА1, АxА1=АА2 болатындықтан АхА2 кескінді фронтал жазықтықтан қашықтығын көрсетеді, ал А нүктенің х өсінен қашықтығын көрсетеді.  H  A  V  x  а)  в)  x  б)  *274 – сурет*  Жазықтық шексіз фигура болғандықтан 274 б – суреттегі жазықтықты бейнелеп тұрған тік төртбұрышты кескіннен алып тастауға болады. Сонда сурет 274–в түрге келеді. Міне осы суретті нүктенің эпюрі дейді. Сөйтіп нүкте эпюрде ол нүктенің горизонтал және фронтал проекцияларын қосатын вертикал кесінді арқылы кескінделеді (яғни екі нүкте арқылы анықталады). А1А2 түзу байланыс сызығы делінеді.              T  EW  C  A  B  D  x  x  г)  *274 – сурет*  H және V жазықтықтары өзара қиылысып кеңістікті 4 ширекке бөледі. А бірінші, В екінші, С үшінші, Д төрттінші ширекте жататын, Е фронтал, F горизонтал жазықтықта, Т проекция өсінде жататын нүктелер болсын (274 г – сурет). Олоардың H, V жазықтықтардағы проекциялары салынсын.                x  x  д)  *274 – сурет*  H–ты 90° - қа бұрып V–мен беттестіргенде ол нүктелердің эпюрі 274 д– суреттегідей болады: 1 – ширек нүктелері үшін горизонтал проекция х өсінен төмен, фронтал проекция х өсінен жоғары жатса, 3 – ширек нүктелері үшін бұған кері болады. Екінші ширек нүктелерінің екі проекциясы да х өсінен жоғары, төртінші ширек нүктелерінің екі проекциясы да х өсінен төмен орналасады. Горизонтал жазықтықта жататын нүктенің горизонтал проекциясы сол нүктенің өзімен беттеседі, фронтал проекциясы х өсінде жатады, ал фронтал жазықтықта жатқан нүктенің фронтал проекциясы өзімен беттессе, горизонтал проекциясы х өсінде жатады. х өсінде жатқан нүктенің екі проекциясы да сол нүктенің өзімен беттеседі.  Кезкелген М1М2 екі нүкте эпюрде бір нүктені анықтау үшін ол нүктелер бір вертикал түзуде жатуы керек, бір вертикал түзуде жатпайтын екі нүкте ешқандай нүктені анықтамайды.  **48.2. Түзудің кескіні.** Екі нүкте бірғана түзуді анықтайтындықтан түзу эпюрде өзінің екі нүктесі арқылы беріледі. Ол нүктелердің сәйкес проекцияларын қосатын түзулер сол түзудің сәйкесінше горизонтал және фронтал проекциялары делінеді. 275–а суретті АВ түзуінің көрнекі кескіні салынған, ал 275–б суретте H пен V жазықтықтарына қарағанда түрліше орналсқан түзулердің эпюрдегі кескіндері берілген.  а)  V  х  В  А      Н  *275 – сурет*  Ол суреттегі АВ жалпы жағдайда орналасқан түзу, (себебі ), (себебі ), (себебі ), (себебі ), (себебі ), (себебі H–тағы проекция нүкте болған), (себебі V жазықтықтағы проекциясы нүкте бол жазықтықтағы проекциясы нүкте болған) болтын түзулер кескінделген.  б)                    x  x  *275 – сурет*  – ды горизонтал, –ны фронтал проекциялауын түзулер деп атайды. АВ–ны жалпы жағдайдағы түзу дейді.  Егерде М нүкте АВ түзуде жатса, онда АВ–мен бірге М–де проекцияланатындықтан М-нің горизонталь проекциясында, фронтал, проекциясы түзудің фронтал проекциясында жатуы керек, яғни , болса ған жатады. 276 – суретте М нүкте АВ да жатады. Ал, нүкте, нүкте жатпайды. Себебі жатқанымен К2  нүкте жатқан жоқ. нүкте де емес де жатыр, нүкте де жатыр.    а)    в)        б)  K  г)  *276 – сурет*  Параллель түзулердің проекцияларыда параллель, қиылысатын түзулердің проекцияларыда қиылысатын түзулер болатындықтан параллель түзулер эпюрде сәйкес проекциялауы параллель түзулер болып кескінделеді (276 б – сурет, ), қиылысатын түзулер сәйкес проекциялары қиылысатын түзулер болып кескінделеді және олардың қиылысу нүктесінің проекциялары бір вертикал түзу бойында жатады (276 в–сурет, , ) түзулер параллель болмаса және қиылыспаса, яғни айқас түзулер болса, онда олардың сәйкес проекцияларының қиылысу нүктесі түзу бойында жатпайтын нүктелерде қиылысатын (276 г–сурет) түзулер болып кескінделеді. Егер М2 нүктеден байланыс сызығын жүргізсек ол - ді нүктеде, - ді нүктеде қиар еді. Ол мен ның қиылыспайтынын және түзудің түзуге қарағада V жазықтыққа жақын жатқанын білдіреді.  е)  д)  х  х  х    *276 – сурет*  **Түзудің ізі.** Түзудің горизонтал (фронтал) жазықтықпен қиылысу нүктесін ол түзудің горизонтал (фронтал) ізі дейді. 277 а–суретте АВ түзудің С горизонтал, Д фронтал ізі. Ол суреттен горизонтал іздің горизонтал проекциясы сол нүктенің өзімен беттесетіні, ал фронтал проекциясы х өсінде жататыны байқалады және керісінше жатады.  а)  С  A  B  D  H  V  х  б)  *277 – сурет*  277 б – суретте сол түзудің эпюрде іздерін салу жолы көрсетілген: мен ні сызып олардың х өсімен қиылысу нүктесі мен ді табылған. Сонда фронтал, горизонтал із болады. Егер болса АВ – түзудің горизонтал, болса АВ түзудің фронтал ізі болмайды. Оның эпюрі 276 д, е – суреттегідей болады.  **Кесінді ұзындығы.** 278 а–суретте АВ кесіндінің жазықтықтағы ортогонал проекциясы болса, онда жүргізсек , болатыны көрінеді. Осы екі кесінді жәрдемімен АВ ның ұзындығын табуға болады. Ол болады. Осы әдісті пайдаланып эпюрде берілген кесіндінің ұзындығын табуға болады. Ол 278 б – суретте көрсетілген жолмен табылады. АВ түзуі эпюрде кескінделген. Сол бойынша тауып, проекцияның бір ұшынан перпендикуляр тұрғызып оның бойына ні өлшеп салсақ тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы берілген АВ кесіндінің шын мәніндегі (натурал) ұзындығына тең болады.  Егер АВ кесінді жазықтығына параллель болса, онда оның ұзындығы дегі ортогонал проекциясы ға тең болады. Осы бойынша, егер кесіндінің горизонтал проекциясын нүктеден бұрыш х өсіне параллель етсек онда оған сай келетін фронтал проекция болар еді және ол АВ кесіндінің ұзындығына тең болады. Өйткені ді бұрыш қа келтіру АВ – ны бұрып V жазықтыққа параллель ету болады. Сондықтан фронтал проекция кесінді ұзындығына тең болады.  а)  B  D  A  б)            в)    *278 – сурет*  **48.3. Жазықтықтың эпюрде берілуі.** Жазықтық өзінің үш нүктесі, немесе бір нүктесімен ол нүктеден өтпейтін түзу, немесе қиылысатын екі түзу, немесе параллель болатын екі түзу мен анықталатындықтан жазықтық эпюрде үш нүктесінің эпюрі, немесе параллель болатын екі түзудің эпюрлерімен берілуі мүмкін. Олар 279 – а, б, в, г суреттерде көрсетілген.  б)      в)        г)                    а)  *279 – сурет*  Жазықтық:   * 279 а – суретте А(А1А2), В(В1В2), С(С1С2) үш нүктесі арқылы * 279 б – суретте түзу және С(С1С2) нүкте арқылы  * 279 в – суретте түзулер арқылы  * 279 г – суретте нүктеде қиылысатын түзулер арқылы берілген   279 d – суретте Р жазықтығы H –ты РH, V – ны РV түзулер бойымен қиған (сондықтан РV мен РH түзулер х бойында қиылысады), . Оларды Р жазықтықтың горизонтал (РH), фронтал (РV) іздері дейді. H–ты 90° - қа бұрып V – мен беттестіргенде сурет 279 – е түрге келеді. Оны жазықтықтың ізбен берілгендегі кескіні дейді. Жазықтық іздері х өсіне перпендикуляр, параллель болмаса, оны жалпы жағдайдағы жазықтық дейді, кері жағдай дербес жағдайдағы жазықтық дейді. 279 е – суретте жалпы жағдайдағы жазықтық, қалғандарында дербес жағдайдағы жазықтық кескінделген. Дәлірек айтқанда 279 f – суретте H жазықтығына перпендикуляр Q жазықтығы, 279 д – суретте V жазықтыққа перпендикуляр Т жазықтығы, 279 h – суретте горизонтал жазықтығына параллель R жазықтығы, 279 к – суретте фронтал жазықтыққа параллель S жазықтығы Ві арқылы кескінделген. Q жазықтықты горизонтал – проекциялаушы, Т – жазықтықты фронтал – проекциялаушы жазықтық дейді.  d)  u  P    x  V  H  д)  f)                x  x  e)  h)  k)  *279 – сурет*  **Жазықтықтағы түзу мен нүкте.** Жазықтықта берілген түзуді салу төмендегі екі тұжырымға сүйенеді.  1 – Түзу жазықтықта жату үшін оның екі нүктесі сол жазықтықта жатуы керек.  2 – Түзу жазықтықта жату үшін, ол сол жазықтықтың бір нүктесін басып өтуі және сол жазықтықта жатқан, не оған параллель болатын бір түзуге параллель болуы керек.  Жазықтықта жатқан түзу мен нүктенің проекциялары жазықтықтың сәйкес проекцияларында жатуы керек. Жазықтықта жататын нүктені салу үшін, алдымен жазықтықта жататын түзу салып, нүктені сол түзу бойынан алу керек.  **1–мысал.** А,В,С үш нүктесі арқылы берілген АВС жазықтықта жататын, жатпайтын түзу, нүкте жүргізіңдер.  а)    х  б)  *280 – сурет*  Шешуі: АВС жазықтығының эпюрдегі кескіні 280 а–суреттегідей болсын. Берілген нүктелердің сәйкес проекцияларын қоссақ жазықтық үшбұрыш арқылы берілген болып шығады. Жазықтықтың бойында А,В,С нүктелер жататындықтан АВ, ВС, СА түзулерде сол жазықтықта жатады. Сондықтан ден А2С2–ны қиятын түзу жүргізіп, байланыс түзуі арқылы А1С1 ден нүктесін тапсақ түзуі АВС жазықтығында жатады. Осы түзу бойынан алынған Е(Е1,Е2) нүктеде АВС жазықтығында жатады. Себебі бұл нүкте жатқан BD түзуі АВС жазықтығында жатыр. Егер осы BD түзуінің горизонтал проекциясынан нүкте жазықтықта жатпайды. Сондықтан CF түзуде АВС жазықтығында жатпайтын түзу болады.  Егер М нүкте АВС жазықтығында жатса және М–нің фронтал проекциясы М2 белгілі болса, оның горизонтал проекциясы М1–ді табу үшін, мысалы, М2 мен Е2 – ні қосып ні табады. Т2 – ден байланыс сызығын жүргізу арқылы бойына Т1 – ді табады. Одан соң М2–ден байланыс сызығын жүргізіп Е1Т1–дің бойынан М1–ді табады. М1 мен М2 берілген М нүктені анықтайды (280 а – сурет).  **2–мысал.** Іздерімен берілген жазықтықта жататын түзу және нүкте салыңдар.  Шешуі: Р жазықтығы іздері РH,РV арқылы берілсін. Р жазықтығында жатқан кезкелген түзу проекция жазықтықтарын жазықтықтың іздері РV,РH бойында қиады (280 б – сурет).    в)    х  г)  *280 – сурет*  Демек АВ түзуі Р жазықтығында жату үшін, оның іздері жазықтықтың онымен аттас іздерінде жатуы керек. Сондықтан РV дан М2, РH–тан нүкте алып олардан перпендикуляр жүргізу арқылы х өсі бойынан М1, нүктені тауып аттас проекцияларды қоссақ түзуі Р(РH,РV) жазықтығында жатады. Осы түзуде жатқан кезкелген К(К1К2) нүктеде жазықтықтада жатады. Егер АВ түзу Р жазықтықтың бір ізіне параллель болса, онда ол екінші ізін қоюы керек. Сондықтан егер болса (яғни болса), онда АВ түзуі РV – ны қиюы керек және , және ол РV мен қиылысуы керек. Демек 280 в – сурет Р жазықтығында жататын және H жазықтыққа параллель болатын АВ түзуді кескіндейді. 280 г–суретте Q жазықтығында жататын және V жазықтығына параллель болатын CD түзу кескінделген. Мұнда және соңғы QH – пен қиылысады.  **3–мысал.** Іздерімен берілген Р(РH,РV), Q(QH,QV) жазықтықтардың қиылысу сызығын салу керек (281 – сурет).  Шешуі: Қиылысу сызық екі жазықтықтада жатуы керек. Сондықтан осы екі жазықтықтың екеуінде де жататын түзуді салу керек. Ол үшін нүктелер алып, байланыс сызығы арқылы х өсінен А1,В2 нүктені тапсақ А(А1,А2), В(В1,В2) нүктелерден өтетін түзу екі жазықтықтың қиылысу сызығы болады. Өйткені болғандықтан А2 екі жазықтықта ортогонал проекциясында жатыр. Сондықтан оның горизонтал проекциясы х өсінде жатуы керек. Сол сияқты В1 нүкте горизонтал жазықтықта жатыр. Сондықтан АВ түзу қиылысу сызығы болады.                      *281 – сурет*  **Жазықтықтың горизонталы мен фронталы.** Жазықтықта жататын және горизонтал (фронтал) проекция жазықтығына параллель болатын түзуді сол жазықтықтың горизонталы (фронталы) дейді.  а)                      б)              *282 – сурет*  Горизонталтүзудің ортогонал проекциясы х өсіне параллель болатындықтан АВС жазықтықтың горизонталын салу үшін А2В2С2 – де горизонтал бір түзу, мысалы A2D2 жүргізіп байланыс сызығы арқылы D1 табамыз. Сонда AD(A1D1,A2D2) түзу АВС жазықтықтың горизонталы болады (282 а–сурет). АВС жазықтықтың ортогоналын салу үшін А1В1С1 – де х өсіне параллель түзу жүргіземіз. Ол А1Е1 болсын, байланыс сызығы арқылы Е2 ні табамыз. Сонда АВС жазықтық үшін ортогонал болады, бұл болғандықтан V жазықтыққа параллель болады. 282 б–суретте ортогоналы АВ, фронталды АС арқылы берілген жазықтық салынған. Мұнда . Сондықтан , . Сондықтан .  **4–мысал.** Берілген жазықтыққа параллель түзу және берілген  түзуге параллель жазықтық жүргізіңдер.  а)      *283 – сурет*  Шешуі: Түзу жазықтыққа параллель болк үшін ол түзу сол жазықтықта жатқан қандай да бір түзуге параллель болуы керек. Сондықтан жазықтыққа параллель түзу жүргізу үшін алдымен сол жазықтықта жатқан бір түзуді салу керек. Содан соң оған берілген нүктеден (не кезкелген нүктеден) параллель түзу салу керек. 283 а – суретте АВС жазықтық берілген. Соған D нүктеден параллель түзу жүргізілген. Ол үшін жазықтықта жататын ВК түзу жүргізілген (А2С2 – ден К2 нүкте алып, оны В2 – ге қосқан, байланыс сызығын жүргізіп А1С1–ден К1 нүкте тапқан). Берілген D(D1,D2) нүктеден жүргізілген. Сонда болғандықтан болады.  б)            в)  *283 – сурет*  283 б – суретте түзуге С нүктеден параллель жазықтық жүргізілген. Ол үшін және кезкелген түзу жүргізілген. Өзара қиылысып жатқандықтан DС мен ЕС түзулер DСЕ жазықтығын анықтайды, ал болғандықтан болады.  283 в – суретте АВ түзуді басып өтетін ЕD түзуге параллель болатын АВС жазықтық жүргізілген. Мұнда .  **5–мысал. Б**ерілген жазықтыққа параллель жазықтық салу.  Шешуі: Екі жазықтық параллель болу үшін бірінде қиылысып жатқан екі түзу екіншісінде қиылыссып жатқан екі түзуге параллель болу керек.  Сондықтан болатын АВ,ВС түзулерімен анықталатын АВС жазықтық DE,EF түзулерімен анықталатын DEF жазықтыққа параллель болады (284 – сурет).              *284 – сурет*  **Перпендикуляр түзу және жазықтық.** Түзулердің перпендикулярлығы мына теоремаға негізделіп салынады.  **Теорема.** Тікбұрыштың бір қабырғасына параллель болатын екінші қабырғасына перпендикуляр болмайтын, жазықтықтағы ортогонал проекциясы тікбұрыш болады.  а)  С  В  А      б)          в)  *285 – сурет*  Дәлелі. болсын (285–сурет). Демек АВ мен Вс түзулер өзара перпендикуляр. А,В,С нүктелердің жазықтықтағы ортогонад проекциясы А0,В0,С0 болсын. болғандықтан АВ–ның жазықтықтағы проекциясы А0В0 мен АВ өзара параллель болады. Сондықтан болады. Екінші жағынан . Демек , . Сондықтан А0В0 түзуі ВВ0СС0  жазықтыққа перпендикуляр болады. Ал, В0С0 осы жазықтықта жатқандықтан , яғни тік бұрыш болады.  Бұл теореманың керісі де дұрыс болады: бір қабырғасы проекция жазықтығына параллель болатын және сол проекция жазықтығындағы проекциясы тік болатын бұрыштың өзі де тікбұрыш болады.  Осы теоремадан түзуге, жазықтыққа перпендикуляр болатын түзу салудың оңай жолы шығады.  **6–мысал.**  түзуге перпендикуляр болатын түзу салыңдар (286 – сурет).        *286 – сурет*  Шешуі: түзу берілген. «Бір қаблырғасы проекция жазықтығына параллель бұрыштың сол жазықтықтағы проекциясы тік болса, онда ол бұрыштың өзі де тік болады» – деген ереже бойынша, егер А1В1 – ге В1С1 – ды перпендикуляр етіп жүргізсек, ал В2С2 – ні горизонтад етіп жүргізсек, онда болғандықтан болады. Егер етіп алсақ, онда , яғни болады.  Сонымен берілген түзуге перпендикуляр түзу салу үшін бұл түзудің бір проекциясын берілген түзудің бір проекциясына перпендикуляр етіп, екіншісін горизонтал етіп алу керек.  **7–мысал.** берілген жазықтыққа перпендикуляр түзу салу керек. (287 – сурет).  Шешуі: АВ,ВС түзулері арқылы АВС жазықтығы берілсін. Оның АВ горизонталы (өйткені ), ВС фронталы (себебі ). В2С2–ге перпендикуляр етіп В2D2, А1В1 – ге перпендикуляр етіп В1D1 жүргізсек, екі түзудің перпендикуляр болу ережесі бойынша болғандықтан , болғандықтан . Сонымен DВ түзуі өзара қиылысып жатқан АВ,ВС түзулеріне перпендикуляр болғандықтан ол АВС жазықтықта да перпендикуляр болады.        *288 – сурет*  Сонымен жазықтыққа перпендикуляр болатын түзудің  а) фронтал проекциясы жазықтықтың фронталының фронтал проекциясына перпендикуляр болуы керек екен .  б) горизонтал проекциясы жазықтықтың горизонталының горизонтал проекциясына перпендикуляр болуы керек екен .  а)        х  х  б)          *289 – сурет*  Егер жазықтық Р(РH,РV) ізімен берілсе, онда оған перпендикуляр болатын а(а1,а2) түзудің болады.  288 а–суретте ВС түзуге А(А1А2) нүктеден перпендикуляр АDЕ жазықтығы жүргізілген. Мұнда .  288 б–суретте ВС түзуге А нүктеден оған перпендикуляр болатын ізімен берілген жазықтығы жүргізілген. Мұнда , жүргізіліп А2 – ден х өсіне параллель, D1–ден х–қа перпендикуляр жүргізіліп D2 табылған. D2 –ден В2С2–ге перпендикуляр (РV) жүргізіліп Рх табылған. Рх–тан В1С1–ге перпендикуляр (РH) (А1D1 – ге параллель) жүргізілген. Сонда шыққан Р(Р1,Р2) жазықтық А(А1А2) нүктеден ВС – ға перпендикуляр етіп жүргізілген жазықтық болады.  **48.4. Кейбір геометриялық денелердің кескіндері.** Төмендегісуреттерде мектепте кездесетін кейбір геометриялық денелердің эпюрдегі кескіні беріліп отыр (289 – сурет).  а)  H  M  B  K  A  C  E  F  V  D  х  х  б)                  в)                *289 – сурет*  289 а–суретте АВСFDE үшбұрышты тік призманың көрнекі кескіні берілген. Оның табаны горизонтал жазықтыққа, бүйір қырлары фронтад жазықтыққа параллель етіп қойылсын. Сонда бұл призманың горизонтал проекциясы , ал фронтал проекциясы тік төртбұрыш болады (289 б – сурет). Табаны H–қа параллель болғандықтан горизонтал проекциясы өзгермей натурал мәніне ға тең болып проекцияланады ( болады). Егер АDFС жағы V жазықтыққа параллель болса, оның фронтал проекциясы өзіне тең болады, ал болып проекцияланады. Егер призма табаны, оның ВС қабырғасы V – жазықтыққа перпендикуляр болатындай етіп орналасса, оның эпюрі 289 в–суреттегідей болады. Бұл кезде призма қыры, табаны өзгермей проекцияланады. Бүйір жақтары өзгеріп проекцияланады. Жақта жатқан М нүктенің проекциясы МК түзуі жәрдемімен салынады. 289 б–суретте табаны H жазықтығына параллель қойылған төртбұрышты дұрыс пирпмиданың эпюрдегі кескіні берілген. Бұлай орналсқан пирамиданың горизонтал проекциясы квадрат болады және ол бұрмаланбай проекцияланады, ал бүйір жағы үшбұрыш болып проекцияланады. Ол үшбұрыштың биіктігі пирамиданың натурал биіктігіне тең болады. А2S2С2 үшбұрышы пирамиданың диагоналдық қимасының проекциясы болады, бірақ оған тең болмайды, өйткені диагонал V жазықтыққа параллель қойылмаған. Пирамида жағында жатқан М нүктенің эпюрдегі кескіні нүкте жәрдемімен салынады.  г)                          е)          д)  М        *289 – сурет*  289 д – суретте тік дөңгелек цилиндрдің, 289 е – суретте тік дөңгелек конустың эпюрдегі кескіндері салынған. Олардың горизонтал проекциялары шеңбер болады және өзгермей проекцияланады (себебі табан жазықтығы горизонтал орналасқан), олардың биіктіктерінің фронтал проекциясы да өзгермей проекцияланады.  Осындай кескінге сүйене отырып кескінделген призма, пирамида, цилиндр, конус туралы түрлі метрикалық есептерді шешуге болады.  **1 – есеп.** Төртбұрышты дұрыс пирамиданың табанының бір қабырғасын баса, қарсы бүйір жағына перпендикуляр етіп жазықтық жүргізілген. Пирамиданың табанының қабырғасы 30см, биіктігі 20см. Қиманың ауданын табыңдар.  Шешуі: Масштабты 1:10 етіп фигураның эпюрдегі кескінін салайық. Оның табанын горизонтал етіп және бір қабырғасы V жазықтығында перпендикуляр болатындай етіп орналастырайық. Сонда эпюрдегі кескін 290 – суреттегідей болады.  S1  E1  F1  D1  A1  B1  C1  B2  A2  E2,F2  S2  C2  D2  *290 – сурет*  Горизонтал проекциясы бұрмаланбай проекцияланады. Сондықтан ол қабырғасы 30см болатын квадрат болады. Қиманың фронтал проекциясы А2Е2 кесінді болады және ол D2S2 перпендикуяр боллады. Сондықтан жүргізіп, байланыс сызығы арқылы ден Е1 ден нүктелерді табамыз. Сонда қиманың горизонтал проекциясы трапеция болады. мен ні суреттен өлшейміз. Олар 10 есе кішірейтілген натурал қиманың (трапецияның) жоғары табаны мен биіктігі болады. Сонда іздеген аудан болады.  **§49. Центрлік проекция. Перспектива**  **49.1. Проекциялаушы аппарат.** Техника да, ғылым мен искуствода, архитектурада, оқу процесінде сурет, сызба, картина, фото, кино кең түрде және әртүрлі мақсат үшін қолданылады. Осылардың барлығыда шартты сызықтар мен нүктелер, сәулелер мен көлеңкелердің белгілі тәртіпте жоғырланған жиынтығынан тұрады және оған сырттай қарағанда бір кеңістік денесін елестеді. Сондықтан да оны сол дененіңкескіні дейді. Кеңістік денесінің жазықтықтағы кескінін осылайша графикалық жолмен салудың әдістері көп, соның бірі **центрлік проекциялау (перспектива)** әдісі.  Кеңістіктегі нүктенің жазықтығындағы **S центрлі проекциясы** деп түзуімен жазықтықтың қиылысу нүктесі М – ді айтады, ал фигураның жазықтықтағы S центрлі проекциясы деп тің әрбір нүктесі сен S нүктені қосатын түзулердің жазықтығымен қиылысуынан шыққан нүктелердің жиынынан тұратын жазық фигураны айтады.  Центрлік проекциялау жолымен салынған кескінді ол дененің **центрлік проекциясы** немесе **перспективті кескіні,** немесе жай ғана **перспективасы** дейді. Перспектива латынның байлап көру деген сөзін білдіреді. Перспективті кескінді кезкелген бетке салуға болады. жазықтыққа салынған перспективті – сызықтық перспектива делінеді. Біз сызықтық перспективаны қарастырамыз.  Бұл әдіспен салынған кескін оригиналға (кескінделген затқа) ұқсас. Сондықтан көрнекі болады. Өйткені ол адамның көру процесіне жақын жолмен орындалады.  Кеңістік денесінің перспективасын салуды, оның заңдылықтарын оқып – үйренуді жеңілдету үшін **«Проекциялаушы аппарат»** дегенді пайдаланған жөн.  Олар өзара перпендикуляр екі жазықтық және оларда жатпайтын бір нүктеден тұрады (291 – сурет).  K  P0  S0  K  P  S  *291 – сурет*  Жазықтықтың бірін горизонтал орналастырады, оған проекцияланушы зат қойылады. Сондықтан оны **эаттық жазықтық** дейді және **Н** – пен белгілейді. Екінші жазықтықты оған перпендикуляр етіп вертикал орналастырады. Оған заттық жазықтыққа қойылған нәрселердің проекциялары (перспективалық кескіні) салынады. Сондықтан оны **картиналық жазықтық** немесе жайғана **картина** дейді де **К–**мен белгілейді. Ол екі жазықтықтың қиылысу сызығын **картина табаны** дейді де **К К–**мен белгілейді.  Бұл жазықтықтарда жатпайтын проекциялау центрі **S** нүктесін проекциялау центрі немесе **көру нүктесі** дейді, ал ол нүктеден Н жазықтығына түсірілген перпендикулярдың табаны **S0** нүктені **тұрғызылу нүктесі** (көрк нүктесін тұрғызатын нүкте) дейді. S0Sаралығын **S көру нүктесінің биіктігі** дейді. Проекцияланатын заттар К – жазықтығының S нүкте жатпайтын жағындағы Н жазықтығының бөлігінің үстіне қойылады. Кеңістіктегі ол бөлігін **заттық кеңістік** дейді.  S0S түзуін бастыра К жазықтыққа параллель етіп жүргізілген жазықтықты **бейтарап жазықтық**,бейтарап жазықтық пен картина жазықтығы аралық **бейтарап** немесе **аралық кеңістік** дейді. S нүктеден К– ға түсірілген перпендикулярдың табаны **Р** нүктесін **картиналық бас нүктесі,** ал SР сәулені **бас проекциялық сәуле** (бас көру сәулесі), РР0 сызығы **катинаның бас сызығы** делінеді. Картина ол арқылы екі жаққа (картинаның оң жағы, сол жағы) бөлінеді.  Дененің перспективасын кезкелген бетке салуға да болады. Жазықтыққа салынған перспективті кесінді **сызықтық перспектива** дейді.  **49.2. Нүктенің перспективасы.** Проекциялаушы аппаратта заттық кеңістікте нүкте берілсін (292 а – сурет).  A'  B'  C'  H  K  K  A  K  S0  S  а)  a0  a  c'  b'  a'  C'  B'  A'  K  K  S0  A  S  б)  *292 – сурет*  проекциялаушы сәулені жүргіземіз. Ол картина жазықтығымен А нүктеде қиылыссын. Онда анықтама бойынша А нүкте нүктенің S центрлі проекциясы болады. Бірақ А нүкте SА түзудің бойында жатқан кезкелген нүктенің (мысалы нүктедердің) S центрлі проекциясы болады. Өйткені олар бір проекциялаушы сәуле бойында жатыр. Әрбір нүктенің центрлік проекциясы әртүрлі болуы үшін, яғни А нүкте тек нүктенің ғана S центрлік проекциясы болуы үшін тен жүргізіп, нүктені заттық жазықтықпен арқылы байланыстырады. Содан соң нүктенің проекциясы А – мен қоса тің заттық жазықтықтағы ортогонал проекциясы ты да (Оны тен табаны дейді және деп жазады) картина кескіндейді. тың кескіні болады. Сөйтіп, кеңістік нүктесі тың картина жазықтығындағы перспективасы А және а екі нүктемен анықталады, оны деп жазатын боламыз.  нүктені картина анықтайтын А,а нүктелерді табу үшін түзулер арқылы жазықтық жүргізеді. Ол Н – қа перпендикуляр болады және Н жазықтығын , картина жазықтығын түзу бойымен қиады. А,а нүктелер картина табанына перпендикуляр бір түзудің бойында жатады.  нүктенің картина жазықтықтағы кескінін былайша салады.  1– түзуімен картина табанының қиылысу нүктесі нүктені табады.  2 – нүктеден картина жазықтығында жататын және оның табаны КК – ға перпендикуляр болатын түзу жүргізіп; оның түзулермен қиылысу нүктелері табады. Осылайша табылған нүктелері нүктенің картинадағы перспективасы Н (кескін, проекциясын) анықтайды. Суреттегі түзулер әртүрлі болғандықтан олар түзумен әртүрлі а,в,с нүктеде қиылысады. Сөйтіп әртүрлі нүктелердің перспективалары да әртүрлі болып шығады.  Егер нүкте заттық жазықтықта жатса, онда ол өзінен табанымен беттеседі, болады. Сондықтан олардың перспективасыда беттеседі болады.  Картина жазықтығында Аа кесінді нүктені заттық жазықтықпен байланыстыратын перпендикулярдың перспективасы болады.  **49.3. Түзудің перспективасы.** Түзу өзінің екі нүктесімен анықталатындықтан картина жазықтығында ол екі нүктесінің перспективасымен беріледі. 293 а – суретте түзу , екі нүктемен берілген. Сол екі нүктенің перспективасын салып А мен В, а мен в нүктелерді қоссақ түзудің перспективасы АВ мен ав шығады, оны деп жазамыз.  Картинадағы Аа, Вв кесінділер түзуді заттық жазықтыққа байланыстыратын перпендикуляр түзулердің (кесінділердің) кескіндері болады.  **1. Түзудің шектік нүктесі. Горизонт сызығы.** Заттық жазықтықта жатқан және оған параллель болатын заттық кеңістік түзулерін қарастырайық. Ондай түзулерді **горизонтал түзулер** дейді.  293 б – суретте түзуі заттық жазықтық Н – та жатыр. Ол картина табаны КК – мен нүктеде қиылыссын. Осы түзудің перспективасын (К – картина жазықтықтағы кескінін) салу жолын қарастырайық.  б)  h  k  k  h  S  A  b  b  aa  k  k  S      а)  *293 – сурет*  Ол үшін ол түзудің екі нүктесін пайдаланамыз. Бірінші нүкте үшін ты алайық. Ол нүктенің перспективасы өзімен беттеседі, болады. Өйткені ол КК – да жатыр. Екінші нүкте үшін ты алайық оның перспективасы болсын (). Сонда түзуі түзудің перспективасы болады. нүкте тен бастап түзу бойымен картина табанынан алыстаған сайын проекциялаушы сәулелер жоғары көтеріле береді және тің шексіз алыстаған (меншіксіз) нүктесі үшін ол сәуле түзуімен параллель болады. Ол сәуле болсын. Сол түзуінің картина жазықтығымен қиылысу нүктесі тің шексіз алыстаған (меншіксіз) нүктесінің перспективасы болады, оны деп белгілейік. Демек жазықтықта жатқан түзуінің ешбір нүктесінің перспективасы нүктеден ары асып кетпейді, яғни түзуінің перспективасы кесінді болады. берілген түзуінің **шекті нүктесі** делінеді.  Заттық жазықтықта жатқан түзудің **шекті нүктесін былайша табады.**  1. тің картина табаны КК–мен қиылысу нүктесін табады, ол болсын.  2. S және S0 нүктелерден түзуіне параллель түзулер жүргізеді: Олар және болсын.  3. нүктеден КК–ға картина жазықтығындажататын перпендикуляр тұрғызып, оның пен қиылысу нүктесін табады, ол болсын. Бұл тің шексіз алыстаған нүктесінің перспективасы болады, ол түзудің шекті нүктесі болады. кесінді тің перспективасы болады. Салу бойынша шектік нүкте картина табанынан қашықтықта орналасады. Сондықтан заттық жазықтықта жатқан түзуден басқа түзулердің де шектік нүктелерінің картина табанынан қашықтықта, оған параллель етіп жүргізілген түзуді құрайды. Ол түзу заттық жазықтықтың меншіксіз түзуінің (шексіз алыстаған түзуінің) перспективасы болады. Оны деп белгілейді. Бұл түзу заттық жазықтықтағы нүктелер мен түзулердің картинадағы көріну шегарасы болады. оның аржағында жатқан нәрселер S нүктеден қарағанда көрінбейді. Ол түзуді **горизонт сызығы** дейді.  Картина жазықтығына S нүктеден жүргізілген перпендикулярдың табаны Р – нүктені картинаның **бас нүктесі,** SР сәулені **бас проекциялаушы сәуле дейді.** Р нүкте та жатады және болады. S пен арқылы өтетін жазықтық **горизонт жазықтығы** делінеді.  K  K  h  h  P  в)  *293 – сурет*  293 в – суретте картина жазықтығы жеке алып көрсетілген. Ондағы КК – **картина табаны, горизонт сызығы,** Р **бас нүктесі.** Бұлардың картинада берілуі кескінді дұрыс салуға жәрдемдеседі. Мысалы көру нүктесінің заттық жазықтықтың қашықтығын (биіктігін) көрсетеді. пен КК сызықтар асына горизонт сызығынан төмен жататын және заттық жазықтықта жататын заттық кеңітіктегі нүктелер мен сызықтар салыңдар.  **2. Параллель түзулердің тоғысу нүктесі.** Проекциялық аппаратта (бұл заттық жазықтықтан тыс жатқан түзу) параллель түзулер берілсін (294 – сурет).  S  k  k  h  h    *294 – сурет*  Бұл түзулердің перспективасын салу үшін олардың картинадағы іздерін пайдаланамыз. түзулерін жүргіземіз. нүктені тауып, К жазықтығында ол нүктеден КК–ға перпендикуляр тұрғызамыз. Оның пен қиылысу нүктесі табамыз. Ол түзуге параллель барлық түзулердің шектік нүктесі болады. бұл түзулердің , түзулері болады. Сөйтіп параллель түзулердің перспективалары горизонт сызығының бір нүктесінен шығатын параллель түзулер шоғы болып кескінделеді екен. Осы ортақ шекті нүкте берілген параллель түзулердің **тоғысу нүктесі** делінеді. Егер түзу горизонтал болмаса, онда ол картина жазықтығынан алыстаған сайын заттық жазықтықтан қашықтығы не көтеріле, не төмендей береді (не өрлей не ылдылай түседі). Мұндай түзулер әдетте **жалпы жағдайдағы түзулер** делінеді (олар Н–қа да, К–ға да параллельде, перпендикулярда болмайды) 295 а–суретте заттық жазықтықтың нүктесінен бастап өрлей бағытталған түзу берілген, оның Н жазықтықтағы проекциясы. Осы түзудің картина жазықтықтағы перспективасын салайық.  а)  k  k  A  S  h  h    б)  k    k    A    h  h  S    *295 – сурет*  Алдымен түзудің заттық жазықтықтағы проекциясы түзудің перспективасын салу керек. тің перспективасы А болады . түзудің шекті нүктесін табу үшін S тен ке параллель жүргізеді де оның горизонт сызығымен қиылысу нүктесін табады. Ол . Сонда кесінді заттық жазықтықта жатқан дің перспективасы болады. шекті нүктесін салу үшін ге S нүктеден параллель түзу жүргізіп, оның нүктеден табады. Сол болады. сонда дің перспективасы болады. Сонымен өрлей бағытталған түзудің перспективасының шекті нүктесі горизонт сызығынан жоғары жатады екен (296 – 3сурет).  295 б–суретте картина жазықтығынан алыстаған сайын ылдилай (төмендей) беретін түзу берілген, оның заттық жазықтықтағы проекциясы. Осы түзудің перспективасын салу үшін алдымен нүктелердің перспективасын салады жүргізіп оның горизонт сызығымен қиылысу нүктесін табады, ол . Одан кейін жүргізіп, оның картина жазықтығы мен қиылысу нүктесін салады. Ол нүкет ден горизонт сызығына перпендикуляр етіп жүргізілген түзу мен S нүктеден ке параллель етіп жүргізілген түзудің қиылысу нүктесі болады. Сонда түзудің перспективасы болады. Сөйтіп ылдилай бағытталған түзудің шекті нүктесі горизонт сызығынан төмен жатады (296 4 – сурет).  k  h  c  b  C  B  f  e  F  E  a  b  A  B  b  а  В  А        Р  Р  Р  Р  5  1  2  3  4  Р  *296 – сурет*  **3. Дербес жағдайдағы түзудің перспективалары**  1°. түзуі заттық жазықтыққа да, картина жазықтығына да параллель болып орналассын. Онда ол картина табанынада параллель болады. Сөйтіп .  Бұл түзудің картина жазықтығы К – дағы перспективасын салу үшін S нүктеден түзудің және оның заттық жазықтықтағы проекциясы тың әрбір нүктесіне проекциялаушы түзулерді жүргізу керек. Сонда бұл проекциялаушы түзулер жиыны жазықтығын жасайды. Егер бір жазықтық екінші жазықтыққа параллель түзу арқылы өтіп онымен қиылысса, онда қиылысу сызығы берілген түзуге параллель болады.  Сондықтан болғандықтан түзуі КК–ға параллель болады, осы сияқты түзуі де КК–ға параллель болады.  450  A    9  В  6  8  7  A  k  h  b  а  В  А  10  Р  *296 – сурет*  Сонымен түзудің перспективасы , болатын түзу болып кескінделеді (296 5 – суретт).  2°. түзуі заттық жазықтықта жатсын және картина жазықтығына перпендикуляр болсын . Бұл түзу картина табанын нүктеде қисын, оның шекті нүктесін табу үшін S нүктеден ке параллель жүргізіп горизонт сызығымен қиылысу нүктесін табу керек. Ал, болғандықтан S тен оған жүргізілген параллель түзу картинаның бас нүктесі Р – ға барады. Сондықтан картина жазықтығына перпендикуляр түзулер Р нүктеге бағытталады (296 6 – сурет). Заттық жазықтыққа параллель картина жазықтығына перпендикуляр болатын мұндай түзуді **тереңдік түзуі** дейді.  3°. Заттық жазықтығына параллель, ал картина жазықтығына кезкелген (доғал, не сүйір) бұрыш жасайтын түзудің перспективтегі шекті нүктесі горизонт сызығында жатады, бірақ ол Р мен беттесу керек (296 9 – сурет).  Заттық жазықтыққа параллель болатын және картина жазықтығымен 45° бұрыш жасайтын түзудің шекті нүктесі горизонт сызығында жатады және ол картинаның бас нүктесі Р – дан SР қашықтықта жатады. Оны десек болғандықтан болады (296 10–сурет). Бұл суреттегі бұрыш оригиналда 45° тең болады, ал суретте сол 45° тық бұрышты кескіндейді. Сол нүктелерді картинаның дистанциялық нүктелері дейді.  4°. Заттық жазықтыққа перпендикуляр. Сондықтан картина жазықтығына параллель түзуді вертикал түзу дейді. Ондай түзу үшін болып, болып кескінделеді (296 7 – сурет).  Картина жазықтығына параллель, ал заттық жазықтықпен кезкелген 90° қа тең емес бұрыш жасайтын түзуді фронтал түзу дейді. Мұндай түзудің шекті нүктесі болмайды.  Фронтал түзудің проекциясының перспективасы картина табанына параллель болады (296 8 – сурет).  AH  a∞=P  P=a∞  a∞  a∞  A∞  A∞  A∞  A∞  AH  AH  AH  Ak  Ak  Ak  Ak  h  h  h  h  1  2  3  4  *297 – сурет*  **Түзудің іздері.** Түзудің заттық (картиналық) жазықтықпен қиылысу нүктесін **заттық (картиналық) із** дейді. Түзудің ізін салу үшін ол түзуді бастыра жазықтық жүргізіп ол жазықтықтың Н,К жазықтықтарымен қиылысу сызығын тауып олардың берілген түзу мен қиылысу нүктесін табады.  297 1–суретте ылдилай (құлдилай) орналасқан түзуінің перспективтегі ізін салу жолы көрсетілген, 297 2 – суретте өрлей орналасқан түзудің іздері салынған, ал 297 3 – суретте өрлей орналасқан, 297 4 – суретте ылдилай орналасқан дербес жағдайдағы түзулердің іздері салынған. Оларды заттық картиналық іздері.  **4. Түзулердің өзара орналасуы.** Горизонтал түзулердің шекті нүктесі горизонт сызығында жатады. Егер олар параллель болса, онда олардың шектік нүктесі ортақ болады. Сондықтан параллель түзулер сол нүктеде тоғысады (298 1 – сурет.)  1  Р        2      4    А  3  *298 – сурет*  Бұл суреттегі заттық жазықтықта жатыр, ал оларға параллель бірақ заттық жазықтықта жатпайтын түзу. 298 1–суретте жоғарылай беретін параллель түзулердің перспективасы берілген. 298 3– суретте өзара қиылысатын түзулер кескінделген, А олардың қиылысу нүктесі. 298 4–суретте айқас түзулер кескінделген. Олардың қиылысу нүктесі мен оның табаны бір түзуде жатпайды.  **49.4. Жазықтықтың перспективті кескіні.** Кеңістікте жазықтық өзінің әртүрлі үш нүктесімен, бір нүкте және одан өтпейтін бір түзумен, өзара қиылысатын екі түзумен, өзара параллель болатын екі түзумен немесе қандайда бір фигурамен (мысалы үшбұрышпен) берілуі мүмкін (299–сурет).    1  в  6  С(с)  5  3  2  h  с  с  в  в  в  а  а  а  а  а  С  С  А  А  А  В  В  А  В  В(в)  А(а)  В(в)  С(с)  А  В  4  *299 – сурет*  Бірақ жазықтықты бұлайша кескіндеу көрнекі емес. Сондықтан жазықтықты оның картиналық және заттық іздері арқылы кескіндейді. Ол көрнекілеу және есептеу жұмыстарын жүргізуге мүмкіндік береді (300 – сурет). 300 а – суретте еркін орналасқан жазықтығы берілген. Оның заттық ізі , картиналық ізі . Олар картина табанымен нүктеде қиылысады. Картиналық ізі тың перспективасы өзі болады, оны деп белгілейік, ал заттық ізі тың перспективасы кесінді болады. Мұндағы . Ізі арқылы берілген жазықтықтың перспективік кескіні 300 б–суретте берілген. Заттық із суретте кесінді болады (одан әрі созылмайды), заттық із шексіз созылуы мүмкін.   * жазықтықтың бойында жатқан түзудің және оған параллель түзулердің тоғысу нүктесі болады. Ал, тың ол түзуге параллель болмайтын түзулерінің шексіз алыстаған нүктелері басқа болады. Олардың жиыны тың шексіз алыстаған түзуі болады. Ол түзудің перспективасын табу үшін нүктеден жазықтығына параллель түзулер шоғын жүргізу керек. Олардың картина жазықтығымен қиылысу сызығы шексіз алыстаған түзудің перспективасы болады. Сондықтан тың шекті түзуінен перспективасын салу үшін нүктеден картина өзіне параллель түзу жүргізу керек (300 а, б – сурет).   в)  б)  h  **Q**  k  k  h  а)  **Q'**  S  h    **Q**  k  k  *300 – сурет*  Жазықтық картинада шектік түзу және картиналық ізі арқылы берілуі мүмкін. Мұндай кезде заттық ізді табу үшін картиналық ізді картина табанымен қиылыстырып, ол нүктені шектік түзудің горизонт сызығымен қиылысу нүктесіне қоса салу керек.  а)    P    б)    P    в)    P    г)  **U**  *301 – сурет*  301–суретте дербес жағдайда орналасқан жазықтықтың перспективтік кескіні берілген. 301 а–суретте Н–қа да, К–ға да перпендикуляр жазықтықтың перспективасы берілген.  тың Р–ға бағытталуы КК–ға перпендикуляр екенін, сондықтан жазықтықтың картина жазықтығына перпендикуляр екенін көрсетеді. Ал екені екенін білдіреді.  301 б–суретте мен перпендикуляр емес. Сондықтан Т жазықтығы Н–қа перпендикуляр емес, ал тың Р–ға бағытталуы Т–ның К–ға перпендикуляр екенін білдіреді.  301 в–суретте Н–қа перпендикуляр (себебі ), ізі Р–ға бағытталмағандықтан жазықтық К – ға перпендикуляр емес.  301 г–суретте картина жазықтығына параллель жазықтығы кекінделген. Себебі .  **49.5. Шеңбердің перспективасы.** Заттық жазықтықта жатқан шеңбердің картина жазықтығындағы кескінін салу үшін, оның әрбір нүктесін көру нүктесі ке қосу керек. Сонда конус шығады. Оның картина жазықтықпен (К–мен) қиылысу сызығы шеңбердің перспективасы болады. Ол конустық қима эллипс болады, егер К жазықтық конустың барлық жасаушыларын қиятын болса (302 а–сурет); парабола болады егер К жазықтық конусты оның бір жасаушысына параллель болып қиятын болса (302 б–сурет); гипербола болады, егер К жазықтық конусты оның екі жасаушысына параллель болып қиятын болса. Бұл тұжырымдар аналитикалық геометриядан белгілі.  Заттық жазықтықта шеңбер жатсын. Сол шеңбердің перспективасын салайық.  б)  S    k  k  S    а)  *302 – сурет*  Көру нүктесінің табанынан картина табанына жүргізілген параллель түзуді бейтарап түзу , ал нүкте мен бейтарап түзу арқылы жүргізілген жазықтықты бейтарап жазықтық дейді. Сонда 302 а – суретте шеңбердің бейтарап түзумен ортақ нүктесі жоқ. Картина жазықтығы барлық конус жасаушыларын қияды. Демек шеңбер кескіні бұл кезде эллипс болады.  302 б–суретте бейтарап түзу шеңберге жанасады. Бұл кезде К жазықтығы конусты тек бір жасаушысына (ол ) параллель бағытта қияды. Демек шеңбердің перспективасыпарабола болады.  302 в – суретте бейтарап түзу шеңбермен екі нүктеде қиылысып жатыр. Сондықтан К жазықтығы жасаушыға параллель (себебі ). Сондықтан шеңбердің перспективасы гипербола болады.  S    в)  *302 – сурет*  Шеңбердің картинадағы перспективасын салу үшін оның бірнеше нүктесінің перспективасын салып, оларды жазық сызықпен қосу керек. Төмендегі шеңберді сырттай сызылған квадратты пайдаланып шеңбердің перспективасын салу үшін жолы бағаланады (303–сурет). мұнда заттық жазықтық бұрылып картина жазықтығымен беттестіріледі.  3  7  K  T  L  N  M  h  h  P  5                1  *303 – сурет*  Картинада шеңбер центрінің перспективасы О нүкте мен шеңбердің натурал радиусы берілсін.  Заттық жазықтықты 90°-қа КК бойымен бұрып, оны картина жазықтығының төмен қарай созындысымен беттестірейік. Осы беттескен кездегі О нүктенің жаңа орын ді табайық. Ол үшін дистанциялық нүктені табу керек. Ол болатын. Заттық жазықтықта жататын және картина табанымен 45° бұрыш жасайтын түзудің шекті нүктесі дистанциялық нүкте болатын. Сондықтан нүктеден картина жазықтығымен 45° бұрыш жасайтын түзуін жүргіземіз, нүктеден КК–ға перпендикуляр тұрғызып, оның түзумен қиылысу нүктесі ді табамыз. Сол берілген шеңбердің центрінің бұрылғаннан кейінгі орны болады. Өйткені ОР түзуі натурал күйде КК–ға перпендикуляр болады, ал дистанциялық нүктеге бағытталған түзу КК–мен 45° бұрыш жасайды.  табылған сан, ді центр етіп берілген радиуспен шеңбер сызамыз, оны сырттай бір қабырғасы КК–ға параллель болатын квадрат сызымыз. Ол болсын, оның диагоналын, орта сызығын жүргізейік. Сонда нүктелер табылады. Одан әрі түзулердің (олардың барлығыда КК–ға перпендикуляр) перспективалары кесінділерін саламыз. түзуінің перспективасы болғандықтан және болатындықтан мен нүктелердің перспективалары болады. Бұл нүктелердің картина табанына параллель жүргізіп 1,К,5,М нүктелерді табамыз. Одан картина табанына параллель жүргізіп 7,3 нүктелерді табамыз. КМ түзуін жүргізіп 8,4 нүктені деп 6,2 нүктені табамыз. Сонда шыққан шеңберді сырттай сызылған квадраттың перспективасы, 1 – 8 нүктелер нүктелердің перспективалары болады.  Осы сегіз нүктені жатық сызықпен қосса заттық жазықтықта берілген шеңбердің кескіні (картинадағы перспективасы) салынады.  Айтылған квадратты, нүктені пайдаланбайақ шеңбердің картинадағы кескінін салуға болады. Ол үшін картинаның бас нүктесі дистанциялық нүкте белгілі болуы керек және шеңбер кескінінің центрі О нүкте мен шеңбердің натурал радиусы берілуі керек.  түзулерін жүргізіп (303 – сурет) картина табанынан нүктелерді табамыз. Картина табанына кесінділерін салу арқылы нүктелерді табамыз. түзулерін жүргізіп бойынан нүктелерін тауып, олардың картина табанына параллель түзулер жүргізіп нүктелерді табамыз. Сонда шеңберді сырттай сызылған квадраттың перспективасы болады.  түзуін және О нүктеден картина табанына параллель түзуді жүргізу арқылы 1,5,7,3 нүктелерді табамыз.  Кезкелген нүктелерді табу үшін ден картина табанына перпендикуляр тұрғызып, оның бойына саламыз. бойына салып, ден КК – ға перпендикуляр түсіріп Е нүкте мен Р ны қосамыз. салып ны Р ға қосамыз. Сонда түзулермен диагоналдардың қиылысуынан 8,6,2,4 нүктелер табылады. Осы табылған 8 нүкте шеңбердің кескінін (перспективасын) анықтайды. Ол үшін оларды жатық сызықпен қолдап, не лекалмен қосамыз.  **49.6. Перспективтік масштаб салу.** Кеңістік фигураларының центрлік проекциялау әдәсімен салынған кескіні–фигураның және ол фигураның бөліктерінің өзара орналасуы мен формаларын ғана көрсетеді, бірақ ол натурал фигураның метрикалық қасиеттерін (өлшемдерін) анықтай алмайды. Ал, практика үшін оригиналдың (натурал фигураның) өлшемдеріне сүйеніп оның кескінін салу, ал кескініне сүйене отырып ол фигураның өзі, оның өлшемдері туралы мағлұмат алу қажет. Сөйтіп ол фигураны анықтайтын метрикалық есептерді шешу керек. Ол үшін оригиналдағы бірлік өлшемдердің перспективасын сала білуіміз керек.  Ал, бұл масштаб салу мәселесіне тіреледі.  Заттық жазықтықта жатқан түзуге масштаб салынған болса, онда ол түзудің проекциялаушы аппаратта қалай орналасуына байланысты перспективасы да әртүрлі болады, яғни ол түзулердегі масштабта әртүрлі болады.  Біз заттық кеңістіктің негізгі басты үш бағыты бойынша орналасқан түзулерге салынған масаштабты сол түзулердің перспективасына көшіру (бұл масштабты перспективтік масштаб дейді) жолдарын қарастырамыз.  Бұл негізгі басты үш бағыт мыналар.   1. Картина жазықтығына **перпендикуляр** болатын түзу бағыты. Ол түзуді **тереңдік түзуі**, оның бағытын **тереңдік бағыт,** оған салынған масштабты **тереңдік масштабы** дейді. Бұл масштаб картинаға қарағанда көзден алыс және жақын тұрған денелердің кескіндері арасындағы қатысты анықтау үшін қажет. 2. Картина табанына **параллель** болатын түзу бағыты, оны **ендік түзу,** оның бағытын **ендік бағыт,** оған салынған масштабты **ендік масштаб** дейді. Бұл масштаб картина центрінің оң жағында және сол жағында кескінделген денелердің арасындағы қатыстыанықтау үшін қажет. 3. Заттық жазықтыққа перпендикуляр болатын түзу бағыты, ол түзуді **биіктік түзуі,** оның бағытын **биіктік бағыты,** оған салынған масштабты **биіктік масштабы** дейді. Ол картинада кескінделген заттардың биіктіктерін дұрыс бейнелеу үшін қажет. Осы үш бағыттағы түзулерге салынған масштабтардың перспективасын салу жолдарын жеке – жеке қарастырайық.   **1. Тереңдік масштабы.** Проекциялаушы аппаратта заттық жазықтықта жатқан картина табанына перпендикуляр тереңдік түзуі берілсін (304 а – сурет). Картина табаны КК–ға натурал масштаб салайық.  P  а)  S    г)  A  P      a  *304 – сурет*  Бұл масштабты тереңдік түзуі ке көшіру үшін бөлу нүктелерінен картина табанымен 45° бұрыш жасайтын өзара параллель түзулер жүргізейік. Олар түзумен нүктелерде қиылыссын. Сонда болып, берілген тереңдік түзуі ке натурал масштаб салынады. Енді осы масштабтың перспективасын салайық ке түзудің перспективасы кесіндісі болады. Ал,  түзулері картина табанымен 45° бұрыш жасайтындықтан олардың перспективалары нүктеге бағытталады, яғни түзулері болады. Бұлар мен қиылысып масштабтық нүктелерді анықтайды. Сөйтіп картина жазықтығындағы өзара тең перспективиік кесінділер болады. Тереңдік түзуіне салынған тереңдік масштаб картина табанынан алыстаған сайын көзге кішірейіп көрінеді, ал натуралда олар тең болады.  304 б – суретте картина жазықтығы жеке алып көрсетілген. түзуіне перспективтік масштаб О нүктеден бастап салынған, ал картина табанына натурал масштаб салынған.  5  3  0  б)  P  00 10 20 30 40 50  в)    0 1 2  3  P  *304 – сурет*  304 в – суретте заттық жазықтықта жатпайтын, картина жазықтығына перпендикуляр болатын түзуге перспективті масштаб салу көрсетілген. Бұл кезде натурал масштаб ты басып өтетін және заттық жазықтыққа параллель болатын жазықтықтың картиналық ізіне салынады, ол із .  Бұл жағдайларда дистанциялық нүкте тереңдік түзуге салынған масштабты **перспективке көшіруші** нүкте болады.  Әдетте перспективті кескін салғанда көру нүктесінің картина жазықтығынан қашықтығы картина жазықтығының өлшемдерінен бірнеше рет артық болады. Сондықтан дистанциялық нүкте картина рамасынан тыс жатады (рамадан шығып кетеді). Мұндай кезде «бөлшекті дистанциялық нүкте» қолданылады. Оның мәнін 304 г–суреттен көруге болады. Тереңдік түзуі дан кәдімгі әдіспен дистанциялық нүкте арқылы кесінді салынған болсын. ның қақ ортасы және дың қақ ортасы нүктелерді қоссақта осы кесінді шығады. Сондықтан ,..., нүктелерді де дистанциялық нүкте үшін алуға болады. Оларды **бөлшекті дистанциялық нүкте** дейді. Бөлшекті дистанциялық нүктелерді пайдаланғанда натурал масштаб пен перспективті масштаб арасындағы қатыс өзгермейді.  **2. Ендік масштаб.** Картина табанына параллель түзу берілсін, ол заттық жазықтықта жатсын (305 а – сурет). Оның перспективасы картина табанына параллель болады. Ол АВ болсын. Картина табанына кесінділер салайық. Оларды параллель түзулер арқылы түзуге көшірейік: . Бұл параллель түзулердің тоғысу нүктесі болады. Бұл нүкте кесінділердің перспективалары кесінділерді табамыз.  a)  B  A  S    k  k  h  б)  0 1 2 3 4  h  *305 – сурет*  305 б–суретте ендік масштаб салу жеке картинада көрсетілген. Бұл суретте тоғысу нүктесі жалпы жағдайда еркін алынады. Егер масштаб АВ–да О нүктеден бастап салыну керек десе, онда нүкте еркін алынбайды, ол болады. Егер түзуді картина табанына параллель болатындай етіп басқа орынға жылжытылса перспективтік масштаб өзгереді, бірақ олар өзара тең болады.  **3. Биіктік масштаб.** Заттық жазықтыққа перпендикуляр. Сондықтан картина жазықтығына параллель болатын түзу берілсін. Картина жазықтығында жататын және оның табанына перпендикуляр болатын кезкелген түзу жүргіземіз. Оған натурал масштаб саламыз. Сол масштабтың бастапқы нүктесі О мен түзу табанын қиатын түзу жүргіземіз. Бұл түзудің шекті нүктесі болады. Сол арқылы перспективті масштабты саламыз (306 – сурет).  4  3  2  1  0  4  3  2  1  0  *306 – сурет*  **4. Заттық жазықтықта еркін орналасқан түзуге перспективті масштаб салу.** Заттық жазықтықта кезкелген түзу берілсін (307– сурет). Картина табанына нүктеден бастап натурал масштаб салынсын . Болу нүктелері ларды берілген түзуге көшірейік. Ол үшін бұл нүктелерден параллель түзулерін тың табанындағы бұрыштар тең болатындай етіп жүргіземіз. Сонда түзуінде натурал масштаб салынады. жүргізу арқылыгоризонт сызығының бойынан тың шекті нүктесі және масштабты көшіретін параллель түзулердің тоғысу нүктесі М–ді табамыз. Сонда кесінді түзуінің перспективасы болады. М–мен нүктелерді қоссақ түзу бойында 1,2,3 нүктелер табылады. Бұлар нүктелердің перспективалары болады. Ал, кесінділер перспективті масштаб болады.  3  1    D  М  Р  б)  a)          S  М  Р      *307 – сурет*  Горизонт жазықтығындағы ~, себебі . Сондықтан болады. Егер ды бұрып картина жазықтығымен беттестірсек, ол күйге келеді және нүкте Р дан қа жүргізілген перпендикуляр бойында жатады және болатын нүктеге көшеді.  Сонымен егер картинада дистанциялық нүкте бас нүкте Р белгілі болса беттескен көрк нүктесі ты әруақытта табуға болады (307 б – сурет): шеңбермен Р нүктеден қа жүргізілген перпендикулярдың қиылысу нүктесі болады.  Соның жәрдемімен шеңбермен тың қиылысу нүктесі М – ды табамыз. Ол натурал масштабты берілген түзуге көшіру нүктесі болады (оны масштабты нүкте дейді).  М белгілі болған сан табанына нүктелер арқылы натурал масштабты салып оны кезкелген түзуге көшіруге болады.  **Мысалдар мен есептер**  **1–мысал.** Картинада берілген нүктелердің кеңістіктегі орны, өзара орналасуы туралы не айтуға болады.  Шешуі: Р картинаның бас нүктесі, оның табаны (308–сурет). Сонда түзу картинаны екіге бөледі. Оны картинаның сол және оң жағы дейді. КК – картина табаны. горизонт сызығы делінеді.  а) нүктелер картинаның сол жақ бөлігінде, нүктелер оң жақ бөлігінде жатыр.  б) А нүкте заттық жазықтықта жатыр. Себебі ол өзінің табаны а мен беттескен.  в) В нүкте картина жазықтығында жатыр, өйткені оның табаны в картина табанында жатыр. Мұндай нүктелерді (А мен В–ны) дербес жағдайдағы нүктелер дейді (). Қалған нүктелер жалпы жағдайдағы нүктелер делінеді.  г) нүктелер горизонт сызығынан төмен жатыр, С мен нүкте горизонт сызығынан жоғары жатыр, ал Р мен Е нүкте горизонт сызығы деңгейінде жатыр.  д) Ең төмен (заттық жазықтыққа жақын) орналасқан нүкте А (себебі ол заттық жазықтықта жатыр), ең жоғары (биік) орналасқан нүкте (заттық жазықтықтан ең қашық орналасқан нүкте) , ол С нүктемен бір деңгейде жатқанымен, оның табаны С нүктенің табы С – дан гөрі алыс жатыр.  е) Көрушіге алыс–жақындығын ажырату үшін нүктенің табанының картина табанынан қашықтығын салыстыру керек В ең жақын нүкте, себебі . Көрушіге В дан кейінгі жақын орналасқан нүкте , одан соң С, С–дан кейін нүкте жатыр, ал А мен Е бірдей қашықтықта жатыр, ең алысы .  n  f  e  d  c  k  k  h  h  P0  B  N  D  P  E  C  F  *308 – сурет*  Сөйтіп көрушіге картинада ең жақын орналасқан В нүкте, ең алыс орналасқан нүкте, ең төмен орналасқан А нүкте, ең биік орналасқан нүкте.  **2–мысал.** Заттық жазықтықта жатқан бұрыштың перспективасын салыңдар.  Шешуі. Заттық жазықтықта жатқан бұрыш берілсін (309– сурет). Көру нүктесі тен түзулеріне параллель түзулер жүргізсек, олардың горизонт сызығымен қиылысу нүктелері бұл түзулердің шекті нүктелері болады. Сонда болады. Егер горизонт жазықтығын картина жазықтығымен беттестірсек, тен жаңа орны болса, онда болады. Бұдан бұрыштың перспективасын салу жолы шығады (309 б–сурет). Ол мынадай: 1–ден, беттескен көру нүктесі ты салады. Ол горизонт сызығына перпендикуляр түзуде жатады және болатын 2–ден, төбесі болатын шамасы ге тең болатын кезкелген бұрыш салады. Ол бұрыштың қабырғаларының горизонт сызығымен қиылысу нүктелері берілген бұрыш қабырғаларының шекті нүктесі болады. Сонда картинада қабырғалары осы нүктелерге тірелетін кезкелген бұрыш берілген бұрыштың перспективасы болады. Демек бұрыштардың барлығы да бұрышқа тең бұрыштың перспективасы болады, яғни картинада бұрышқа тең болады.  б)        D  P  а)    k  k  h  h    S    P          *309 – сурет*  **3–мысал.** Картинада берілген бұрыштың натурал мәнін табу керек.  Шешуі. 309 б – суретте бұрыш берілсін. Оның натурал мәнін табу үшін қабырғаларын созып горизонт сызығымен қиылысу нүктелері ды табады. Картинаның бас нүктесі Р дан перпендикуляр тұрғызып оның бойына өлшеп салып беттескен көру нүктесі табады. нүктелерді ке қосады. Сонда қанша болса бұрыштың натурал мәні соған тән болады.  **4–мысал.** Картинада жазықтығында жатқан кесіндінің натурал ұзындығын табу керек.  N  M  P  D  C  D  B  A  P  M  D  *310 – сурет*  Шешуі. 310 – суретте еркін орналасқан АВ, картина табанына параллель орналасқан , Р – ға бағытталған түзу берілген.  а) Заттық жазықтықта еркін жатқан АВ кесіндінің натурал ұзындығын табу үшін беттескен көру нүктесін тауып, соның жәрдемімен масштабты нүкте М – ді табу керек.  Ол үшін АВ–ның шекті нүктесі ді табамыз, Р–дан қа перпендикуляр тұрғызып болатын беттескен көру нүктесі саламыз. болатын М нүктесін тауып осы нүкте арқылы АВ кесіндіні картина табанына көшіреміз. Сонда ұзындығы АВ – ның натурал ұзындығы болады.  б) Заттық жазықтықта картина табанына параллель орналасқан кесінді берілсін. болғандықтан оның шекті нүктесі горизонт сызығының шексіз алыстаған нүктесі болады. Сондықтан ол нүкте үшін тың кезкелген нүктесін алуға болады. Сол арқылы ны картина табанына көшіреміз. Сонда шыққан кесіндінің ұзындығы ның натуралы ұзындығына тең болады.  в) Заттық жазықтықта жатқан және картина табанына перпендикуляр кесіндіні қарастырайық. Натурал жағдайдағы кесінді картинаға перпендикуляр болғандықтан кесінді Р–ға бағытталады. Бұл кезде дистанциялық нүкте масштабты нүкте болатын. Сондықтан нүкте арқылы кесіндіні картина табанына көшіреміз. кесіндінің ұзындығы кесіндінің натурал ұзындығы болады.  **5–мысал.** Картинада берілген кесіндіден 2 есе (жалпы n есе) ұзын кесіндіні салыңдар.  Шешуі. 310 – суреттегідей АВ кесінді берілсе, онда 4–мысалдағы айтқан жолмен кесіндіні тауып, картина табанынан болатын нүктесін тауып, оны М нүктеге қосады. Сонда болса, болады. 2–ге (n–ге) бөлу нүктесі де осылай табылады. ды 2 – ге бөліп нүктені тауып нүктені табады. Сонда натурал болады.  **6–мысал.** Заттық жазықтықта картина табанына параллель екі түзу берілген. Бұлармен қиылысып параллелограмм, тік төртбұрыш және трапеция жасайтын екі түзу жүргізу керек (311 – сурет).        P  M  k  k  h  h  *311 – сурет*  Шешуі. Параллель түзулер горизонт сызығында тоғысатындықтан түзулер М нүктеде тоғыссын. Сонда берілуі бойынша , салу бойынша . Сондықтан төртбұрышы параллелограмның бейнесі болады. Тік төртбұрыш болу үшін картинаның бас нүктесі Р – ға бағытталу керек. Сонда олар әрі параллель, әрі картина табанына. Сондықтан оған параллель түзулеріне перпендикуляр болады. Сондықтан тік төртбұрыш болады. Егер түзулер горизонт сызығынан тыс жерде қиылысатын болса, олар параллель болмайды. Сондықтан трапеция болады. мұнда , ал пен параллель емес. бұрыш сүйір, себебі бұрыш тік болады, ал бұрыш доғал, себебі бұрыш тік болады.  **7–мысал.** Картинада заттық жазықтықта жататын АВ түзуі және онда жатпайтын С нүктесі берілген. С нүктеден АВ – ға параллель түзу жүргізу керек (312 – сурет).  а)  c  B  A  C  б)  c  B  A  C  N      *312 – сурет*  Егер АВ түзуінің шекті нүктесі рама ішінде жатса (жалпы баруға болатын нүкте болса), онда С–ны сол шекті нүктеге қоса саламыз. Сонда болады. Егер шекті нүкте рамадан шығып кетсе (тіпті алыстап кетсе), онда С төбесі болатын кезкелген үшбұрыш аламыз және , етіп аламыз. тың кезкелген нүктесін алып түзулерін жүргіземіз, оның АВ мен қиылысу нүктесі десек ~ болады. Сондықтан мен АВ горизонт сызығының бір нүктесінде қиылысады. Сондықтан болады.  **8–мысал.** Картинада іздері арқылы берілген екі жазықтықтың қиылысу сызығын салу.  а)  N  M  **Q**  R  в)  **Q**  **R**    б)  M  *313 – сурет*  Шешуі. Жазықтықтың қиылысу сызығын салу үшін ол жазықтықтарға ортақ екі нүктесін тауып оларды қосу керек. Ондай нүктелер үшін заттық іздердің қиылысу нүктесі мен картинамен іздің қиылысу нүктесі нүктелерді алуға болады. Сонда екі жазықтықтың қиылысу сызығы болады (313 а – сурет). Кейде жазықтықтардың шекті түзулерінің қиылысу нүктесі ді пайдаланған жөн (313 б–сурет). Бұл кезде шекті түзу мен ға параллель болып горизонт сызығымен пен пен қиылысу нүктелерінен жүргізіледі.  Егер екі жазықтық параллель болса, онда олардың аттас іздері параллель болады және заттық іздері горизонт сызығында тоғысады. Мұндай жазықтықтардың шекті түзуі екеуіне аттас болады. Ол (313 в–сурет) .  **9–мысал.** Жазықтық пен түзудің қиылысу нүктесін салу керек.  Шешуі. Картинада жазықтығы іздері , арқылы және АВ түзуі (табаны ав) АВ, ав кесінділер арқылы берілсін (314 а–сурет). Олардың қиылысу нүктесін табу үшін АВ, ав түзулерді бастыра жазықтығын жүргіземіз. Оның заттық ізі түзудің табаны ав мен беттеседі, ал заттық жазықтыққа перпендикуляр болады. Сондықтан ол нүктеден КК – ға жүргізілген түзу болады. нүктеде, нүктеде қиылысады (314 б – сурет).  а)  в  В  N  C  L  а  А  б)  М  в  В  *314 – сурет*  Сонда екі жазықтық түзу бойымен қиылысады. Ал, бұл түзудің АВ мен қиылысу нүктесі берілген жазықтықпен түзудің қиылысу нүктесі болады.  **10–мысал.** Үш нүкте арқылы берілген жазықтықпен заттық және картинаның іздерін салу керек.  a)  C=c  в  В  а  А  б)  А    в  В  C=c  а  *315 – сурет*  Шешуі. 315 а–суретте А(а), В(в), С(с) нүктелер берілген. Ол нүктелерден өтетін жазықтықты дейік. нүкте АВ – ның заттық ізі болады. тауып бұл нүктеден картина табанына перпенкуляр тұрғызып АВ мен қиылысу нүктесі ны табамыз. Ол АВ – ның картиналық ізі болады. түзуі жазықтықтың заттық ізі болады. ды ға қоссақ жазықтықтың картиналық ізі болады.  **11–мысал.** Заттық кеңістікке еркін қойылған тік параллелепипедтің картинадағы перспективасын салыңдар.  D  C  B  A      k  k  h  h  а)  D  C  B  A  б)  *316 – сурет*  Шешуі. Параллелепипедтің барлық жағы параллелограмм болатындықтан олардың параллель қырлары горизонт сызығында тоғысу керек (316 – сурет).  316 а–суретте көру нүктесінің биіктігі параллелепипед биіктігінен жоғары, ал б–суретте көру нүктесінің биіктігі параллелепипед биіктігінен төмен болған кездегі тік параллелепипедтер перспективада кескінделген. Бұларда қырлар өзара, қырлар өзара параллель болғандықтан олардың алғашқысы , кейінгілері нүктелерде тоғысып тұр.  Егер параллелепипедтің екі жағы, мысалы жақтарын картина жазықтығына параллель қойылған болса, онда бұл жақтардың перспективасы параллелограмм болып кескінделеді. қырлары картина табанына параллель болады, ал қырлары шекті нүктесі де тоғысатын болып кескінделеді.  **12–мысал.** Бір жағы заттық жазықтыққа перпендикуляр болатын үшбұрышты көлбеу призманың перспективасын салу керек.  A  B  C      *317 – сурет*  Шешуі. Алдымен картина жазықтығына призманың табаны болатын кезкелген саламыз (317 – сурет).  АВ – ны созып оның шекті нүктесі табамыз. Сол нүктеден горизонт сызығына перпендикуляр түзу жүргіземіз. Ол жазықтықтың шекті түзуі болады. Осы түзуде призманың бүйір қырларының тоғысу нүктесі жатады. Ол картина рамасынан тыс жатады. Сондықтан оның орнын бір қырының бағыты (мәселен ) арқылы еркін аламыз.  Одан соң С және А нүктелерден оған параллель түзулер жүргіземіз (7 – мысал). Жүргізілген түзу бойына кезкелген нүкте алып, ол нүктеден АС, АВ түзулеріне параллель түзулер жүргіземіз. Бұл түзулердің қиылысуынан нүктелер табылады. Сонда призманың іздеген перспективті кескіні болады.  **13–мысал.** Заттық жазықтықта екі жағы картина жазықтығына параллель етіп қойылған, қырлары 45мм болатын және табаны картина табанынан 15мм қашықтықта жататын кубтың перспективті кескінін салу керек. Картина .  01 02 03 04 05 06  k  T  P  Е  C    A  B    *318 – сурет*  Шешуі. Алдымен берілген кубтың төменгі табанының перспективасын саламыз (318 – сурет). Перспективті масштаб салуды пайдаланамыз. Картина жазықтығының табанына және бүйіріне мм, мм кесінділерді өлшеп саламыз. жақтары картина жазықтығына параллель болғандықтан қырлары картинаның нүктесіне бағытталады, ал қалған қырлары КК – ға параллель болады және мм болғандықтан А нүктенің картина табанынан қашықтығы 15мм болады. Сол нүктеден КК – ға параллель жүргізіп ның бойынан (мм) В нүктені табамыз. Егер ті ге қоссақ, мм болғандықтан АЕ қабырға және АВ қабырға 45мм – ге тең болады. Е ден картина табанына параллель жүргізіп С нүктені табамыз. Картинаның бүйір қырына мм өлшеп салып, оны Р – ға қосып А мен Е ден перпендикуляр тұрғызып нүктелерді табамыз, В мен С дан перпендикуляр, мен ден КК–ға параллель түзулер жүргізу арқылы нүктелерді табамыз. Сонымен салу аяқталады.  **14–мысал.** Бір қабырғасы картина жазықтығына параллель, қырлары 10,20,30мм болатын параллелепипедтің перспективасын салу керек (319–сурет).  k  k  h  h  10            900  20  30  *319 – сурет*  Шешуі. Салу үшінперспективті масштаб және масштабты нүктелер ді пайдаланамыз. Картина нүктелер берілген. Соған сүйеніп беттескен көру нүктесі ты саламыз: . Картина табанынан кезкелген О нүктесін алып, оны горизонт сызығына қосамыз, ол болсын. Оның бойынан кезкелген А нүктесін аламыз. Беттескен нүктеден 90° - тық бұрыш саламыз. Оның горизонтсызығымен қиылысу нүктелерінің бірін деп алып екіншісі ді табамыз. шеңберлер жүргіземіз. Олардың горизонт сызығымен қиылысу нүктелері және болсын. Бұлар масштабты нүктелер (масштабты көшіретін нүктелер) болады.  нүктеден А–ны бастыра түзу жүргізіп, оның картина табанымен қиылысу нүктесін табамыз. Ол болсын. Сонда мм өлшеп салып, оны М–ге қоссақ төбесі табылады және мм кесіндінің перспективасы болады. мм кескінді саламыз. десек мм–лік кесіндінің перспективасы болады. Е– ні ке қосып нүктені табамыз. Сонымен параллелепипедтің табаны және мм. мм өлшеп саламыз (), түзуін жүргіземіз, Е,С нүктелерден вертикал түзу жүргізіп тің бойынан нүктелерді табамыз, А,В нүктелерден вертикал түзу жүргізіп бойынан , бойынан нүктелерді табамыз. Сонда шыққан берілген параллелепипедтің перспективті кескіні болады.  **15–мысал.** Табаны заттық жазықтықта жататын және қабырғалар 30мм болатын квадрат, ал биіктігі 40мм болатын дұрыс пирамиданың перспективасын салу керек. Ол пирамиданың табанының бір қабырғасы картина табанына параллель қойылған. Картинада Р мен берілген.  Шешуі. пирамиданың АВ,СЕ табан қабырғалары картина табанына параллель болсын, онда АЕ,ВС қабырғалары картина жазықтығына перпендикуляр болады. Сондықтан олар картинаның бас нүктесі Р – ға бағытталады.    30    40  10  k  k  h  h  Q  P  T  A  B  C  E  L  F    *320 – сурет*  Картина табанынан кезкелген О нүктесін алып мм, мм өлшеп саламыз. Салынған нүктені Р мен нүктені мен қосамыз. Сонда десек, бұл нүкте картина табанынан 10мм қашықтықта жатыр.  А дан картина табанына параллель жүргізіп бойынан В нүктені тауып, жүргіземіз. Сонда мм болады. В нүктені ге қосамыз да тауып, одан КК – ға параллель жүргізіп С нүктені табамыз. Сонда болып шығады.  Картина бүйіріне биіктік масштаб саламыз. мм салып К мен ді горизонт сызығының кезкелген нүктесіне қосамыз. Ол болсын. Квадраттың диагоналдарының қиылысу нүктесі Т – дан горизонтал сызық жүргізіп бойынан нүкте тауып одан вертикал түзу жүргізіп бойынан нүктені табамыз. Сонда пирамида биіктігі ге тең болады. жүргізіп ты тауып, оны табан төбелеріне қосамыз. Сонда табаны квадрат (қабырғасы 30мм) болатын, биіктіг 40мм болатын дұрыс пирамиданың перспективасы болады.  **§50. Санмен белгіленген проекциялар**  Әдетте географиялық карталар жет бетіндегі объектілердің тік горизонтал өлшемдері (ұзындығы, ауданы) туралы мағлұмат береді.Өмірде таудың биіктіктерін, теңіздің тереңдіктерін, жер бетінің рельефінде кескіндеуге тура келеді. Бұларды кескіндейтін суреттер, сызбалар **топографиялық сызба,** сурет делінеді. Топографиялық сызба (сурет, кескін) «санмен белгіленген проекция» атты тәсілмен жасалады. Бұл тәсілдің мәнісі мынадай. Кеңістік денесінің нүктесі горизонтал орналасқан жазықтыққа (мұндай жазықтық үшін СССР – де балтық теңізінің деңгейі, беті алынатын) ортогонал проекцияланады да, проекция табанына ол нүктенің проекция табанынан қашықтығы (оны сол нүктенің **сан бөлігі** дейді) жазылады. Проекция жазықтығын Н әріппен белгілеп, оны нөл деңгейлі жазықтық деп те атайды. Мәселен А нүктеніңгоризонтал орналасатын проекция жазықтығы Н–тағы ортогонал проекциясының табаны а және болса, онда А нүктенің санмен белгіленген проекциясы деп жазылады. Егер В нүкте жазықтықтан төмен жатса, және оның Н жазықтықтағы ортогонал проекциясы в болса, және болса, онда В – ның санмен белгіленген проекцясы деп теріс таңбамен жазылады, ал нүкте Н жазықтығында жатса, онда оның ортогонал проекциясы деп жазылады (321–сурет). Нүктелердің табандарының ара қашықтығы, берілген масштаб бойынша олар арасын суреттен тікелей өлшеу арқылы табылады. Масштаб 321 – суретте көрсетілуі керек.  d 0  b n  a m  D  B  A  H  *321 – сурет*  Егерде проекция жазықтығында санмен белшіленген екі нүкте берілсе, онда ол нүктелер арқылы өтетін АВ түзудің орнын, АВ кесіндінің ұзындығын және АВ түзудің ең кішісін, проекция жазықтығымен қиылысу нүктесін бірмәнді анықтауға болады (322–сурет). Шынында да, нүктелерден жазықтыққа перпендикуляр тұрғызып, оның бойына өлшеп салу арқылы А,В нүктелер, АВ түзу, АВ кесінді табылады. түзуі АВ түзуінің ортогонал проекциясы болады. Ол екеуініңм қиылысу нүктесі АВ түзуінің проекция жазықтығын тесіп өту нүктесі болады. В нүктеден (егер болса) ав – ға параллель жүргізіп, оның аА мен қиылысу нүктесі ны тапсақ, тік бұрышты үшбұрыш шығады. Оның бұрышы АВ түзудің Н жазықтығына көлбеу (еңкею) бұрышы болады, болады. өлшеу арқылы табылады. Сонда  (50 – 1)  (50 – 2)  деп белгілейді, мұны яғни түзудің көлбеу бұрышының тангенсын **түзудің ылдилығы** дейді. Ол АВ бойымен қозғалатын нүктенің өрлеу немесе құлдилау шамасын сипаттайды.      *322 – сурет*  Егер А мен В нүктелердің сан белгілерінің айырымы болса, онда бұл нүктелердің табандарын жалғайтын кесіндіні АВ **түзуінің интервалы** дейді. Оны мен белгілесек  болады да (50 – 3)  Егер мен белгілі болса, осы формуламен интервалды тауып түзуге шкала салуға болады (323 – сурет).  а12 а11  а10 а9 а8 а7 а6 а5 а4 а3 а2 а1 а0  *323 – сурет*  Мысалы болатын А,В нүктелер берілсе АВ түзуінің интервалы болады. түзуі бойына нүктеден бастап 2 – ге тең кесіндіні өлшеп салу арқылы нүктелерді табамыз, кесіндіні одан әрі созып нүктелер табылады. Сонда нүкте АВ түзу мен проекция жазықтығы Н – тың қиылысу нүктесі болады.  а)  40  30  20  10  0  7  7  6  6  8  5  г)  *324 – сурет*  Сөйтіп, түзу проекция жазықтығында өзінің екі нүктесінің санмен белгіленген проекциясы арқылы толық анықталады.  Әдетте жер беті тегіс болмайды, ой – шұқырлы болып келеді. Жер бетін кескіндейтін карта топографиялық карта делінеді. Тау, қыр, шың, шұқыр, жар т.б. нәрселерді кескіндеу үшін оларды таңдап алынған горизонтал проекция жазықтығына (әдетте су деңгейі бетіне) параллель жазықтықтармен қияды. Қимада нүктелері проекция жазықтығынан бірдей қашықтықта жататын тұйық сызық немесе үзінді сызық пайда болады. Оларды деңгейлік сызықтар немесе горизонтал сызықтар (горизонталдар) дейді (324 а – сурет).  Сол сызықтарды проекция жазықтығы Н–қа ортогонал проекциялаймыз. Сонда 324–б түрдегі Н жазықтығында орналасқан сызықтар шығады. Ішкі сызық жер бетінен (горизонтал жазықтықтан) 40–өлшем болатын аймақты көрсетеді, ал О – жер бетін көрсетеді. Сызыққа еңкіштік жағын көрсететін штрих–сызық қойылады. 324 б–суретте штрих–сызық әр деңгейлік сызықтың сыртына қойылған. Демек ол төбені білдіреді. Егерде штрих–сызық ішіне қойылса, онда ол шұқырды білдіреді (324 б–сурет).  б)  4  3  2  1  0  в)  30  40  20  10  0  *324 – сурет*  324 г–суретте тегістеу алқан кескінделген. 321, 324 б,в,г – суреттер план деп аталады. Пландағы сызықтардың жақын орналасқан жерлерінде таудың өрлігі (шұқырды еңкіштігі) көп (басқа жерлерге қарағанда өрлеу, еңкіштеу) болады, ал бір–біріненалыс орналасқан жерлерде тау (шұқыр) басқа жерлерге қарағанда көлбеулеу болады. Тіктеу жерлерге қарағанда көлбеулеу жерлермен жоғары тауға шығу немесе төмен қарай шұқырға түсі оңай болатыны түсінікті.  9  8  7  6  f  k  a  l  l  n  m  D  C  B  A  *325 – сурет*  325–суретте а нүктеден 7 мен 6 горизонталдарды жалғайтын шексіз көп түзу (кесінді) жүргізуге болады. Сол түзулердің кесінділерінің ең кішісі кесінді болсын. Онда бұл түзу горизонтал жазықтықпен ең үлкен бұрыщ жасайды. Демек ол ең үлкен ылдыйлық сызық болады. Сонда 325–суретте А нүктеден басталатын ең үлкен ылдыйлық сызықты салу үшін А нүктені центр етіп 8–горизонталмен жанасатын шеңбер жүргіземіз. Ол 8–горизонталмен В нүктеде жанассын, одан соң В нүктені центр етіп 7–горизонталға жанасатын шеңбер сызамыз, ол С нүктеде жанассын, содан соң С нүктені центр етіп 6–горизонталмен жанасатын шеңбер сызамыз. Ол нүктеде жанассын, сонда кесінділерден жасалған сынық сызық 325–суретте берілген топологиялық беттің А нүктеден басталатын ең үлкен ылдыйлық сызық болады.  c  d  b  a  f  *326 – сурет*  Ылдилығы берілген і–ға тең болатын кесіндіні салу үшін формула арқылы ді тауып (326–сурет) кесіндіні салу керек. Сонда АВ бағытында ылдыйлық і–ға тең болады. Осы әдіспен басқа горизонталдар бойынан нүктелерді тауып де сынық сызығын салуға болады. Мұның бойындағы ылдыйлық берілген і–ға тең болады. Осылайша ылдыйлығы берілген і–дан асып кетпейтін, немесе кеміп кетпейтін жол табуға болады.  Топографиялық сызба (сурет) объектінің берілген бағыттағы прафилін (кеспесін) салуға мүмкіндік береді. Мысалы 327–суретте вертикал жазықтық бағытын көрсетеді. Планның үстінгі жағындағы ға параллель түзулер горизонтал жазықтықтардың профил проекциялары мен горизонталдардың қиылысу нүктелерінен фронтал проекцияларын көрсететін байланыс сызықтары жүргізілген. Ол нүктелерді қосатын сызық объектінің профилі (кескіні) болады.  40  60  50  40  b  20  20  30  30  30  30  20  10  20  a  70  60  50  40  30  20  10  0  *327 – сурет*  Топографиялық суреттерде (планда) бір нүктеден екінші нүктенің көрінетінін немесе көрінбейтінін анықтауға болады. Мысалы 328–суретте жер беті нөл деңгейлік жазықтықтан 70,60,50,40,30,20м қашықтықта оған параллель жазықтықтармен қиылған. 70метрлік алқанта а нүктесі, 50метрлік алқанта нүктесі, 30метрлік алқанта с және е, 20метрлік алқанта нүктесі берілген. а нүктеден нүктелердің қайсысы көрінеді, қайсысы көрінбейтінін анықтау керек болсын.  50  50  70  60  60  60  60  60  50  50  50  50  40  50 40  40  40  40  40  40  30  30  30  20  30  30  F  E  C  B  A    *328 – сурет*  мен ның сандық белгілері 70 және 50, олардың айырымы , ал горизонтал жазықтықтар биіктігінің айырымы 10–нан. Сондықтан деңгейлік жазықтықтар АВ кесіндіні теңдей етіп ге бөледі. Ал, АС, АЕ кесінділерді ке бөледі, АЕ кесіндіні ке теңдей етіп бөледі. Сонда, мысалы А нүктеден С нүкте көріну үшін АС түзуінің барлық нүктелері жер бетінен жоғары тұру керек, ал АС–ны горизонталдар теңдей 4ке бөледі, ол бөлік нүктелерінің сандық көрсеткіштері 60,50,40,30 болады. АС–ның бойындағы сандық белгісі 40 болатын нүкте мен С нүктесінің арасында биіктік деңгейі 40 болатын горизонтал жатыр. Сондықтан А нүктеден С көрінбейді. Дәл осы сияқты А нүктеден нүктеде көрінбейді, өйткені тың сандық белгісі 30 болатын нүкте мен нүктесінің арасында биіктігі 30 дан аз емес төбе жатыр. Сондықтан түзуі сол төбеге тіреліп қалады. А нүктеден В және Е нүктелер көрінеді, өйткені АВ, АЕ кесінділері тіреліп қалатындай А мен В, А мен Е арасында горизонтал жоқ.  **Қайталауға арналған сұрақтар мен есептер**   1. Параллель проекциялау және оның негізгі қасиеттері қандай? 2. Аффиндік бейнелеу деп қандай бейнелеуді айтады? 3. Параллель проекциялау аффиндік бейнелеу болады ма, жоқ па? Себебі қандай? 4. Параллель проекциялау мен аффиндік түрлендірудің көбейтіндісі аффиндік бейнелеу болады ма, жоқ па? 5. жазықтықтағы реперді жазықтықтағы реперге көшіретін аффиндік бейнелеудің жалғызақ болатындығы туралы теорема қалай айтылады, қалай дәлелденеді?  1. Қандай фигуралар аффинді–эквивалентті делінеді? 2. Екі төртбұрыштың аффинді–эквивалентті болу шарты қандай? Бұл туралы теореманы дәлелде. 3. Кескін деген не? Кескінге қойылатын талаптар. 4. Бір фигураның екінші фигураның кескіні болуы жайлы теорема. 5. Егер жазықтықтардан алынған , төртбұрыштар аффинді–эквивалентті болса, онда жазықтығы табылып төртбұрыштың жазықтыққа перпендикуяр бағыттағы дегі проекциясы дың берілген төртбұрышқа ұқсас болатындығы туралы теорема.  1. Польке – Шварц теоремасы. 2. Жазық фигураларды кескіндеудің жалпы ережесі қандай? 3. Үшбұрыштың, төртбұрыштың, көпбұрыштың, параллелограмның, трапецияның кескінін салу жолдары. 4. Шеңбердің кескінін салу. 5. Тетраэдрдің, параллелепипедтің, призманың, пирамиданың кескінін салу. 6. Цилиндрдің, конустың кескінін салу. 7. Шарды кескіндеу. 8. Аксонометриялық координата жүйесі, аксонометриялық проекция, түрлері. 9. Тік бұрышты аксонометриялық проекция, іздік үшбұрыш аксонометриялық масштаб, бұрмалау коэффициенті шеңбердің аксонометриялық проекция. 10. Тік бұрышты изометриялық проекция. Диметрикалы тікбұрышты аксонометрия. 11. Қиғаш бұрышты аксонометриялық проекция, қиғаш бұрышты фронталды изометрикалы, горизонталды изометрикалы, диметрикалы аксонометриялық проекциялар. 12. Аксонометриялық кескінде нүкте, түзу, жазықтықтардың берілуі. 13. Толық және толық емес кескін. Мысалдар. 14. Кескіннің толымсыздық коэффициенті. Мысал. 15. Позициялық есеп, оған мысал. 16. Метрикалық есеп, оған мысал. 17. Көпжақтардың қимасын салу, мысал. 18. Евклидтік анықталған кескін. 19. Кескіндеудің Монж әдісі. Нүкте, түзу, жазықтықтардың эпюрі. 20. Түзу, жазықтық, нүктелердің өзара орналасуы. Түзудің ізі. Жазықтықтың горизонталы мен фронталы. 21. Кесінді ұзындығы. 22. Түзу, жазықтықтардың перпендикулярлығы. 23. Геометриялық денелердің кескіндері. 24. Центрлік проекция. Проекциялаушы аппарат нүктенің перспективасы. 25. Түзудің перспективасы, шекті нүктесі. Параллель түзулердің тоғысу нүктесі. Дербес жағдайдағы түзудің перспективасы. Түзудің іздері өзара орналасуы. 26. Жазықтықтың перспективасы, іздері арқылы берілуі. 27. Шеңбердің перспективасы. 28. Перспективті масштабты салу. Масштабты нүкте. Тереңдік, ендік, биіктік масштабтар. Еркін орналасқан түзуге масштаб салу. Беттескен көру нүктесі. 29. Санмен белгіленген проекцияның мәнісі қандай? 30. Нүктенің, түзудің санмен белгіленген проекциялары. 31. Түзуге шкаланы қалай салады? 32. Бір нүктеден екінші нүктенің көрінер – көрінбесін қалай анықтайды. 33. Ең үлкен ылдилықты қалай табады? |

**Пайдаланылған әдебиеттер:**

1. Атанасян Л.С., Геометрия, часть1 М:»Просвешение» 1973.

2. Атанасян Л.С., Гуревич Г.Б, Геометрия, часть 2, М:»Просвешение», 1976.

3.Атанасян Л.С., Базылев В.Т., Геометрия, часть1,2, М:»Просвещение», 1986,1987.

4. Габушкин Л.И., Геометрия, М:»Высшая школа», 1966.

5. Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П.

а) геометрия часть 1, М:»Просвешение», 1974 .

б)геометрия 1-бөлім, Алматы:«мектеп», 1979.

(аудармашылар Ысқақов М., Әмірбаев М., Бәйімбетов Н., Байжанов

6) Базылев В.Т., Дуничев К.И.

а)геометрия часть 2, М:«Просвешение», 1975 .

б)геометрия 2-бөлім, Алматы:«Мектеп», 1981.

(аудармашылар Ысқақов М, Құлқашева М, Бидосов А, Байжанов А)

7. Бакельман И.Я., Высшая геометрия, М:»Просвешение», 1967.

8. Берже М., Геометрия Т1,2, М:»Мир», 1984.

9. Дубтобин Б.А., Новиков С.П., Фоменка А.Т.,

Современная геометрия, М:»Наука», 1978.

10. Егоров И.П., Геометрия, М:»Просвешение»,1979.

11. Ефремов Н.В., Высшая геометрия, М:»Наука», 1978.

12. Погорелов А.В., Геометрия, М:»Наука»,1983.

13. Федин Н.Г Геометрия «Высшая школа», М; 1978.

14.Аргунов Б.И, Демидова Н.Н, Литвиненко В.Н.

Задачник практикум по геометрии часть1 М;»Просвешение»,1979.

15.Аргунов Б.И, Парнасский И.В, Парнасская О.Е, Цаленко М.М

Задачник практикум по геометрий часть 2,3 М;»Посвешение», 1979.

16. Атанасян Л.С, Атанасян В.А. Сборник задачи по гоеметрии часть1 М;»Просвешение», 1973.

17.Атанасян Л.С и другие. Сборник задач по геометрии , часть2 М;»Просвешение»,1975.

18.Базылев И.Т и другие. Сборник задач по геометрии М;»Просвешение», 1980.

19.Гильберт Д,С,Кон-Фасин Нагелдная Геометрия М;»Наука», 1981.

20.Картеси Ф Вельдение в конечные геометрии М;»Наука, 1980.

**Мазмұны**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Кіріспе................................................................................................................. | 3 |
|  | **ІХ ТАРАУ. ПРОЕКТИВТІК ГЕОМЕРТИЯ**................................................ | 4 |
|  | §27. Проективтік кеңістік. Проективтік координаталар жүйесі.................... | 4 |
| 27.1. | Центрлік проекция. Меншіксіз элементтер..................................................... | 4 |
| 27.2. | Проективтік кеңістік.......................................................................................... | 4 |
| 27.3. | Проективтік жазықтық, проективтік кеңістік моделдері .............................. | 5 |
| 27.4. | Проективті жазықтық пен проективтік түзудің кейбір қасиеттері................ | 6 |
| 27.5. | Проективтік жазықтықтағы проективтік координаталар жүйесі................... | 8 |
| 27.6. | Проективтік түзудегі проективтік координаталар жүйесі.............................. | 10 |
| 27.7. | Түзу теңдеулері................................................................................................... | 12 |
| 27.8. | Координаталарды түрлендіру........................................................................... | 13 |
|  | §28. Проективтік геометриянын негізгі факторлары ..................................... | 18 |
| 28.1. | Ауыстырымдылық принципі ............................................................................ | 18 |
| 28.2. | Дезарг теоремалары........................................................................................... | 21 |
| 28.3. | Түзудің төрт нүктесінің күрделі қатынасы ..................................................... | 23 |
| 28.4. | Түзулер жағынан төрт түзуінің күрделі .......................................................... | 27 |
|  | §29 Проективтік түрлердіру ............................................................................. | 34 |
| 29.1. | Жазықтықты проективтік түрлендіру ............................................................. | 34 |
| 29.2. | Гомология ........................................................................................................... | 37 |
| 29.3. | Проективтік ........................................................................................................ | 39 |
| 29.4. | Толық төрттөбелік. Гармониялық жүйелер..................................................... | 40 |
|  | §30 Проективтік жазықтықтағы екінші ретті сызықтар................................. | 44 |
| 30.1. | Екінші ретті сызық............................................................................................. | 44 |
| 30.2. | Екінші ретті сызықтардың проективтік классификациясы............................ | 45 |
| 30.3. | Екінші ретті сызық пен түзудің өзара орналасуы........................................... | 46 |
| 30.4. | Екінші ретті сызыққа қарағандығы түйіндес нүктелер.................................. | 47 |
| 30.5. | Поляра мысалдар................................................................................................ | 48 |
|  | §31 Овал сызығы теориясының кейбір конструктивтік теоремалары.......... | 53 |
| 31.1. | Овал сызығынын ішкі, сыртқы нүктелері........................................................ | 53 |
| 31.2. | Овал сызығына жанама...................................................................................... | 53 |
| 31.3. | Овал сызығын жасау.......................................................................................... | 54 |
| 31.4. | Алты төбелік....................................................................................................... | 57 |
|  | §32 Проективтік жазықтықта аффиндік және евклидтік геометрияға құру. | 60 |
| 32.1. | Автоморфизм...................................................................................................... | 60 |
| 32.2. | Белгілеп алынған түзуі бар проективтік жазықтық геометриясы ................ | 61 |
| 32.3. | Аффиндік геометрияның негізгі ұғымдары .................................................... | 63 |
| 32.4. | Проективтік тұрғыдағы евклидтік геометрия ................................................. | 70 |
|  | Қайталау сұрақтары мен есептер ..................................................................... | 74 |
|  | **Х ТАРАУ. ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ САЛУЛАР**........... | 79 |
|  | §33 Конструктивтік геометрия және оның есептері және салу есептерін шешудің жалпы схемасы................................................................................... | 79 |
| 33.1. | Конструктивтік геометрия және оның аксиомалары...................................... | 79 |
| 33.2. | Салу құралдары және олардағы аксиомалары ................................................ | 80 |
| 33.3. | Салу есебі және оның шешімі........................................................................... | 81 |
| 33.4. | Негізгі салу есептері .......................................................................................... | 81 |
| 33.5. | Салу есептерін шешудің жалпы схемасы........................................................ | 83 |
|  | §34 Салу есептерін шешудегі фигуралардың қиылысу әдісі......................... | 86 |
| 34.1. | Қиылысу әдісі туралы түсінік........................................................................... | 86 |
| 34.2. | Көп кездесетін нүктелер жиыны....................................................................... | 86 |
|  | §35 Радикалдық ось және радикалық центр.................................................... | 93 |
|  | §36 Салу есебін шешуге қозғалысты пайдалану ............................................ | 99 |
| 36.1. | Параллель жылжыту әдісі ................................................................................. | 99 |
| 36.2. | Симметрия әдісі.................................................................................................. | 101 |
| 36.3. | Бұру әдісі............................................................................................................. | 103 |
|  | §37 Салу есептерін шешудегі ұқсас түрлендіру әдісі..................................... | 104 |
|  | §38 Инверсия және оны салу есептерін шешуге қолдану.............................. | 108 |
| 38.1. | Инверсия және оның қасиеттері....................................................................... | 108 |
| 38.2. | Инвертті фигураларды салу жолдары.............................................................. | 112 |
| 38.3. | Салу есептерін инверсия жәрдемімен шешу................................................... | 114 |
| 38.4. | Апполлоний есебі және оның шектік түрлері................................................. | 118 |
|  | §39 Салу есептерін шешудің алгебралық тәсілі.............................................. | 124 |
| 39.1. | Формула берілген кесінді.................................................................................. | 124 |
| 39.2. | Қарапайым формуламен берілген кесінділерді салу...................................... | 125 |
| 39.3. | Салу есебін шешудің алгебралық тәсіліне мысалдар..................................... | 128 |
| 39.4. | Квадрат теңдеу түбірлерін салу........................................................................ | 130 |
| 39.5. | Дұрыс көпбұрыштарды салу............................................................................. | 133 |
|  | §40 Циркуль және сызғыш жәрдемімен салынбайтын салу есептері........... | 143 |
| 40.1. | Бұрыштың трисекциясы туралы есеп............................................................... | 143 |
| 40.2. | Дөңгелектің квадратурасы туралы есеп........................................................... | 144 |
| 40.3. | Кубты екі еселеу есебі....................................................................................... | 144 |
|  | Қайталау сұрақтары мен есептер...................................................................... | 145 |
|  | **ХІ ТАРАУ. КЕСКІНДЕУ ӘДІСТЕМЕЛЕРІ**................................................ | 147 |
|  | §41 Кескіндеудің теориялық негіздері............................................................. | 147 |
| 41.1. | Параллель проекция........................................................................................... | 147 |
| 41.2. | Аффиндік бейнелеу............................................................................................ | 148 |
| 41.3. | Кескін................................................................................................................... | 149 |
|  | §42 Жазық фигураларға кескін......................................................................... | 153 |
|  | §43 Кеңістік денелерін кескіндеу..................................................................... | 160 |
|  | §44 Аксонометрия. Аксонометриялық координаталар жүйесі...................... | 172 |
| 44.1. | Аксонометриялық проекция.............................................................................. | 172 |
| 44.2. | Аксонометриялық проекцияның түрлері......................................................... | 173 |
| 44.3. | Тікбұрышты аксионометриялық проекция...................................................... | 174 |
|  | а) іздік үшбұрыш |  |
|  | б) аксионометриялық масштаб |  |
|  | в) бұрмалану коэффициенттері арасындағы байланыс |  |
| 44.4. | Тікбұрышты........................................................................................................ | 176 |
| 44.5. | Диаметрикалы тікбұрышты аксонометрия...................................................... | 179 |
| 44.6. | Қиғаш бұрышты аксонометриялық проекция................................................. | 181 |
|  | §45 Аксонометриялық кескінде нүкте, түзу және жазықтықтың берілуі..... | 183 |
|  | §46 Толық және толық емес кескін................................................................... | 187 |
|  | §47 Позициялық және метрикалық есептер..................................................... | 191 |
| 47.1. | Позициялық есептер........................................................................................... | 191 |
| 47.2. | Қима салуға мысалдар....................................................................................... | 192 |
| 47.3. | Метрикалық есептер.......................................................................................... | 194 |
|  | §48 Кескіндеудің Монж әдісі............................................................................ | 200 |
| 48.1. | Нүкте кескіні....................................................................................................... | 200 |
| 48.2. | Түзу кескіні......................................................................................................... | 203 |
| 48.3. | Жазықтықтың элюрде берілуі........................................................................... | 206 |
| 48.4. | Кейбір геометриялық денелердің кескіндері................................................... | 213 |
|  | §49 Центрлік проекция. Перспектива............................................................... | 215 |
| 49.1. | Проекциялаушы аппарат................................................................................... | 215 |
| 49.2. | Нүктенің перспективасы.................................................................................... | 217 |
| 49.3. | Түзудің перспективасы...................................................................................... | 218 |
|  | 1 Түзудің жақты нүктесі «Горизонт» сызығы |  |
|  | 2 Параллель түзулердің тоғысу нүктесі |  |
|  | 3 Дербес жағдайындағы түзудің перспективалары |  |
|  | 4 Түзулердің өзара орналасуы |  |
| 49.4. | Жазықтықтың перспективтік кескіні................................................................ | 224 |
| 49.5. | Шеңбердің перспективасы................................................................................ | 225 |
| 49.6. | Перспективтік масштаб салу............................................................................. | 228 |
|  | 1 Тереңдік масштабы |  |
|  | 2 Ендік масштаб |  |
|  | 3 Биіктік масштаб |  |
|  | 4 Заттық жазықтықта еркін орналасқан түзуге перспективті масштаб салу |  |
|  | 5 Мысалдар мен есептер. |  |
|  | §50 Санмен берілген проекциялар.................................................................... | 242 |
|  | Қайталауға арналған сұрақтар мен есептер..................................................... | 248 |
|  | Пайдаланылған әдебиеттер............................................................................... | 250 |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |