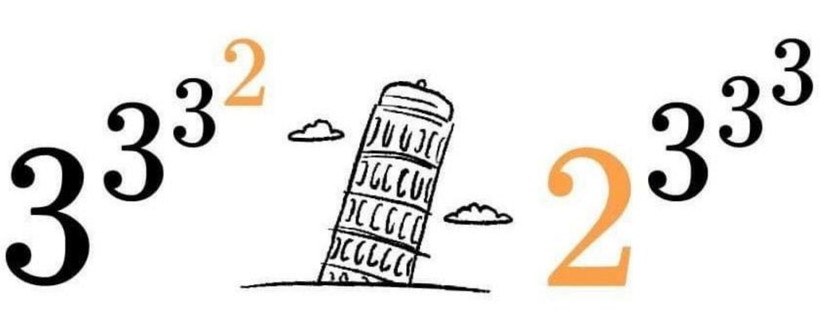
А.А. Байжуманов

Ғажайып сандар әлемі

$$1^2 = 1$$
$$11^2 = 121$$
$$111^2 = 12321$$
$$1111^2 = 1234321$$
$$11111^2 = 123454321$$
$$111111^2 = 12345654321$$
$$1111111^2 = 1234567654321$$
$$11111111^2 = 123456787654321$$
$$111111111^2 = 12345678987654321$$



Шымкент -2025

А.А. Байжуманов

ҒАЖАЙЫП САНДАР ӘЛЕМІ

ОҚУ ҚҰРАЛЫ

Университеттердің «Математика», «Информатика» және «Физика» мамандықтарының студенттеріне, колледж және орта мектеп математика пәні мұғалімдерімен оқушыларына және математикаға қызығушыларға арналған.

Шымкент -2025

ӘОЖ 511.33+37.013.41
ҒТАМР 27.15+14.27

Өзбекәлі Жәнибеков атындағы Оңтүстік Қазақстан педагогика университеті академиалық кеңесінің шешімімен баспаға ұсынылған
(№_2_ хаттама, _31._10._ 2022 ж.

Пікір жазғандар:
Е.Нысанов – М.Әуезов атындағы ОҚМУ профессоры, физика-математика ғылымдарының докторы;
Р.Ибрагимов – ОҚМПУ «Математика» кафедрасының доценті, педагогика ғылымдарының докторы.

Б 17 Байжуманов Абдусаттар Абдукадирович
Ғажайып сандар әлемі: Оқу-әдістемелік құрал / А.А.Байжуманов, 2023 ж.- 171 бет.

ISBN 978-601-342-679-2

Ұсынылып отырған оқу құралы Университеттердің «Математика», «Информатика» және «Физика» мамандықтарының студенттеріне, колледж және орта мектеп математика пәні мұғалімдері мен оқушыларына және математикаға қызығушыларға арналған. Оқу-әдістемелік құрал сандар әлеміне еніп, ғажап сандар құпияларын білуге, зерттеуге тигізер пайдасы орасан зор.

ӘОЖ 511.33+37.013.41
ҒТАМР 27.15+14.27

ISBN 978-601-342-679-2

© Байжуманов А.А., 2025

Мазмұны

Кіріспе

Математика пәнінде кездесетін үлкен немесе өте кіші сандар, формулалар, дифференциал, интеграл, эллипс ... және басқада ұғымдар сыртқы дүниеден қараған кезде үлкен бір тосықтармен бөлінгендей сияқты болып көрінеді. Бұл үлкен тосық артында не болып жатқанын математикадан хабары болмағандар үшін жасырын болып, бұл «бетперде» ашылғанда өзінің ішкі заңдарымен өмір сүретін «жансыз сандар» әлемін кездестіреді. Егер «жансыз сандар» ынтамен зерттелсе, олар «ғажайып сандарға» айналады.

Ерте заманда өмір сүрген ұлы математиктердің өз кезінде жеткен жетістіктері қазіргі таңда адамдарды тәң қалдырады. Математикамен айналысқан кез келген адам үшін Евклид, Архимед, Пифагор, Герон сияқты есімдер таныс. Ұлы неміс ғалымы К.Гаусс (1777-1855) арифметиканы «математиканың патшайымы» деп атаған.

Математикада және ерекше арифметикада құрылымы жағынан оңай, шешімі жағынан болса өте күрделі болған мәселелер кездеседі. Мұндай мәселелер екі топқа бөлінеді.

Бірінші топқа шешілу әдісі анық, бірақ үлкен есептеуді қажет ететін мәселелер кіреді. Мұндай есептеулерге өте ұзақ уақыт қажет, кейде қазіргі заман электронды есептеу құралдары да көмек бере алмайды. Мысал ретінде 2^{101}-1 санының жай немесе құрама сандығын анықтау талап етілсін. Бұның үшін берілген сан 2-ден бастап 2^{101}-1 дейінгі жай сандарды зерттеп көру қажет. Бұл тапсырманы қарапайым тәсілмен және электронды есептегіш мәшина көмегімен есептей алмаймыз. Математиканың басқа әдістерімен 2^{101}-1 құрама күрделі сан анықталған. Ғажайыбы сол сандардың бір және өзінен басқа ешқандай бөліндісі қазірге дейін анықталған емес.

Екінші топ мәселелеріне қазірге дейін анықталмаған және анықтау жолы белгісіз болған мәселелер жатады. Мысалы, $n! + 1$ (n - натурал сан) түріндегі сандар ішінде кейбірі жай, кейбірі болса құрама сандар: $n = 2$ болғанда 2!+1 $= 3$ жай сан, $n = 3$ болғанда 3!+1 $= 7$ жай сан, $n = 4$ болғанда $4! + 1 = 25 -$ құрама сан.

Сол себепті $n! + 1$ түріндегі жай сандар қандай жиынды (шекті немесе шексіз жиын) құрайды деген сұрақтар туындайды. Бұл сұраққа қазіргі уақытқа дейін анық жауап берілмеген. 11!+1 дің жай сандығы өте күрделі шешілген. 27!+1 дің жай сан әлде құрама сандығы анықталмаған.

Бірақта $n! + 1$ түріндегі сандар ішінде шексіз көп құрама сандар кездесетіні дәлелденген. Математика дами келе екінші топ мәселелері өз шешімін табатынын айту маңызды.

1845 жылы француз математигі Ж.Бертран (1822-1900) төмендегі мәселені баяндады: $n > 1$ болғанда натурал n және $2n$ сандар арасында кемінде біреу жай сан бар (бұл мәселе туралы алдында тоқталамыз). Бұл тұжырымның дұрыс екендігін ұлы орыс математигі П.Л.Чебишев (1824-1894) жоғары математика көмегімен көрсетті. 1930 жылға келіп поляк математигі Ю.Серпинский жағынан бұл мәселенің қарапайым (комплекс айнымалы функциялар теориясын қолданбастан) дәлелі берілді. Бірақ бұл дәлел өте күрделі екендігін айтып өткеніміз жөн.

I ғасырда өмір сүрген математик Н.Гезанский төмендегі сөздерді айтқан болатын: «Ғажайып сандар өте әдемі. Бырақта , әдемі заттар кем кездесетіні белгілі».

Осы әдемі сандарды барлық сандар әлемінен бөлектеп алып оларды көріктілікпен оқушыларға түсіндіруде математика мұғалімдері шеберлігі ерекше маңызды. Ю.Серпинский Рейн университетінде «Кейбір арифметикалық проблемалар» туралы жасаған баяндамасында төмендегілерді айтты.

«Арифметиканың қазіргі уақытқа дейін шешімі табылмаған мәселелері көп. Мұндай мәселелердің саны артып баруды. Туындаған мәселелердің шешімін табу жаңа мәселелердің пайда болуына қатысты өте баяу. Бір қиыншылықтың шешімін іздеу барысында оннан артық жаңа қиыншылықтар туындайды. Кейбір шешімі жоқ мәселелер 100 жылдан көп тарихқа ие. Бірақ адам өмірде шексіз жалғасатын болса, шешілмеген қиындықтардың артып баруына қарамастан шешімін табатынына сенімдіміз».

Осы бағыт бойынша көп жылдардан бері жалпы орта мектептер сыныптан тыс жұмыстар барысында керемет тәжірибелер жинаған. Математика оқытушылары бұл тәжірибелердің алдыңғы қатарында тұрады. Оқушылармен бірге түрлі формадағы қосымша математика жаттығуларының өткізілуі жас математиктер мектептерінің пайда болуына , сонымен бірге, орта мектептерде факультатив курстарының жария болуына алып келді.

Бірақ факультатив жаттығуларының жария етілуі мектепте математикадан өткізілетін сыныптан тыс іс-шараның рөлін және маңыздылығын жоғалтпайды. Керісінше әр бір математика оқытушысы үшін оқушылардың математикалық белсенділігін одан әрі күшті дамытады және математика пәніне деген қызығушылықты одан әрі арттырып үлкен мүмкіндіктерге жол ашады. Математикадан сыныптан тыс іс-шаралар оқушылардың білімдерінің терең болуына, ғылыми қызығушылығын арттыруына, білім деңгейінің кеңейуіне, тәрбие мәселелеріне қатысты болған істерді шешуге қарастырылған.

Бұл жұмыс мектепте сыныптан тыс іс-шараларды ұйымдастырушы және осы іс-шараға қатысушыларға арналған. Қызықты математика– ғажайып сандар әлемі үйірме, сыныптан тыс жұмыс барысында қолданылады. Сондықтан бұл тақырыпты мектепте оқыту жалпы білім беретін, мәдениетін танытатын, математикалық мән-мағынасы ерекше. Күнделікті өмірде көптеген логикалық есептерді шешуде ғажайып сиқырлы сандардан пайдаланады. Математика оқытушылардың тәжірибелерінің алдыңғы қатарында тұрады. Оқушылармен бірге түрлі формадағы қосымша математика жаттығуларының өткізілуі жас математиктер мектептерінің пайда болуына , сонымен бірге, орта мектептерде факультатив сабағының пайда болуына алып келеді және математикадан сыныптан тыс іс-шаралар оқушылардың білімдерінің терең болуына, ғылыми қызығушылығын арттыруына, білім деңгейінің кеңейуіне, тәрбие мәселелеріне қатысты болған істерді шешуге көп септігін тигізеді.

Оқу-әдістемелік құралдың жаратылу кезеңінде өздерінің өте қымбатты кеңестерімен қолдау көрсеткен ОҚМПУ «Математика» кафедрасының профессоры, педагогика ғылымдарының докторы Ибрагимов Расқул Ілімұлына, Туркістан облысының Сайрам ауданы И.Алтынсарин атындағы магистр оқытушысы Абдижамилова Дилноза Мехманқул қызына және көп жылдар бірге жұмыс істеген әріптестеріме өз алғысымды білдіремін.

1. Атақты ғалымдар және олардың сиқырлы сандары

1.1 Жай сандар

Натурал сандардан құралған

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10... (1)

тізбек берілген болсын. Тізбектің кейбір мүшелерін көбейткіштерге жіктейміз. Пайда болған жіктелу санның өзіне тең болмаған көбейткіштерден құралған. Мысалы, $6=2\cdot 3$, $24=2^3\cdot 3$ және т.с.с. Мұндай сандардың бөлгіштері екеу немесе екеуден артық. Кейбір натурал сандар жоғарыда келтірілген мағынада көбейткіштерге жіктелмейді. Мысалы, 5, 7, 11, 13, 17, 19 және т.с.с. Мұндай сандар тек 2 бөлгішкеғана ие: бір және сол санның өзі. Бірінші түрдегі сандар құрама сандар , екінші түрдегі сандар жай сандар деп аталады. Натурал 1 санының бір ғана бөлгіші бар, ол сол санның өзі – 1 саны. 1 саны жай сандарға да құрама сандарға да жатпайды.

Сонымен,

2, 3, 5, 7, 11,13, 17, 19, 23, ... (2)

тізбегі жай сандар тізбегін көрсетеді. (2) тізбектің шектеулі еместігін, яғни жай сандар шексіз көптігін алғашқы болып біздің заманымыздан III ғасыр бұрын өмір сүрген ұлы математик Евклид дәлелдеген. Қазіргі таңда бұл теореманың бір неше дәлелдері болса да, Евклид дәлелі өте қарапайым деп есептелінеді. Евклид теоремасынан қалауынша үлкен жай сан бар екендігі келіп шығады. Мысалы, кемінде 1000 та цифрлы жай сандар бар болсын. Алайда, 1960 жылға дейін бұл сандардың ешқайсысы белгілі болған емес , себебі сол кездегі ең үлкен белгілі жай сан 969 цифрлы 2^{3217}-1 саны болған. Кейінрек, 2^{4423}-1 түріндегі жай сан анықталды. Қызығушыларға 2^{31}-1 жай сан екенін Л.Эйлер (1707-1783) көрсеткенін айтуға болады. Вена Ғылымдар академиясының мұрағатында математик Куликтің 4212 беттік қолжазбасы бар болып, онда 100 000 000 дейінгі натурал сандардың канондық жіктелуі (жай сандар көбейтіндісі түрінде) берілген. $2^{11213}-1$ жай сан және ол 3375 цифрлы екендігі 1963 жылда электронды есептеуіш құрылғысы көмегімен анықталды.

1971 жылды американдық математик Такерман электронды есептеуіш құрылғысының көмегімен 40 минут жұмыс істеп, 6002 разрядты $2^{19937}-1$

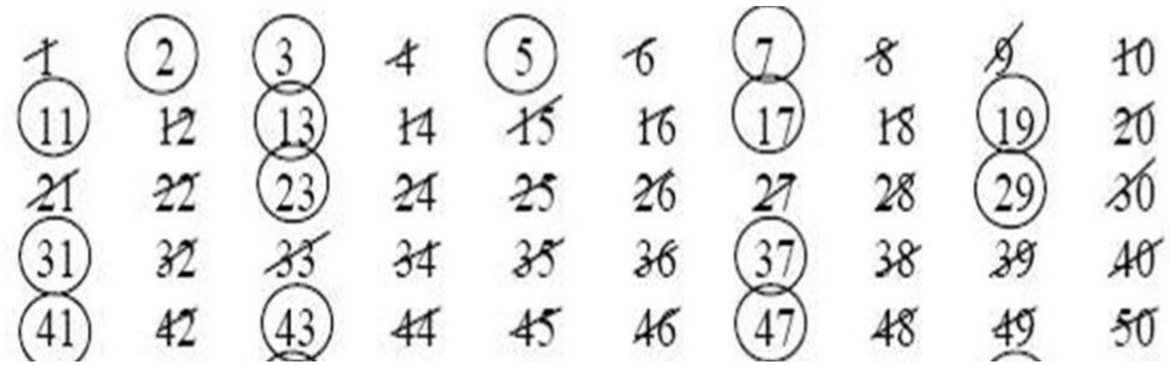
түріндегі жай санды анықтады. Бұл қазіргі уақытқа дейін белгілі болған ең үлкен жай сан.

Жай сандар кестесін құрудың ең қарапайым және көне әдісі Грецияның Кренанки қаласында өмір сүрген математик және астроном Эратосфенге (б.з.д. 276-193) қатысты. Эратосфеннің замандастары оны «барлық жерде екінші» деп атады: Евклидтен кейінгі екінші математик, Гиппархтан кейінгі екінші астроном және т.б.

Эратосфен балауыздан жасалған тақтайшада натурал сандар кестесін жасап, одан 1 санын және құрама сандарды алып тастап отырған. Сонда алғашқы кесте елек тәрізденіп, онда тек қана жай сандар қалған. Сондықтан оны **Эратосфен елегі** деп атаған.

Ол ұсынған әдіс келесідей: мысалы, 50-ге дейінгі жай сандар кестесін құруды талап еткен болсын. 1-ден 50-ге дейінгі натурал сандар реттілігін жазып шығамыз және олардың арасынан жай сандарды іздейміз (құрама сандарды сызамыз). Алдымен 1 санын сызамыз, себебі 1 саны жай сан емес. Бірінші ретте – 2 санынан басқа, 2-ге еселік сандардың барлығын үстінен сызамыз. Кестеде 2 санынан кейін 3 саны қалады. Екінші ретте – 3 санынан басқа 3-ке еселік сандардың барлығын үстінен сызамыз. Нәтижесінде 2 және 3 сандарынан басқа кестеде қалған сандар 2-ге де, 3-ке де бөлінбейді(еселік емес).

Кестеде 2 және 3 сандарынан кейін 5 саны қалады. Үшінші ретте - 5 санынан басқа 5-ке еселік сандардың барлығын үстінен сызамыз. Осылайша жалғастырамыз. Сонда кестеде 50-ден кіші жай сандар ғана қалады. Демек, 50-ден кіші жай сандар кестесі:



Сонда 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Эратосфен осындай реттілікпен тек қана 1000-ға дейінгі жай сандар кестесін құрастырған болатын. Қазіргі кезде 100 000 000 жай сандар кестесі бар.

Жай сандар құрастырудың басқа бір әдісін Прага қаласында тұратын инженер Мирослав Соукуп 1954 жылда ұсынған болатын. Бұл әдіс төмендегідей:

6 дан үлкен санды 6-ға бөлгенде 0, 2, 3, 4 қалдықтар пайда болса, n құрама сан болатыны белгілі. Сондықтан, $n \neq 2,\ \ n \neq 3$ болған жай сандарды $6n \pm 1$ түріндегі сандар арасынан іздеу керек.

Оның үшін

$n = 6km \pm (k+m) \qquad (k = 1,\ 2, 3, \dots, \qquad m = 0, 1, 2, \dots, k)$

және

$n = 6km \pm (k-m) \qquad (k = 1,\ 2, 3, \dots, \qquad m = 0, 1, 2, \dots, k)$

қолданып, келесі кестені құрастырамыз:

$$\left.\begin{array}{rrrr} \multicolumn{4}{r}{n = 6km \pm (k+m) = 96 \pm 8 \dots} \\ & & 54 \pm 6 & 72 \pm 7 \dots \\ & 24 \pm 4 & 36 \pm 5 & 48 \pm 6 \dots \\ 6 \pm 2 & 12 \pm 3 & 18 \pm 4 & 24 \pm 5 \dots \end{array}\right] \quad 6n+1 \text{ – құрама сандар}$$

$$0 \pm 1 \quad 0 \pm 2 \quad 0 \pm 3 \quad 0 \pm 4 \dots$$

$$\left.\begin{array}{rrrr} 6 \pm 0 & 12 \pm 1 & 18 \pm 2 & 24 \pm 3 \dots \\ & 24 \pm 0 & 36 \pm 1 & 48 \pm 2 \dots \\ & & 54 \pm 0 & 72 \pm 1 \dots \\ \multicolumn{4}{r}{n = 6km \pm (k-m) = 96 \pm 0 \dots} \end{array}\right] \quad 6n-1 \text{ – құрама сандар}$$

$k = 1$ болғанда $m = 0, 1;$

$k = 2$ болғанда $m = 0, 1, 2;$

$k = 3$ болғанда $m = 0, 1, 2, 3;$

мәндері алынады.

6 n -1 дің жай сан болуы үшін кестенің төменгі бөлігінде n болмауы, ал $6n$ +1 жай сан болуы үшін кестенің жоғары бөлігінде n болмау қажет.

Мысалы,

1) $n = 13$ кестенің жоғары бөлігінде жоқ, демек,

$$6 \cdot 13 + 1 = 79 - \text{жай сан.}$$

$n = 13$ кестенің төменгі бөлігінде бар, сол себепті $6 \cdot 13 - 1 = 77$ – құрама сан.

2) $n = 149 -$ жай сан, себебі $149 = 6 \cdot 25 - 1$ және 25 саны кестенің төменгі бөлігінде орналасқан жоқ.

3) $n = 229$ - жай сан, себебі $229 = 6 \cdot 38 + 1$ және 38 кестенің жоғары бөлігінде жоқ.

4) $n = 187$ - құрама сан, себебі $187 = 6 \cdot 31 + 1$ және 31 кестенің жоғары бөлігінде бар.

Жай сандар құрастырудың тағы бір әдісі бар:

Натурал сан 1 мен бірінші n жай сандарды алып, оларды кез келген жолмен екі топқа бөлеміз. Әр бір топ сандарын көбейтіп, екі түрлі көбейтінді аламыз және бұл көбейтінділердің қосындысын немесе айырмасын құрамыз. Пайда болған қосынды немесе айырма көмегімен $(n+1)$ жай санның квадратынан кіші болған жай сандарды аламыз.

Мысалы, 1) 1 мен 2, 3, 5 жай сандарды кез келген екі топқа бөлейік:

$$\left.\begin{matrix} \text{I топ: } 2 \\ \text{II топ: } 1, 3, 5 \end{matrix}\right\} \quad 1 \cdot 3 \cdot 5 - 2 = 13; \qquad 1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 = 17$$

13 және 17 сандары 5-тен кейінгі жай сан 7-нің квадратынан кіші. Демек, 13 және 17 жай сандар.

2) 1 және 2, 3, 5, 7, 11 жай сандарды қолданып, $13^2 = 169$ дан кіші болған жай сандарды табамыз.

$$\left.\begin{matrix} \text{I топ: } & 3 \cdot 5 = 15 \\ \text{II топ: } & 1 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11 = 154 \end{matrix}\right\} \quad 154 + 15 = 169 = 13^2 \text{ құрама сан;}$$

$154 - 15 = 139$ - жай сан.

Басқа топтар құрастырайық:

$$\left.\begin{matrix} \text{I топ: } & 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 \\ \text{II топ: } & 1 \cdot 2 \cdot 11 = 22 \end{matrix}\right\}$$

$105 - 22 = 83 -$ жай сан. $105 + 22 = 127 -$ жай сан.

Егер пайда болған айырма мәні жай сан $(n+1)$ -ң квадратынан үлкен болса, бұл жай сан болмауы мүмкін.

Мысалы, 1 және 2, 3, 5, 7 жай сандарды төмендегі екі топқа бөлеміз:

$$\left.\begin{matrix} \text{I топ: } & 1 = 1 \\ \text{II топ: } & 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 \end{matrix}\right\}$$

210-1$= 209$, бірақ $209 > 11^2$.

Сол себепті 209 жай сан деп айта алмаймыз. Шынында да, 209$= 11 \cdot 19$.

1 және 2, 3, 5, 7, 11 жай сандарын басқа топтарға бөліп, 169 дан кіші болған барлық жай сандарды табыңдар.

Л.Эйлер Эратосфен елегін қолданып, жай сандар кестесін және құрама сандардың ең кіші (бірден басқа) бөлгішін анықтау әдісін көрсетіп берді.

Натурал n санын $n = 30q + r$ түрінде жазуға болады. Мұнда $r = 0, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28$ болғанда n құрама сан болып, $r = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$ болғанда n жай сан болуы мүмкін. Эйлер кестені төмендегідей құрастырған.

$n = 30q + r$ жай сан болғанда кестенің тиісті уяшығына p (p-жай сан) және $30q + r$ құрама сан болғанда оның бірге тең болмаған ең кіші жай бөлушісін жазған:

q \ r	1	7	11	13	17	19	23	29
0	p	p	p	p	p	p	p	p
1	p	p	p	p	p	7	p	p
2	p	p	p	p	7	p	p	p
3	7	p	p	p	p	p	p	7
4	11	p	p	7	p	p	11	p

Мысалы, q=3 болғанда
$n = 30 \cdot 3 + 1 = 91 = 7 \cdot 13$ және $n = 30 \cdot 3 + 29 = 119 = 7 \cdot 17$ құрама сан болып,
$n = 30 \cdot 3 + 7,\quad n = 30 \cdot 3 + 11,\ 30 \cdot 3 + 13$
$n = 30 \cdot 3 + 17,\quad 30 \cdot 3 + 19,\ 30 \cdot 3 + 23$
жай сан болады.

Кейбір сандардың бір цифрын басқа санға ауыстыру нәтижесінде берілген сан жай санға айналуы мүмкін. Мысалы, 81- құрама сан, 1 ді 3 санымен ауыстырсақ, 83 жай сан пайда болады. Бірақ кез келген санның бір цифрасын басқа санмен ауыстыру нәтижесінде жай сан пайда бола бермейді. Мысалы, 200 дің цифрларын ауыстырсақ, жай сан пайда болмайды.

Берілген натурал санның жай немесе құрама сан болатынын анықтау өте күрделі мәселе.

Л.Эйлер 1 000 009 жай сан деп ойлаған болатын. Кейінрек бұл пікірін дәлелдеу үшін ол қайта есептеулер жүргізіп, қателескенін 1 000 009= 293· 3413 болатынын көрсетті. Сол уақытта Л.Эйлер 70 жаста болып, екі көзі көрмейтінін ескеру қажет. Ол барлық есептеулерді ойман орындаған.

П.Фермадан 100 895 598 169 қандай сан деп сұраған кезде ол есептеулер жүргізіп, 100 895 598 169 = 898423 $\cdot 112303$ көбейтіндісі болатынын көрсетті.

Бұдан 100 жыл бұрын англия математигі Джевенс 8 616 460 799 саны қандай сандардың көбейтіндісі деген сұрақ қойған болатын. Кейінрек, электронды есептеуіш құрылғысының көмегімен 96079 және 89681 сандарының көбейтіндісі болатынын анықтады.

Кейбір натурал сандардың жай немесе құрама сандар болатыны қазіргі таңда да белгісіз.

Бірнеше соңғы цифрларды жою нәтижесінде пайда болатын жай сандар бар (бірақ олардың барлығы қатарынан емес).

Мысалы, 3793 жай сан, жоғарыда айтылғандай құрастырылған, 379, 37, 3 сандары да жай сандар. Мұндай жай сандар ең қарапайым жай сандар деп аталады. Төменде ретімен орналасқан ең қарапайым жай сандар тізбегі берілген:

37	3797	37397	2399333
317	7331	73331	7393931
599	23333	373393	7393933
797	23339	593993	23399339
2393	31193	719333	37337999
3793	31379	739397	59393133
		739399	73939133 .

Тоғыз және одан көп разрядтық ең қарапайым жай сандардың болмайтыны дәлелдеген. Сонымен, ең ұзын және ең қарапайым жай сандар 8 таңбалы болып, олар тек жоғарыда келтірілген төрт 8 таңбалы жай санның ең қарапайымы ғана.

Ежелгі уақытта көптеген ғалымдар n-нің барлық натурал мәндері үшін жай сандарды анықтайтын формуланы іздестірген. Осындай көптеген формулалар ұсынғанымен, олардың ешқайсысы n-нің барлық натурал мәндері үшін жай сандар болған жоқ. Осындай формулалардың кейбіріне тоқталайық:

1) Англиялық математик Рисел Ханс (1970 жылда) 4943+600708s өрнек $s = 0, 1, 2, 3, \ldots, 12$ болғанда жай сан болатынын, 429983158710+k өрнегі $k = 11,\ 13, 17, 19, 23, 37, 41, 43, 47, 53, 59$ болғанда жай сан болатынын көрсетті.
2) Ұлы француз ғалымы Ферма (1601-1665) 2^{2^n} +1 саны кез келген натурал n саны үшін жай сан болатынын айтқан. Ол n-ге 0,1, 2, 3, 4 сияқты мәндерді беріп, 3, 5, 17, 257, 65537 сияқты жай сандарды құрды. n=5 болғанда 2^{2^5}+1 саны өте үлкен сан болғандықтан Ферма бұл жай сан немесе құрама сан екенін анықтай алмады.

   1739 жылда Л.Эйлер 2^{2^5}+1 дің құрама сан болатынын көрсетті.
3) $n^2 + n + 17$ көпмүше n=0,1, 2, 3, ..., 16 болғанда жай сандарды береді, n= 17 болғанда құрама сан болады.
4) $2n^2 + 29$ көпмүше n=0, 1, 2, 3, ..., 28 болғанда жай сандарды береді, n= 29 болғанда құрама сан болады.
5) $n^2 - n + 41$ көпмүше n=0, 1, 2, 3, ..., 40 болғанда жай сандарды береді, n= 41 болғанда құрама сан болады.

$n^2 - n + 41$ формула көмегімен құрастырылған 2348 санының жартысы жай сандар екені көрсетілген. Осы түрдегі сандардың ішінде миллионның 0,475 бөлігі жай сандардан тұратыны көрсетілген. $n^2 - n + a$ өрнек $a > 41$ және n= 1, 2, 3, ..., $a - 2$ болғанда жай сан бола ма, деген сұрақ туындаған болатын. Бұл сұраққа қазіргі уақытқа дейін жауап берілген жоқ. Бірақ, $41 < a < 10^9$ аралығында мұндай жай сандар жоқ екені дәлелденген. Бірақ $a = 3,\ 5,\ 11, 17$ болғанда және барлық $0 \le n \le a - 2$ кезде $n^2 - n + a$ өрнек жай сандарды беретіні дәлелденген.

Мысалы, $a = 11$ болсын. $n^2 - n + 11$ үшмүше барлық $0 \le n \le a - 2$ үшін жай санды береді. $n \le 11000$ болғанда $n^2 - n + 41$ түріндегі үлкен жай сан 19421, 27941, 72491 болады және мұндай жай сандар 4506 болатыны дәлелденген.

$f(x) = x^2 - x + 41$ Эйлер үшмүшесі деп аталады. Бұл үшмүше жай сандарды беретін үшмүшелердің генераторы, себебі бұл үшмүше көмегімен жай сандарды беретін тағы бір неше үшмүшелерді құрастыруға болады.

Мысалы, 1) $f(2x - 40) = g(x) = (2x - 40)^2 - (2x - 40) + 41 = 4x^2 - 160x + 1600 - 2x + 40 + 41 = 4x^2 - 162x + 1681$ үшмүше $1 \le x \le 40$ үшін $f(x)$ пайда болған сол жай сандарды береді(тексеріп көріңдер).

2) $h(x) = f(3x - 81) = 9x^3 - 489 + 6683$ үшмүше де $1 \le x \le 40$ үшін 40 жай санды береді. Бірақ $f(x)$ және $h(x)$ тек 27 жалпы жай санға ие.

3) $l(x) = f(3x - 38) = 9x^2 - 231x + 1523$ үшмүше де $0 \le x \le 39$ болғанда 40 та әр түрлі жай санды береді. Бұл В.А.Голубев тапқан квадрат үшмүше.

4) $f(4x) = 16x^2 - 4x + 41$ үшмүше $0 \le x \le 40$ үшін тек 31 жай санды береді.

5) $4(x^2 - x + 41)$ үшмүше $x = \frac{2n+1}{2}$ болғанда $0 \le x \le 19$ дар үшін,

$9(x^2 - x + 41)$ үшмүше $x = \frac{3n+1}{3}$ болғанда, $0 \le n \le 12$ лер үшін,

$16(9x^2 - 3x + 41)$ үшмүше $x = \frac{2n+1}{2}$ болғанда -6$\le x \le 19$ дар үшін

$16(9x^2 - 3x + 41)$ үшмүше $x = \frac{2n+1}{4}$ болғанда -5$\le n \le 20$ лар үшін жай сандарды береді.

6) $n^2 - 79n + 1601$ болса $n = 0, 1, 2, \ldots, 79$ болғанда жай сандарды береді. $n = 80$ болғанда $80^2 - 79 \cdot 80 + 1601 = 41^2$ құрама сан болады. Бұл көпмүшелердің барлығын Эйлер көрсеткен. Сонымен қатар, Эйлер $f(x) =$

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ көпмүше x-ң барлық натурал мәндері үшін әрқашан жай сан бола алмастығын дәлелдеген.

1967 жылда Кеңес одағы математигі В.А.Голубев $9x^2 - 231x + 1523$ көпмүше реттілікпен 40 жай сан беретінін және $8x^2 - 326x + 2659$ көпмүше болса $x = 0$ ден $x = 39$ дейін болған натурал сандар үшін ретімен 40 жай сан болатынын көрсетті.

1968 жыл 25- наурызда француз математигі Д.Х.Лемер Голубевқа жазған қатында Ф.Т.Шурц деген математик $36x^2 - 810x + 2753$ көпмүше $x = 0, 1, 2, \dots, 44$ үшін 45 жай санды көрсеткенін жариялады. Бұл жай сандар 2753 мен басталып, 36809 жай санмен аяқталады.

Кейбір жай сан р үшін $\mathrm{p}^2 + \mathrm{p} + 1$ немесе $\mathrm{p}^2 - \mathrm{p} + 1$ сандар жай сан болады.

Мысалы, р= 5 үшін $\mathrm{p}^2 + \mathrm{p} + 1 = 31$, р= 3 үшін $\mathrm{p}^2 - \mathrm{p} + 1 = 7$.

Бірақ көп жағдайда жай сандар үшін $\mathrm{p}^2 \pm \mathrm{p} + 1$ түріндегі сандар құрама сандар болады. Кеңес одағы математигі В.А.Голубев 10000 нан кіші болған барлық р жай сандар үшін $\mathrm{p}^2 \pm \mathrm{p} + 1$ түріндегі құрама сандардың жай көбейтінділерге бөлінетін көрсетті (Австрия Ғылым академиясының журналына басылған).

Варшавалық математик Андрей Монковский $A_n = \frac{1}{3}(10^n - 7)$ көріністегі сандар $n = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$ болғанда 31, 331, 3331, 33331, 333331, 3333331, 33333331 түріндегі жай сандарды беретінін көрсетті. A_n көріністегі ең кіші құрама сан $n = 9$ болғанда пайда болып, ол

$$A_9 = \frac{1}{3}(10^9 - 7) = 333333331$$

болады.

Сонымен бірге, $A_{12} -$ нің да құрама сан болатыны анықталған. Бірақ, $n = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ және 8 дерден бөлек n үшін A_n түріндегі басқа жай сандар бар ма, деген сұраққа қазірге дейін жауап табылған жоқ.

$n = 16m + q\ (m = 0,\ 1,\ 2, \dots)$ лер үшін A_n санның 17 ге бөлінетіні дәлелденген.

Мысалы, $m = 0$ болғанда $n = 9$. $A_9 = 333333331$ саны 17 бөлінеді:

$$333333331 = 17 \cdot 19607843.$$

Шинцелдің мынадай гипотезалары бар:

1) бір уақытта жай сан болған р және р+10 сияқты жай сандар шексіз: мысалы, 7 және 17; 13 және 23; 19 және 29; 31 және 41; 37 және 47; 61 және 71; 33 және 83; 79 және 89 ; 97 және 107 және басқалар;

2) бір уақытта жай сан болған p және p+1000 сияқты жай сандар шексіз көп: мысалы, 13 және 1013; 19 және 1019; 31 және 1031; 61 және 1061; 97 және 1097; 103 және 1103; 1039 және 2039 және басқалар.
3) $n+1,\ n+3,\ n+7, n+9,\ n+13$ бір уақытта жай сан болатын натурал n сандар саны шексіз көп.

Мысалы, $n = 4, 10, 100$; $n = 4$ болғанда 5, 7, 11, 13, 17 – жай сандар; $n = 10$ болғанда 11, 13, 17, 19, 23 – жай сандар.

$f(n) = n^2 + 1$ - екінші дәрежелі көпмүше $n = 1, 2, 4, 6, 10$ болғанда жай санды береді. $n \leq 10000$ болғанда 842 $n^2 + 1$ түріндегі жай сан, $n \leq 100\,000$ болғанда $n^2 + 1$ түріндегі жай сандар 6656, $n \leq 180\,000$ болғанда $n^2 + 1$ түріндегі жай сандар 11223 болатыны есептелген. Бірақ, $n^2 + 1$ түріндегі жай сандар шекті немесе шексіз болатыны белгісіз. Голубев өзі есептеген тәсіл көмегінде $n^2 + 1$ түріндегі құрама сандардың
$n \leq 190\,000$ болғанда жай көбейткіштерге жіктелуін көрсетті. $n \leq 1500$ болғанда мұндай құрама сандардың жай көбейткіштерге жіктелуін болса Л.Эйлер берген болатын. Американдық математик Д.Шанс электрон есептеуіш машинасы көмегінде Голубев құрастырған кестені қайта тексеріп, тек қана біреуін дұрыстады.

Қазіргі кезде барлық $n \leq 100\,000\,000$ және кейбір $n \leq 40 \cdot 10^9$ үшін $n^2 + 1$ түріндегі құрама сандардың жай көбейткіштерге жіктелуі бар.

Неміс математигі Дирихленің дәлелдеуі бойынша $(a, b, c) = 1$ болғанда $ax^2 + bxy + cy^2$ өрнек шексіз көп жай сандарды береді. $\pi(n)$ мен натурал n санына дейін болған жай сандар санын, жалпы, n санына дейін $f(k)$ түріндегі жай сандар саны $\pi_n f(k))$ мен белгілейміз. ($\pi(n)$ бұл белгілеуді Л.Чебишев енгізген).

Мысалы, $\pi_n(k^2 + a)$ мен натурал n санына дейін $k^2 + a$ түріндегі жай сандар саны белгіленеді. $\pi(30) = 10$; $\pi_n(k^2 + 1) = 3$; 30 ға дейін $k^2 + 1$ түріндегі жай сандар: 2, 5, 17.

В.А.Голубев $1 \leq n \leq 30000$ болғанда $\frac{\pi_n(k^2+1)}{\pi(n)} \approx 0{,}69$ болатынын есептеген. Сондай c мәндер де табылып, $\frac{\pi_n(k^2+c)}{\pi(n)}$ қатыныс бірден үлкен болады. Мысалы, $\frac{\pi_n(k^2-k+41)}{\pi(n)} \approx 3{,}7$; $\frac{\pi_n(k^2+7)}{\pi(n)} \approx 1{,}1$; $\frac{\pi_n(k^2+k+72491)}{\pi(n)} \approx 4{,}0$.

$k^4 + 1$ түріндегі жай сандар да шексіз көп, деген болжам бар. В.А.Голубев
$k = 1, 2, 4, 16, 20, 24, 28, 34, 46, 48, 54, 56, 74, 80, 82, 88, 90, 118, 132, 140, 142,$ $154, 160$, 164, 174, 180, 194, 198, 204, 210, 220, 228, 238, 242, 248, 254, 264, 266, 272, 276, 278, 288, 296 болғанда $k^4 + 1$ түріндегі жай сандар пайда

болатынын көрсетті. $\frac{\pi_n(k^4+1)}{\pi(n)} = l$ деп алып, $10 < n < 300$ болғанда $0{,}60 \le l \le 0{,}68$ болатыны анықталған.

$n = 150$ болғанда l ең кіші мәнге ие болатыны анықталған.

Кез-келген натурал m сан үшін сондай $n^2 + m$ өрнек табылып, бұл өрнек түріндегі жай сандар шексіз көп деген болжам да бар.

$n^3 + 1$ түріндегі жай сан тек біреу (2 жай сан) болатынын оңай көрсетуге болады(дәлелденгдер).

$n^3 + 2$ және $n^3 - 2$ түріндегі жай сандар шексіз көп, деген болжам бар. $n = 1, 2, 5, 29$ болғанда $n^3 + 2$ түріндегі және $n = 9, 15, 19, 27$ болғанда $n^3 - 2$ түріндегі жай сандар пайда болады.

$N_p = \frac{2p+1}{3}$ формулада p орнына 31 ге дейін тақ сандар қойылса, N_p де жай сан болады(кейбір тақ құрама p сан үшін де N_p жай сан болады): $N_3 = 3$; $N_6 = 11$; $N_7 = 43$; $N_9 = 683$; $N_{11} = 2731$; $N_{13} = 43691$; $N_{15} = 174761$; $N_{17} = 2796203$; $N_{19} = 178956771$; $N_{21} = 715827883$; $p = 37$ болғанда $N_{37} = \frac{2^{37}+1}{3} = 1777 \cdot 25781083$ - құрама сан болады.

Юрий Стасович деген қарапайым жұмысшы бос кезінде математикамен айналысып, төмендегі ғажайып жолмен жай сандарды алған.

$$\left.\begin{array}{l} 2! + 1 \cdot 2 + 1 = 5 \\ 2! + 2 \cdot 2 + 1 = 7 \end{array}\right\} \text{екі тізбектелген жай сан}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4! + 1 \cdot 4 + 1 = 29 \\ 4! + 2 \cdot 4 - 1 = 31 \\ 4! + 3 \cdot 4 + 1 = 37 \\ 4! + 4 \cdot 4 + 1 = 41 \end{array}\right\} \text{төрт тізбектелген жай сан}$$

$$\left.\begin{array}{l} 6! + 1 \cdot 6 + 1 = 727 \\ 6! + 2 \cdot 6 + 1 = 733 \\ 6! + 3 \cdot 6 + 1 = 739 \\ 6! + 4 \cdot 6 + 1 = 743 \\ 6! + 5 \cdot 6 + 1 = 751 \\ 6! + 6 \cdot 6 + 1 = 757 \end{array}\right\} \text{алты тізбектелген жай сан}$$

Бұдан кез келген жұп $n = q - 1$ ($q -$ *жай сан*) үшін төмендегі болжам келіп шығады:

$$\sigma_k = n! + \begin{cases} kn + 1, & \textit{егер} \quad kn + 1 \ \textit{жай сан болса}, \\ kn - 1, & \textit{егер} \quad kn - 1 \ \textit{жай сан болса}, \end{cases}$$

формула жай сандарды береді. Егер $kn \pm 1$ бір уақытта құрама болмаса, онда σ_k саны n тізбекпен орналасқан жай сандарды береді. Егер $kn \pm 1$ бір уақытта құрама сан болса, онда тізбекпен орналасқан жай сандар саны n нен кіші болады.

Бұл болжам қазіргі уақытқа дейін дәлелденбеген.

Мысалы, $q = 5$ үшін $n = 4$ болады. $\sigma_k = 41 + (4k + 1)$ формула көптеген $4k + 1$ түріндегі жай сандар үшін төмендегі жай сандарды береді.

$\sigma_1 = 4! + 5 = 29$ - жай сан ,

$\sigma_3 = 4! + 13 = 37$- жай сан,

$\sigma_4 = 4! + 17 = 41$- жай сан,

$\sigma_7 = 4! + 29 = 53$- жай сан,

$\sigma_9 = 4! + 37 = 61$- жай сан,

$\sigma_{10} = 4! + 41 = 65$- құрама сан.

Сонымен, жоғарыда келтірілген мысалдар $\sigma_k = 4! + (4k + 1)$ әрқашан тек жай сандарды бермейді.

Американдық математик Миллс 1947 жылда белгілі нақты α сан үшін $\left[\alpha^{3^n}\right]$ өрнек кез келген n үшін жай санды беретінін дәлелдеді.

Райт есімді математик $\alpha_{n+1} = 2^{\alpha_n}$ рекуррент формула көмегінде $[2^{\alpha_0}]$, $[2^{\alpha_1}]$, … өрнектер $\alpha = \alpha_0$ -дің белгілі нақты (иррационал) мәнінде жай сандарды беретінін көрсетті.

Бұл теорема теориялық тұрғыдан маңызды болса да, тәжірибеде оның көмегімен қалаған үлкен болған жай санды табуға болмайды, себебі α_0 - иррационал сан болғандықтан оның тек тек бір неше ондық үлестері белгілі.

Польша математигі В.Серпинский

$$p_n = \left[\alpha \cdot 10^{2^n}\right] - 10^{2^{n-1}}\left[\alpha \cdot 10^{n-1}\right]$$

формула көмегімен α -ң белгілі нақты мәнінде n- жай санды анықтау мүмкіндігін дәлелдеген. Өкінішке орай, бұл да жоғарыда көрсеткендей кемістігі бар.

Американдық математик С.Улам өзі үшін өте қызықты болмаған есеп баяндамада қатысып, қолындағы қағазға горизонтал және вертикал сызықтар сызып, квадраттардан құрастырылған тор құрастырған. Алдымен шахмат этюдін құрастыру үшін әрекеттеніп, бұдан ештеңе болмағаннан соң, тор ортасында орналасқан квадраттан бастап спираль сызып, қиылысқан квадраттарды ретімен нөмірлеп, жай сандарды дөңгелек ішіне алған.

Нәтижеде пайда болған торға назар салып, жай сандар белгілі квадраттардың диагоналдарымен реттілікпен орналасқанын көреді (2-сурет).

Кейінрек, спиралды 1 ден бастап емес, басқа бір саннан, жай сандардан бастап көрген. Нәтижеде, егер спиралды 17, 41 сияқты жай сандардан бастаса, 16х16, 40х40 өлшемді квадраттардың бас диагоналдарынан бірінде 16, 40 жай сандарына сәйкес орналасқан болады. (3- сурет)

100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82

2-сурет

272	271	270	269	268	267	266	265	264	263	262	261	260	259	258	257
213	212	211	210	209	208	207	206	205	204	203	202	201	200	199	256
214	161	160	159	158	157	156	155	154	153	152	151	150	149	198	255
215	162	117	116	115	114	113	112	111	110	109	108	107	148	197	254
216	163	118	81	80	79	78	77	76	75	74	73	106	147	196	253
217	164	119	82	53	52	51	50	49	48	47	72	105	146	195	252
218	165	120	83	54	33	32	31	30	29	46	71	104	145	194	251
219	166	121	84	55	34	21	20	19	28	45	70	103	144	193	250
220	167	122	85	56	35	22	17	18	27	44	69	102	143	192	249
221	168	123	86	57	36	23	24	25	26	43	68	101	142	191	248
222	169	124	87	58	37	38	39	40	41	42	67	100	141	190	247
223	170	125	88	59	60	61	62	63	64	65	66	99	140	189	246
224	171	126	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	139	188	245
225	172	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	187	244
226	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	243
227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242

3-сурет

Жалпы жағдайда спираль центрден алыстаған сайын жай сандар азаятынын көруге болады. Диагоналдарымен орналасқан жай сандарды кейбір паробола формулалары көмегімен алуға болады. Мысалы, 2-суреттегі 5, 19, 41, 71 сияқты жай сандар $4n^2+10n+5$ параболадан $n=0,1,2,3$ болғанда пайда болады. 3-суреттің бас диагоналында орналасқан 17, 19, 23, 29, 37, 47, 59, 73, 89, 107, 127, 149, 173, 199, 227, 257 сияқты жай сандар n^2+n+17 параболадан $n=0,1,2,3$, ..., 15 болғанда пайда болады.

Улам спиралдарына төмендегідей болжамды шешу айтылған болсада, ол осы кунге дейін дәлелденбеген.

Улам спиралы қай саннан басталғанда және қандай «шексіз» квадраттың диоганалында шексіз көп жай сандар орналасқан болады?

$p_n=(a-x)^2+x+1$ формула $x=0,1,2,\dots,a-1$ болып, $a=2,4,10,16,40$ болғанда ғана жай сан пайда болатыны дәлелденген.
Мысалы, $a=16$ болып, $x=0,1,2,3,\dots,15$ болғанда $p_0=257$; $p_1=227$; $p_2=199$, ... , $p_{15}=17$ жай сандар болады.

Эратосфен елегіне тағы бір рет назар аударсақ, оның бастауында жай сандар арасындағы арақашықтық кіші болатынын, натурал сандар тізбегінің кейінгі бөлігінде бұл арақашықтық үлкейіп баратынын көреміз. Егер натурал сан 1 және 10 арасында 4 жай сан бар болса, 1001 және 1010 арасында 1 (1009) жай сан кездеседі, кейде біреу де жай сан кездеспеуі мүмкін.Одан келесі теорема келіп шығады:

Кез келген натурал k сан үшін сондай натурал l санды көрсету мүмкін, одан бастап k та бірінен соң бірі алынып тізбектелген натурал сандар арасында біреу де жай сан болмайды.

Шынында да,

$$l=\alpha_1=(k+1)!+2$$

$$l+1=\alpha_2=(k+1)!+3$$

……………………..

$$l+k+1=\alpha_k=(k+1)!+(k+1),$$

k сандардың барлығы құрама сандар, себебі олар сәйкесінше 2 ге, 3ке,..., $(k+1)$ лерге бөлінеді. Сонымен, реттілікпен орналасқан 1000, 1000000 және т.с.с. натурал сандар арасында ешқандай жай сан болмауы мүмкін.

Мысалы, 370261 және 370373 арасындағы 111 санның барлығы құрама сан. 4652354 және 4652506 сандар арасындағы 153 бірінен соң бірі алынып тізбектелген сандардың барлығы құрама сан. 1671800 және 1671900 сандар арасындағы 100 санның барлығы құрама сан.

Венгриялық математик Эрдештің дәлелдемесіне назар аударайық: кемінде 10^6 жай сан табылып, олар үшін $\alpha = p_{k+1} - p_k > 10^{12}$ болып, p_k және p_{k+1} ретімен k және $(k+1)-$ жай сандарды көрсетеді.

Төмендегідей Шинцель гипотезасыда бар: әр бір натурал n сан үшін m натурал сан табылып, $m^{2^n}+1$, $m^{2^n}+3$, $m^{2^n}+7$, $m^{2^n}+9$ сандардын барлығы жай сан болады.

Мысал.

1) $\mathrm{n}=1$ болғанда $\mathrm{m}=2$, $\mathrm{m}=10$ үшін 5, 7, 11, 13, 101, 103, 107, 109 сияқты жай сандарды аламыз.

2) $\mathrm{n}=2$ болғанда $\mathrm{m}=10$ үшін 100001, 100003, 100007, 100009 сияқты жай сандарды аламыз.

Белгілі болған жай сандар кестесі бойынша n ге қатысты π(n) есептелінсе, мынадан кестені аламыз:

n	10	100	1000	10000	100000	1000000000
$\pi(\mathrm{n})$	4	25	168	9 543	78498	50 847 478
$\frac{\pi(\mathrm{n})}{\mathrm{n}}$	0,4	0,25	0,168	0,09543	0,078498	0,050847478
%	40%	25%	17%	9,6%	8%	5%

Бұл кестеден жай сандардың кемейгенін ($\frac{\pi(\mathrm{n})}{\mathrm{n}}$ қатынасын) көреміз. $\frac{\pi(\mathrm{n})}{\mathrm{n}}$ мәні барған сайын кішірейсе де, n нің сондай мәндерін көрсетуіміз мүмкін, ал оған тиісті $\pi(\mathrm{n})$ мән n нің 0,000001% нен кем болмайды.

Математик Л.Лохер-Эрст $\mathrm{n} > 50$ болғанда $\pi(n)$ ді

$$f(n) = \frac{n}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}}$$

формуламен анық өрнектеуді көрсетті. Мысалы, $\pi(10^3) = 168$ болса, $f(10^3) = 167{,}1$;

$\frac{\pi(10^3)}{f(10^3)} \approx 1{,}007$ және $\frac{\pi(10^{10})}{f(10^{10})} \approx 1{,}005$

болады. Мұнда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n)}{f(n)}=1$$

болатынын қарапайым тәсілмен дәлелдеуге болады.

XIX ғасырдың басында Буркхарт құрастырған 3 000 000 ға дейін жай сандар кестесі бар болатын. Кейінрек Гамбургтық математик Захария Даза 8 000 000 ға дейін жай сандар кестесін құрастырды. Розенбург бұл кестені 9 000 000 ға дейін жалғастырды. 1909 жылға келіп математик Лемер 10 000 000 ға дейін жай сандар кестесін құрастырды және алдыңғы кестелерде болған қателерді жөндеді, 1951 жылда 11 000 000 ға дейінгі жай сандар кестесі бар болатын. 1959 жылда Бейкер және Грунбергерлер 104 935 301=$p_{6\,000\,000}$ (ретімен 6 000 000 – жай сан) жай санына дейін болған жай сандардың микрофильмін көрсетді.

Математик Леммер кедергілер болмаған жағдайда, электрон есептегіш машиналар көмегінсіз $217\cdot 10^9$ ге дейін болған сандарды жай көбейтінділерге бөлектеу үшін 40 минут, 10^{15} ге дейін болған сандарды жай көбейтінділерге бөлектеу үшін 1 күн және 10^{100} ге дейінгі сандарға 1 жылда жай көбейтінділерге бөлектеуге болатынын айтқан.

АҚШ еліндегі ең үлкен атом орталығы болған Лос Аламос ғалымдары еркінде 90 миллионға дейін болған жай сандар кестесі бар.

Бірінші, үшінші, төртінші, бесінші, оныншы және он бірінші жүздіктерде тек 25 тен жай сандар болатынын көрсету мүмкін. Тек 24 жай сандары бар болған жүздіктердің саны шектеулілігін дәлелдеу мүмкін. Жай сандар саны 23 болған жүздіктер шексіз көп, деген болжам бар.

Осыған ұқсас мысалдардан $\frac{\pi(n)}{n}$ нің мәні азайып баратынын көруге болады. Ұлы орыс математигі П.Л.Чебишев (1821-1890) $\frac{\pi(n)}{n}$ мәні n өсуі мен алдын ала берілген кез келген оң саннан кіші болатынын, яғни $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n)}{f(n)}=0$ болатынын көрсетті.

Сонымен, натурал сандар тізбегінде жай сандар саны шексіз көп болса –да, олар натурал сандарға қатысты өте аз. Мынаныда айтып өткен жөн, яғни берілген кез-келген n ге сәйкес келетін $\pi(n)$ үшін формула табу мәселесі көп жылдардан бері қойылған болса да, бұл мәселе қазірге дейін шешілмеген. Біракта, $\pi(n)$ ді n арқылы табу үшін жуық формулалар құрастырып әрекеттенгендер де болды. Мұндай формуланы алғаш рет ұлы француз ғалымы Лежандр $(1752-1833)$ ұсынған болатын:

$$\pi(n) = \frac{n}{2{,}3025 \cdot \ln n - 1{,}08366}$$

(бұл формула мен $\pi(n)$ ді есептеуде оның бүтін бөлігі алынады).

Бұл формула 1 000$< n < 4\ 000\ 000$ болғанда нақтылау мән береді. Оны төмендегі кесте көмегімен көрсетуге болады:

n	*10*	*100*	*1000*	*10 000*	*1 000 000*
$\pi(n)$ -Лежандр формуласы бойынша	*8*	*28*	*171*	*1230*	*9593*
$\pi(n)$ -негізінде	*4*	*25*	*168*	*1229*	*9592*

Мұнда n қанша үлкен болса, оған сәйкес келетін $\pi(n)$ мәні сонша айырмашылық кем болатыны көрініп тұр. Лежандр формуласы тәжірибе түрінде табылған. Оны Лежандрдың өзі де, одан кейінгі ғалымдар да дәлелдей алмады. Лежандрдың жоғарыда келтірілген формуласына П.Л.Чебишев түзету енгізді. Ол төмендегі теореманы дәлелдеді:

***n* нің үлкен мәндері үшін $\frac{\pi(n)}{n}$ мәні $A(n) = \frac{0{,}43429}{\ln n}$ нен айырмашылығы өте кем және бұл айырмашылық *n* нің өсуімен азайып барады.**

Оны төмендегі кестеде көру мүмкін.

n	2	5	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000
A(n)	1	4	6	29	178	1246	9630	78628	664918	5762209
π(n)	1	3	4	25	168	1229	9592	78498	664579	5761455

$A(n) - \pi(n)$ мән барған сайын артып барады, бірақ $\frac{A(n)-\pi(n)}{n}$ кемиді. Жоғарыдағы кесте үшін $A(n) \geq \pi(n)$. Бұл барлық уақыт осындай болу керек, деген пікір жалпылама ретінде келген болатын. Бірақ, 1914 жылда англиялық математик Литльвуд $A(n) < \pi(n)$ болған n болатынын көрсетті.
$A(n) < \pi(n)$ қандай болғанда орынды болады, деген сұрақ та қойылды. Мұндай n нің мәні өте үлкен болатынын Литльвудтың досы Харди тапты, яғни $n \geq 10^{700}$.

Кейінрек n нің буданда анықтау жуық мәні және $n \approx 10^{10^{10^{31}}}$ болатынын 1933 жылда англиялық математик Скьюзи көрсетті.

Бұл сан өте үлкен сан. Бұл сан Курт Лассвиц көрсеткен және ол өте үлкен деп есептеген 9^{9^9} санға қарағанда және Архимедтің «құмды санау» нәтижесінде табылған $10^{8\times10^{16}}$ сандарына қарағанда өте үлкен (мұндай улкен сандар туралы кітабіміздің соңғы бөлімдерінде көрсетіп өтеміз).

$\pi(10^k)$ үшін $\pi(10^k) \approx \frac{0.434}{k}10^k$ жуық өрнектің болатынын көрсетеді. k =1, 2, 3, 4, 5, 6 болғанда $\pi(10^k)$ сәйкесінше 4, 22, 145, 1090, 8980, 72300 теңдігі есептелген.

П.Л.Чебишев тапқан жуық формула бүтін дүние математиктері алдына үлкен міндет жүктеді. $\pi(n)$ ді $\frac{n}{lnn}$ мен ауыстыру және бұл ауыстыру нәтижесіндегі қатені есептеу мәселесі негізгі мәселе болып қалды.
$0{,}92129 < \frac{\pi(n)lnn}{n} < 1{,}0555$ теңсіздігінің болатынын да Чебишев дәлелдеген.

1848 жылда Чебишев, егер $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n)}{\frac{n}{lnn}}$ бар болса, ол бірге тең болатынын дәлелдеді. Бірақта бұл шектің бар болатынын Чебишев дәлелдей алмады. Бұл өте күрделі тапсырма болып, сол кездегі математик құрылғылар көмегімен шешіп болмайтын мәселе екендігі кейінірек анықталды.

$\pi(n)$ ді $\frac{n}{lnn}$ мен ауыстыру жай сандардың асимптотикалық бөліну заңы деп аталды және $\pi(n)\infty\frac{n}{lnn}$ мен белгіленді. Бұл заңды жоғары математика көмегімен алғаш рет бір-біріне байланыссыз ретінде 1896 жылда француз математиктері Адамар және Валле-Пуссендер дәлелдеді.

Кейінрек 1949 жылда норвегиялық математик А.Сельберг және Венгриялық математик П.Эрдештер жай сандарды асимптотикалық бөліну заңының «қарапайым» (комплекс айнымалы функциялар теориясын қолданбай) дәлелін берді.

Төмендегі гипотеза орынды:

Кез-келген натурал *n>1* және *m>1* сандар үшін

$$\pi(m+n) \le \pi(m) + \pi(n)$$

болады.

Мысалы,

$$\pi(12+8) \le \pi(12) + \pi(8);$$

$$8<5+4;$$

$$8<9.$$

Бұл гипотеза қазірге дейін дәлелденбеген.

Біз жай сандар натурал сандардың квадратына қатысты натурал сандар тізбегінде тығыз орналасқанның дәлелдеуіміз мүмкін.

Мысал үшін бірінші жүздікте 25 жай сан болса, тек қана 9 та квадраттар кездеседі. Бірінші мыңдықта 168 жай сан болса, 31 квадраттар кездеседі және т.с.с.

Бірінен соң бірі келетін жай сандардың кері мәндерінен құрылған

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\ ...=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots$$

қатары жинақсыз, ал $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$ қатар болса жинақты болатынын дәлелдеу мүмкін.

Монстерде өмір сүрген Бонзе өзінің ұстазы М.Дена көмегімен қарапайым жолмен $p_{n+1}<\sqrt{p_1\cdot p_2\cdot\ ...\cdot\ p_n}$ болатынын дәлелдеді. П.Л.Чебишев болса өте қиын жолмен $p_{n+1}<2p_n$ болатынын дәлелдеген еді. Мысал.

$\sqrt{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11}=\sqrt{2310}=48{,}06\ ...$, яғни p_6<48,06 болуы керек. Негізінде $p_6=$11. Оған қарамай, $p_{n+1}<\sqrt{p_1\cdot p_2\cdot\ ...\cdot\ p_n}$ теңсіздігі үлкен маңызға ие. n>5 үшін $p_{n+1}<\sqrt[3]{p_1\cdot p_2\cdot\ ...\cdot\ p_n}$ болатынын да дәлелдеуге болады. Егер p_n мен n- жай сан белгіленсе, оның үшін ең қарапайым нәтиже $p_n<n^2$ болады. Реттілікпен p_{104} - жай санның 11 разрядты сан болатынын көрсету мүмкін.

Жай сандар туралы бұл шолу барысында төмендегі бір сұраққа да жауап беруге әрекет жасаймыз. Қандай цифрлармен жай сандар басталуы және аяқталуы мүмкін?

Бір разрядты жай сандар 2, 3, 5, 7 болады. $p>10$ болған жай санның соңғы цифры тек 1, 3, 7, 9 болуы мүмкін. Барлық цифрлары бірлерден құралған жай сандар да бар, мәселен, 11 және 11 111 11111 1111 111 111 111= $\frac{10^{23-1}}{9}$ да жай сан. Бұл санның жай болатынын Крайчик тарапынан көрсетілген. Барлық цифрлары бірден құралған жай сандар қанша, деген сұраққа толық жауап беріп болмайды.

Сонысы қызық, егер барлық цифрлары 1 лерден құралған сан жай сан болса, ондағы бірлер саны да жай сан болуы қажеттігі дәлелденген. Бірақ, кері тұжырым дұрыс емес. Мысалы, 111=3·37 санының бірлер саны жай сан, өзі болса құрама сан.

1907 жылда математик Генри Дудней барлық цифрлары 1 лерден құралған, өзі жай болған сан тек 11 деп айтқан болатын. Ол өзінің болжамын дәлелдеу үшін 3-у, 4-у, 5-у, ..., 18 бірлерден құралған сандардың барлығын құрама болатынын көрсетті. 1918 жылда Нью-Йорк қаласында өмір сүретін Оскар Хоппе деген адам 19 бірлерден құралған санның құрама болатынын көрсетті.

Кейінірек, 29, 31, 37, 41 және 43 бірлерден құралған сандардың құрама болатынын көрсетілді. Сонан соң 43 тен бастап 137 ге дейін бірлерден құралған сандардың барлығы құрама болатынын дәлелденді. Демек, қазіргі таңда 139 бірлерден құралған сандардан бастап барлық цифрлары бірлерден және олардың саны жай сан болған сандар ішінде тағы жай сандар болатыны белгісіз.

Серпинский төмендегі теореманы дәлелдеді:

1) Егер $C_1 \neq 0$; $C_2, C_3, \dots, C_m$ кез келген натурал сандар болса, $C_1, C_2, \dots, C_m$ цифрларымен басталатын шексіз көп жай сандар бар.

2) Егер $C_1, C_2, \dots, C_m$ үшін $C_m = 1, 3, 7$ және 9 болса, $C_1, C_2, \dots, C_m$ цифрларымен аяқталатын шексіз көп жай сандар бар.

Мысал.

10^6 та бірлермен басталатын және аяқталатын жай сандар шексіз көп. Сондай-ақ, 10^9 та 9 дар мен аяқталатын жай сандар шексіз көп.

Реттілікпен n -жай санның ($p_n -$ ің) кейбір қасиеттері туралы Ж.Шерк 1830 жылда дәлелдеген төмендегі теорема бар.

Кез-келген натурал $\boldsymbol{n}$ сан үшін + және – таңбаларын сондай тандап алу мүмкін, нәтижеде

$$\boldsymbol{p_{2n} = 1 \pm p_1 \pm p_2 \pm \dots \pm p_{n-1} \pm \dots \pm p_{2n-2} \pm p_{2n-1}},$$

$$\boldsymbol{p_{2n+1} = 1 \pm p_1 \pm p_2 + \dots \pm p_{2n-1} \pm 2p_{2n}}$$

формулалар орынды болады.

Мысалы,

$$p_{2\cdot 3} = p_6 = 1 + p_1 - p_2 - p_3 + p_4 + p_5 = 1 + 2 - 3 - 5 + 7 + 11 = 13$$

$$p_{2\cdot 3+1} = p_7 = 1 + p_1 - p_2 - p_3 + p_4 - p_5 + 2p_6$$
$$= 1 + 2 - 3 - 5 + 7 - 11 + 2 \cdot 13 = 17$$

Мұнда 13 және 17 жай сандары ретімен 6- және 7- жай сандар болады. Сондай натурал n саны табылып, оның үшін $P_n = \frac{p_{n-1} + p_{n+1}}{2}$ теңдік орынды болады.

Мысалы, $n = 16,\ 37,\ 40,\ 55,\ 240,\ 273$ болғанда $p_{16} = \frac{p_{15} + p_{17}}{2}$ немесе $p_{53} = \frac{p_{47} + p_{59}}{2}$ болады.

Цифрлар орнын қалағанша ауыстырғанда да тағы жай сандар болып қалатын төмендегі жай сандарда бар:

13 және 31; 17 және 71; 37 және 73; 79 және 97; 113, 131 және 311; 199, 991 және 919; 337, 373 және 733. Осылардан басқа тағы сондай қасиетке ие

болған жай сандар болатыны белгісіз (бұған әрине, цифрлары бірлерден құралған жай сандар кірмейді).

Л.Мозер 100 000 нан кіші болған сондай жай сандарды тауып, олардың цифрлары керісінше жазылғанда да бұл сан өзгермейді. Олардың барлығы 102 та болып, 1 000 нан кіші болғандары 101, 131, 151, 181, 313, 353, 273, 383, 727, 757, 787, 797, 919, 929 сандар.

Сондай қасиетке ие болған жай сандар шекті немесе шексіз болатыны туралы анық жауап беруге болмайды.

Енді жай сандарға қатысты кейбір гипотезаларды қарастырамыз.

1) Француз математигі Бертран белгілі жай сандар кестесін қарастырып , мынадай болжамды баяндады :

   -натурал n және $2n$ сандары арасында кемінде бір жай сан бар.

Бұл болжам «Бертран постулаты» деп аталады. Бұл постулатты 1852 жылда Чебишев дәлелдеген.

Бертран постулатынан 500 цифрлы сандар арасында кемінде 3 жай сан болатынын көрсетуге болады. Бірақта олардың біреуіда белгілі емес.

100 таңбалы жай сандардың 3 еуі бар екендігі дәлелденген. Оларды математик Р.М.Робинзон тапқан: $81 \cdot 2^{324} + 1$; $63 \cdot 2^{326} + 1; 35 \cdot 2^{327} + 1$.

Цифрлары 500 ден артық болған $2^n - 1$ түріндегі жай сандар да бар: $n = 2281$ және $n = 3217$ үшін сәйкесінше 687 және 969 цифрлы жай сандар келіп шығады.

2) А.Шинцель тарапынан айтылған, бірақ әзірге дейін дәлелденбеген болжам бар: кез келген натурал $n \geq 17$ сан үшін n және $n + \sqrt{n}$ аралығында кемінде бір жай сан p бар. Бұл болжамды А.Шинцель $117 \leq n \leq 2 \cdot 10^7$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық натурал n үшін барлық белгілі жай сандар кестесі бойынша тексеріп мақұлдады.
3) Үш тізбектей орналасқан $n > 7$ натурал сандардан кемінде біреуінің еш болмағанда екі әр түрлі жай бөлушісі болатынын дәлелдеу мүмкін.

Мысалы, 9, 10, 11 үшін 10 саны 2 және 5 жай бөлгішке ие; 17, 18, 19 үшін 18 саны 2 және 3 жай бөлгішке ие.

4) Кез келген $n > 1$ үшін n^2 және $n^2 + n$ сандары арасында кемінде бір жай сан бар.
5) Кез келген $\frac{r}{s}$ оң рационал санды шексіз көп жолмен $\frac{p+1}{q+1}$ және $\frac{p_1-1}{q_1-1}$ түрінде ($p, q, p_1, q_1 -$ жай сандар) өрнектеуге болады.

Бұл болжамнан $\frac{r}{s} = 2$ рационал саны $\frac{p+1}{q+1}$ және $\frac{p_1-1}{q_1-1}$ түрінде шексіз көп тәсілмен өрнектеуге болатыны келіп шығады. Бұл қарапайым жағдай үшін де болжамның дәлелі белгілі емес:

$$2 = \frac{13-1}{7-1} \text{ және } 2 = \frac{11+1}{5+1}.$$

6) 1 ден n^2 қа дейін болған сандарды төмендегі кесте түрінде жазамыз:

1	2	3	...	k	...	n
$n+1$	$n+2$	$n+3$	...	$n+k$	...	$2n$
$2n+1$	$2n+2$	$2n+3$	...	$2n+k$	...	$3n$
...	...	...	...	...	...	...
$(n-1)n+1$	$(n-1)$n+2	(n-1)n+3	….	(n-1)$n+k$	...	n^2

Бұл кесте бағандары арифметикалық прогрессияны құрастырады.

В.Серпинский келесіні айтқан: кестенің әр бір жолында кемінде бір жай сан бар.

Шинцель бұл болжамды барлық белгілі жай сандар кестесіне негізделіп $n \leq 4500$ дейін тексеріп көрді және сол жағдай үшін дұрыс болатынын растады. Бірінші жолда барлық уақыт жай сан болатыны анық (еш болмағанда онда жай сан 2 бар). Екінші жолда жай санның болатыны «Бертран постулатынан» келіп шығады. Жалпы, $n \geq 9$ болғанда бірінші жолдың әр біреуінде кемінде бір жай сан бар. Серпинскийдің, әр қандай екі тізбектей келетін квадраттар арасында кемінде бір жай сан болатыны туралы гипотезасынан кестенің соңғы екі жолындада

$$(n-1)^2, \quad (n-1)^2+1, \quad \dots \quad n^2-n;$$

$$n^2-n+1, \quad n^2-n+2, \quad \dots \quad n^2$$

жай сан болатыны келіп шығады. Бұл болжамды математик Меле барлық $n < 2999$ үшін тексеріп растады.

7) Кез келген натурал m сан үшін сондай натурал n сан табылып, нәтижеде $m^3 \leq (n-1)^2$ және $n^2 \leq (m+1)^3$ орындалады.

Мысалы, $m = 3$ болсын, онда, егер $n = 7$ деп алса, $3^3 < 6^2$ және $7^2 < 4^3$ болады.

Соны ескере отырып Серпинский гипотезасынан , кез келген екі бірінен соң бірі келетін кубтер арасында кемінде 2 жай сан болатыны келіп шығады.

Мысалы, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$; 8 және 27 арасында 6 жай сан бар.

Серпинский гипотезасы жалпы жағдайда дәлелденбегені үшін, жоғарыда келтірілген оның дербес жағдайлары да гипотеза болып қалады.

8) Егер барлық натурал сандарды

1				
2	3			
4	5	6		
7	8	9	10	
11	12	13	14	15
. . . .				

үш бұрышты кесте түрінде жазсақ, бұл кестенің екінші жолынан бастап әр бірінде кемінде бір жай сан бар болады.

9) 8 және 9 сондай бірінен соң бірі орналасқан натурал сандар , олар көрсеткіші $\alpha > 1$ натурал саннан құралған жай сандардың дәрежесі түрінде жазуға болады: $8 = 2^3,\ 9 = 3^2$.

Математик Каталиннің, тағыда сондай қасиетке ие реттілікпен орналасқан натурал сандар бар ма деген сұрағына жауап табылған емес. Математик А.Монковский, кез келген $n,\ n+1,\ n+2$ тізбектей натурал сандарды көрсеткіші $\alpha > 1$ болған дәреже түрінде өрнектеуге болмайды деген теореманы дәлелдеді.

Математик Шинцелдің дәлелденбеген бір гипотезасынан

$n+1,\ n+3,\ \ n+7,\ n+9,\ n+13$ сандар бір уақытта жай сандар болатын $n-$ дердің шексіз көптігі келіп шығады.

Мәселен, $n = 4, 10, 100$ үшін жоғарыдағы сандар жай сандарды береді. $k+1,\ k+2$, $k+3, \dots$, $k+10$ тізбекте $k = 0, 2, 10, 100, 190, 820$ үшін 4 еуден жай сан болатыны көрсетілген. Бірақта мұндай k нешеу болатыны белгісіз. $k+1, k+2, \dots, k+100$ тізбек тек $k = 1$ болғанда ең көп (26) жай санға ие болатыны дәлелденген, $k = 0, 2, 3, 4$ болғанда жоғарыдағы тізбекте 25 жай сан бар.

$k > 1$ болғанда бұл тізбекте көбімен 25 жай сан болатыны дәлелденген.

10) Математик Эрдештің айтуынша, $1^n + 2^n + 3^n + \cdots + (m-1)^n = m^n$ теңдікті қанағаттандыратын натурал $n > 1$ және $m > 1$ сандар жоқ.

Бұл гипотеза Мозер тарапынан барлық $m \leq 10^{10^6}$ дер үшін тексеріліп мақұлданған.

11) Эрдештің дәлелі бойынша кез келген бірінен соң бірі келетін натурал сандар көбейтіндісі квадрат сан бола алмайды: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \neq n^2$ немесе $k! \neq n^2$; сондай натурал тақ сандардың көбейтіндісі де $n^m (m > 1)$ түріндегі сан бола алмайтынын Эрдеш дәлелдеген: $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2k-1) \neq n^m$.

12) Сондай натурал сандар жұбы бар болып, олардың қосындысы және көбейтіндісі квадрат сан болады. $n \leq 100$ үшін мұндай жұптықтардың 12 сі бар екендігі анықталған: 2 және 2; 5 және 20; 8 және 8; 10 және 90; 18 және 18; 20 және 80; 9 және 19; 32 және 32; 50 және 50; 72 және 72; 2 және 98; 36 және 64.

13) 1!+1=2, 2!+1=3, 3!+1=7 жай сандар болады. Бұл сандардан кейінгі осындай жай сан 11!+1=39916801. 3!-1=5, 4!-1=23, 6!-1=719 жай сандар.

$n! + 1$ және $n! - 1$ түріндегі жай сандардың шекті немесе шексіздігі белгісіз. $n! + 1$ түріндегі сандар $n = 4,$ 5 және 7 болғанда k^2 түріндегі сандарды береді ($k!$ - натурал сан): 4!+1=25=5^2; 5!+1=121=11^2; 7!+1=5041=71^2; $n > 7$ болғанда k^2 түріндегі сандар бар ма деген сұраққа 1924 жылда математик М.Крайчик $n > 1020$ болғанда $n! + 1$ түріндегі өрнек квадрат сан, яғни k^2 болатынын көрсетті.

14) $p_1 + 1 = 3,$ $p_1 p_2 + 1 = 7,$ $p_1 p_2 p_3 + 1 = 31,$ $p_1 p_2 p_3 p_4 + 1 = 211,$

$p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 + 1 = 2311$ жай сандар (p_k саны кезекпен k - жай санды көрсетеді).
$n = 6, 7, 8$ болғанда $p_1 p_2 p_3 \ \ldots \ p_n + 1$ түріндегі сандар сәйкесінше 59, 19, 347 ге бөлінетін құрама сан. $p_1 p_2 p_3 \ \ldots \ p_n + 1$ түріндегі жай және құрама сан шекті немесе шексіз болатыны белгісіз.

15) 1958 жылда Гильбройт төмендегі гипотезаны айтқан. Егер жай сандар бірінен соң бірі жазылып, кейін бірінші қатарда реттелген жай сандардың айырымы, екінші қатарда болса бірінші қатарда ретімен орналасқан сандар айырымының абсолют мәні, үшінші қатарда екінші қатарда ретімен орналасқан сандар айырымының абсолют мәні және т.с.с. жазылса, онда әр бір жолдың бірінші элементі 1 ден құралған болады. Мысалы:

2 3 5 7 1 1 1 1 2 2 3 3 4 4 4 5 5 6
1 3 7 9 3 9 1 7 1 3 7 3 9 1
1 2 2 4 2 4 2 4 6 2 6 4 2 4 6 6 2
1 0 2 2 2 2 2 2 4 4 2 2 2 2 0 4
1 2 0 0 0 0 0 2 0 2 0 0 0 2 4
1 2 0 0 0 0 2 2 2 2 0 0 2 2
1 2 0 0 0 2 0 0 0 2 0 2 0
1 2 0 0 2 2 0 0 2 2 2 2
1 2 0 2 0 2 0 2 0 0 0
1 2 2 2 2 2 2 2 0 0
1 0 0 0 0 0 0 2 0
1 0 0 0 0 0 2 2
1 0 0 0 0 2 0
1 0 0 0 2 2
1 0 0 2 0
1 0 2 2
1 2 0
1 2
1

Бұл болжам алғашқы 63418 жол үшін тексеріліп қолданған болса да, оның толық дәлелі жоқ.

16) Егер p жай сан болса, онда

$$A = 1^{p-1} + 2^{p-1} + 3^{p-1} + \cdots + (p-1)^{p-1} + 1$$

өрнектің p ға бөлінетіндігі Ферма тарапынан дәлелденген. Сондай қасиет тек жай сандар үшінғана орынды, деген болжам математик П.Джуга тарапынан айтылған және ол өте көп жай сандар үшін тексеріп көрілген.

17) Төмендегідей Ферма теоремасы да бар:

Егер $\boldsymbol{p}$ жай сан болса, $\boldsymbol{a^p - a}$ сан $\boldsymbol{(a, p) = 1}$ болғанда $\boldsymbol{p}$ бөлінеді.

Бұл теоремадан $a = 2$ болғанда $2^p - 2$ сан барлық уақыт p ға бөлінетені келіп шығады. Енді мынадай сұрақ қоямыз: Ферма теоремасының керісіда орынды ма ? Яғни, егер $n \geq 1$ болғанда $2^n - 2$ сан n бөлінсе, n жай сан боладыма? $1 < n \leq 300$ болғанда $(2^n - 2)$ сан n бөлініп, n жай сан болатыны белгілі болды. Бұл теорема «Қытай» теоремасы деп аталады, себебі бұдан XXY ғасыр бұрын ежелгі қытайлықтар сол теореманы барлық уақыт орынды деп есептеген.

Кейінірек бұл теореманың дұрыс еместігі көрсетілді. $2^{341} - 2$ нің 341 ге бөлінетіні дәлелденді, бірақ $341 = 11 \cdot 31$ - құрама сан. $2^{341} - 2$ нің 341 бөлінетінін көрсетеміз: $2^{341} - 2 = (2^{31})^{11} - 2^{11} + 2^{11} - 2.$

$2^{10} - 1 = 1023 = 3 \cdot 341$ болғандықтан $(2^{10} - 1)$ саны 341 ге бөлінеді. $(2^{10})^3 - 1$ саны да 341 ге бөлінеді.

$$\left.\begin{array}{r} 2^{11} - 2 = 2(2^{10} - 1) \\ 2^{31} - 2 = 2[(2^{10})^3 - 1] \end{array}\right\} \text{да 341 ге бөлінеді.}$$

Демек, $(2^{31})^{11} - 2^{11}$ саны 341 ге бөлінеді. Осыдан $2^{341} - 2$ нің да 341 ге бөлінетіні келіп шығады. m құрама сан болғанда «Қытай» теоремасы дұрыс емес болатынын дәлелдеуге болады. 1950 жылда $2^{161038} - 2$ санының 161038 ге бөлінетінін Д.Х.Лемер көрсетті (161038 – жай сан емес). 1951 жылда шексіз көп n жұп сандар үшін $2^n - 2$ санының n ге бөлінетінін математик В.Х.Биджер дәлелдеді.

«Қытай» теоремасының дұрыс емес екендігі дәлелденгеннен соң сондай сұрақ туындаған еді: кез келген a бүтін сан үшін $a^n - a$ саны n ге бөлінетінін қамтитын құрама n саны бар ма?

Мұндай құрама n сандарды абсолют псевдо жай сандар немесе Кармикаэл сандары деп аталады.

Абсолют псевдо жай сандар шексіз көп деген тұжырым бар. Ең кіші псевдо жай сан $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$ болады. Кез келген a - бүтін сан үшін $(a^{561} - a)$ саны 561 ге бөлінеді. 5·29·73; 7·23·31; 7·31·73; 13 ·37· 61; 5·17·29; 113· 673 · 2689 да абсолют псевдо жай сандар болатыны дәлелденген.

$p > 2$ жай сан болғанда $2^{p-1} - 1$ санының p ға бөлінетіні жоғарыда айтылған Ферма теоремасынан келіп шығады. $2^{p-1} - 1$ саны p^2 қа бөлінетін жай p сандар бар ма, деген сұрақ қойылған болатын. Біз тек қана сондай екі жай сандардығана білеміз:

$$p = 1093 \text{ және } p = 3511.$$

100000 нан кіші болған сандар ішінде басқа мұндай жай сандар жоқтығы дәлелдеген.

Математик Роткевич жұп және тақ псевдо жай сандар шексіз көп болатынын дәлелдеді. Сонымен бірге, $(2^n - 2)$ саны n ге бөлінеді, $(3^n - 3)$ болса, n ге бөлінбейді. Мұндай псевдо жай сандардың ең кішісі $n = 341$ болатыны анықталған, яғни $(2^{341} - 2)$ саны 341 ге бөлінеді, $(3^{341} - 3)$ болса 341 ге бөлінбейді.

Бұл шектеуден кейін сондай псевдо жай сандар болмайтыны көрсетілмеген. Егер олар тағыда бар болса, олардың саны шекті немесе шексіз болатыны белгісіз. Әрине, $2^{p-1} - 1$ саны p^2 қа бөлінбейтін жай сандар да бар. Сондай қасиетке ие болған жай сандардың шекті немесе шексіздігі белгісіз.

18) 1933 жылда неміс математигі Х.Хейльбронның дәлелі бойынша 1^{250} , $2^{250}, 3^{250} \dots , n^{250}$, $(n+1)^{250}$ тізбектің қатар тұрған екі мүшесі ортасында қандай да $n = n_0$ ден бастап кемінде бір жай сан табылады.

Кеңес одағы математигі Чудаков жоғарыда келтірілген тізбекті $1^4, 2^4, \dots , n^4, (n+1)^4, \dots$ мен ауыстыру мүмкіндігін дәлелдеді. 1937 жылда болса Англия математигі А.Е.Ингам 1^3, 2^3, $3^3, \dots$, n^3, $(n+1)^3$, ... тізбек жоғарыда келтірілген қасиетке ие болатынын дәлелдеді.

Сонымен қатар, n^3 және $(n+1)^3$ сандар арасындағы жай сандар саны n -ң өсуі мен артып баратыны дәлелденді.

Берілген натурал n санының жай немесе құрама болатынын анықтау үшін кейбір әдістер бар. Бірақ, олардың барлығы ыңғайсыз, себебі өте көп көмекші есептеулер жүргізуді талап етеді және амалда қолдану қиын. Бұл әдістердің кейбірін қарастырайық:

1) n санының жай немесе құрама болатынын анықтау үшін оны $\sqrt{n}$ кіші болған жай сандарға бөліп көру жеткілікті.

Мысал, $n = 919$. $\sqrt{919}$ саннан кіші болған барлық жай сандар 2, 3, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 29 құралған, 919 осылардың ешқайсысына бөлінбейді. Демек, 919 – жай сан. Бұл мысал өте үлкен сандардың жай немесе құрама болатынын осындай жолмен анықтау ыңғайсыздығын тікелей көрсетеді.

2) n санының жай болуы үшін $(n-1)! + 1$ -ің n ге бөлінуі қажетті және жеткілікті (бұл тәсілді математик Вильсон көрсетті) .

Мысалдар. 1) $n = 7$ - жай сан, себебі $(7-1)! + 1 = 721$ саны 7-ге бөлінеді, 2) $n = 6$ - құрама сан, себебі $(6-1)! + 1 = 121$ саны 6-ға бөлінбейді. Осындай жолмен n санының жай немесе құрама болатынын анықтау ыңғайсыз, себебі үлкен n үшін $(n-1)!$ саны өте үлкен болып, $(n-1)! + 1$ дің n ге бөлінуі немесе бөлінбейтінін есептеу қиын.

$(\mathrm{p}-1)! + 1$ саны р ға бөлінуі мен қатар p^2 қа да бөлінетін р жай сан бар ма, деген сұрақ қойса болады. 30000 нан үлкен болмаған р сандар ішінде тек 5, 23 және 563 сандары үшін $(\mathrm{p}-1)! + 1$ саны p^2қа бөлінеді. 30000 шекарасынан кейін мұндай санның бар болмайтыны дәлелденбеген.

Берілген натурал n санның жай немесе құрама болатынын П.Ферма тарапынан көрсетілген төмендегі жолмен де анықтауға болады.

Айталық, m саны $m^2 > N$ теңсіздікті қанағаттандыратын ең кіші натурал сан болсын.

$$m^2 - N, \quad (m+1)^2 - \mathrm{N}, \quad (m+2)^2 - \mathrm{N}, \dots$$

сандарды құрастырып, квадратты сан пайда болғанға дейін жалғастырамыз. Егер $(m+k)^2 - N = y^2$ болса, $N = (m+k)^2 - y^2$

болып, $N = (m + k + y) \cdot (m + k - y)$ болады. Мұнда N құрама сан болатыны анық болды.

Егер N жай сан болса, $m + k - y = 1$ болады. Мысалдар қарастырайық.

Мысал. N= 9271 болсын. Натурал сандардың квадраттар кестесін төмендегідей анықтаймыз (мұндай кестенің ең тиімдісі Барлоу кестесі):

$$96^2 < 9271 < 97^2$$

$$97^2\text{-}9271=138,$$

$$98^2\text{-}9271=333,$$

$$99^2\text{-}9271=530,$$

$$100^2 - 9271 = 729 = 27^2$$

Демек,

$$9271 = 100^2 - 27^2 = (100 - 27)(100 + 27) = 73 \cdot 123$$

болады.

1.2 МЕРСЕНН САНДАРЫ

Ұлы француз математигі Мерсенн (1588-1643) өте кедей отбасынан болып, өзі де кедейлікте өмір сүрген. Мерсенн $M_n = 2^n - 1$ ($n -$ натурал сан) түріндегі сандарды тексерген. $n = 1, 2, 3, 4, ...$ болғанда **Мерсенн сандары** деп аталған $M_1 = 1,\ M_2 = 3,\ M_3 = 7,\ M_4 = 15, ...$ сандар пайда болады. Бұл сандардың кейбірі жай болып, кейбірі болса құрама сан. M_n жай сан болса, мерсенн жай саны деп аталады.

$$n = 2 \text{ болғанда } M_2 = 3,$$

$$n = 3 \text{ болғанда } M_2 = 7,$$

$$n = 5 \text{ болғанда } M_5 = 31,$$

$$n = 7 \text{ болғанда } M_7 = 127$$

пайда болады. M_k мен k-мерсенн жай санын белгілейміз. Сонымен, 3, 7, 31, 127, ... сәйкесінше бірінші, екінші, үшінші, төртінші және тағыда басқа мерсен жай сандары деп аталады.

Егер $n = n_1 \cdot n_2$ құрама сан болса, $M_{n_1 \cdot n_2}$ құрама сан болатынын дәлелдеу оңай:

$$M_n = M_{n_1 \cdot n_2} = (2^{-n_1})^{n_2} - 1 = (2^{n_1} - 1)[(2^{n_k})^{n_1 - 1} + \cdots + 1].$$

Демек, M_n саны $(2^{n_1} - 1)$ ге бөлінеді, сондықтан M_n санның құрама болатыны келіп шығады.

Сонымен, егер M_n жай сан болса, n жай сан болады. Бірақ, кез-келген жай сан n үшін M_n жай сан бола бермейді.

Егер p жай сан болса, M_P -ің бөлгіштері $(2pk+1)$ түрінде болатыны дәлелденген. ($k \geq 0$ бүтін сан). Жоғарыдан, $M_{11} = 2047 = 23 \cdot 89$ дің Құрама сан болатыны анықталған. M_{11}-ң бөлгіштері $22k+1 = 2 \cdot 11 \cdot k + 1$; осыдан $2 \cdot 11 + 1 = 23 (k = 1, p = 11)$; $2 \cdot 4 \cdot 11 + 1 = 8 \cdot 11 + 1 = 89$ $(k = 4,\ p = 11)$.

$M_{101} = 2^{101} - 1$ санның бөлгіші $2 \cdot k \cdot 101 + 1$ түрінде болатыны белгілі болса да, бірақ оның ешқандай да бөлгіші анықталған емес. Сондықтан да, M_{101} санының көп уақыттардан аса жай немесе құрама болатыны анықталмаған. Бұл санның құрама сан болатыны кейінрек басқа жолмен дәлелденді.

31 таңбалы $2^{101} - 1$ ің екі әр түрлі жай сан көбейтіндісінен құралған және оның ең кіші жай бөлгіші кемінде 11 таңбалы сан болатыны да дәлелденген.

Мерсенн 1644 жылда дәлелсіз $p = 13, 17, 19, 31$ болғанда $(2^p - 1)$ түріндегі сан жай сан болатынын айтқан. $2^{31} - 1$ ің жай сан болатынын бірінші болып Л.Эйлер дәлелдеген.

Егер $p = 8k + 7$ түріндегі сан жай сан болса, $\frac{M_{p-1}}{2}$ ің pға бөлінуі қажеттілігі де дәлелденген. Осыдан $p = 8k + 7$ түріндегі сан жай сан болса, M_p сандардың көбі құрама болатыны анықталған.

$M_{23} = 2^{23} - 1$ саны 47 ге бөлінеді, себебі $p = 23 = 8 \cdot 2 + 7$ және $M_{\frac{p-1}{2}} = M_{11} = 2047$ саны 23 ке бөлінеді.

$M_{33} = 2^{33} - 1$ саны 67 бөлінеді.

$M_{131} = 2^{131} - 1$ саны 263 бөлінеді.

$M_{179} = 2^{179} - 1$ саны 359 бөлінеді.

$M_{191} = 2^{191} - 1$ саны 383 бөлінеді.

$M_{223} = 2^{223} - 1$ саны 447 бөлінеді.

Мұндай құрама сандар шексіз көп деп есептелген болса да, бірақ бұл пікір қазірге дейін де дәлелденбеген.

Бізге қазірге дейін тек 24 мерсенн жай сандары белгілі. Олар төмендегі p ларға сәйкес келетін M_p лар болады:

$$p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937.$$

M_{127} және M_{521} мерсенн жай сандары арасында 66 мерсенн құрама сандары болатыны анықталған.

M_{1279} мерсенн жай санының 386 разрядтық болатыны анықталды. Осыдан алдын 39 разрядтық M_{127} мерсенн жай саны 75 жыл барысында белгілі болған ең үлкен жай сан болып кележатқан еді.

Сонымен, ең үлкен мерсенн саны және сонымен бірге қазірге дейін белгілі болған ең үлкен (12003 разрядтық) жай сан $M_{24} = 2^{19937} - 1$ болып есептеледі. M_{11213} тің жай және ол 3376 разрядтық болатынын 1963 жылда электрон есептегіш машинасы көмегімен Дональд Желлис көрсетті. $2^{257} - 1 = 315841789476323908471419700173758457065399693311281128078915168015826259279871$ болатынын есептелген.

$2^{5002331} - 1$ тің 1,5 миллионнан артық цифрлы болатынын және 10004663 оның бөлгіші болатынын анықталған. $p = 521$ бастап мерсенн сандарының жай болатынын электрон есептегіш машиналары көмегінде дәлелденді.

Люк және Лемер есімі мен байланысты төмендегі теорема бар:

$p \neq 2$ жай сан болғанда мерсенн санының жай сан болуы үшін M_p саны төмендегі жолмен пайда болатын тізбектің $(p-1)$ мүшесінің бөлгіші болуы қажет және жеткілікті:

$$\boldsymbol{u_1 = 4;\ u_{n+1} = u_n^2 - 2;\ \ n = 1, 2, 3, \ldots}$$

Бұл тізбектің бірінші мүшелері 4, 14, 194, 1416, 37634, 317954, ... (Люк тізбегі).

M_{4423} тің жай болатыны төмендегідей көрсетілген. Жоғарыдағы тізбектің $p - 1 = 4423 - 1 = 4422$ мүшесін тауып, ол санды $M_{4423} = 2^{4423} - 1$ ге қалдықсыз бөлінетіні көрсетілген.

Сол теоремаға негізделіп, $2^{149} - 1$ құрама болатынын анықтау үшін Д.Лемер 70 сағат уақыт жұмсаған. $2^{128099} - 1$ тің 256199 ға бөлінуін анықтау үшін жас кеңес одағы математигі Слободский 12 сағат уақыт жұмсаған.

Әрине, бұл ауыр жұмыс, тек электрон есептеуіш машинасы көмегімен ғана тексеріп көру мүмкін болған мысал.

Тура сол жолмен 31 разрядтық M_{101} дің құрама болатыны да көрсетілген, себебі есептеумен көрсетілген тізбектің 100- мүшесі M_{101} ге бөлінбеген.

Люк жоғарыдағы теоремаға негізделіп, 2^{127-1} жай сан болатынын көрсеткен еді. Оның үшін 2^{127-1} =170141183460169231731687303715884 41 өрнек Люк тізбегінің 05727136- мүшесінің бөлгіші болатынын көрсетті.

Мынадай гипотеза да бар:

$p_1 = 3;\ p_{n+1} = 2^{p_n} - 1$ түріндегі сандардың барлығы жай сан.

Мысал. $p_1 = 3;\ p_2 = 2^3 - 1 = 7;\ p_3 = 2^7 - 1 = 127;\ p_4 = 2^{127} - 1 -$ жай сан т. с. с.

Люк төмендегі кестені құрастырды:

p жай сан	2^p-1 мерсенн саны	$d > 1$ бөлгіші	2^p-1дің түрі
11	2^{11}-1	23	құрама сан
13	2^{13-1}	өзі	жай сан
17	2^{17-1}	өзі	жай сан
19	2^{19-1}	өзі	жай сан
23	2^{23-1}	47	құрама сан
29	2^{29-1}	233	құрама сан
31	2^{31-1}	өзі	жай сан
37	2^{37-1}	233	құрама сан
41	2^{41-1}	13367	құрама сан
43	2^{43-1}	431	құрама сан
47	2^{47-1}	2351	құрама сан
53	2^{53-1}	6361	құрама сан
59	2^{59-1}	179951	құрама сан
61	2^{61-1}	өзі	жай сан
67	2^{67-1}	?	құрама сан
71	2^{71-1}	228479	құрама сан
73	2^{73-1}	439	құрама сан
79	2^{79-1}	2687	құрама сан
83	2^{83-1}	167	құрама сан
89	2^{89-1}	өзі	жай сан
97	2^{97-1}	11447	құрама сан
101	2^{101-1}	?	құрама сан
103	2^{103-1}	?	құрама сан
107	2^{107-1}	өзі	жай сан
109	2^{109-1}	745188807	құрама сан
113	2^{113-1}	3391	құрама сан
127	2^{127-1}	өзі	жай сан

p жай сан	2^p-1 мерсенн саны	$d > 1$ бөлгіші	2^p-1 дің түрі
131	2^{131-2}	263	құрама
137	2^{137-1}	?	белгісіз

139	2^{139-1}	?	белгісіз
149	2^{149-1}	?	белгісіз
151	2^{151-1}	18121	құрама
157	2^{157-1}	852133201	құрама
163	2^{163-1}	150283	құрама
173	2^{173-1}	730753	құрама
179	2^{179-1}	359	құрама
181	2^{181-1}	43441	құрама
191	2^{191-1}	383	құрама
193	2^{193-1}	?	құрама
197	2^{197-1}	7487	құрама
199	2^{199-1}	?	белгісіз
211	2^{211-1}	15193	құрама
223	2^{223-1}	18287	құрама
227	2^{227-1}	?	белгісіз
229	2^{229-1}	?	белгісіз
233	2^{233-1}	1399	құрама
239	2^{239-1}	479	құрама
241	2^{241-1}	?	белгісіз
251	2^{251-1}	503	құрама
257	2^{257-1}	?	белгісіз

Бұл кестеден кейбір жай сандар үшін $(2^{p}-1)$ дің жай болатыны, кейбірі үшін $(2^{p}-1)$ дің құрама болатыны көрінеді.

Кейбір p үшін $(2^{p}-1)$ дің құрама болатыны белгілі болса да, олардың $d > 1$ бөлгіші қазірге дейін анықталмағандығы көрсетілген. Кейбір p лар үшін $d > 1$ бөлгіші көрсетілген. Бұл кесте тек $p = 11$ ден $p = 257$ дейін құрастырылған. $2^{n}-1$ түріндегі мерсенн сандарының көбі құрама болатыны дәлелденген.

Мәселен, 2300 және 3300 сандары арасындағы жай сандардың барлығы үшін M_p құрама болатындығы көрсетілген. 200 жыл барысында 2^{67}-1 жай сан деп келген болатын. 1903 жылда Америкадағы математиктер жиналысында Колумбия университетінің профессоры Френк Коул өзінің есеп баяндамасынан алдын 2^{67}-1 құрама болатынын төмендегідей көрсетті: алдымен 2 санын 67 дәрежеге көтеріп, одан бірді азайтты, пайда болған санды тақтаның шетіне жазып қойды. Кейін тақтаның бос жеріне 193707721 және 761838257287 сандарын көбейтіп, жиналысқа келгендердің алғысына бөленді, себебі пайда болған көбейтінді 2^{67}-1 ге тең болатын. Кейініректе бұл санның құрама болатынын көрсету үшін қанша уақыт қажет болғанын

Коулдың достары сұраған кезде ол 9 жылда неше демалыс күндері болса, ол сонша уақыт орындағанын айтты.

Кейбір $p > 257$ үшін 2^p-1 дің құрама болатыны және олардың $d > 1$ бөлгіші де анықталған. $p = 317, 337, 5011$ үшін де $d > 1$ бөлгіші анықталған. 1961 жылда барлық $p \leq 1193$ жай сандар үшін $M_p = 2^p - 1$ түріндегі құрама мерсенн сандарының бөлгіштері анықталған болатын.

В.А.Голубев 1956 жылда M_{571} дің бөлгіші 27409 және M_{761} дің бөлгіші 6089 болатынын көрсетті. M_n жай сан болғанда $\mathrm{M}_{\mathrm{M}_n}$ саны да жай сан болады, деген болжам бар болатын. $n = 2, 3, 5, 7$ болғанда

$$\mathrm{M}_{\mathrm{M}_2} = 2^{\mathrm{M}_2} - 1 = 2^3 - 1 = 7,$$
$$\mathrm{M}_{\mathrm{M}_3} = 2^{\mathrm{M}_3} - 1 = 2^7 - 1 = 127,$$
$$\mathrm{M}_{\mathrm{M}_5} = 2^{\mathrm{M}_5} - 1 = 2^{37} - 1,$$
$$\mathrm{M}_{\mathrm{M}_7} = 2^{\mathrm{M}_7} - 1 = 2^{127} - 1$$

жай болып шықты. Бірақ, 1953 жылы математик Д.Ю.Уклер жоғарыда келтірілген тұжырымның дұрыс емес екендігін көрсетті. Ол $\mathrm{M}_{\mathrm{M}_{13}} = 2^{\mathrm{M}_{13}} - 1 = 2^{2^{13}-1} - 1$ дің 2466 цифрлы құрама сан болатынын электрон есептеуіш машинасы көмегімен 100 сағат үздіксіз жұмыс нәтижесінде дәлелдеді. ($\mathrm{M}_{13} = 2^{13} - 1 = 8191$ жай сан.) Бірақ, $\mathrm{M}_{\mathrm{M}_{13}}$ тің 1 және өзінен басқа ешқандай да бөлгіші белгісіз.

1957 жылда болса $\mathrm{M}_{\mathrm{M}_{17}}$ және $\mathrm{M}_{\mathrm{M}_{19}}$ дің құрама болатыны және бөлгіштері сәйкесінше $1768\,(2^{17} - 1) + 1$ және $120\,(2^{19} - 1) + 1$ болатыны анықталды. ($2^{17} - 1$ және $2^{19} - 1$ мерсенн жай сандары).

Әрине, бұл жағдай мерсенн сандары арасында құрама немесе жай шекті немесе шексіздігі туралы ештеңе айта алмаймыз.

Сондай гипотезада да бар.

$q_0 = 2,\ q_{n+1} = 2^{q_n} - 1\ (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$ заңына негізделіп анықталған $q_0, q_1, q_2, q_3,$ ... тізбектің барлық мүшелері жай сандардан құралған.

Бұл $n \leq 4$ үшін орынды болып шығады, бірақта $n = 5$ үшін q_5 саны 10^{37} ден артық цифрлы сан болып, оның жай немесе құрама болатыны анықталмаған.

Егер $p = 4k + 3$ және $q = 2\mathrm{p} + 1 = 8k + 7$ екеуі де жай болса, онда M_p мерсенн санының q ға бөлінетінін кезінде Эйлер көрсеткен болатын.

Мысал. $p = 11 = 4 \cdot 2 + 3$; $q = 2\mathrm{p} + 1 = 23$; сондықтан $M_{11} = 2^{11} - 1$ саны $q = 23$ ке бөлінуі керек. (Люк кестесінде көрсетілген).

Әр түрлі бөлгіштерге ие болған құрама сандар бар. Дюжина – 12, Гросс - 144 немесе 24 сағат, 1440 минут, 86400 секундтардан құралған 1 тәулік,

360° , $21600'$, $1896000''$ тан құралған шеңбер әр түрлі бөлгіштерге ие болған сандарға мысал бола алады.

Егер натурал n санның канондық жіктеуі (жай көбейткіштерге жіктелуі) $n = p_1^{\alpha} \cdot p_2^{\beta} \cdot \ldots \cdot p_n^{\mu}$ түрінде болса, (p_1, $p_2, \ldots, p_k$ - жай сандар, $\alpha, \beta, \ldots, \mu$- натурал сандар) онда n нің әр түрлі бөлгіштер саны $\tau(n)$ төмендегі формула көмегімен табылады:

$$\tau(n) = (\alpha + 1)(\beta + 1) \ldots (\mu + 1).$$

Мысал. $n = 84400 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ үшін

$$\tau(n) = (7 + 1)(3 + 1)(2 + 1) = 8 \cdot 4 \cdot 3 = 96,$$

$$n = 1896000 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \text{ үшін}$$

$$\tau(n) = (7 + 1)(4 + 1)(3 + 1) = 8 \cdot 5 \cdot 4 = 160.$$

n нің көп мәндері үшін $\tau(n)$ нің мәндер кестесін Маурер құрастырған. Оның кестесі бойынша 21621600 саны 576 әр түрлі бөлгішке ие. Төмендегі канондық жіктелу де белгілі: $\underbrace{125000\ldots000}_{1356} = 2^{2^{3^2} \cdot 3} \cdot 5^{3^{2^2} \cdot 19}$ ($\tau(n) = \tau(n + 1)$) теңдеуді қанағаттандыратын n сандар бар.

Мысал: $\tau(14) = \tau(15) = 4,$

$$\tau(21) = \tau(22) = 4.$$

Сондай қасиетке ие болған n сандардың шекті немесе шексіздігі қазірге дейін белгісіз. Егер сондай n дердің саны шексіз көптігі дәлелденсе, онда шексіз көп n үшін $\tau(n) = \tau(n + 1) = 4$ болатын еді. Бұл жағдайда әр бірі екі әр түрлі жай сандар көбейтіндісінен құралған n және n+1 жұптар шексіз көп болар еді:

$$\tau(21) = \tau(22) = 4; \quad 21 = 3 \cdot 7, \quad 22 = 2 \cdot 11,$$

$$\tau(33) = \tau(34) = 4; \quad 33 = 3 \cdot 11, \quad 34 = 2 \cdot 17.$$

Енді $\varphi(n)$ Эйлер санды функциясына байланысты кейбір мәселелерді қарастырамыз. $\varphi(1) = 1$ және $\varphi(n)$ саны nнен кіші және n мен өзара жай болған сандар санын өрнектейді.

Мысал. $\varphi(18) = 6$. $\varphi(m) = \varphi(n)$ теңдікті қанағаттандыратын m және n сандар бар.

Мысал. $\varphi(8) = \varphi(10) = 4$. Кез-келген натурал m сан үшін $\varphi(m) = \varphi(n)$ теңдікті қанағаттандыратын натурал n санның бар болатынын дәлелдеуге бола ма, деген сұрақ туындауы мүмкін. Бұл мәселе жалпы жағдайда дәлелденбеген. Бырақ кейбір дербес жағдайлар үшін мәселелер шешілген:

1) m тақ сан болғанда $\varphi(2m) = \varphi(m)$ болатыны көрсетілген.

Мысал. $\varphi(10) = \varphi(5) = 4$.

2) Егер $2^n + 1$ жай сан болса, $\varphi(2^{n+1}) = \varphi(2^n + 1) = 2^n$ болады.

Мысал. $\varphi(2^4+1) = \varphi(17) = \varphi(2^{4+1}) = \varphi(32) = 2^4$.
$n = 2,\ n = 6$ лардан басқа $\varphi(n) \geq \sqrt{n}$ болатыны дәлелденген.

Мысал. $n = 30;\ \varphi(30) = 8,\quad 8 > \sqrt{30}$.

$\varphi(n)$ және $\tau(n)$ санды функциялар арасында қандай n үшін $\varphi(n) = \tau(n)$ теңдік орынды болады?

Бұл жағдай $n = 1, 3, 8, 10, 18, 24$ және 30 сандар үшін орынды, яғни $\varphi(1) = \tau(1) = 1, \varphi(3) = \tau(3) = 2,\ \varphi(8) = \tau(8) = 4,\ \varphi(10) = \tau(10) = 4,$ $\varphi(18) = \tau(18) = 6,\qquad \varphi(24) = \tau(24) = 8,\qquad \varphi(30) = \tau(30) = 8.$

$\varphi(n) = \tau(n)$ теңдікті қанағаттандыратын жоғарыдағы сандардан басқа натурал сандар бар болмайтыны дәлелденген.

$n > 30$ үшін $\varphi(n) > \tau(n)$ болатынын дәлелдеуге болады.

Мысал. $n = 32$ үшін $\varphi(32) = 16; \tau(32) = 6$; 16> 6.

$\varphi(n) = \varphi(n+1)$ теңдікті қанағаттандыратын n сандар бар:

$\varphi(1) = \varphi(2) = 1,$ $\varphi(194) = \varphi(195)=96,$
$\varphi(3) = \varphi(4) = 2,$ $\varphi(255) = \varphi(256)=128,$
$\varphi(15)=\varphi(16) =8,$ $\varphi(495) = \varphi(496) = 240,$
$\varphi(104)=\varphi(105) = 48,$ $\varphi(584) = \varphi(585) =288,$
$\varphi(164) = \varphi(165) = 80,$ $\varphi(975) = \varphi(976) =480.$

Мұндай қасиетке ие болған n дер саны шексіз көп деген болжам бар. Жай сандар үшін Эйлер функциясының тағы бір қасиеті белгілі: $n = p$ жай сан болғанда $\varphi(p) = p - 1$ болып, $p - 1$ саны $\varphi(p)$ ге бөлінеді. Мәселен, $\varphi(11) = 10$; 10 саны болса, $\varphi(11)$ ге бөлінеді. Бұл жағдай құрама сандар үшін де орынды ма деген сұрақ туындауы мүмкін. 1932 жылда математик Лемер, мұндай құрама n сандар жоқ, деп айтқан болатын. Бірақ, бұл тұжырым қазірге дейін дәлелденбеген.

Тағы басқа сұрақ та қойылған болатын: $k\varphi(m) = m - 1$ теңдеуді қанағаттандыратын құрама m сандар бар ма? (m - натурал сан). Англиялық математиктің дәлелі бойынша, егер сондай m құрама сан бар болса, ол кемінде 11 жай сандар көбейтіндісінен құралған болуы қажет.

n =6 үшін φ(6)=2; $\pi(6) = 3$; $\pi(6) > \varphi(6)$,
n =20 үшін $\varphi(20)$ =8; $\pi(20) = 8$; $\pi(20) = \varphi(20)$,
n =21 үшін $\varphi(21) = 12$; $\pi(21) = 8$; $\pi(21) < \varphi(21)$.

Кез-келген $n > 90$ үшін $\varphi(n) > \pi(n)$ болады, деген болжам бар еді. Ал 1951 жылда бұл болжамды математик Мозер дәлелдеді. Кейінірек математик Эрдеш те басқа жолмен бұл болжамның дәлелін ұсынды.

Егер $S(m)$ өрнек m мен өзара жай болған сандар қосындысын өрнектесе, онда $m > 1$ үшін $S(m) = \frac{m \cdot \varphi(m)}{2}$ формула орынды болады.

Мысал. $m = 12, \quad \varphi(12) = 4, \; S(12) = 1 + 5 + 7 + 11 = 24;$

$$S(12) = \frac{12 \cdot \varphi(12)}{2} = \frac{12 \cdot 4}{2} = 24.$$

Миллион әр түрлі бөлгішке ие болған натурал сандардың ең кішісі $n = (1267630600228229401496703205376)^{66} \cdot (847288609443)^4$ саны болатынын Мерсенн көрсетті. Бұл 2028 разрядты сан. Бірінші жақшадағы сан 100 бөліндіге ие. Жоғарыда анықталған $S(m)$ функция жалпы өспелі. Біракта, жай сандардың шексіздігі $S(m)$ нің жылдам өсуіне мүмкіндік бермейді.

Енді мерсенн сандарының тағы бір қасиетін көріп өтеміз: $(2^n - 1)$ түрдегі мерсенн саны тек екі жай сандардың көбейтіндісінен құралған жағдайда белгілі. 10^6 дан кіші болған мұндай түрдегі сандар $2^4 - 1 = 3 \cdot 5; 2^9 - 1 = 7 \cdot 73; \;\; 2^{11} - 1 = 23 \cdot 89.$

Мұндай қасиетке ие болған және 10^6 дан үлкен болған мерсенн сандары да бар.

$M_n = 2^n - 1$ сандар $n = 23, \; 37, 49, \; 67, 101$ үшін тек екі жай сан көбейтіндісінен құралған. Мұндай сандар саны қанша болатыны белгісіз. Барлық $n \geq m$ үшін n және $n + 1$ лердің кемінде біреуі еш болмағанда екі әр түрлі жай бөлгішке ие болатын сондай m натурал сан бар ма, деген сұрақ туындауы мүмкін.

Егер сондай m сан бар болса, $m \geq 2^{19937}$ болуы керектігі анық, себебі жоғарыда айтылғандай, $2^{19937} - 1$ және 2^{19937} тек бірғана жай бөлгішке ие. Егер сондай сан бар болатыны дәлелденсе, онда Ферма және Мерсенн жай сандарының саны шекті болатыны келіп шығады.

$n^2 - 1$ және $n^2 + 1$ сандары теккана 3 та әр түрлі жай сандар көбейтіндісі түрінде жазылуы мүмкін болған натурал n сандары бар . Мысал.

1) $n^2 - 1$ түріндегі $n = 14, 16, 20, 22, 32$ үшін:

$14^2 - 1 = 3 \cdot 5 \cdot 13; \quad 16^2 - 1 = 3 \cdot 5 \cdot 17; \quad 20^2 - 1 = 3 \cdot 7 \cdot 19;$

$22^2 - 1 = 3 \cdot 7 \cdot 23; \quad 32^2 - 1 = 3 \cdot 11 \cdot 33.$

2) $n^2 + 1$ түріндегі $n = 13, 17, 21, 23, 27, 112$ үшін:

$13^2 + 1 = 2 \cdot 5 \cdot 7; \qquad 23^2 + 1 = 2 \cdot 5 \cdot 53;$

$17^2 + 1 = 2 \cdot 5 \cdot 19; \qquad 27^2 + 1 = 2 \cdot 5 \cdot 73;$

$21^2 + 1 = 2 \cdot 13 \cdot 17; \qquad 112^2 + 1 = 2 \cdot 13 \cdot 193.$

Кез-келген $S > 1$ үшін шексіз көп натурал n саны бар болып, олар үшін $n^2 - 1 \quad S$ та әр түрлі жай сандар көбейтіндісінен құралған болады.

$S = 2$ болғанда $n - 1$ және $n + 1$ лер егіз жай сандар жұптығы деп аталады. (мұндай сандар туралы алда қарастыратын боламыз).

Енді қазірге дейін шешілмеген кейбір мәселелерді баяндаймыз:

1) Әр біреуі тек бірғана жай бөлгішке ие болған және ретімен орналасқан n және $n+1$ сандар бар. Мәселен, $n = 2, 3, 4, 7, 8, 16, 31, 127, 256$ үшін n және $n+1$ дар жоғарыда көрсетілген қасиетке ие.

Сондай қасиетке ие болған ретімен орналасқан натурал сандар жұптарынан тек 29 тасы белгілі, олардың ең үлкен жұптығы $2^{19937} - 1$ және 2^{19937}. Мұндай жұптар саны шексіз көп деген болжам да бар.

2) Әр біреуі екі әр түрлі жай сандардың көбейтіндісінен құралған және ретілікпен орналасқан үш натурал сан бар. Мәселен,

$$33 = 3 \cdot 11; \quad 34 = 2 \cdot 17; \quad 35 = 5 \cdot 7,$$
$$93 = 3 \cdot 31; \quad 94 = 2 \cdot 47; \quad 95 = 5 \cdot 19.$$

Мұндай үшеуліктер шексіз көп деген болжам бар.

3) $n > 7$ натурал саннан бастап ретімен орналасқан үш натурал санның кемінде біреуі еш болмағанда 2 әр түрлі жай бөлгіштерге ие. Мәселен, $n = 17$; $17, 18, 19$ дардан 18 саны 2 және 3 жай бөлгіштерге ие;
$n = 24$; 24, 25, 26-дан 24 және 26 лар екі әр түрлі жай бөлгіштерге ие.

4) $n, n+1, n+2$ сандар кейбір n дер үшін екі әр түрлі жай сандар көбейтіндісінен құралған.

Мысал. $n = 33, 93, 141$.

$n = 33$ үшін $33 = 3 \cdot 11$; $34 = 2 \cdot 17$; $35 = 5 \cdot 7$,
$n = 93$ үшін $93 = 3 \cdot 31$; $94 = 2 \cdot 47$; $95 = 5 \cdot 19$.
$n = 141$ үшін $141 = 3 \cdot 47$; $142 = 2 \cdot 71$; $143 = 11 \cdot 13$.

Сондай натурал n сандар шексіз көп деген болжам бар.

1.3 ФЕРМА САНДАРЫ

Ұлы француз математигі П.Ферма $F_n = 2^{2^n} + 1$ түріндегі сандармен айналысып, « F_n барлық уақыт кез-келген натурал n сан үшін жай санды береді» деген болжамды айтты. Сонымен

$n = 1$ болғанда $F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$ - жай сан,

$n = 2$ болғанда $F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$ - жай сан,

$n = 3$ болғанда $F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257$ - жай сан,

$n = 4$ болғанда $F_4 = 2^{2^4} + 1 = 655337$ - жай сан,

Ферма $n \geq 5$ болғанда тексермей барлық жағдай үшін де жай сан болады деген болатын.

$n=5$ болғанда $F_5 = 2^{2^5}+1$ он разрядтық сан болып, оны жай немесе құрама болатынын анықтау күрделі мәселе болатын. Ұзақ уақыт барысында бұл мәселе екінші дәрежелі болып келген болса да, тек 1732 жылда Л.Эйлер Ферма болжамының дұрыс емес болатынын, яғни $F_5 = 2^{2^5}+1$ тің 641 ге бөлінетінін дәлелдеді. Эйлер келтірген дәлел салыстыру назариясына негізделген.

Кейінрек Цейлон (Шри Ланка) математигі Канагасабапахти F_5 тің құрама болатынын қарапайым жолмен дәлелдеді:

$$\begin{aligned} 2^{2^5}+1 = 2^{32}+1 = 2^4\cdot 2^{28}+1 = 15\cdot 2^{28} + (3+5^3)2^{21}+1 = \\ = 15\cdot 2^{28}+3\cdot 2^{21}+5^3\cdot 2^{21}+1 = \\ = 3\cdot 2^{21}(5\cdot 2^7+1)+(5\cdot 2^7)^3+1^3 = \\ = 3\cdot 2^{21}(5\cdot 2^7+1)+(5\cdot 2^7+1)(5^2\cdot 2^{14}-5\cdot 2^7+1) = \\ = (5\cdot 2^7+1)[3\cdot 2^{21}+5^2\cdot 2^{14}-5\cdot 2^7+1] \end{aligned}$$

$5\cdot 2^7+1=641,$ сондықтан $2^{32}+1 = 4\,294\,967\,297$ саны 641 бөлінеді: $2^{32}+1 = 641\cdot 6700417$. 1867 жылда Лендри $n\le 64$ болғанда 2^n+1 және 2^n-1 түріндегі сандардың көбейткіштерге жіктелу кестесін беріп, онда $2^{32}+1$ -ң 641 бөлінетіні көрсетілген. Лендри үшін 2^n+1 түріндегі сандарды көбейткіштерге жіктеудің ең күрделі саны $2^{58}+1$ болып шықты. Бұл санның бөлгіші $d = 57\,646\,075\,230\,342\,349$ болатынын көрсетті. Алдымен Лендри d санын жай сан деп ойлаған болатын, кейінрек бұл санның құрама сан және оны екі тоғыз разрядтық сандардың көбейтіндісінен құралғанын көрсетті.

Бұл бағытта келесі теорема дәлелденген:

$n = 2^k+1$ дің жай сан болуы үшін $3^{\frac{n-1}{2}}+1$ дің n ге бөлінуі қажетт және жеткілікті.

Мысал. 1) $5 = 2^2+1$ - жай сан, сондықтан $3^{\frac{5-1}{2}}+1 = 3^2+1 = 10$ саны 5 ке бөлінеді.

2) $n = 2^3+1 = 9$ құрама сан, сондықтан $3^{\frac{9-1}{2}}+1 = 3^4+1 = 82$ саны 9 ға бөлінбейді. Францель төмендегідей жіктелуді көрсетті:

$$2^6+1 = (1^2+2^2)(2^2+3^2),$$
$$2^{10}+1 = (3^2+4^2)(5^2+4^2).$$

Ферма гипотезасы дұрыс емес екендігі дәлелденген соң төмендегідей екі мәселе қойылды:

1) Жай ферма сандар нешеу?

2) Құрама ферма сандар нешеу?

Жоғарыда $n = 1, 2, 3, 4$ болған жай ферма сандар пайда болғанын көрсеткен болатынбыз.

Қазіргі күнде $n > 4$ үшін ешқандай да жай ферма саны табылмаған және олардың жоқтығы дәлелденбеген. Бірақ $n = 5$ тен басқа тағыда құрама ферма сандары табылған. Оның $F_6 = 274177 \cdot 67280421310721$ болатыны көрсетілген. F_9 дың $37 \cdot 2^{16} + 1$ ге, F_{12} нің $7 \cdot 2^{14} + 1{,}397 \cdot 2^{16}+1$ және $7 \cdot 139 \cdot 2^{16} + 1$ лерге, F_{18} дің $13 \cdot 2^{20}+1$ ге, F_{23} тің $16772161 = 5 \cdot 2^{25}+1$ ге, F_{36}ның $5 \cdot 2^{39}+1$ ге, F_{38} дің $3 \cdot 2^{41}+1$ ге, F_{73} тің $5 \cdot 2^{75}+1$ ге бөлінетіндері дәлелдеген. F_{73} саны өте үлкен сан. Үлкен сандар туралы кейінрек қарастырамыз.

1952 жылға дейін $n = 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 18, 23, 36, 38, 73$ болғанда $F_n = 2^{2^n}+1$ түріндегі сандардың құрама болатыны дәлелденген болатын. (F_{12} және F_{13} сандарын И. М. Первушин тапқан).

1964 жылға келіп барлығы 37 құрама ферма сандар анықталды, олар $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 23, 36, 38, 39, 55, 58, 63, 73, 77,$ 81, 117, 125, 144, 150, 207, 226, 228, 250, 267, 268, 284, 316, 452, 1945 болғандағы F_n сандары.

$F_n = 2^{2^n}+1$ түріндегі құрама ферма сандарының шекті немесе шексіз болатыны белгілі болмаса-да, бірақ $2^{2^n} + k \ (k \neq 1)$ түріндегі құрама сандардың шексіз көп болатынын А.Шинцель дәлелдеген болатын.

Ферма сандарының біреуі де екі жай санның қосындысынан құралмағандығын дәлелдеуге болады: $F_n = 2^{2^n}+1$ – тақ сандар. Егер $F_n = p_1 + p_2$ жай сандардың қосындысынан құралған болса, онда $p_1 = 2$ және $p_2 = F_n - 2 = 2^{2^n} + 1 - 2 = 2^{2^n} - 1$ болуы қажет. Бірақ $2^{2^n} - 1 = \left(2^{2^{n-1}} - 1\right)\left(2^{2^{n-1}} + 1\right)$ болғаны үшін p_2 нің жай сан бола алмайтынын көрсетеді.

$F_{1945} = 2^{2^{1945}} + 1$ құрама ферма санында 10^{582} ден көп цифр болып, F_{1945} тің ең кіші жай бөлгіші болған $5 \cdot 2^{1947} + 1$ саны 587 цифрлы сан болатыны дәлелденген.

F_{10} ның бөлгіші 45592577 болатыны және F_{16} ның бөлгіші 825753601 болатынын анықталған.

F_{14} тің $65536 \cdot 2000+1 = 130072001$ ге дейін $p = k \cdot 2^{n+1} + 1$ түріндегі бөлгіші болмайтындығы дәлелдеген. F_{14} тің құрама сан екендігінен, оның жай бөлгіші 131 072 001 ден үлкен болатыны келіп шығады.

F_5 және F_6 лардың канондық жіктелуі табылған. F_7, F_8, F_{13}, F_{14} тердің құрама болатыны анықталған болса да, олардан бірде бір 1 және өзінен басқа бөлгіші табылмаған. F_{13} тің 2467 разрядтық сан екендігі белгілі. 1953 жылда

F_{16} ның жай бөлгіші $m = 2^{18} \cdot 3150 + 1$ болатыны табылды. F_{452} тің 10^{135} тен артық разрядты сан болатыны және $27 \cdot 2^{455} + 1$ оның бөлгіштерінен біреуі болып, ол 139 разрядты сан болатыны анықталған.

Сонымен, қазіргі уақытқа дейін ең үлкен ферма саны F_{1945} болды. Жоғарыда келтірілген сандардың құрама болатынын математиканың түрлі әдістерімен, кейбіреулерін болса жоғары математика әдістерімен анықтаған.

1945 жылға дейін $n =$17, 19, 20, 21, 22, 24, ... болғанда (жоғарыда қарастырылғаннан бөлек) ферма сандарынан қай біреуі жай немесе құрама болатыны белгісіз болатын. F_{17} нің 30 000 артық цифрлы сан болатыны белгілі. Бірақ оның қандай ферма саны болатыны бүгінгі күндегі күшті электрон есептеуіш машинасы көмегінде де анықтай алмай жатыр. Осы жерде мынаны айтып өткеніміз жөн, жай ферма сандарының геометрияға үлкен қатысы бар және өту маңызды. Мұны алғаш рет ұлы неміс математигі К.Гаусс көрсетті.

Шеңберді циркуль және сызғыш көмегінде m тең бөліктерге бөлу үшін $m = 2^k$, $k \geq 1$ - натурал сан немесе $m = 2^k\, F_n$, $k \geq 0$ – бүтін сан, F_n болса жай ферма саны болуы қажетті және жеткілікті (бізге белгілі болғандай $n = 0, 1, 2, 3, 4$ болғанда жай ферма саны пайда болады).

$m \leq 20$ болғанда, шеңберді циркуль және сызғыш көмегімен 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20 болған тең бөліктерге бөлу мүмкін. $m = 2^k \cdot F_2$ сан $k = 0$ болғанда $m = F_n$ жай ферма саны пайда болады.

Біз қазірге дейін тек 5, 17, 257, 65537 жай ферма сандарын білеміз. Демек, шеңберді циркуль және сызғыш көмегінде жай ферма сандары көп тең бөліктерге бөлу мүмкін. Шеңберді циркуль және сызғыш көмегімен 5 және 17 тең бөліктерге бөлу оңай болса да, 257 және 65537 бөлу өте күрделі.

Тұрақты 17 бұрышты циркуль және сызғыш көмегінде жасау тәсілін Ф.Гаусс берген. 1832 жылда Ришало тұрақты 257 бұрышты көпбұрышты жасау тәсілін көрсетті. Кейінрек Майвольд тұрақты 514 бұрышты көпбұрыш жасаудың оңай әдісін көрсетті.

Бір профессор өзінің аспирантына: « Бар, тез 65537$= 2^{16} + 1$ жақты тұрақты көпбұрыш жасау әдісін жасап кел» - деп айтуға мәжбүр болған еді. Бұл аспирант 20 жыл жоғалып кетіп, соңында айтылған мәселенің шешіп келеді. Ол Ришалоның шәкірті Гермас болатын. Оның бұл қолжазбасы қазіргі уақытта Гёттингендегі математика институтының кітапханасында сақтаулы.

Бұл туралы келесі теоремада бар:

Егер циркуль және сызғыш көмегінде шеңберді $\boldsymbol{\alpha}$ және $\boldsymbol{\beta}$ ға тең бірдей бөліктерге бөлу мүмкін болып, $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{1}$ болса, онда сол шеңберді $\boldsymbol{m = \alpha \cdot \beta}$ ге тең бірдей бөліктерге бөлуге болады.

Оның үшін арифметикадан белгілі болған келесі қасиетті пайдалану жеткілікті: $(\alpha, \beta) = 1$ болғаны үшін сондай k және l бүтін сандар табылып, олар үшін $\alpha \cdot k + \beta \cdot l = 1$ болады. Бұл теңдеудің екі жағында $m = \alpha \cdot \beta$ ге бөлсек, $\frac{1}{m} = \frac{k}{\beta} + \frac{l}{\alpha}$ аламыз. Демек, шеңбердің $\frac{1}{m}$ бөлігін алу үшін оның $\frac{1}{\beta}$ және $\frac{1}{\alpha}$ бөліктерін (шартқа негізделіп мұндай бөліктер құрастыру мүмкін) жасау жеткілікті.

Мысалдар:

1) Айталық шеңберді $m = 15$ тең бөлікке бөлу талап етілсін.

$$m = 15 = 3 \cdot 5; \ (3, 5) = 1; \ (-3) \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 1,$$

немесе $\frac{1}{15} = \frac{2}{3} - \frac{3}{5}$. Демек, шеңбердің $\frac{1}{15}$ бөлігін алу үшін оның $\frac{1}{3}$ бөлігінің екеуленгенінен $\frac{1}{5}$ бөлігінің үшеуленгенін азайту жеткілікті.

2) Айталық шеңберді $m = 170$ тең бөлікке бөлу талап етілсін.

$$170 = 17 \cdot 10; \ (17, 10) = 1; \ 3 \cdot 17 - 5 \cdot 10 = 1$$

немесе

$$\frac{1}{170} = \frac{3}{10} - \frac{5}{17}.$$

Демек, шеңбердің $\frac{1}{10}$ бөлігінің үшеуленгенінен оның $\frac{1}{17}$ бөлігінің бесеуленгенің азайту жеткілікті. Жай ферма сандарының қалғандарын анықтау жолында алып барылған есептеулер нәтижесінде жаңа мәселелер туындады.

Бұл мәселелердің кейбіреулерін қарастырайық.

1) 2+1, $2^2 + 1$, $2^{2^2} + 1$, ... тізбектің барлық мүшелері жай сандардан құралған, деген болжам айтылды. Бұл болжамнында көп уақыт шешімі табылмай, тек 1953 жылда электрон есептеуіш машинасы көмегінде бұл тізбектің бесінші мүшесі $2^{2^{2^{2^2}}} + 1 = F_{16}$ ның құрама ферма саны болатынын және ол 19729 разрядты сан болып, $2^{18} \cdot 3150 + 1$ оның бөлгіші болатыны анықталған.

Сонымен, F_{16} ның 19729 разрядтық сан болатынын мынадай тәсілмен оңай дәлелдеуге болады:

$2^{16} = 65536 lg 2^{2^{16}} = 65536 lg 2$; мынадай теңсіздік бізге белгілі, $0{,}301029 < lg 2 < 0{,}301031.$

Бұл теңсіздіктің әр екі жағын 65536 санға көбейтіп,

$$19728{,}236 < lg 2^{2^{36}} < 19728{,}368$$

аламыз. Демек, $2^{2^{16}} + 1 = 2^{2^{2^{2^2}}} + 1$ саны 19729 разрядты болатыны дәлелденді.

$2^{2^{36}}+1$ санының соңғы цифры 7 болатынын көрсету оңай. Жалпы алғанда, $n\geq 2$ болғанда F_n ферма санының соңғы цифры 7 болатынын дәлелдеу мүмкін.

2) n^n+1 түріндегі сандар n нің кейбір натурал мәндерінде жай сандарды өрнектейді.

Мәселен, $n=1,2,4$ болғанда $1^1+1=2;\ 2^2+1=5;\ \ 4^4+1=257$ жай сандар болады. Осылардан басқа n^n+1 түріндегі өрнек тағы жай сандарды береді ма, деген сұрақ орынды. Бұл сұраққа қазірге дейін нақты жауап табылмаған. Егер 2, 5, 257 сандардан басқа n^n+1 түріндегі жай сан бар болса, оның 300 000 нан артық цифрлы болу қажеттігі дәлелденген.

Егер $n>4$ үшін n^n+1 түріндегі жай сандар бар болмаса, онда F_{20}, F_{37}, F_{70}, F_{135} , F_{264}, F_{521} және F_{1034} ферма сандары құрама болатыны келіп шығады.

3) $n^{n^n}+1$ түріндегі сандарды қарастырайық:
$1^{1^1}+1=2;\ 2^{2^2}+1=17$ жай сандар. 2 және 17 ден басқа $n^{n^n}+1$ түріндегі жай сандар бар ма? 2 және 17 ден басқа $n^{n^n}+1$ түріндегі ешқандай жай сан табылмаған. Бірақ, егер $n^{n^n}+1>17$ түріндегі жай сан бар болса, ол санның цифрлар саны миллиардтан артық болу қажеттігі дәлелденген. Демек, 10^{18} ге дейін болған натурал сандар ішінде $n^{n^n}+1$ түріндегі жай сандар тек 2 және 17 болады.

4) Бізге белгілі болғандай, 2^n+1 түріндегі жай сан жай ферма саны болады. 2^n+1 түріндегі жай сандардан тек бесеуін, яғни $n=$1, 2, 4, 8, 16 болғанда пайда болатын 3, 5, 17, 2^8+1, $2^{16}+1$ лерді білеміз.

$2\cdot 2^n+1$ түріндегі жай сандардың тек 4 еуін білеміз. Олар $n=$1, 3, 7, 15 болғанда пайда болатын сандар; $3\cdot 2^n+1$ түріндегі жай сандардың 19 ы белгілі. Олар
n= $1,2,5,6,8,12,18,30,36,41,66,189,201,209,279,353,408,438,534$
болғанда пайда болады; $4\cdot 2^n+1$ түріндегі жай сандардың 3 еуі белгілі, олар $n=$2, 6, 14 болғанда пайда болатын 17, 257 және 65537 сандары.

$5\cdot 2^n+1$ түріндегі жай сандардың әзірге дейін тек 12 сі белгілі, олар $n=1,3,7,13,15,25,39,55,77,85,127,1947$ болғанда пайда болады. Жалпы алғанда , кез-келген $n\leq 100$ үшін ($k=47$ және $k=94$ терден басқа) кемінде бір натурал k сан табылып, ол үшін $k\cdot 2^n+1$ түріндегі санның жай болатыны дәлелденген. Сонымен қатар, $k\cdot 2^n+1$ түріндегі сандар k ның шексіз көп мәндері үшін құрама болатыны дәлелденген.

Жалпы алғанда $k\cdot 2^n+1$ түріндегі сандарды Каллин сандары деп атайды, $k=n$ болғанда $n>1$ үшін барлық $n\cdot 2^n+1$ түріндегі Каллин сандары құрама деген болжам бар.

Математик Канингем $1 < \mathrm{n} < 141$ дер үшін Каллин сандарының ең кіші жай бөлгішін тапқан. $n \cdot 2^n + 1$ - Каллин сандарынан 14 інің канондық жіктелуі бар.

5) Енді $2^m + 2^n + 1$ түріндегі жай сандарды қарастырамыз:

$m > n$ болғанда

$$2^2 + 2 + 1 = 7,$$
$$2^3 + 2 + 1 = 11,$$
$$2^3 + 2^2 + 1 = 13,$$
$$2^4 + 2 + 1 = 19$$

жай сандар пайда болады.

Мұндай түрдегі жай сандар жиыны қандай болатыны белгісіз. Бірақ,

$$2^{2n} + 2^{n+1} + 1 = (2^n + 1)^2$$

өрнегінен $2^m + 2^n + 1$ түріндегі құрама сандардың шексіз көп болатыны көрініп тұр.

6) $2^n + 3$ түріндегі жай сандарды қарастырамыз. $n < 24$ болғанда $2^n + 3$ түріндегі сандар $n = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 15, 16, 18$ болғанда жай сандардың өрнектелуін математик А.Рихтер көрсеткен.

Эрдеш шексіз көп тақ k үшін $2^n + k$ түріндегі сандардың құрама болатыны дәлелденген.

$k = 0, 1, 2, 3, \dots$ болғанда $2^{2^{2(3k+1)}} + 3$ тің 19 ға бөлінгендіктен $2^{2^{2n}} + 3$ түріндегі шексіз көп құрама сандар бар болатыны келіп шығады.

$k = 0, 1, 2, 3, \dots$ болғанда $2^{2^{2k+1}} + 3$ саны барлық уақыт 7-ге бөлінеді.

$2^{2^{2k}}$-3 саны барлық уақыт 13 ке бөлінеді (k- натурал сан), сондықтан $2^{2^{2^2}} - 3$, $2^{2^{2^{2^2}}} - 3, \dots$ түріндегі сандар құрама болатыны келіп шығады. $2 + 3, 2^2 + 3, 2^{2^2} + 3, 2^{2^{2^2}} + 3 \dots$ түріндегі сандар ішінде жай сандардың нешеуі болатыны белгісіз. Бірақ $2^{2^2} + 5, 2^{2^{2^2}} + 5, \dots$ түріндегі сандардың барлығы құрама болатынын дәлелдеу оңай: $2^{2^k} = (3+1)^k$ өрнектен 2^{2^k} санын 3 ке бөлгенде қалдық 1 пайда болады, демек $2^{2^k} = 3t + 1$ болады. Сондықтан $2^{2^{2k}} + 5 = 2^{3t+1} + 5 = (7+1)^t \cdot 2 + 5$ өрнек кез-келген t үшін 7-ге бөлінеді.

7) $2^{n_1} + 2^{n_2} + 2^{n_3} + \cdots + 2^{n_k} + 1$түріндегі сандар k ның қандай мәнінде жай сан болатыны белгісіз.

8) $2^n + n^2$ түріндегі жай сандардың қанша болатыны белгісіз. Мұндай түрдегі сандардан тек 4 жай сан белгілі:

$$3 = 2^1 + 1^2; \qquad 593 = 2^9 + 9^2;$$
$$17 = 2^3 + 3^2; \qquad 32993 = 2^{15} + 15^2.$$

Математик А.Минковский көрсеткендей $4^n + n^4$ түріндегі сандар $n = 1$ болғанда ғана жай сан 5 ті береді, себебі $n > 1$ болғанда n-ң тақ мәндерінде $4^n + n^4$ түріндегі өрнек жай санды беруі мүмкін. $n = 2k + 1$ болсын. Бұл жағдайда

$$4^n + n^4 = 4(2^k)^4 + n^4 = (2 \cdot 2^{2k} - 2^{k+1} \cdot n + n^2)(2 \cdot 2^{2k} - 2^{k+1} \cdot n + n^2).$$

Демек, $n > 1$болғанда $4^n + n^4$ құрама сан болады.

9) a ның $2 \leq a \leq 2^{27}$ теңсіздікті қанағаттандыратын натурал мәндері үшін n-ң $n \leq 15$ болған кемінде бір натурал мән бар болып, оның үшін $a^{2^n} + 1$ саны құрама болады. Мұны А.Шинцель дәлелдеген.

Егер a санның кез-келген мәні үшін кемінде бір натурал n саны бар болса, $a^{2^n} + 1$ түріндегі өрнек құрама санды береді, деген болжам дәлелденген болса, онда F_n құрама ферма сандары шексіз көп болатыны келіп шығатын еді. Себебі, бұл жағдайда $a = 2^{2^k}$ деп қабылданудың өзі жеткілікті. ($\boldsymbol{a = 2^{2^{1945}}}$ үшін жоғарыдағы болжам дәлелденбеген).

$2^{2^n} + 1$ түріндегі сандардың шексіз көп a үшін құрама сан болатыны анық, себебі бұл жағдайда $a = b^m$ (b - натурал сан, m - тақ сан) болып, мұнда $(b^m)^{2^n} + 1 = \left(b^{2^n}\right)^m + 1$ өрнек көбейтінділерге жіктеледі. $A_n = a^{2^n} + 1$ түріндегі сан болсын. ($a \neq 2^n$ -жұп сан, n -натурал сан). a және n-ң белгілі мәндерінде, оларға сәйкес болған A_n сандары $F_m = 2^{2^m} + 1$ түріндегі жай сандарға бөлінеді. Сондай қасиетке ие A_n сандардың 85 сі табылған. $1 < n \leq 15$; $6 \leq a \leq 98$ болғанда F_2, F_3, F_4 жай ферма сандарына бөлінетін A_n сандарының 119 тасының кестесі бар. Егер жай ферма сандарының саны шексіз көп болатыны дәлелденсе, онда $2^m \cdot 3^n + 1$ түріндегі жай сандар да шексіз көп болатынын дәлелдеуге болады.

Математик Т.Куликовский мұндай түрдегі жай сандардың көбісін анықтаған. Белгілі жай сандардың ең үлкені 162 таңбалы $3 \cdot 2^{534} + 1$ сан болатынын анықтаған.

1.4 Пифагор сандары

Бұрынғы дәуірдің ұлы математиктерінен бірі Пифагор. Ол өз шәкірттерімен үйірмеде сабақтар ұйымдастыратын. Бұл үйірме «Пифагор мектебі» деп аталған. Оның тік бұрышты үшбұрыш үшін қолданылатын теоремасы барлығымызға белгілі:

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad (1)$$

Бұл теңдеуді қанағаттандыратын (a, b, c) сандарға Пифагор сандары деп аталады. Олар (a, b, c) натурал сандардан құралған болып, біз төменде сондай сандарды қарастыратын боламыз және $a < b < c$ деп қабылдаймыз.

Егер a, b, c (1) теңдеуді қанағаттандырса, $ka,\ kb, kc$ да (k-кез-келген натурал сан) (1) ді қанағаттандырады.

Мысалы, (3, 4, 5), (6, 8, 10), (15, 20, 25) сандар Пифагор сандары. Сонымен, (a, b, c) Пифагор сандарынан тағы да шексіз көп Пифагор сандарын алуға болады.

Біз (a, b, c) Пифагор сандарын өзара жай сандар деп қабылдаймыз, себебі, егер олар өзара жай болмаса да, қысқарту арқылы өзара жай сандарға келтіруге болады. Сол себепті өзара жай (a, b, c) Пифагор сандарына негізгі Пифагор сандары деп аталады.

Мысыр пирамидаларының тарихы барлығымызға белгілі. Археологтар Мысырдағы Хефрон пирамидалары жанындағы қазбаларынан бірінде қабырғалары (3, 4, 5) болған гранит үшбұрышты плиталар тапқан. Бұлардың барлығы тарихий маңызға ие.

Пифагор мектебінде негізі Пифагор сандарын табу, жалпы формулаларды құрастыру барысында көптеген жұмыстар орындалған. Келесі жолмен, көптеген негізгі Пифагор сандарының пайда болатыны айтылған:

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, \ldots \qquad (2)$$

Тізбекпен квадраттарын алып, олардан жанында тұрғандардың айырмасын аламыз:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, \ldots \qquad (3)$$

немесе жалпы

$$(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1 \qquad (4)$$

тақ сандар тізбегін аламыз.

(3) тізбекте квадраттан құралған тақ сандар да бар: 9, 25, 81, 121, ... Мұндай квадраттар барлығы $2n + 1$ түрінде болып, олар $n = 4, 12, 24, 40, 60, \ldots$

болғанда (4) пайда болады. Сонымен, $(n+1)^2 = n^2 + (2n+1)$ өрнектен $n = 4, 12, 24, 40, 60, \ldots$ болғанда негізгі Пифагор сандары пайда болады:

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$
$$13^2 = 12^2 + 5^2$$
$$25^2 = 24^2 + 7^2$$
$$41^2 = 40^2 + 9^2$$
$$61^2 = 60^2 + 9^2$$

және т.с.с.

$(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$ Пифагор сандары б.з.б. YI-Y ғасырларда белгілі болған. Сонымен, (4) тен шексіз көп Пифагор сандарын алуға болады.

Барлық негізгі Пифагор $(a, b, c\ )$ сандарын (4) тен алуға бола ма деген сұрақ туындайды. Бұл сұраққа жауап беріп көрейік. Жоғарыда келтірілген (2), (3) тізбектегі сандарды басқа жолмен құрастырамыз:

0 1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 ...

4 8 12 16 20 24 28 32 36 (5)

(5) те төртке еселі болған жұп сандар пайда болды, олар арасында өзі квадрат болған 16, 36, 64, ... жұп сандар да бар. Бұл сандар Пифагор сандары алаңына келтіреді. Мәселен, 16 ға (3, 4, 5), 36 ға (6, 8, 10) Пифагор сандары сәйкес болып, олардан екіншісі (6, 8, 10) негізгі Пифагор сандары емес, кейінгі негізгі Пифагор сандары (8, 15, 17) 64 айырмашылықтан пайда болады. (8, 15, 17) Пифагор сандарын алдында көрсетілген әдіспен алуға болмайды. Бірақ бұл әдіспен де барлық Пифагор сандарын алуға болмайды.

Пифагор өмір сүрген кезде жақтары натурал сандардан құралған үшбұрыштарды $(2n+1)^2 + (2n^2+2n)^2 = (2n^2+2n+1)^2$ өрнек көмегінде анықтау заңы белгілі болған. Бұл өрнек көмегінде өте көп Пифагор сандарын алуға болады:

n	I катет $2n+1$	II катет $2n(n+1)$	Гипотенуза $2n^2+2n+1$
1	3	4	5
2	5	12	13
3	7	24	25
4	9	40	41
5	11	60	61

Бұл кестеден екінші катет және гипотенуза ретімен орналасқан натурал сандардан құралған болып, олардың қосындысы болса толық квадрат болуы анық көрініп тұр. Сондықтан, егер натурал сандар қатарында ретімен орналасқан екі натурал санның қосындысы толық квадрат болған жағдай кездессе, олар Пифагор сандарын құрайды.

Мәселен,

$$1, 2, 3, \underbrace{4, 5}_{3^2}, \dots, \underbrace{12,\ 13}_{5^2}, \dots, \underbrace{24,\ 25}_{7^2}, \dots, \underbrace{40,\ 41}_{9^2}, \dots, \underbrace{60,\ 61}_{11^2}, \dots, \underbrace{84,\ 85}_{13^2}, \dots$$

$$(m^2+n^2)^2 = (m^2-n^2)^2 + (2mn)^2 \qquad \textbf{(7)}$$

теңдік көмегінде де шексіз көп Пифагор сандар алынуы дәлелденген.

(7) теңдікте

$$a = \frac{m^2-n^2}{2}, \quad b = mn, \ c = \frac{m^2+n^2}{2} \qquad \textbf{(*)}$$

деп алуға болады.

(7) теңдікте (*) ға қарағанда жалпы болатынын және оның көмегінде барлық негізгі Пифагор сандары пайда болатынын көрсетуге болады. Ол үшін:

1) m және n әр түрлі жұптықта;

2) $(m,n) = 1$, яғни m және n өзара жай ;

3) $m > n$ болуы керек.

Жоғарыда айтылғандарды ескеріп, келесі Пифагор сандарын аламыз, яғни m және n сандарына жоғарыда айтылған талаптарға жауап беретін әр түрлі мәндер беріп, түрлі Пифагор сандарын аламыз.

m	n	a	b	c
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	3	7	24	25
4	1	8	15	17
5	4	9	40	41
6	5	11	60	61
6	1	35	12	37
7	2	45	28	53
8	7	15	112	113
9	8	17	144	145
9	2	77	36	85

Жоғарыда келтірілген кестеден төмендегілерді анықтауға болады.

Екі элементі ретімен орналасқан Пифагор сандары бар: (9, 40, 41), (17, 144, 145). Мұндай қасиетке ие болған Пифагор сандарының шексіз көп болатынын дәлелдеуге болады. Сондай сандардың көбін математик Месспер көрсетті. Оларды келесі теңдікке негіздеп анықтауға болады.

$$(10n-5)^2 + [50n(n-1)+12]^2 = [50n(n-1)+13]^2.$$

Мәселен, $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 10$ болғанда (5, 12, 13), (15, 112, 113), (25, 312, 313), (35, 612, 613), (45, 1012, 1013), (55, 1512, 1513), (65, 2112, 2113), (75, 2812, 2813), (85, 3612, 3613), (95, 4512, 4513) Пифагор сандары пайда болады.

Келесідегідей Пифагор сандары да бар:

(21, 220, 221),

(201, 20200, 20201),

(2001, 2002000, 2002001),

(20001, 200020000, 200020001),

(41, 840, 841), (4001, 8004000, 8004001),

(401, 80400, 80401), (40001, 8000 40000, 800040001)

(олардың құрылымына мән беріңіз). Үш санның біреуі квадратты сан болған Пифагор сандары да бар. Мәселен, (3, 2^2, 5), (7, 24, 5^2), ... Мұндай Пифагор сандарының да шексіз көп болатынын дәлелдеуге болады. Пифагор сандарын құрастырушы (a, b, c) екеуі квадрат бола алмайтынын Ферма дәлелдеген. a және b катеттер айырымы берілген натурал q санына тең болған негізгі Пифагор үшбұрыштарының біреуі белгілі болса, олардың шексіз көптігін келесі жолмен анықтау мүмкін:

$$a - b = q; mn = b, \quad \frac{m^2 - n^2}{2} = a, \frac{m^2 + n^2}{2} = c.$$

Бұл теңдіктерден m және n дерді анықтап,

$$U_1, U_2, U_3, \dots, U_{m-1}, U_m, U_{m+1} \cdots \quad ,$$

(U) тізбекті құрастырамыз:

$$U_1 = n,\ U_2 = m,$$
$$U_{e+1} = 2U_e + U_{e-1}, e \geq 2.$$

(U) тізбектің кез-келген екі көрші мүшелерінің көбейтіндісі b ны, квадраттар айырмасының жартысы a ны, квадраттар қосындысының жартысы c ны береді.

Мысалдар.

1) $a - b = 7$ болған негізгі Пифагор сандары табылсын. (12, 5, 13) Пифагор сандары үшін $a - b = 7$,

$$\left.\begin{array}{l} a = 12, \quad m \cdot n = 5, \\ b = 5,\ \frac{m^2+n^2}{2} = 13 \end{array}\right\}$$ жүйеден $n = 1, m = 5$ терді табамыз.

Сонымен, $U_1 = 1,\ U_2 = 5$ және $U_{e+1} = 2U_e + U_{e-1}$ лардан пайдаланып , 1, 5, 11, 27, 65, 157, 379, ... тізбекті аламыз және одан жоғарыда айтылған жолмен

(5, 12, 13), (55, 48, 73), (297, 304, 425), (1755, 1748, 2477), (10205, 10212, 14437), (59503, 59496, 84145) ...

Болған негізгі Пифагор сандарын аламыз. Егер негізгі Пифагор сандары ретінде (8, 15, 17) алынса, жоғарыда айтылған жолмен 3, 5, 13, 31, 75, 181, 437, ... тізбекті құрастырып, одан (15, 8, 17), (65, 72, 97), (403, 396, 565), (2325, 2332, 3293), (13575, 13568, 19193), (79097, 79104, 111865), ... Пифагор сандарын аламыз.

2) Катеттері бірінен кейін бірі келетін натурал сандардан құралған шексіз көп Пифагор үшбұрыштары жасалынсын. Бұл жағдайда $a-b=q=1$. Негізгі Пифагор үшбұрышы ретінде (3, 4, 5) ті алуға болады. $n=1, m=3$ терді тауып, 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, 577, 1393, ... тізбекті құрап, одан

(3, 4, 5), (21, 20, 29), (119, 120, 169), (697, 696, 985), ...

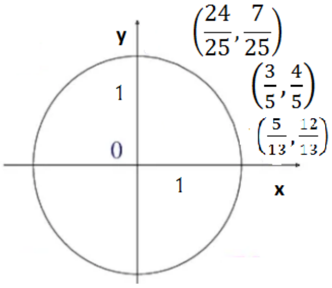
Пифагор сандарын аламыз.

Ферма төмендегі мәселені қойған болатын: сондай (a, b, c) Пифагор сандары табылып, олар үшін $a+b$ және c толық квадраттан құралған болсын. Мұндай Пифагор сандарының шексіздігі дәлелденген. Сонысы ғажап, олар үшін (a, b, c) сандар өте үлкен сандар. Мұндай үшеуліктердің ең кішісі $a = 4565486027761,\ b = 1061652293520,\ c = 4\,687\,298610289$ болып, $a+b = 2372151^2;\ c = 2165017^2$ болады.

Сонымен, $a+b = 2372151^2;\ c^2 = a^2+b^2 = 2165017^4$. Пифагор санын құрастыратын $a,\ b$ және c лардың біреуі 5 ке бөлінетінін дәлелдеуге болады.

Енді арифметикалық прогрессияны құрастырушы Пифагор сандарының шексіз көп болатынын дәлелдейміз: $b-r,\ b,\ b+r$ Пифагор сандары болсын және бұл үш сан айырмасы r болған үш мүшелі прогрессия құрастырсын. Сонымен қатар, $(b-r)^2+b^2=(b+r)^2$, мұнда $b=4r$. Мәселен, (32, 42, 52) Пифагор сандарын құрайды. $r=$1, 2, 3, ... болғанда мұндай Пифагор сандарының шексіздігін көрсету мүмкін. $r=$1 болғанда ғана негізгі Пифагор сандары пайда болады.

$a^2+b^2=c^2$ теңдеудің натурал шешімдерін табу үшін оны $\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$ түрінде жазып, $(a,c)=1$ және $(b,c)=1$ екендігін ескеріп, $a_1^2+b_1^2=1$ теңдеудің рационал шешімдерін табу мәселесіне өтіледі. Өз кезегінде бұл мәселе, шеңбер үстіндегі рационал нүктелерді табуға айналады. Мұндай нүктелердің кейбірін көрсетумен шектелеміз. (4-сурет).



4-сурет

Мысал.

$$\left(\frac{5}{13}\right)^3+\left(\frac{12}{13}\right)^2=1,$$

$$5^2 + 12^2 = 13^2.$$

$(5,12,13) -$ Пифагор сандары.

Гипотенузасы берілген c ға тең болған Пифагор үшбұрышы бар.

Мәселен, c=12 болғанда (a, b, c) Пифагор сандарын табу талап етілсін, яғни $144 = 12^2 = a^2 + \mathrm{b}^2$ болсын. b^2тың мәні $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121$ лерге тең болуы қажет. Мұнда $\mathrm{b}^2 = 121$ болса, $144 = 121 + a^2, a^2 = 23$ болып, a натурал сан болмайды. $a < b$ болатынын ескере отырып, жоғарыдағы квадраттардың барлығын тексерудің қажеті жоқ.

$144 = a^2 + \mathrm{b}^2 \leq 2\mathrm{b}^2$, демек, $\mathrm{b}^2 \geq 72$, яғни b^2 үшін жоғарыда келтірілген квадраттардың 72 ден үлкенін тексеру жеткілікті.

$144 - 100 = 43$ - квадрат болмайды,

$144 - 81 = 63$ - квадрат болмайды.

Сонымен, гипотенузасы 12 ге тең болған және катеттері натурал сандардан құралған үшбұрыш табылмады. Егер $\mathrm{c} = 13$ деп алынса, жоғарыда келтірілген жолмен $a = 5, \mathrm{b} = 12$ табуға болады. Жалпы, $\mathrm{c} \leq 100$ үшін, яғни c =5, 10, 13, 15, 17, 20, 25, 29, 30, 34, 35, 37, 39, 40, 41, 45, 50, 51, 52, 53, 55, 58, 60, 61, 65, 68, 70, 73, 74, 75, 78, 80, 82, 85, 87, 90, 91, 95, 97, 100 болғанда катеттері натурал сандардан құралған үшбұрыш табылады.

1949 жылда математик Шельд $\mathrm{c} = 2576450045 = 5 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 53$ ге тең болған және аудандары тең болмаған Пифагор үшбұрыштарының 64 ін көрсеткен еді. 5, 13, 29, 37, 41, 53 тердің барлығы $4\mathrm{k} + 1$ түріндегі жай сан. $a + b + c$ қосындысы бірдей болған (a, b, c) – Пифагор сандары да бар (бұл қосындыны Пифагор сандарының периметрі деп аталады).

Мәселен,

(3255, 5032, 5993),

(7055, 168, 7057),

(119, 7080, 7081)

үшін олардың периметрі 14280 ге тең.

Ауданы және периметрі сан жағынан тең болған Пифагор сандарының тек екеуі бар:

$$1)\ a = 6, \quad b = 8, \quad c = 10, \ S = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24, \quad p = 6 + 8 + 10 = 24;$$

$$2)\ b = 12, \quad a = 5, \quad c = 13, \quad S = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30, \ p = 5 + 12 + 13 = 30$$

Периметрлері натурал сандардың квадратына тең болған негізгі Пифагор сандары да бар. Бұлардан ең кіші периметрге ие болғаны (16, 63, 65) болып, 16+63+65$= 144 = 12^2$ тең. (252, 275, 373) үшін периметрі $900 = 30^2$ тең. Периметрлері куб, төртінші, бесінші және жалпы натурал санның n -

дәрежесінен құралған Пифагор сандары да бар. (57967, 44544, 73105) үшін периметрі $p = 175616 = (2^3 \cdot 7)^3$ ке тең.

Ферманың дәлелі бойынша ауданы натурал санның квадратына тең болған Пифагор сандары да бар.

Екі элементі жай сандардан құралған Пифагор сандары бар: (3, 4, 5), (5, 12, 13), (11, 60, 61), (19, 180, 181), (61, 1860, 1861). Мұндай Пифагор сандары шексіз көп деген болжамда бар. Негізгі Пифагор сандары үшін $\frac{a \cdot b}{2}$ сан Пифагор сандарының ауданы деп аталады.

Жалпы ауданға ие болған Пифагор сандарының ең кішісі (20, 21, 29) және (12, 35, 37) болады. Олардың ауданы 210 кв. бірлікке тең. Кез-келген натурал n сан үшін жалпы ауданға ие болған n тә Пифагор санының болатынын Ферма дәлелдеген.

Мәселен, 1) (518, 1320, 1418), (280, 2442, 2458), (231, 2960, 2969) және (111, 6160, 6161) Пифагор сандары болып, олар 341880 ге тең болған жалпы ауданға ие.
2) (2508, 52416, 52491), (3168, 46410, 46518), (5236, 14040, 28564), (6006, 24480, 25206) және (8580, 17136, 19164) тер Пифагор сандары болып, олар 73513440 қа тең болған жалпы ауданға ие.

Әдетте $a + bi$ түріндегі комплекс сандар a және b бүтін рационал сандар болғанда Гаусс бүтін сандары деп аталады. Гаусс бүтін сандары Пифагор сандарын пайда болуының негізгі көзі. $a + bi$ - Гаусс бүтін санының квадраты тағыда $x + iy$ түріндегң Гаусс бүтін санын береді:

$$(a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi; \ \ x = a^2 - b^2, \qquad y = 2ab.$$

$x, \ y, \ z = a^2 + b^2$ сандары Пифагор сандарын құрайды.

Мысалдар. 1) $(3 + 2i)^2 = 5 + 12i; \quad x = 5, \ y = 12, \ z = 9 + 4 = 13;$
(5, 12, 13) – Пифагор сандары.

$$2)(4 - 1i)^2 = 15 - 8i; x = 15; \ |y| = 8, z = 16 + 1 = 17,$$

(15, 8, 17) -Пифагор сандары.

Гаусс комплекс саны z –ің кубы $x^2 + y^2 = z^3$ теңдеудің бүтін шешімін табуға алып келеді.

Мысал. $(2 + i)^3 = 2 + 11i; \ \ z = a^2 + b^2 = 2^2 + 1^2 = 5$; осыдан
$5^3 = 2^2 + 11^2; \ x = 2, \ y = 11, \ z = 5$ бүтін шешімдері болады.

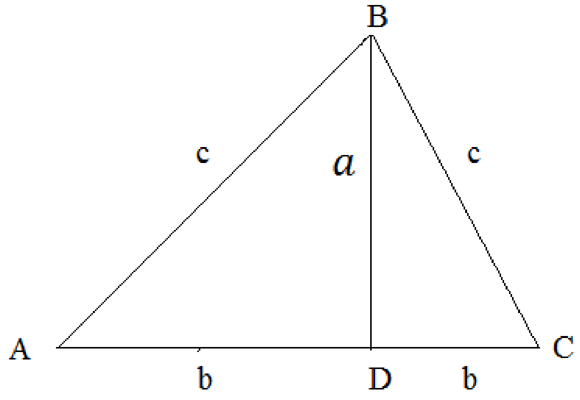
Бұл мысалда $\left(5\sqrt{5}\right)^2 = 2^2 + 11^2$, сондықтан (2, 11, $5\sqrt{5}$) Пифагор сандарын береді. Тура сол жолмен $x^2 + y^2 = z^4$ және жалпы $x^2 + y^2 = z^n$ теңдеулердің бүтін жалпы шешімі табылады.

Мысал. $z^4 = x^2 + y^2$ теңдеудің бүтін түбірлерін анықтаңыз.

$z = 2 - i$ Гаусс бүтін санын аламыз:

$z^4 = (2 - i)^4 = -7 - 24i;$
$x = |-7| = 7;$
$y = |-24| = 24;$ $|z| = a^2 + b^2 = 5,$
демек, $5^4 = 7^2 + 24^2$ немесе (7, 24, 25) Пифагор бүтін сандары болады.

Екі Пифагор үшбұрышын тең катеттері мен біріктіріп, үшбұрыш алынса, онда бұл үшбұрыштың барлық қабырғалары және ауданы натурал сандардан құралған болады. Мұндай үшбұрыш Герон үшбұрышы деп аталады (5-сурет).



5-сурет

ΔABC -ң қабырғалары $c, c_1, (b + b_1)$ натурал сандардан құралған. $S_{ABC} = \frac{1}{2}a(b + b_1)$ да натурал сан, себебі Пифагор үшбұрыштарынан катеттерінің біреуі жұп сан. Сондықтан, егер a тақ болса, b және b_1 жұп сан болып, $\frac{b+b_1}{2}$ натурал сан болады.

Мысал. (9, 12, 15), (5, 12, 13) Пифагор үшбұрыштарының екінші катеттері бірдей. Бұл катеттер бойынша үшбұрыштар біріктірілсе, қабырғалары (13, 14, 15) және ауданы 84 кв. бірлікке тең болған Герон үшбұрышы пайда болады.

Сол секілді , [(51, 75, 84), (36, 51, 75)], [(68, 75, 77), (13, 68, 75)], [(40, 51, 77), (13, 40, 51)], [(40, 68, 84), (36, 40, 68)] дерден Герон үшбұрыштарын алса болады.

Қабырғалары бірінен соң бірі келетін натурал сандардан құралған Герон үшбұрыштарына келесі мысалдарды келтіруге болады: (51, 52, 53), (193, 194, 195), (723, 724, 725), (2701, 2702, 2703).

Эйлер келесі мәселені қойған болатын: барлық қабырғалары, медианалары және ауданы натурал сандардан құралған Герон үшбұрыштары бар ма? Сондай үшбұрыштың болатынын және олардың ең кішісі (136, 170, 174) қабырғаларға ие болған үшбұрыш Герон үшбұрышы болатынын Эйлер көрсеткен. Жақтары натурал сандардан құралған көпжақтарда бар. Мұндай мәселелермен математик Шверинг айналысқан.

Мәселен, қырлары 6, 7, 8, 9, 10,11, көлемі болса 48 куб бірлікке тең болған тетраэдр. Бұл тетраэдрдің көлемі, жақтарының ауданы және барлық қырлары натурал сандардан құралған. Сондай қасиетке ие болған тетраэдрлерден тағы келесіні көруге болады. Қырлары 896, 990, 1073, 1073, 1073 және көлемі 62092800, жақтарының аудандары 436800, 436800, 471240, 471240 тарға тең болған тетраэдр үшін келесі мәселені қойған болатын: кез-келген натурал n сан үшін қалайда екеуінің қосындысы квадратты сан болған n та квадрат сан бар ма?

$n = 2$ үшін $9 = 3^2$ және $16 = 4^2$ квадрат сандар табылып, 9+16$= 5^2$ болады.

$n = 3$ үшін $44^2,\ 177^2,\ 240^2$ натурал сандар табылып, олар үшін келесі қосындылар квадратты сан болады:

1) $44^2 + 117^2 = 125^2$; (44, 117, 125)
2) $44^2 + 240^2 = 244^2$; (44, 240, 244).

Бұларда Пифагор сандары. Жалпы жағдайда жоғарыда келтірілген болжам дәлелденбеген.

Пифагор сандары **мақұл** сандар деп аталатын сандарды алу көзі. Ежелгі дәуірде

$$\left.\begin{aligned} x^2 - k = y^2, \\ x^2 + k = z^2 \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

теңдеулер жүйесінің (x, y, z) натурал шешімдерін табу мәселесімен айналысқан. Кейбір натурал k сандар үшін мұндай шешімдер бар болған және сол жағдайда мұндай k ларға **мақұл** сандар деп аталған.
(x, y, z) тер (**) –ң натурал шешімдері болғанда

$$k = z^2 - x^2 = (z - x)(z + x) = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

болады. Демек, k саны $(x + z)$ және $(\mathrm{x} + \mathrm{y})$ терге бөлінеді. Сондықтан да $(\mathrm{x} + \mathrm{z}) \leq \mathrm{k}$, $(\mathrm{x} + \mathrm{y}) \leq \mathrm{k}$, бұдан $\mathrm{x} < k, y < k, z < k$ болады. x, y, z тер (**) жүйенің, берілген k мақұл сан үшін шекті натурал шешімдері болады, деген қорытынды келіп шығады.

$2x^2 = z^2 + y^2, z > y$ болғаны үшін z және y бір уақытта не жұп, не тақ сандар болады, сондықтан $z + y = 2b,\ z$- $y = 2a$ болады. Осыдан $z = b + a$, $y = b - a,\ \ 2x^2 = z^2 + y^2 = (a + b)^2 + (b - a)^2 = 2(a^2 + b^2),\ x^2 = a^2 + b^2$ келіп шығады.

Демек, $2k = z^2 - y^2 = (a + b)^2 - (b - a)^2 = 4ab,\ k = 2ab.$
Сонымен, k мақұл сан болғанда $a^2 + b^2 = c^2$ теңдеу (a, b, c) Пифагор сандарын беріп, k=2ab болады.

Керісінше, (a, b, c) Пифагор сандарын құрастырғанда, $c^2 \pm 2ab = (b \pm a)^2$ болып, k=2ab мақұл сан болады.

Мысалдар. 1)$3^2+4^2=5^2;\ a=3;\ b=4;\ k=2ab=24$.

Демек, $\left.\begin{array}{l} x^2-24=y^2 \\ x^2+24=z^2 \end{array}\right\}$ жүйені қанағаттандыратын шекті сандағы *(x,y,z)* натурал сандар бар. Олардан $x\geq 5,\ z\geq 7,\ y\geq 1$ болатыны келіп шығады. *(x,y,z)* терді келесі жолмен анықтаймыз: k=24 –ң натурал бөлгіштері 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 болып,

$$z=b+a=7,$$
$$y=b-a=1,$$
$$x^2=z^2-24=25,$$
$$x=5,$$

24⁝ *(z+x)* немесе 24⁝ 12;

24⁝ (*x+y)* немесе 24 ⁝6,

демек, *(x,y,z)=(15,1,7)* берілген жүйенің шешімі болады.

2) $5^2+12^2=13^2;\ a=5;\ b=12;\ c=13$ болғанда, $k=2ab=120$ болады. Бұдан $z=b+a$=12+5=17. *y=b-a=12-5=7.* $x^2+120=z^2; x^2=17^2-120=169$. Ал 120-ң бөлгіштері: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120.

Демек, $\left.\begin{array}{l} x^2-120=y^2, \\ x^2+120=z^2 \end{array}\right\}$ жүйенің натурал шешімдері *(x,y,z)* = (13, 7, 17) болады.

120 ⁝ *(x+ z)* немесе 120⁝ 30;

120⁝ (*x+y)* немесе 120 ⁝20.

Бұдан x >11, z>15, y>1 болатыны белгілі. (13, 7, 17) лардан басқа натурал шешімдерінің болмайтынын анықтау оңай.

Кейбір мақұл сандар $a^2+b^2=c^2$ теңдеудің екі немесе оданда артық шешімдерінен табылады.

Мысалдар. 1) $\left.\begin{array}{l} 20^2+21^2=29^2 \\ 12^2+35^2=37^2 \end{array}\right\}$ лерден $k=840$ мақұл сан табылады:

$$29^2+840=41^2,$$
$$37^2-840=23^2.$$

2) $\left.\begin{array}{r} 40^2+42^2=58^2 \\ 24^2+70^2=74^2 \\ 15^2+112^2=113^2 \end{array}\right\}$ лерден $k=4\cdot 840=3360$ мақұл сан табылады:

$$58^2+4\cdot 840=82^2,$$
$$74^2-4\cdot 840=46^2,$$
$$74^2+4\cdot 840=94^2,$$
$$113^2+4\cdot 840=127^2,$$
$$113^2-4\cdot 840=97^2.$$

k - мақұл сан болғанда kd^2 та $d=1,2,\ldots$ үшін мақұл сан болуы анық(ойланып көріңіз). Бірақ kd^2 мақұл сан болғанда k-ң да мақұл сан болуы қажет емес. Мысалы, $k = 6 \cdot 2^2$ мақұл сан, бірақ 6 мақұл сан емес. $k = 4mn(m^2 - n^2)l^2$ $(m, n, l$ - натурал сандар) болғанда k-ң мақұл болатынын дәлелдеу мүмкін. Сондай k үшін $[(m^2 + n^2)l]^2 \pm k = [(m^2 - n^2) \pm 2mnl]^2$ болады.

$3^x + 4^y = 5^z$ теңдеу $x = y = z = 2$ ден басқа тағыда бүтін шешімдерге ие боладыма ма, деген сұрақ қойылған болатын. $3^x + 4^y = 5^z$ теңдеудің $x = y = z = 2$ ден басқа тағы бүтін шешімдері болмайтынын математик Паранкевич дәлелдеген. Математик Л.Юшманович болса

$$5^x + 12^y = 13^z,$$
$$7^x + 24^y = 25^z,$$
$$11^x + 60^y = 61^z,$$
$$9^x + 40^y = 41^z$$

теңдеулер де $x = y = z = 2$лерден басқа тағы бүтін шешімдері болмайтынын дәлелдеген. Барлық элементтері бір уақыттда квадраттардан құралған (a, b, c) Пифагор сандары табылсын, деген мәселе қоямыз. Яғни, $a = a_1^2$, $b = b_1^2$, $c = c_1^2$ болсын. Мұнда a_1, b_1, c_1 натурал сандар. Алгебра тілімен айтқанда $a_1^4 + b_1^4 = c_1^4$ теңдеуді қанағаттандыратын натурал a_1, b_1, c_1 сандар бар ма, деген сұрақ қойылған болатын. Бұл мәселе келесі жалпы мәселенің жеке жағдайы болды.

$x^n + y^n = z^n$ теңдеу $n > 2$ болғанда натурал шешімге ие болады ма? ($n = 2$ үшін мұндай сандар шексіз көп; олар Пифагор сандарын құрайды). Бұл мәселені француз математигі П.Ферма қойған болатын. Ол грек математигі Диофанттың (біздің дәуірімізден 300 жыл алдын өмір сүрген) анықталмаған теңдеулерге қатысты кітабын үйренген кезде, оның бір бетінде келесі сөйлемді жазып қалдырған болатын:

«Мен $n > 2$ болғанда $x^n + y^n = z^n$ теңдеудің натурал шешімі бола алмайтынының ғажап дәлелін таптым, бірақ оқыған кітап бетінде бос орын аз болғандықтан оның дәлелін келтіре алмаймын».

Қазіргі уақытқа дейін бұл теореманың дәлелін ешкім жалпы жағдайда айта алмаған. Сондықтан бұл теорема Ферма гипотезасы немесе Ферманың ұлы теоремасы деп аталады. Эйлер бұл теореманы $n = 3{,}4$ үшін, неміс математигі Дирихле $n = 5$ үшін шешімі болмайтынын дәлелдеді. Ламэ болса $n = 7$ үшін шешімі болмайтынын дәлелдеді. $x^n + y^n = z^n$ теңдеу натурал шешімдерге ие болмайтыны дәлелденген болса да,

$$(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 = (z^2 - 1)^2$$

теңдеу

$$x = 10, \qquad x = 265,$$
$$y = 13, \qquad y = 287,$$

$$z = 14, \qquad z = 329$$

натурал шешімі болатыны дәлелденген. Бұдан басқа натурал шешімі бар-жоқтығы белгісіз. Кейінірек неміс математигі Куммер (1810-1893) өзінің алгебраик сандар теориясы көмегінде Ферма болжамының шешімін табу жолында үлкен қызмет жасады. Куммер өмір сүрген уақытта $2 < n \leq 100$ болғанда $x^n + y^n = z^n$ теңдеудің натурал шешімдері болмайтынын дәлелдеген.

Ферма теоремасының $x^n + y^n = z^n$ теңдеу үшін $n > 2$ болғанда натурал шешімі болмайтынын дәлелдеу орнына $x^p + y^p = z^p$ -ң (p - жай сан) $p > 2$ болғанда шешімі болмайтынын дәлелдеу жеткілікті. $2 < p < 4002$ болғанда $x^p + y^p = z^p$ -ң натурал шешімі болмайтыны дәлелденген. Сонымен, $p > 4002$ үшін бұл болжамның қазірге дейін шешімі табылмаған.

Германияның Дармштадт елінде өмір сүрген математик Вольфскаль да Ферма болжамының шешімін табу жолында көп ізденді, бірақ бұл гипотезаны шеше алмаған соң өлер алдында келесі өсиетті баяндаған:

«Ферма гипотезасының шешімін табу жолында мен және мен сияқты көптеген ғалымдар ізденген болса да, бүгінгі таңда бұл болжам жалпы жағдайда шешілмей қалды. Мен өзімнің барлық дүниемді (10000 марка) Гёттинген банкіне қойып, кімде-кім сол гипотезаның толық шешімін тапса, соған беруді өсиет етемін».

Оның өсиеті 2007 жылға дейін өз күшін сақтауы керек болатын. Сонша жыл барысында бұл ақшадан жиналатын пайда математика саласы үшін жұмсалуы қажет болатын. Содан кейін математикамен кем айналысатындар да, математикадан хабары жоқтар да Ферма гипотезасымен айналысып, әр түрлі бұрыс, мағынасыз, «шешім»дерді сол кездегі комиссия мүшелеріне жібере берді.

Ұлы неміс математигі Д.Гильберт жіберілген шешімдерді талдаулардың бірінде келесіні айтты:

«Менің ойымша, Ферма гипотезасын шешуге менен басқа ешкімнің күші жетпейді. Мен болсам алтын жұмыртқа туатын тауықты өлдіруді қолдамаймын».

Кейінірек қойылған ақшаның бір бөлігін математик Вифрихке сол салада жеткен үлкен жетістігі үшін берілді.

1911 жылға дейін Ферма гипотезасының 111 «дәлелі» тексеріліп, мағынасыздығы көрсетілген болатын. Тіпті сондай авторларда болды, олар ұсынған «дәлел» мағынасыздығын көрсеткеннен кейін де, олар бұған келіспей комиссия мүшелерін сотқа беруге дейін барды.

Гёттинген банкіне қойылған бұл ақша Германияда Гитлердің өкімет басшысы болғанға дейін сақталды. Кейінрек Гитлер бұл ақшаны өкімет есебіне өткізіп жіберді.

Пифагор сандарына байланысты келесі мәселе де қойылған болатын.

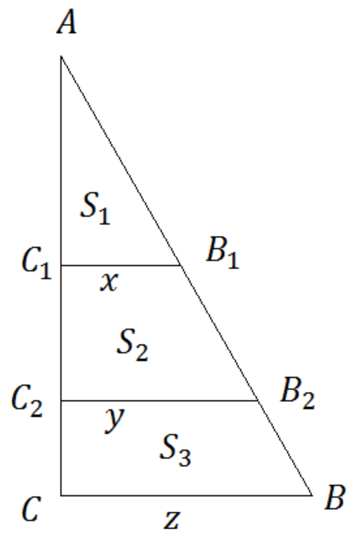
Тікбұрышты ұшбұрыш және тікбұрышты трапецияның негіздеріне параллель болған сызықтар көмегінде оларды теңдес бөліктерге бөлу мәселесі. Бұл мәселемен ежелгі Вавилон математиктері айналысқан.

Келесі жағдайды қарастырайық:

1) $S_1 = S_2$ болсын. Бұл жағдайда(6-сурет)

$$C_1B_1 = x, \quad S_{AC_1B_1} = S_1,$$
$$C_2B_2 = y, \quad S_{C_1B_1B_2C_2} = S_2,$$
$$CB = z, \quad S_{C_2B_2BC} = S_3,$$

$\frac{S_1}{S_1+S_2} = \frac{x^2}{y^2}$, $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 2$, $\frac{x}{y}$ рационал сан емес, сондықтан x және y бір уақытта рационал сан бола алмайды.



6-сурет

2) $S_1 = S_3$. Бұл жағдайда $x^2 + y^2 = z^2$ болады. (x, y, z) Пифагор сандарын құрастырады.

3) $S_2 = S_3$. Бұл жағдайда тікбұрышты трапеция екі теңдес болған тікбұрышты трапецияларға бөлінеді. Бұл жағдайда $2y^2 = x^2 + z^2$ болып, оның натурал шешімдері

$$x = l(m-n),$$
$$y = lk,$$
$$z = l(m+n)$$

түрінде болатынын Вавилон математиктері анықтаған. $l = 1$ болғанда

$$\begin{cases} x = m - n, \\ y = k, \\ z = m + n \end{cases}$$

болады. Мұндай x, y, z сандарды математик А.А.Вайман «Вавилон» сандары деп атаған.

Әр бір кейінгі Вавилон сандарын, одан алдыңғы Вавилон сандарының соңғы санынан басталатынын келесі кестеден көруге болады:

n	m	k	x	y	z
3	4	5	1	5	7
5	12	13	7	13	17
7	24	25	17	25	31
9	40	41	31	41	49

Эйлер келесі болжамды айтқан:

$$2 \le k < n$$

болғанда $x_1{}^n + x_2{}^n + \cdots + x_k{}^n = y^n$ теңдеу $x_1, x_2, \cdots, x_k$ және ол натурал шешімдерге ие болмайды.

Уорд бұл болжамның дербес жағдайын, яғни $t \le 10000$ болғанда $x^4 + y^4 + z^4 = t^4$ -ң бүтін шешімдерге ие болмайтынын тексеріп келісті. $n = k \le 5$ болғанда жоғарыда келтірілген теңдеу шешімге ие; $n = k = 2$ болғанда $x_1^2 + x_2^2 = y^2$ Пифагор сандары болады.

$n = k = 3$ болғанда $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$,

$n = k = 4$ болғанда $30^4 + 120^4 + 272^4 + 315^4 = 353^4$,

$n = k = 5$ болғанда $7^5 + 43^5 + 57^5 + 80^5 + 100^5 = 107^5$

болады.

Кез-келген натурал n санды $x^3 + y^3 + 2z^3$ (x,y,z- бүтін сандар) түрінде өрнектеу мүмкін бе, деген сұрақ қойылған болатын. 1936 жылда n санды $n \le 220$ мәндерінде ($n = 76, 99, 113, 148, 183, 190, 195$ үшін белгісіз) $x^3 + y^3 + 2z^3$ түрінде өрнектеу мүмкіндігі көрсетілген болатын.

$x^n + y^n = z^n + t^n$ теңдеу кез-келген $n > 4$ үшін $x \ne z$, $y \ne t$ бүтін шешімдерге ие болады ма, деген сұраққа жауап табылған жоқ.

Кейбір $n (n < 5)$ үшін келесі шешімдер бар:

$$1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2, \qquad 133^4 + 134^4 = 59^4 + 158^4,$$

$$1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3, \qquad 103^2 + 542^2 = 359^2 + 514^2.$$

$x^n + y^n = z^{n+1}$ теңдеудің бүтін шешімдері бар болатынын оңай көрсетуге болады. Айталық n - кез-келген натурал сан болсын. Кез-келген натурал a және b сандар үшін $a^n + b^n = c$ ны есептеп табамыз. Нәтижеде $x = ac, y = bc$ және $z = c$ мәндер $x^n + y^n = z^{n+1}$-ң бүтін шешімдерін береді.

$$(ac)^n + (bc)^n = c^{n+1} = c^n \cdot c = c^n(a^n + b^n)$$

немесе

$$a^n c^n + b^n c^n = c^n(a^n + b^n)$$

болады.

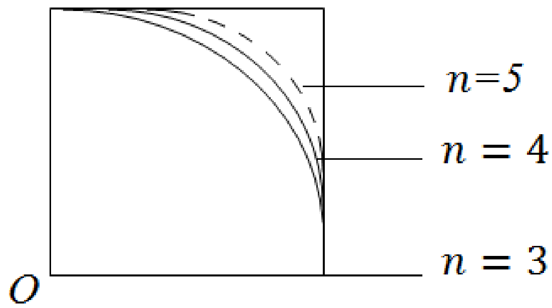
Мысал. $x^2 + y^2 = z^3$ үшін кез-келген натурал $a = 4,\ b = 7$ сандарды аламыз:

$$n = 2, \qquad c = a^2 + b^2 = 4^2 + 7^2 = 65.$$

$x = 4 \cdot 65 = 260,\ y = 7 \cdot 65 = 455,\ z = 65$ берілген теңдеудің бүтін шешімдері болады.

Ферма ұлы теоремасы орынды болмаған жағдайда, оның қандай геометрик мағына беретінін көрсетіп өтеміз. $n > 2$ болғанда $x^n + y^n = z^n$ натурал шешімдерге ие болмаса, $\left(\frac{x}{z}\right)^n + \left(\frac{y}{z}\right)^k = 1$ немесе $x_1^n + y_1^n = 1$ теңдеу $n > 2$ болғанда рационал шешімдері болмайды.

7-суреттен $n = 3, 4, 5, \ldots$ болған жағдайда $x_1^n + y_1^n = 1$ сызықтардың бойында ешқандай да рационал нүкте болмайтыны көрініп тұр.



7-сүрет

Енді Пифагор сандарымен байланысты болған жақ және диагонал сандармен танысамыз.

Платон өзінің «Мемлекет» деген кітабында 7 ні 5 қырына сәйкес болған «Рационал диагонал сан» деп атаған. Соған негізделіп математик Прокл «Катет және диагонал» сандарды келесіндей жуық анықтаған:

Катеттері $a_1 = 1$ ге тең болған тікбұрышты тең бүйірлі үшбұрыштың гипотенузасын $d_1 = 1$ ге тең деп есптеген және соған негізделіп, $a_{n+1} = a_n + d_n$, $d_{n+1} = 2a_n + d_n$ формулалар көмегінде a_n катеттер және d_n гипотенузаларды табу үшін жұық формулаларды беріп, a_n жақ сандар, d_n диагонал сандар деп атаған. Мысалы, $a_1 = 1$, $d_1 + 1$, $a_2 = a_1 + d_1 = 2$, $a_3 = a_2 + d_2 = 2 + 3 = 5, d_2 = 2a_1 + d_1 = 3,\ d_3 = 2a_2 + d_2 = 4 + 3 = 7.$

Бұл формулалар көмегінде катеттері a_n ге тең болған тікбұрышты тең бүйірлі үшбұрыштардың d_n гипотенузалары жұық табылған.

Пифагор теоремасына негізделіп катеттері $a = 5$ болған үшбұрыштың гипотенузасы $d = 5\sqrt{2}$ болуы керек. Жұық формула да $d = 7$ ні береді.

1.5 Паскаль сандары

Ұлы француз ғалымы Паскаль (1623-1662) белгілі қасиеттерге ие болған және орналасуы жағынан үшбұрышқа ұқсас сандар кестесімен айналысқан. Кейінрек бұр үшбұрыштар Паскаль үшбұрыштары деп ондағы сандар болса, Паскаль сандары деп аталған.

Біз сондай сандарды алудың және олардың кейбір қасиеттерімен танысып өтеміз.

$$d_0, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, d_n \qquad (1)$$

бүтін сандардан

$$\left.\begin{array}{c} S_0 = d_0 \\ S_1 = d_0 + d_1 \\ S_2 = d_1 + d_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_k = d_{k-1} + d_k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ S_n = d_{n-1} + d_n \\ S_{n+1} = d_n \end{array}\right\} 1 \le k \le n \qquad (*)$$

заңына негізделіп

$$S_0, S_1, S_2, \dots, S_n, S_{n+1} \qquad (2)$$

сандарын аламыз.

$(*)$ - Паскаль заңы деп аталады. Сол $(*)$ заңға негізделіп (2) ден басқа сандарда құрастыруға болады.

Мысал.

2, 0, - 2,3

2, 2, - 2, 1, 3

2, 4, 0, - 1, 4, 3

.... және т.б.

Келесі теорема орынды болады:

1-теорема. (2) сандар қосындысы (1) сандар қосындысынан 2 есе үлкен.

Дәлелдеу:

$S_0 + S_1 + S_2 + \dots + S_n + S_{n+1} = d_0 + (d_0 + d_1) + (d_1 + d_2) + \dots +$
$+(d_{n-1} + d_n) + d_n = 2\,(d_0 + d_1 + \dots + d_n)$.

Анықтама. Егер кез-келген

$$0 \le k \le n \text{ үшін } d_k = d_{n-k}$$

теңдеу орындалса, онда $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_n$ (1) сандар симметрик жол деп аталады. Сонымен, симметрик жолда

$$\begin{aligned} d_0 &= d_n \\ d_1 &= d_{n-1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_k &= d_{n-k} \end{aligned}$$

болады.

Мысал.

$$\left.\begin{array}{r} 1, 3, 5, 3, 1 \\ 1, 2, 3, 3, 2, 1 \end{array}\right\}$$ симметрик жолдар.

2-теорема.

Егер $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n, S_{n+1}$ (2) жол $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_n$ (1) симметрик жолдан (*) Паскаль заңына негізделіп алынған болса, (2) жолдың өзі де симметрик болады.

Дәлелдеу: $S_k = S_{(n+1)-k}$ (4) болатынын көрсету жеткілікті (мұнда k=0, 1, 2, ... , n +1). $k = 0,\ k = n + 1$ болғанда (*) дан (4) теңдеу аламыз.

$1 \leq k \leq n$ үшін:

$$\begin{aligned} S_k = d_{k-1} + d_k = d_{n-(k-1)} + d_{n-k} = d_{(n+1)-k} + d_{[(n+1)-k]-1} \\ = d_{[(n+1)-k]-1} + d_{(n+1)-k} = S_{(n+1)-k}. \end{aligned}$$

(1) жол тек бір элементтен құралған болсын. Мұндай жол нөлінші Паскаль жолы деп аталады.

Одан Паскаль заңына негізделіп екінші жолды және одан үшінші Паскаль жолдарын аламыз. Жолдан жолға өту кезінде жолдағы элементтер саны артып барғаны себепті n – жолда $n + 1$ элемент болады.

```
                    1
                 1     1
              1     2     1
           1     3     3     1
        1     4     6     4     1
     1     5     10    10    5     1
  1     6     15    20    15    6     1
1    7     21    35    35    21    7     1
```

Бұл үшбұрышты кесте Паскаль үшбұрышы деп аталады. Үшбұрыштың шеткі қабырғаларында 1 болып, шеткі қабырғаларындағы бірлерден басқа әр бір Паскаль саны сол сан жоғарысында орналасқан сол және оң қабырғаларындағы Паскаль сандары қосындысынан құралған. Мысалы, $35 = 20 + 15$. Паскаль үшбұрышы 1665 жылда Паскаль өмірден өткеннен кейін оның «Арифметик үшбұрыш туралы» деген кітабында баяндалған болатын. Бірақ Паскалдың өзі үшбұрышты кестені төмендегідей берген:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	....
1	2	3	4	5	6	7	8	9		
1	3	6	10	15	21	28	36			
1	4	10	20	32	56	84				
1	5	15	35	70	126					
1	6	21	56	126						
1	7	28	84							
1	8	36								
1	9									
1										

Мұнда әр бір Паскаль саны оның жоғарысында және сол жағында тұрған Паскаль сандары қосындысынан құралған. Бұл кестені 45^0 бұрса, жоғарыдағы Паскаль үшбұрышы алынады.

Паскаль үшбұрышында орналасқан сандар төмендегі қасиеттерге ие:

-бірінші диагонал қатарлар (оң да және сол да) тек 1;

-екінші диагонал қатар болса тізбек натурал сандардан;

-үшінші диагонал қатар үшбұрышты сандардан (1, 3, 6, 10, 15, ...) құралған болып, үшбұрышты сандар арасындағы қашықтық тізбек натурал сандардан;

-төртінші диагонал қатардағы сандар 1, 4, 10, 20, 35, ... пирамидал сандардан;

-бесінші диагоналдағы 1, 5, 15, 30,70, ... сандар пентагонал сандардан;

-әр бір горизонтал қатардағы паскаль сандарының қосындысы 2-ң дәрежелерінен құралған:

$$1= 2^0,$$
$$1 + 1 = 2^1,$$
$$1 + 2 + 1 = 2^2,$$
$$1 + 3 + 3 + 1 = 2^3,$$
$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2^4,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Бұдан басқа

1-1=0,

1-2+1=0,

1-3+3-1=0,

1-4+6-4+1=0,

………………..

Паскалдан I ғасыр алдын өмір сүрген италиялық математик Николло Тарталья үшбұрышты кестемен емес, төмендегі төртбұрышты кестемен айналысқан:

1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	...
1	3	6	10	15	21	...
1	4	10	20	35	56	...
1	5	15	35	70	126	...
1	6	21	56	126	252	...
1	7	28	84	210	462	...

....

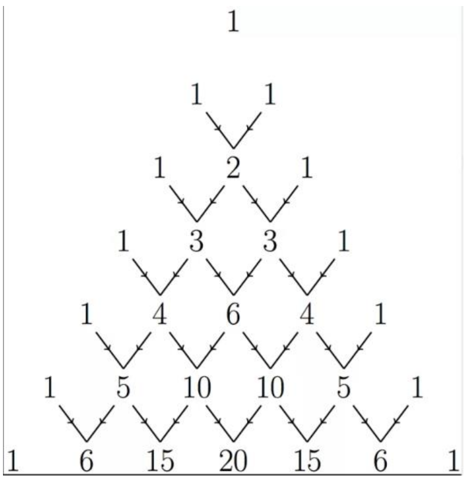
Бұл кестеде жоғарыдағы жол және сол баған 1-ден құралған болып, әр бір ішкі элемент өзінің жоғарысындағы және алдындағы элементтер қосындысынан құралған. Кейбір кітаптарда бұл кесте «Тарталья кестесі» деп аталады.

Паскаль үшбұрышының әр бір жолында тұрған Паскаль сандарын нөмерлеуді төмендегі мысалдан көрсетеміз: c_5^2 мен 5-жолдағы екінші Паскаль саны белгіленеді. Жалпы, c_n^k мен n - жолдағы, k- Паскаль саны белгіленеді.

$c_0^0 = 1,\ c_5^2 = 4, c_{14}^4 = 1001$ Паскаль сандары болады.

$c_k^k,\ c_{k+1}^k,\ c_{k+2}^k, \dots, c_n^k, \dots (c)$ тізбектің элементтері төмендегідей алынады.

Егер Паскаль үшбұрышының 1 лерден құралған жақтарына түзу сызықтар жүргізіп, оларға параллель Паскаль сандарын қиып өтетін түзу сызықтар жүргізсек, төмендегі суретті аламыз:



Жоғарыда келтірілген (с) тізбек Паскаль үшбұрышының солдан (немесе симметрияға негізделіп оңнан) k- сызықта жатқан Паскаль сандары болады.

Мысал.

$k = 0$ болғанда $1, 1, 1, 1, \ldots$

$k = 1$ болғанда $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$

$k = 2$ болғанда $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$

Бұл сандар сәйкес Тарталья төртбұрышының нөлінші жолы немесе нөлінші бағанда, бірінші жолы немесе бірінші бағанда, екінші жолы немесе екінші бағанда тұрған элементтерден құралған.

$k = 2$ болғанда пайда болған $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$ Паскаль сандары үшбұрышты сан болады.

$k = 4$ болғанда $1, 4, 10, 20, 35, \ldots$ пирамидал сандар алынады. Берілген n және k үшін c_n^k өрнекті анықтау Паскаль операциясы деп аталады.

c_n^k табу үшін Паскаль үшбұрышының n – жолын құрастырып, ондағы k-Паскаль санын анықтау жеткілікті болады. Бірақ өте үлкен n және k үшін мұндай есептеу шамалы ыңғайсыз. Оларды есептеуде формулалар келтіріп шығару үшін төмендегі жолмен бином (екімүше) формуласын алып, оның коэффициенттері арасындағы байланысты келтіреміз:

$$(1+x)^0 = 1,$$
$$(1+x)^1 = 1 + x,$$
$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2,$$
$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3, \qquad (5)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(1+x)^n = 1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$

(5) жіктелу n -көрсеткішке тиісті бином жіктелуі деп аталады. Бұл жіктелудегі коэффициенттер үшін $a_k = c_n^k$ белгілеу енгізіп, оларды биномиал коэффициенттер деп атаймыз.

Биномиал коэффициенттерге тиісті келесі теорема орынды:

1) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ (Паскаль салдары)

Бұл теңдік көмегімен биномиал коэффициенттерді анықтау мүмкін.

Биномиал коэффициенттерге тиісті төмендегі кестені (Паскаль үшбұрышынын қолданып) құрастыру мүмкін:

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0

7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Бұл кестенің кейінгі жолдарындағы әр бір элементін алу үшін алдыңғы жолдағы сол элемент үстінде және сол қабырғасында жатқан элементтерді сәйкес қосу жеткілікті.

2) $C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}$ (биномиал коэффициенттер формуласы).

Бұл формула көмегінде кез-келген биномиал коэффициенттерді анықтау мүмкін.

Мысалдар.

1. Жоғарыда келтірілген кестенің 11-жолы төмендегідей болады: 1, 11, 55, 165, 330, 462, 462, 330, 165, 55, 11, 1.

$$C_{11}^8 = C_{10}^8 + C_{10}^7 = 165.$$

2.

$$C_{11}^8 = \frac{11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3} = 55\cdot 3 = 165.$$

3) $(n,k) = 1$ болғанда $C_n^k \vdots\, n$ болады.

Мысал. $C_9^4 = 126, (9,4) = 1,\ 126 \vdots 9.$

Биномиал коэффициенттер төмендегі қасиеттерге ие:

1) $C_n^k = C_{n-1}^k$;

2) $C_m^m + C_{m+1}^m + C_{m+2}^m + \cdots + C_{m+l}^m = C_{m+1+l}^m$;

3) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$;

4) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots$

Биномиал коэффициенттер қасиеттерін пайдаланып, кез-келген биномиал коэффициентті p жай санға бөлгендегі қалдықты анықтау мүмкін.

Төмендегі теорема орынды:

Теорема. p жай сан үшін $n = pl + t$ және $k = pl_1 + t_1$ болсын. C_n^k ны p бөлгендегі қалдық $C_l^{l_1} \cdot C_t^{t_1}$ ні p ға бөлгендегі қалдыққа тең болады.

Мысал . 1) C_{99}^{23} беске бөлгендегі қалдық табылсын.

$\left.\begin{matrix} 99 = 5\cdot 19 + 4, \\ 23 = 5\cdot 4 + 3 \end{matrix}\right\}$ C_{99}^{23} ді беске бөлгендегі қалдық $C_{19}^4 \cdot C_4^3$ ті беске бөлгендегі қалдыққа тең.

$\left.\begin{matrix} 19 = 5\cdot 3 + 4, \\ 4 = 5\cdot 0 + 4 \end{matrix}\right\}$ C_{19}^4 ті $C_3^0 \cdot C_4^4$ мен ауыстырылады.

Сонымен, C_{99}^{23} $C_3^0 \cdot C_4^4 \cdot C_4^3$ мен ауыстырылады және қалдық

$$C_3^0 \cdot C_4^4 \cdot C_4^3 = 1 \cdot 1 \cdot 4 = 4$$

тең болады.

2) C_{127}^{31} ді 11- ге бөлгендегі қалдық табылсын.

$\left.\begin{array}{r} 127 = 11 \cdot 11 + 6, \\ 31 = 11 \cdot 2 + 9 \end{array}\right\}$ C_{127}^{31} ді 11-ге бөлгендегі қалдық $C_{11}^2 \cdot C_6^9$ ді 11-ге бөлгендегі қалдыққа тең. Бірақ $C_6^9 = 0$, себебі C_n^k тек $n \geq k$ болғанда ғана мағынаға ие. Сондықтан, $n < k$ болғанда $C_n^k = 0$ деп алынады. Демек, C_{127}^{31} 11-ге қалдықсыз бөлінеді.

Түсіндіру. C_n^k ($n \geq k$ болғанда) жоғарыдағы теореманы ұсынғанда $l \geq l_1$ болуы қажет. Егер $t > t_1$ болып қалса, онда $C_{t_1}^{t_1} = 0$ болып, $C_n^k \vdots p$ болады. Мұнда үлкен n дер үшін C_n^k-ң p ға қалдықсыз бөліну ықтималдығы артады.

C_n^k -ң ($0 \leq k \leq n$ болғанда) $0 \leq n \leq 3^5$ тер үшін 3-ке бөлінбейтіндері 26,2% ке; $0 \leq n \leq 3^{10}$ дар үшін шамамен 3,6% ке және $0 \leq n \leq 3^{15}$ үшін 0,45% ке тең болатыны есептелген.

Мысал.

$$C_2^1 = 2, \qquad C_{16}^8 = 12870,$$
$$C_4^2 = 6, \qquad C_{32}^{16} = 6201080390.$$
$$C_8^4 = 70,$$

Бұл мәндерді жоғарыда келтірілген формулалар көмегінде есептеу оңай.

2, 6, 70, 12870, 601080390 сандар қандайда ғажап қасиетке ие болмаса да, бірақ олардың тізбек айырмалары екінің әр түрлі дәрежелеріне бөлінеді:

6-2=4=2^2,

70-6=64=2^6,

12870-70=$2^9 \cdot 25$,

601080390-12870=601067520=$2^{12} \cdot 146745$.

Бұл жағдай кездейсоқ емес. Төмендегі теорема орынды:

$n \geq 1$ үшін $\left(C_{2^{n+1}}^{2^n} - C_{2n}^{2^{n-1}}\right) \vdots 2^{2n+2}$.

Есеп. $n = 2$ үшін $(C_8^4 - C_4^2) \vdots 2^6$.

$n = 3$ үшін $(C_{16}^8 - C_8^4) \vdots 2^8$.

Сонымен, $C_9^3 - C_3^1 = 84 - 3 = 3^4$,

$$C_{27}^9 - C_9^4 = 4686825 - 84 = 4686741 = 3^7 \cdot 2143,$$
$$C_{81}^{27} - C_{27}^9 = 2306279447501851002720 - 4686825 =$$
$$= 2306279447501846315895 = 3^{10} \cdot 39057044954221855.$$
$$C_{25}^5 - C_5^1 = 43130 - 5 = 43125 = 5^5 \cdot 69,$$
$$C_{49}^7 - C_7^1 = 85900584 - 7 = 85900577 = 7^5 \cdot 5111.$$

Сол есептеулер төмендегі гипотезаға алып келеді.

Кез-келген p жай сан үшін

$$\left(C_{p^{n+1}}^{p^n} - C_{p^n}^{p^{n-1}}\right)$$

өрнек $p -$ң бірінші дәрежесіне бөлінуімен бірге $p -$ң кейбір жоғары дәрежелеріне де бөлінеді.

Бұл гипотезаның дәлелі белгісіз.

Егер p жай сан болмаса, жоғарыдағы гипотеза орындалмайды.

Мысал. $C_{16}^4 - C_4^1 = 1820 - 4 = 1816$ саны 4^2 бөлінбейді.

$C_{36}^6 - C_6^1 = 1947786$ саны 6^2 бөлінбейді.

Паскаль үшбұрышының n - жолында орналасқан Паскаль сандары квадраттарының қосындысы Паскаль үшбұрышының $2n$ - жолының ортасында орналасқан Паскаль санына тең:

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

Мысал.

$$1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 = 20,$$

$1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2 = 70$. (Кестеге қараңыз)

Элементтері тең бүйірлі трапеция түрінде орналасқан сандар кестесі бар. Мұндай сандар триноминал сандар деп аталады.

					0	1	0					
				0	1	1	1	0				
			0	1	2	3	2	1	0			
		0	1	3	6	7	6	3	1	0		
	0	1	4	10	16	19	16	10	4	1	0	
0	1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1	0

. . . .

Кез-келген горизонтал қатардағы сандар 0, 1 мен басталып, 1,0 мен аяқталады. Әр бір триноминал сан сол сан жоғарысында орналасқан горизонтал қатардағы тізбекті үш элемент қосындысынан құралған: 45=19+16+10.

n - горизонтал қатарда орналасқан триноминал сандардың қосындысы 3^{n-1} тең (салыстыру үшін тура сондай қосындысы Паскаль сандары үшін 2^{n-1} тең болатынын еске салайық):

$$0+1+3+6+7+6+3+1+0=27=3^3 = 3^{4-1}.$$

Кез-келген горизонтал қатардағы триноминал сандар квадраттарының қосындысы тағы триноминал санды береді:

$0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2 = 19$ (5-қатардағы триноминал сан),

$0^2 + 1^2 + 3^2 + 6^2 + 7^2 + 6^2 + 3^2 + 1^2 + 0^2 = 141$ (7-қатардағы триноминал сан).

1.6 Фибоначчи сандары

Орта ғасырда өмір сүрген италиялық математик Леонардо, оны Фибоначчи деп те атаған.

Фибоначчи 1228 жылда «Liber abacci» деген шығармасын жазып, онда сол уақытта белгілі болған барлық арифметик және алгебраик мәліметтерді баяндады. Бұл кітап математика дамуында маңызды болды. Еуропалықтар бұл кітаптан араб цифрларын үйренген. Бұл кітап өте көп қызықты мәселелермен бай болған.

Біз бұл кітапта баяндалған мәселелердің бірімен танысып өтеміз: «Бір жұп қояннан бір жылда неше жұп қоян алынды?»

Егер бір жұп қояннан 1 ай өткеннен соң жаңа бір жұп қоян алынса және жаңа туылған бір жұп қояннан екінші айда жаңа бір жұп қоян алынса, т.с.с. бір жылда неше жұп қоян алынады, деген сұраққа жауап беру керек.

Қарапайым есептеулер жүргізіп, төмендегі жүйені құрастырамыз:

	I ай	II ай	III ай	IV ай
1 жұп	2 жұп	3 жұп	5 жұп	8 жұп

V ай	VI ай	VII ай	VIII ай	IX ай
13 жұп	21 жұп	34 жұп	55 жұп	89 жұп

X ай	XI ай	XII ай
144 жұп	233 жұп	377 жұп

Демек, 12 айда I жұп қояннан 377 жұп қоян алынады.

Жоғарыда келтірілген кестені мән беріп назар салсақ, төмендегілерді біліп аламыз:

Алдыңғы айдағы қояндар жұбымен кейінгі айда алынған қояндар жұбы қосылса, үш айда алынған қояндар жұбы келіп шығады. Әрине бұл процессті шексіз жалғастыру мүмкін.

Енді қояндар сандарына өтеміз.

$U_1, U_2, U_3, U_4, \ldots$ (1) сондай сандар тізбегі табылсын, $\mathrm{n} > 2$ болғанда

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2} \quad (2)$$

болсын, яғни әр бір кейінгі мүше одан алдынғы екі мүшенің қосындысынан құралған болсын.

Математикалық адебиеттерде мұндай қасиетке ие болған тізбектерді (әр бір кейінгі мүше алдынғы мүшелердің функциясы) рекуррент тізбек деп атайды. Әрине (1) тізбекті (2) шартқа негізделіп құрастыруда, оның алдыңғы 2 мүшесі берілген болуы керек.

Мысал.

$$2, 5, 7, 12, 19, ...$$
$$1, 3, 4, 7, 11, ... \;.$$

Бұл тізбектің біріншісі 2 және 5 бойынша, екіншісі болса 1 және 3 бойынша (2) шарттан пайдаланып құрастырылады. Егер $U_1 = 1;\ U_2 = 1$ деп алып, екінші шартқа негізделіп, U_3, U_4 , ... элементтерді анықтасақ, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, ... тізбек пайда болады, мұнда оның алдынғы 14 мүшесі жоғарыда келтірілген қояндар мысалындағы сандардан құралған.

Фибоначчи тізбегінің 10^4 тен кіші болған мүшелері 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765 болып, олар арасында тек $U_1 = U_2 = 1$ және $U_{12} = 144$ квадрат сандар және $U_1 = U_2 = 1$, $U_6 = 8$ куб сандарды құрастырады.

1958 жылда математик Ярден фибоначчи сандарының 10^{13} санына дейінгі тізбекті және фибоначчи сандарының канондық жіктемесінің кестесін басып шығарды. Бұл кестеден 144 тен үлкен және 10^{13} тен кіші болған $a^k(k > 1 -$ натурал сан) түріндегі фибоначчи сандарының болмайтынын көрсету мүмкін. 144 тен үлкен болған мұндай сандар қазірге дейін белгісіз.

Математик Хогаттаның дәлелі бойынша кез келген натурал сан фибоначчи сандарының қосындысынан құралған:

$$1 = U_1;\ \ 2 = U_3;\ 3 = U_4 = U_1 + U_3; 5 = U_5 = U_3 + U_4;\ \ 6 = U_1 + U_5;$$
$$7 = U_3 + U_5; 8 = U_6 = U_4 + U_5;\ 9 = U_1 + U_6; 10 = U_3 + U_6 \text{ және т.б.}$$

$U_1 = 1, U_2 = 1,\ U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$ қасиеттерімен құралған тізбек фибоначчи тізбегі, олардың элементері болса фибоначчи сандары деп аталады.

Фибоначчи сандарына тиісті кейбір қасиеттерді қарастырайық.

$U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ фибоначчи тізбегі болсын.

1) $U_1 +\ U_2 +\ U_3 + \cdots\ U_n = U_{n+2} - 1 \quad .$ (3)

Анықтамаға негізделіп:

$$U_1 = U_3 - U_2,$$
$$U_2 = U_4 - U_3,$$
$$U_3 = U_5 - U_4,$$
$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$
$$U_n = U_{n+2} - U_{n+1}.$$

Бұл теңдіктерді мүшелеп қоссақ, (3) теңдік келіп шығады.

Мысал. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... – фибоначчи тізбегі берілген.

1+1+2+3=8-1;

1+1+2+3+5=13-1.

2) $U_1 + U_3 + U_5 + \cdots U_{2n-1} = U_{2n}.$ (4)

Мысал. 1+2+5=8, яғни $U_1 + U_3 + U_5 = U_{2\cdot 3} = U_6$.

3) $U_2 + U_4 + U_6 + \cdots + U_{2n} = U_{2n+1} - 1.$ (5)

(3) тен (4) азайтқанда (5) пайда болады.

Мысал. 1+3+8+21=34-1.

4) ${U_1}^2 + {U_2}^2 + {U_3}^3 + \cdots + {U_n}^2 = U_n \cdot U_{n+1}$,

яғни фибоначчи сандарының n та мүше квадраттарының қосындысы n және $n+1$ мүшелер көбейтіндісінен құралған.

5) $U_{2n} = U^2{}_{n+1} - U^2{}_{n-1}$.

Мысал. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...үшін ${U_1}^2 + {U_2}^2 + {U_3}^3 + {U_4}^2 = U_4 \cdot U_5$ ке тең. 1+1+4+9= $3 \cdot 5$ фибоначчи сандары болады.

6) Егер $n \vdots m$ болса, онда $U_n \vdots U_m$ болады, яғни егер екі фибоначчи санынан бірінің нөмері екіншісінің нөміріне бөлінсе, онда нөмірлерге тиісті фибоначчи сандарының біріншісі екіншісіне бөлінеді.

Мысал. 1) $10 \vdots 2$ болса, онда $U_{10} \vdots U_2$ болуы керек: 55:1;

2) 9 саны 5 ке бөлінбейді, сондықтан $U_9 = 34$ те $U_5 = 5$ ке бөлінбейді.

7) Егер $n \neq 4$ құрама сан болса, U_n құрама сан болады: $n = 6$ құрама сан, $U_6 = 8$ де құрама сан.

8) $(U_n, U_{n+1}) = 1$, яғни көрші фибоначчи сандары өзара жай сандар:

$$(U_7, U_8) = (13, 21) = 1.$$

9) $(U_m, U_n) = U_{(m,n)}$, яғни m және n фибоначчи сандары ең үлкен жалпы бөлгіш нөмері (m, n) тең болған фибоначчи санына тең. ((m, n) өрнек m және n дердің ең үлкен жалпы бөлгішін көрсетеді).

Мысал. $(U_5, U_{10}) = U_{(5,10)}$. $(5, 55) = (U_5, U_{55}) = U_5 = 5.$

Бұл қасиеттен фибоначчи сандары тізбегінен кез-келген екі мүше өзара жай болған өсетін сандар тізбегін бөлектеп алу мүмкіндігін келтіріп шығару мүмкін.

Мынадай теорема да орынды:

Егер $U_n = 2k^2$ болса, онда $n = 0, 3$ немесе 6 ға тең болуы қажет.

Мысал.

$$U_3 = 2\cdot 1^2 = 2, n=3,$$

$$U_6 = 8 = 2\cdot 2^2, n = 6.$$

Егер

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

фибоначчи сандарының тізбекті орналасқанын пайдаланып

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \ldots$$

бөлшектер құралса, мұндай бөлшектердің әр біреуі екіншісінен бастап төмендегідей ғажайып үздіксіз бөлшектерден болады:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{1+\frac{1}{1}};\quad \frac{2}{3}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}};\quad \frac{3}{5}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}};\ \frac{5}{8}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}.$$

Фибоначчи сандары төмендегі қасиеттерге де ие.

Егер қандайда бір фибоначчи санының квадратынан оған көрші болған екі фиббоначи сандарының көбейтіндісін азайтса, ретілікпен

-1, +1, -1, +1, -1, +1, ...

сандар пайда болады, яғни

$$U_k^2-U_{k-1}\cdot U_{k+1}=(-1)^k.$$

Мысал.

$$1^2-1\cdot 1=-1, \qquad 5^2-3\cdot 8=+1,$$
$$2^2-1\cdot 3=+1, \qquad 8^2-5\cdot 13=-1,$$
$$3^2-2\cdot 5=-1, \qquad 13^2-8\cdot 21=+1,$$
$$21^2-13\cdot 34=-1,$$
$$377^2-610\cdot 233=-1.$$

Фибоначчи сандарына байланысты кейбір бөліну таңбаларын баяндаймыз:

а) $n \vdots 3$ болғанда ғана U_n жұп сан болады. $9 \vdots 3$; $U_9=34$ - жұп сан.

б) $n \vdots 5$ болғанда ғана $U_n \vdots 5$ болады.

$10 \vdots 5$ болғаны үшін $U_{10} \vdots 5$ болады.

Шынында да $55 \vdots 5$ болады.

в) $n \vdots 6$ болғанда ғана $U_n \vdots 4$ болады. $U_6=8$, $6 \vdots 6$, сондықтан $U_6 \vdots 4$. Шынында да, $8 \vdots 4$.

г) $n \vdots 8$ болғанда ғана $U_n \vdots 7$ болады: $8 \vdots 8$ болғандықтан $U_8 \vdots 7$. Шынында да, $21 \vdots 7$.

д) 8 ге бөлгенде 4 қалдық беретін фибоначчи сандары болмайды; 17 ге бөлінетін тақ нөмерлі фибоначчи сандары болмайды.

е) Кез-келген натурал m сан үшін бірінші m^2-1 фибоначчи сандары арасында кемінде біреу m бөлінетін сан бар.

Мысал. $m=6$ болсын. $6^2-1=35$. Демек, алдыңғы 35 фибоначчи сандары арасында кемінде біреу 6 бөлінетін сан бар. Шыныда да, $U_{14}=144$; $144 \vdots 6$.

Жоғарыда келтірілген мәселелер фибоначчи сандарына қатысты болып, оларды оңай шешу мүмкін. Бірақ фибоначчи сандарына қатысты барлық мәселелер мұндай оңай шешілмейді. Осындай мәселелердің кейбіреуімен танысып өтеміз.

1) U_n фибоначчи саны p жай санына бөлініп, одан кіші болған басқа фибоначчи сандары p ға бөлінбесін. Бұл жағдайда p санына U_n -ң арнайы бөлгіші деп аталады.

Мысал. 11 жай саны $U_{10} = 55$-ң, 17 жай саны болса, $U_9 = 34$-ң арнайы бөлгіші болады.

Келесі мәселе қойылды: $U_n -$ фибоначчи саны үшін p жай сан арнайы бөлгіші болуы үшін n қандай нөмерлі болуы керек?

$U_1, U_2, U_6, U_{12} -$ фибоначчи сандарынан басқа әр қандай фибоначчи сан кемінде 1 арнайы бөлгішке ие болатыны дәлелденген. Осыдан $n \leq p + 1$ болатынын дәлелдеу мүмкін.

Егер $p = 5t \pm 1$ түріндегі жай сан болса, $U_{p-1} \vdots p$ және $p = 5t \pm 2$ түріндегі жай сан болса, $U_{p+1} \vdots p$ болатыны дәлелденген.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, ... фибоначчи сандар тізбегінде жоғарыда айтылғандарды тексеріп көреміз.

$p = 11 = 2 \cdot 5 + 1$ жай сан, $U_{p-1} = U_{10} = 55$; $55 \vdots 11$,

$p = 19 = 4 \cdot 5 - 1$ жай сан, $U_{p-1} = U_{18} = 2584$; $2584 \vdots 19$,

$p = 7 = 5 \cdot 1 + 2$ жай сан, $U_{p+1} = U_8 = 21$; $21 \vdots 7$,

$p = 3 = 5 \cdot 1 - 2$ жай сан, $U_{p+1} = U_4 = 3$; $3 \vdots 3$ болады.

2) Егер U_n құрама сан болса, n де құрама сан болуы шарт па, деген сұрақ қоямыз.
   $U_{19} = 4181 = 37 \cdot 113$ және $U_{31} = 1346269 = 557 \cdot 2417$ мысалдар қойылған сұраққа бұрыс жауап береді.

Фибоначчи сандар тізбегінде 2, 3, 5, 13, 89 ... жай сандар бар. Олардың саны қанша болатыны анықталмаған.

$$n = 3, 4, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 43, 47$$

үшін U_n фибоначчи сандарының жай болатыны дәлелденген.

Қарастырылғандардан басқа жай фибоначчи сандары бізге белгісіз. Белгілі болған ең үлкен фибоначчи жай саны 10 цифрлы $U_{47} = 2971215073$ саны болады. p жай сан болғанда U_p түріндегі құрама сандардың саны шексіз көп деп айтылған болса да, бұл дәлелденбеген болжам.

U_n фибоначчи санын n ге қарап анықтау формуласын табу мүмкін бе, деген сұрақ қойылған болатын. Мұндай формула бар. Бірақ сонысы ғажап, n және U_n натурал сан болса да $U_n -$ді n арқылы бейнелейтін өрнек рационал формула болмайды:

$$U_n = \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}} \qquad \text{(a)}$$

$$a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \qquad a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Шынында да, $n = 1$ болғанда,

$$U_1 = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = 1;$$

$n = 2$ болғанда,

$$U_2 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = 1.$$

Сонымен, фибоначчи сандар тізбегінің 1-жәнe 2- мүшелері (а) формуладан табылып, олар үшін $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$ заңы орынды болғанынан (а) формула анық келіп шығады.

Фибоначчи сандар тізбегінде әр бір үшінші сан жұп, әр бір төртінші сан 3, әр бір бесінші сан 5 және әр бір 15- сан 10-ға бөлінетіні дәлелденген. Қабырғалары түрлі фибоначчи сандарынан құралған үшбұрыш жасау мүмкін болмайтыны да дәлелдеген.

Фибоначчи тізбегінде тақ жай орынды мүшелері, жай фибоначчи санына тең болуы мүмкін (бірақ шарт емес).

Мысал. 1) $U_5 = 11,$ 11 болса жай фибоначчи саны.

2) $U_{19} = 4181 = 37 \cdot 113$ - жай нөмерлі фибоначчи саны болса да, бірақ өзі құрама фибоначчи саны болады.

Англиялық математик Вайнштайн Лепардтің (1966 ж.) дәлелі бойынша алдыңғы $2n$ фибоначчи сандарынан кез-келген $n + 1$ данасын тандап алу мүмкін, олар арасында бірі екіншісіне бөлінетін сандар бар болады.

Мысал . Алдыңғы сегіз 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 фибоначчи сандарынан 1, 2, 5, 8, 13 сандарды бөлектеу мүмкін,ал олардан 8 саны 2 ге бөлінеді.

Фибоначчи тізбегіне ұқсас төмендегідей тізбек те бар:

$$\vartheta_1 = 1, \vartheta_2 = 3, \vartheta_{n+2} = \vartheta_n + \vartheta_{n+1} \ (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Бұл тізбектің бірінші мүшелері 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, ... болады.

n= 2, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 17, 19, 31, 37, 41, 47, 53, 61, 71 лерге тиісті ϑ_n дер жай сандар болатыны тексерілген. ϑ_{71}=688846502588399 саны бүгінгі күнде белгілі болған ϑ_n түріндегі ең үлкен жай сан болады. Мұндай жай сандар шексіз көп деген болжам бар.

1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, ... сандар тізбегі G_n=$G_{n-1} + G_{n-3}$ заңына негізделіп құралған болып, $G_1 = G_2 = G_3 = 1$.

Бұл тізбектің n – мүшесі G_n төмендегі жолмен табылады:

$G_n = C_{n-1}^0 + C_{n-3}^1 + C_{n-5}^2 + \cdots$.

Мысал. $G_9 = C_8^0 + C_6^1 + C_4^2 = 1 + 6 + 6 = 13$. Фибоначчи сандары үшін болса

$$F_n = C_{n-1}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-3}^2 + \cdots$$

заңы орынды болады.

Мысал. $F_5 = C_4^0 + C_3^1 + C_2^2 = 1 + 3 + 1 = 5.$

Енді бір оқиға туралы айтып өтеміз.

Фибоначчи өмір сүрген кезде математиктердің жиналыстары жиі болып тұрған. Бұл жиналыстарда басқа математиктермен бірге Фибоначчи да қатысқан. Бұл жиналыста төмендегі мәселе де шешілген.

Толық квадрат болған саннан 5ті азайтқанда немесе оған 5ті қосқанда тағы да толық квадрат санды құрастыратын өрнек сан табылсын.

Сол жиналыста қатысқан Фибоначчи бір аз ойлап, бұл сан

$$a^2 = \frac{1681}{144} = \left(\frac{41}{12}\right)^2$$

түріндегі бөлшек сан болатынын айтқан.

Шынында да,

$$\frac{1681}{144} - 5 = \frac{961}{144} = \left(\frac{31}{12}\right)^2,$$

$$\frac{1681}{144} + 5 = \frac{2401}{144} = \left(\frac{49}{12}\right)^2.$$

Бұл санды Фибоначчи қалай тапқаны көп уақыттар барысында белгісіз болған. Кеңес математигі Г.Н.Попов өзінің «Тарихий мәселелер» кітабында жоғарыда келтірілген мәселенінің төмендегі алгебраик шешімін баяндады.

Мәселенің шартына негізделіп:

$$a^2 + 5 = U^2,$$
$$a^2 - 5 = \vartheta^2.$$

Сонымен, $U^2 - \vartheta^2 = 10$. Бірақ $10 = \frac{80\cdot 18}{12^2}$.

Сонымен, $(U - \vartheta)(U + \vartheta) = \frac{80\cdot 18}{12^2}$. Мұнда $U + \vartheta = \frac{80}{12}$ және $U - \vartheta = \frac{18}{12}$ деп алынса,

$$U = \frac{49}{12}; \qquad \vartheta = \frac{31}{21}; \qquad a = \frac{41}{12}$$

табылады.

Жоғарыда келтірілген мәселенің $a^2 = \left(\frac{41}{12}\right)^2$ тан басқа да тағы шешімі бар ма, деген сұрақ қойылған болатын.

Пермь елінде өмір сүрген инженер Н.В.Никифоров сондай жалпы формула бар болатынын көрсетті, ол формуладан $\left(\frac{41}{12}\right)^2$ ден басқада тағы мәселе шартын қанағаттандыратын сандар бар болатыны келіп шығады. $a_1 = \frac{3344161}{1494696}$ сондай сандардан болды. Шынында да

$$\left(\frac{3344161}{1494696}\right)^2 - 5 = \left(\frac{113279}{1494696}\right)^2; \quad \left(\frac{3344161}{1494696}\right)^2 + 5 = \left(\frac{4728001}{1494696}\right)^2.$$

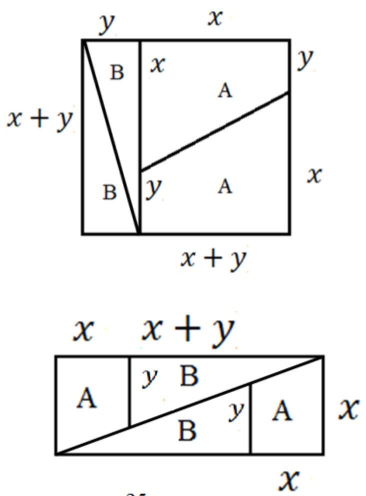
Бұдан басқа

$$a_2 = \frac{249\,850\,594\,047\,271\,588\,364\,480\,641}{5\,354\,229\,862\,821\,602\,092\,291\,248}$$

да сондай қасиетті сан болатыны анықталды.

Енді фибоначчи сандарымен байланысты болған бір геометрик парадоксті қарастырайық.

Қабырғасы x+y ке тең болған квадратты төмендегідей екі тең тікбұрышты үшбұрыш және екі тең трапецияларға бөліп, одан тіктөртбұрыш құрастырамыз (25-сурет).



25- сурет

Егер квадраттан тіктөртбұрышты алу мүмкін болса, бұл суреттің аудандары тең болуы керек. Квадраттан тіктөртбұрышты алу үшін берілген квадрат қабырғаларын x және y бөліктерге қандай бөлу керек, деген сұрақ қоямыз.

Егер қабырғасы x+y=8 болған квадратты x=6, y=2 бөліктерге бөлсек, бөліктер тура келмей, тіктөртбұрыш алмаймыз. Сонымен, егер x=4,5 , y=2,5 бөліктерге бөлінсе, тағы сондай жағдай болуы мүмкін. Бірақ x=5, y=3 деп алынса, тіктөртбұрыш пайда болғандай көрінеді. Мұнда төмендегідей түсінбеушілік пайда болады: берілген квадраттың қабырғасы x+y=8 болғаны үшін оның ауданы $(x+y)^2 = 64$ болып, тікбұрышты төртбұрыштың ауданы

$[x + (x + y)]x = [5 + (5 + 3)] \cdot 5 = 65$ болады.

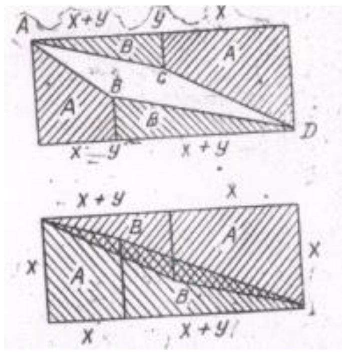
Екінші бір мысал: қабырғасы $x+y=13$ болған квадратты $x=8$, $y=5$ бөліктерге бөліп, тағы жоғарыдағы жолмен тіктөртбұрыш жасалса, онда да тіктөртбұрыш пайда болғандай болса да, бірақ оның ауданы квадраттың ауданынан 1 кв. бірлік кем болады:

$$(x+y)^2 = 13^2 = 169,$$
$$[x+(x+y)]x = [8+(8+5)]\cdot 8 = 168.$$

Бұл түсінбеушіліктерді түсіндіру және оның фибоначчи сандарымен байланысты көрсетейік.

Алдын мынаны айтып өткен жөн, яғни $x=5$, $y=3$ болғанда да, $x=8$, $y=5$ болғанда да алынған екінші сурет тіктөртбұрышқа ұқсайды: бірінші жағдайда төртбұрыштың ортасында ұзын ромб түріндегі «қуыс» пайда болып, екінші жағдайда болса бөліктер бір-бірінің үстіне түскен болады.

Олар соншалық кіші (олардың ауданы 1 кв. бірлік), тәжірибеде ол көрінбейді. Мұны 26-суретте көрсету мүмкін.



26-сүрет.

Квадраттың ауданы $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$, тіктөртбұрыштың ауданы болса, $(2x+y)\cdot x = 2x^2+xy$ ке тең. Егер бұл аудандар арасында айырма R мен белгіленсе, онда $R = x^2-xy+y^2$ ке тең.

$R=0$, яғни $x^2-xy+y^2=0$ болғанда ғана квадрат және тіктөртбұрыштардың аудандары тең болады. Бұдан

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1 = 0 \text{ немесе } \frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Демек, $\frac{x}{y}$ қатынас $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ иррационал санға тең болғанда ғана квадраттың ауданы сол квадрат ауданына тең болған тіктөртбұрыш алу мүмкін. Жоғарыдағы жағдайлар болса, x және y тің мәндері рационал сандарға тең болған еді. x және y тің мәндері бүтін сан болғанда аудандар арасындағы айырманың ең кішісі $R=1$ болады.

Жоғарыда келтірілген мысалдарда $R=1$ болып, x және y тің мәндері болса қатар тұрған фибоначчи сандарынан құралған:

$$U_5 = 5;\ U_4 = 3 \text{ және } U_6 = 8, U_5 = 5.$$

Сонымен қатар пайда болған $\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ мән де

$$U_n = \frac{a_1^n - a_l^n}{\sqrt{5}}; \quad a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad a^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

фибоначчи сандарын алу формуласынан келіп шығады.

1.7 Фарея сандары

Англиялық математик Фарея 1816 жылда төмендегідей алынатын бөлшек сандармен айналысқан. Кейінрек мұндай сандар Фарея сандары деп аталған.

$[0,1]$ кесіндіге тиісті және бөлімдері $b \leq n$ болған $\frac{a}{b}$ қысқармайтын бөлшектердің өспелі тізбек түрінде жазылғаны Фарея тізбегі деп аталады.

$n = 1, 2, 3, 6$ үшін тиісті Фарея тізбектері төмендегілер:

$\Phi_1 = \left\{\frac{0}{1}; \frac{1}{1}\right\}, \qquad \Phi_2 = \left\{\frac{0}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{1}\right\}, \qquad \Phi_3 = \left\{\frac{0}{1}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{1}\right\},$

$$\Phi_6 = \left\{\frac{0}{1}; \frac{1}{6}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{1}{1}\right\}.$$

Φ_n ге тиісті Фарея тізбегін құрастыру үшін бөлімдері n нен үлкен болмаған барлық қысқармайтын дұрыс бөлшектерді өспелі тізбек түрінде жазу жеткілікті. Φ_n мен n-ретті Фарея тізбегі және олардың элементтері Фарея сандары деп аталады.

Фарея сандары келесі қасиеттерге ие:

1) Кез-келген екі қатар орналасқан $\frac{a}{b}$ және $\frac{a_1}{b_1}$ Фарея сандары үшін $a_1 b - a b_1 = 1$ болады.
2) Кез-келген тізбек орналасқан $\frac{a}{b}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$ Фарея сандары үшін $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a+a_2}{b+b_2}$ теңдік орынды болады(тексеріп көріңдер). $\frac{a}{b}$ және $\frac{c}{d}$ Фарея сандарынан алынған $\frac{a+c}{b+d}$ Фарея санына $\frac{a}{b}$ және $\frac{c}{d}$ лардың *медианты* деп аталады.

Медианта түсінігін қолданып, Φ_n - Фарея тізбегі берілгенде, Φ_{n+1} тізбекті құрастыру мүмкін. Оны келесі мысалда қарастырамыз.

Φ_6 ны қолданып Φ_7 құрастырылсын.

Φ_6 да бөлімдерінің қосындысы 7-ге тең болған көрші Фарея сандарын жазамыз: $\frac{0}{1}$ және $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{4}$ және $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{5}$ және $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$ және $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{3}$ және $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{6}$ және $\frac{1}{1}$.

Φ_6 да бұл көрші сандар арасына олардың медианталары қосылса, Φ_7 алынады:

$$\Phi_7 = \left\{\frac{0}{1}; \frac{1}{7}; \frac{1}{6}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{2}{7}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{3}{7}; \frac{1}{2}; \frac{4}{7}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{5}{7}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}; \frac{1}{1}\right\}.$$

Тура сол жолмен Φ_7 ден пайдаланып Φ_8 ді құрастыру мүмкін. Φ_8 және Φ_9 - Фарея тізбегін құрастырыңыз.

Фарея сандарын қолданып, иррационал сандарды жай бөлшектер көмегінде ең оңай дөңгелектеу мүмкін. Мұны көрсету үшін төмендегі мысалды қарастырамыз:

$\alpha = ln10 = 2{,}30258 \ldots$ бөлімі $n \leq 100$ болған бөлшектер көмегінде дөңгелектенсін:

$\ln 10$ -ң бөлшек бөлігі $\alpha_1 = 0{,}30258 \ldots$ иррационал саны $[0;1]$ке тиісті: $0 < \alpha_1 < \frac{1}{2}$; 0 және $\frac{1}{2}$ лер және олардың медиантасы $\frac{1}{3}$ саны Φ_3 ке тиісті:

$0 < \alpha_1 < \frac{1^2}{3}$; $\frac{0}{1}$ және $\frac{1}{3}$ -ң медиантасы $\frac{1}{4}$ саны α_1 ден $\frac{1}{3}$ ке салыстырғанда алыс орналасқан, сондықтан $\frac{1}{4} < \alpha_1 < \frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$ және $\frac{1}{3}$ тің медиантасы $\frac{2}{7}$; бұл медианта α_1 ге $\frac{1}{4}$ және $\frac{1}{3}$ терге қарағанда жақын орналасқан, сондықтан $\frac{2}{7} < \alpha_1 < \frac{1}{3}$; бұлардың медиантасы болған $\frac{3}{10}$ саны α_1 ге $\frac{2}{7}$ ге қарағанда жақындау, сондықтан $\frac{3}{10} < \alpha_1 < \frac{1}{3}$; медианта $\frac{4}{13}$ саны үшін $\frac{3}{10} < \alpha_1 < \frac{4}{13}$ ті аламыз.

$\frac{3}{10}$ және $\frac{4}{13}$ тің медиантасы $\frac{7}{23}$ үшін болса $\frac{3}{10} < \alpha_1 < \frac{7}{23}$ болады. Сол жолмен α_1 ге ең жақын және бөлімдері $n \leq 100$ болған $\frac{10}{33}; \frac{13}{43}; \frac{23}{76}$ медианталарды табамыз.

Сонымен, $\ln 10 = 2 + \alpha_1$ ді есепке алып,

$$2, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{7}{3}, \quad \frac{16}{7}, \quad \frac{23}{10}, \quad \frac{53}{23}, \quad \frac{76}{33}, \quad \frac{99}{43}, \quad \frac{175}{76}$$

терді аламыз (мұнда бөлшек бөлімдері өсу ретімен орналасқан).

$e = 2{,}71828 \ldots$ санын бөлімі $n \leq 90$ болған бөлшектер көмегінде жоғарыда келтірілген әдіспен дөңгелектеңдер.

1.8 Бернулли және Эйлер сандары

Бернулли сандары деп төмендегі жолмен алынатын және барлық рационал сандардан құралған B_n сандарына айтады.

$$B_n = n!\,D_n = n!\,(-1)^n \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 \dots 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \dots \frac{1}{2!} \end{vmatrix}$$

$B_0 = 1$ деп қабылданған.

Бұл формула көмегінде Бернулли сандарын есептеу мүмкін болса-да, n қанша үлкен болса, соған тиісті B_nді табу соншалықты қиындау болады.

Мысал.

$$B_2 = 2!\,(-1)^2 \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} = 2!\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6},$$

$$B_3 = 3!\,(-1)^3 \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} = -6\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12}\right) = -6 \cdot 0 = 0.$$

$B_4, B_5, B_6, \dots$ ларды есептеу үшін тиісті төртінші, бесінші, алтыншы және тағыда басқа ретті детерминанттарды есептеуге тура келеді. Жоғары ретті детерминант мәндерін анықтау өте үлкен есептеулерді талап ететіні белгілі. Сондықтан төмендегі реккурент формуладан пайдалану өте ыңғайлы:

$$B_0 C_{n+1}^0 + B_1 C_{n+1}^1 + B_2 C_{n+2}^2 + \cdots + B_n C_{n+1}^n = 0$$

немесе

$$(1 + B)^{n+1} - B^{n+1} = 0.$$

Мұнда Бином формуласы көмегінде $(1 + B)^{n+1}$ді жіктегенде B -ң дәреже көрсеткіштері индекстерімен ауыстырылады.

Мысал.

$$(1 + B)^{(3)} = 1 + 3B_1 + 3B_2 + B_3.$$

B_1, B_2, B_3 тер реттілікпен бірінші, екінші, үшінші Бернулли сандарын көрсетеді. Енді $B_0 = 1$ болатынына мән берілсе, $n = 1, 2, 3, \ldots$ үшін келесі теңдіктер алынады:

$$B_0 + 2B_1 = 0,\ \ B_1 = -\frac{1}{2}B_0 = -\frac{1}{2};$$

$$B_0 + 3B_1 + 3B_2 = 0,\ B_2 = -\frac{1}{3}B_0 - B_1 = -\frac{1}{6};$$

$$B_0 + 4B_1 + 6B_2 + 4B_3 = 0;\ B_3 = -\frac{1}{4}B_0 - B_1 - \frac{3}{2}B_2 = 0;$$

$$B_0 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3 + 5B_4 = 0;\ B_4 = -\frac{1}{5}B_0 - B_1 - 2B_2 - 2B_3 = -\frac{1}{30};$$

$$B_0 + 6B_1 + 15B_2 + 20B_3 + 15B_4 + 6B_5 = 0;$$

$$B_5 = -\frac{1}{6}B_0 - B_1 - \frac{5}{2}B_2 - \frac{10}{3}B_3 - \frac{5}{3}B_4 = 0;$$

$$B_0 + 7B_1 + 21B_2 + 35B_3 + 35B_4 + 21B_5 + 7B_6 = 0;$$

$$B_6 = -\frac{1}{7}B_0 - B_1 - 3B_2 - 5B_3 - 5B_4 - 3B_6 = \frac{1}{42}.$$

Сонымен,

$$B_0 = 1; B_1 = -\frac{1}{2},\ \ B_2 = \frac{1}{6};\ B_3 = 0;$$

$$B_4 = -\frac{1}{30};\ B_5 = 0;\ B_6 = \frac{1}{42}.$$

Жоғарыдағы жолмен анықталған Бернулли сандары үшін B_1 ден басқа барлық тақ нөмерлі Бернулли сандары нөлге тең.

Кейбір жағдайда $(-1)^{m-1}\ B_m$ Бернулли сандары орнына B_m сандар алынып, тақ нөмерлі сандар ескерілмей, Бернулли сандары жаңадан $B_1,\ B_2, B_3, B_4,\ B_5, \ldots$ нөмерленіп, бұл сандармен жұмыс жүргізіледі. Сонымен, жаңа нөмерлеу нәтижесінде

$$B_1 = \frac{1}{6}, B_2 = \frac{1}{30}; B_3 = \frac{1}{42}, B_4 = \frac{1}{30},\ B_5 = \frac{5}{66}, B_6 = \frac{691}{2730}, \ldots$$

ретінде Бернулли сандары алынады. Осы түрдегі Бернулли сандары натурал сандардың k-дәрежелері қосындысы формуласында қатынасқан болады:

$$1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} - \frac{n^k}{2} + \frac{n^k}{2!}B_1 n^{k-1} -$$

$$-\frac{k(k-1)(k-2)}{4!}B_2 n^{k-3} + \frac{k(k-1)(k-2)k-3)(k-4)}{6!}B_3 n^{k-5} - \cdots$$

k -ң жұп және тақ болуына байланысты оң жақта n немесе n^2 $-$мүшесіне дейін жазылады.

Мысал. $k = 1$ үшін 1+2+3+...+ $n = \frac{n^{1+1}}{1+1} + \frac{n^1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ аламыз.

$k = 2$ үшін

$1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{2}{2!}B_1 n = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$

аламыз.

$k = 3$ болғанда

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3 = \frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{3}{2!}B_1 n^2 = \frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}n^2 =$$

$$= \frac{n^4+2n^3+n^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

аламыз және т.с.с.

Осылардан келіп шығарылған Бернулли сандары кестесі бар. Олардан пайдаланып, натурал сандардың кез-келген дәрежелер қосындысын табу мүмкін.

Енді Эйлер сандары туралы айталық.

$$E_0 = 1,$$

$$\frac{E_0}{2!}+\frac{E_2}{2!} = 0,$$

$$\frac{E_0}{4!}+\frac{E_2}{2!\cdot 2!}+\frac{E_4}{4!} = 0,$$

$$\frac{E_0}{6!}+\frac{E_2}{4!\cdot 2!}+\frac{E_4}{2!\cdot 4!}+\frac{E_6}{6!} = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

теңдеулерді қанағаттандыратын E_{2K} сандарына Эйлер сандары деп аталады. Сонымен, жоғарыда келтірілген теңдеулерді шешіп,

$$E_0 = 1,\ E_2 = -1,\ E_4 = 5,\ \ E_6 = 61,\ \ E_8 = 1385,\ \dots$$

мәндер табылады.

Жалпы $E_0,\ E_2,\ E_4,\ \ E_6, \dots\ \ E_{2n-2}$ Эйлер сандары белгілі болғанда, E_{2n} Эйлер саны

$$E_0 + C_{2n}^2 E_2 + C_{2n}^4 E_4 + \cdots + C_{2n}^{2n-2} E_{2n-2} + E_{2n} = 0 \quad (*)$$

теңдеуден табылады. Барлық Эйлер сандары бүтін сан болады. Мысал үшін E_{10} табу талап етілсін.

(*) формулада $n = 5$ деп алып,

$$E_0 + C_{10}^2 E_2 + C_{10}^4 E_4 + C_{10}^4 E_6 + C_{10}^2 E_8 + E_{10} = 0$$

теңдіктен $E_{10} = -65521$ аламыз. (жоғарыда келтірілген E_0, E_2, E_4, E_6, E_8 мәндерді қолдандық).

Төмендегі формула Эйлер және Бернулли сандары арасындағы байланысты көрсетеді:

$$E_{2k} = \frac{(4B-1)^{2k+1}-(4B-3)^{2k-1}}{2(2k+1)}$$

(оң жақта бином формуласы көмегінде жақшалар ашылғанда дәреже көрсеткіштер В-ң тиісті индекстерімен ауыстырылады)

Енді Эйлер айнымалысы туралы мәлімет береміз.

1740 жылда Л.Эйлер $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$ нің мәні тұрақты санға теңдігін дәлелдеді. Кейінрек бұл сан Эйлер айнымалысы деп аталып, С мен белгіленді. С-ң бір неше ондық үлестері белгілі:

$$C=0,5772...$$

Бірақ С-ң рационал немесе иррационал сан болатыны белгісіз.

2. Математикадағы ғажайып сандар

2.1 Керемет сандар

Евклид өзінің «Негіздер» інде керемет сандармен айналысқан. Ол керемет сандар деп өзінің тән бөлгіштері (яғни өзінен басқа) қосындысына тең болған сандарды атаған. Егер n саны тән бөлгіштерінің қосындысы $\sigma(n)$ мен белгіленсе, керемет сан үшін $\sigma(n) = n$ болады. Мәселен, 6$= 1 + 2 + 3$,

28$= 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ және т.б.

Ежелгі грек ғалымы Платон да керемет сандар туралы жазған. Платонның нақыл сөздерінің бірінде: «6 цифры өте ғажап сан» деген сөйлем кездеседі. Рим елінде өткізілетін іс-шараларда алтыншы орынды ең қасиетті, данышпан адамдарға ұсыну әдет-ғұрып болып қалған. 1917 жылда Римда өте үлкен жер асты ғимараты табылды, онда 28 бөлме болған. Анықталуы бойынша, бұл ғимарат Пифагор атындағы академия болып, онда 28 мүше болған. Ежелгі гректерге (екі мың жыл алдын) тек 4 керемет сан белгілі болған: 6, 28, 496, 8128.

Евклид төмендегі жолмен керемет сандарды құрастыруды баяндаған болатын:

1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, ... геометрик прогрессияның тізбек мүшелер қосындысын есептегенде жай сан пайда болса, ол санды соңғы қосындыға көбейтіп, керемет сан алынған. Мәселен,

1+2=3 - жай сан;

(1+2)·2=6 - құрама сан;

1+2+2^2 =7 - жай сан;

$(1 + 2 + 2^2) \cdot 2^2$=28 - құрама сан.

Сол жолмен керемет сандарды барлық уақыт пайда болатынын төмендегі Евклид теоремасымен баяндауға болады:

Егер $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{2^{k-1}}\ (\boldsymbol{2^k} - \boldsymbol{1})$ ($\boldsymbol{k} > 1 -$ натурал сан) ***болып,*** $\boldsymbol{2^k - 1}$ ***жай сан болса,*** $\boldsymbol{n}$ ***керемет сан болады.***

Мысал. $k \leq 7$ болғанда 2^{k-1} өрнек $k = 2, 3, 5, 7$ үшін сәйкесінше 3, 7, 31, 127 сияқты жай сандарды береді. Оларға Евклид кезінде белгілі болған 6, 28, 496, 8128 сияқты керемет сандар сәйкес келеді. Евклидтен кейін керемет сандар бөліміндегі жаңалықтар Эйлер атымен байланысты. Ол келесі теореманы дәлелдеген:

Кез келген керемет $\boldsymbol{n}$ ***сан*** $\boldsymbol{2^{k-1}}\ (\boldsymbol{2^k - 1})$ ***түрінде болады және*** $(\boldsymbol{2^k - 1})$ ***жай сан болады.***

Сонымен, $n = 2^{k-1}\,(2^k - 1)$ жұп керемет сандардың жалпы түрі. Жоғарыдағы пайымдау-ойларға сәйкес $2^k - 1$ түріндегі жай сан Мерсенн жай сандары болып, $k = p$ жай сан болуы қажет.

Сонымен, $k = p$ болғанда $n = 2^{p-1}\,(2^p - 1)$ керемет санның жалпы түрі болады. Кейбір p жай сандар үшін $n = 2^{p-1}\,(2^p - 1)$ керемет сандар кестесін ұсынамыз:

p	2^{p-1}	$2^p - 1$	керемет сандар
2	2	3	6
3	4	7	28
5	16	31	496
7	64	127	8128
13	4096	6191	33550336
17	65536	131071	858966956
19	262144	524287	13748691328
31	1073741824	2147483647	2305843008139952128

Бұл кестеден әрбір керемет сан 6 немесе 28 сандарымен аяқталатынын байқаймыз. Жалпы, барлық жұп керемет сандар 6 немесе 28 сандарымен аяқталатынын дәлелдеуге болады. Бесінші керемет сан 1460-жылда анықталған. 6, 7, 8 керемет сандарды математик Катальди XYI ғасырда тапқан болатын. Тек XIX ғасырда Эгельгоф және Первушиндер тоғызыншы керемет сан 2645599156983174465469261595384217б ны тапты. Кейбір грек математиктері өзінің тән бөлгіштері көбейтіндісіне тең болған сандарды да керемет сан деп атаған. Мәселен, $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3;\ 8 = 1 \cdot 2 \cdot 4;\ 10 = 1 \cdot 2 \cdot 5;$ $14 = 1 \cdot 2 \cdot 7$ және т.с.с. 6 саны екі мағынада да керемет болып шығады. $n = 2^{p-1}\,M_p$, мұнда M_p - Мерсенн жай сандары. Мерсенн жай сандарының қазіргі уақытқа дейін 24 ті белгілі болғандықтан керемет сандардың да 24 белгілі болып, олардың ең кішісі 6 және қазіргі кезде ең үлкені $n = 2^{19936}\,(2^{19937} - 1)$ болып тур. 386 разрядтық M_{1279} Мерсенн санына тиісті керемет санның 770 разрядтық болатыны анықталған. Катальди 6 дан басқа кез-келген жұп керемет санның 9 n +1 түрінде болатынын дәлелдеді.

Егер $n > 28$ жұп керемет сан болса, $(n-1)$ немесе $(n-6)$ -ң 7-ге бөлінетіні дәлелденген.

Мысал. Үшінші керемет сан: $n = 496;\ 496 - 6 = 490$ саны 7-ге бөлінеді. Төртінші керемет сан: $n = 8128;\ n - 1 = 8127$ саны 7-ге бөлінеді. $p = 13$ ке сәйкес болған бірінші керемет сан 33550336 XY ғасырда табылған. Бірақ ол кезде $2^{17} - 1,\ 2^{19} - 1$ және $2^{31} - 1$ сандардың жай болатынын дәлелдемей, оларды сондай қабылдаған. Олардың жай сан болатынын кейінрек Эйлер

көрсеткен болатын. 1914 жылға келіп 12 керемет сан белгілі болды. Төменде кейбір керемет сандар және олардың анықталған уақытын көрсетеміз.
$p = 61$ болғанда тоғызыншы керемет сан:

$$2^{60} \cdot (2^{61} - 1) = 2^{60} \cdot 2305843009213693951$$

(37 разрядты, И.М.Первушин, 1833 жыл).

$p = 89$ болғанда оныншы керемет сан: $2^{88} \cdot (2^{89} - 1) = 2^{88} \cdot 618970019642690137449562111$ (54 разрядты, Тарри, Поуре, 1911 жыл).

p =107 болғанда он бірінші керемет сан:
$2^{106} \cdot 162259276829213363391538010288127$ (65 разрядты, Факамбер, Поуре, 1914 жыл).

$p = 127$ болғанда он екінші керемет сан:
$2^{126} \cdot (2^{127} - 1)$ (77 разрядты, Лнекс, Факамбер, 1915 жыл).

1952 жылда электрон есептегіш машинасы көмегінде 17 керемет санның 1373 разрядты болатыны анықталды. 1957 жылда 18-керемет сан $2^{3216} \cdot (2^{3217} - 1)$ -ң 2000 нан артық разрядты болатыны дәлелденді. Жоғарыда келтірілген керемет сандар жұп керемет сандар.

Тақ керемет сандар бар ма, деген сұрақ қойылған. Қазіргі уақытқа дейін ешқандай тақ керемет сан табылмаған және олардың жоқ болатыны дәлелденбеген.

$n = p$ тақ жай санның керемет болмайтыны анық, себебі p жай санның бөлгіштері 1 және p болып, олардан тек 1 саны p -ң тән бөлгіші.

p жай сан болғанда $n = p^{\alpha}$ -ң ($\alpha -$ натурал сан) керемет сан бола алмайтынын дәлелдеуге болады. Тақ керемет сандар болған жағдайда да олар өте үлкен сан болатыны дәлелденген. Олардың ешбірі 10^{36} және e^{52729} $(\mathrm{e} = 2{,}71, \ldots -$ иррационал сан$)$ дан кіші бола алмайтыны дәлелденген.

Егер тақ керемет сан бар болса, онда олар тек $p^{4k+1} \cdot m^2$ түрінде болып, (мұнда $p = 4\mathrm{e} + 1 -$ жай сан, $(m, p) = 1$), тақ керемет санның әр түрлі жай бөлгіштер саны 2800 нан көп болуы мүмкін. Бұл жолда жеткен жетістіктер кеңес математигі Градштейн (1925 жыл) есімі мен байланысты.

Математик Хеттің көрсетуі бойынша, кез келген 6 дан басқа жұп керемет санды $2^{\frac{p-1}{2}}$ тізбек тақ сандардың кубтары қосындысы түрінде өрнектеуге болады.

Мысал.

$$28 = 1^3 + 3^3$$
$$496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$$
$$8128 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + 13^3 + 15^3$$

$$33550336 = 1^3+3^3+5^3+\cdots+127^3.$$

$p = 7$ болғанда керемет сан 8128 келіп шығады (кестеде көрсетілген). Сондықтан, 8128 саны $2^{\frac{p-1}{2}} = 8$ тақ сан кубтарының қосындысынан құралған. Кез-келген керемет сан 2-ң тізбек дәрежелер қосындысынан құралған:

$$6 = 2^1+2^2,$$
$$28 = 2^2+2^3+2^4,$$
$$496 = 2^4+2^5+2^6+2^7+2^8,$$
$$8128= 2^6+2^7+2^8+2^9+2^{10}+2^{11}+2^{12},$$
$$33550336= 2^{12}+2^{13}+\cdots+2^{24}.$$

28 ден бастап, әрбір белгілі болған керемет сандардың цифрларын тізбектеп қосып, пайда болған сан мен сондай қосындылар құрастырылса, соңында 1 пайда болады:

28 үшін 2+8=10; 1+0=1;
496 үшін 4+9+6=19; 1+9=10; 1+0=1;
8128 үшін 8+1+2+8=19; 1+9=10; 1+0=1;
33550336 үшін 3+3+5+5+0+3+3+6=28; 2+8=10; 1+0=1.

Бұл бөлімнің соңында өте керемет емес және өте керемет сандар туралы мәлімет беріп өтеміз.

Анықтама. Егер n саны өзінің тән бөлгіштері қосындысынан кіші болса, мұндай санға өте керемет, үлкен болса керемет болмаған сан деп аталады.

$\sigma(n) > n$ болғанда n - өте керемет және
$\sigma(n) < n$ болғанда керемет болмаған болады.

Мысал. 1) $n = 12$, оның тән бөлгіштері 1, 2, 3, 4, 6, онда
$\sigma(12) = 1+2+3+4+6 = 16;$ $12 < \sigma(12),$ демек, 12 өте керемет сан;
2) $n = 8$ оның тән бөлгіштері 1, 2, 3, 4 онда
$\sigma(12) = 1+2+4 = 7;$ $8 > \sigma(8)$ демек, $n = 8$ керемет болмаған сан.

Барлық бөлгіштерінің қосындысы бір-біріне тең болған натурал n және $n+1$ сандар да бар.

Мысал. 14 және 15 сандарының бөлгіштері қосындысы 24 ке, 206 және 207 сандарының бөлгіштері қосындысы 312 ге тең.

$n < 10000$ болғанда, яғни $n = 14, 206, 957, 1334, 1364, 2685,2974, 4364$ болғанда $S(n) = S(n+1)$ болатыны анықталған.

Сондай натурал n сандар шексіз көп деген болжам бар. Егер n нің канондық жіктелуі

$$n = p_1^{\alpha} \cdot p_2^{\beta} \dots p_k^{\mu}$$

түрінде болса,

$$S_n = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\beta+1}-1}{p_2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_k^{\mu+1}-1}{p_k-1}$$

болады.

$S(n) = 2n-1$ теңдеу $n = 2^{\alpha}$ үшін (α - натурал сан) шешімге ие болатынын оңай көрсетуге болады. Бірақ $S(n) = 2n+1$ теңдеу шешімге ие болама деген сұраққа жауап бере алмаймыз.

Математик Католин төмендегідей тізбектермен айналысқан:

$$n, \sigma(n), \sigma\big(\sigma(n)\big), \sigma\Big(\sigma\big(\sigma(n)\big)\Big), \ldots .$$

Кез-келген $n > 1$ үшін бұл тізбек периодты тізбек немесе 1 саны мен аяқталатын тізбек болуы мүмкін.

Математик Пуле $n = 936$ болғанда 189 мүшеден құралған және ең үлкен мүшесі 15 цифрлы болған $936, 1794, 2238, 2250, \ldots, 74, 40, 50, 44, 1$ тізбек пайда болуын өте қиындықпен есептеп тапқан. Егер n керемет сан болса, жоғарыдағы тізбек $n, n, n,$ ...ге айналады, себебі $\sigma(n) = n,\quad \sigma\big(\sigma(n)\big) = n$ ... болады.

$S(n) = kn$ болған натурал сандар да бар. Мұндай сандар еселі керемет сандар деп аталады.

$k = 5$ болғанда еселі керемет сандардың 6 ауы,

$k = 6$ болғанда еселі керемет сандардың 35 і,

$k = 7$ болғанда еселі керемет сандардың 66 сы,

$k = 8$ болғанда еселі керемет сандардың 3 еуі

бар болатыны есептелген.

n санының канондық жіктелуіндегі әр түрлі жай сандар саны 4 тен үлкен болмасын деп елестетейік. Онда үш еселі керемет сан (яғни $S(n) = 3n$) тек $n_1 = 2^3\cdot 3\cdot 5, n_2 = 2^3\cdot 3\cdot 7$ үшін болатыны көрсетілген.

Бұл жағдайда

$S(n_1) = S(2^3\cdot 3\cdot 5) = 360$ қа тең.

$n_1 = 2^3\cdot 3\cdot 5 = 120$, $360 = 3\cdot 120$,

$S(n_1) = \frac{2^{3+1}-1}{2-1}\cdot\frac{3^2-1}{3-1}\,\frac{5^2-1}{5-1} = 360.$

Бұл жағдайларда S(n) ді табу үшін n нің барлық бөлгіштері алынады.

2.2 Бақытты, қолайлы, дос және тума сандар.

1. Бақытты сандар.

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, ... (1) тақ сандар тізбегінен төмендегідей жаңа тізбек құрастырамыз. $u_1 = 1$ және u_1 үлкен болған ең кіші тақ сан 3 ті u_2 деп аламыз. Енді (1) тізбектің әр бір үшінші элементін өшіреміз. Нәтижеде ондағы 5, 11, 17, ... цифрлар өшіріліп,

1, 3, 7, 9, 13, 15, 21, 25, 27, 31, 37, ... (2)

тізбек пайда болады. (2) тізбектің $u_2 = 3$ тен кейінгі өшірілмей қалған элемент 7 ні u_3 деп аламыз: $u_3 = 7$. Енді (2) тізбектің әр бір жетінші элементін өшіреміз. Нәтижеде

1, 3, 7, 9, 13, 15, 25, 27, 31, 37, ... (3)

тізбек пайда болады. (3) тізбектің $u_3 = 7$ кейінгі өшірілмеген мүшесін $u_4 = 9$ деп аламыз. Енді (3) тізбектің әр бір 9- мүшесін өшіреміз және т.с.с. Сол жолмен сондай тізбек аламыз, оның 100 ден кіші болған мүшелері төмендегілерден құралған:

1, 3, 7, 9, 13, 15, 21, 25, 31, 33, 37, 43, 49, 51, 53, 63,
67, 69, 73, 75, 79, 87, 93, 99, ... (4).

Сол жолмен құрастырылған шексіз тізбектің мүшелері бақытты сандар деп аталады. Бақытты сан деп аталуының себебі, олардың өшірілмей қалған болуы мүмкін. (4) тізбекте шексіз көп жай сандар бар, деген болжам бар болса-да, бірақ бұл мәселе дәлелденбеген. 98600 ге дейін болған бақытты сандар арасында 715 жай бақытты сан болатыны есептелген.

2. Қолайлы сандар. Төмендегі теорема орынды:

Теорема. ***Егер натурал n сан үшін***

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{n} &= \boldsymbol{A\alpha^2 + B\beta^2} \\ \boldsymbol{n} &= \boldsymbol{A\alpha_1^2 + B\beta_1^2} \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

қатынастар орынды болса (мұнда $\boldsymbol{A, B}$-натурал, $\boldsymbol{\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1}$ - нөлден басқа бүтін сандар), онда n құрама сан болады. ($A = B$ болғанда жіктеу α және β таңбаларымен айырмашылық болса, олар бірдей жіктеулер деп қабылданады).

Егер натурал n сан үшін $(*)$ -ң біріншісі орынды болса, онда n жай сан болмауы мүмкін.

Мысал. 1) 2501$= 1^2 + 50^2 = 10^2 + 49^2$ (мұнда $A = B = 1$), демек, 2501 құрама сан;

2) 20$= 4^2 + 2^2$. Бірақ 20 құрама сан.

Бұл теорема өте маңызды, себебі оның көмегінде берілген санның $(*)$ түріндегі екі жіктелуін табу нәтижесінде, ол санның құрама болатынын анықтауға болады.

$$p^4 + 4 = (p^2)^2 + 2 = (p^2 - 2)^2 + (2p^2) \cdot (2) \qquad (4)$$

теңдік 5 натурал саннан басқа, кез-келген $p^4 + 4$ түріндегі санның құрама болатынын көрсетеді.

Мысал. $85 = (3^2)^2 + 2^2 = 7^2 + 6^2 = 3^4 + 4$;
85 – құрама сан. (2) жіктелу Софья Жермен теңдігі деп аталады. Жоғарыда келтірілген теореманың керісі барлық уақыт орынды болмауы мүмкін, яғни жай сан $A\alpha^2 + B\beta^2$ түрінде өрнектелмеуі де мүмкін. ($A = B$ болғанда екі квадраттар қосындысы келіп шығады). $p = 4k + 3$ түріндегі сан екі квадраттар қосындысы түрінде өрнектелмейді немесе қандай да құрама сан $A\alpha^2 + B\beta^2$ түрінде тек бірдей жолмен өрнектелуі мүмкіндігі белгілі. Мәселен, $20 = 4^2 + 2^2$.

$A \cdot B$ көбейтіндінің кейбір мәндері үшін жоғарыда келтірілген теореманың керісі орынды болады, яғни ол көбейтінді үшін кез-келген құрама сан $A\alpha^2 + B\beta^2$ түрінде екі түрлі бөлінуіне ие болады.

Эйлер төмендегі сұрақты қойған болатын: $A \cdot B$ көбейтіндінің қандай мәндерінде жай сан $A_\alpha^2 + B_\beta^2$ түрінде өрнектеледі?

Бұл сұраққа Эйлер толық жауап бере алмаған болса-да, бірақ 1 ден 10000 ға дейін болған натурал сандар ішінде мұндай көбейтінділердің тек 65 і болатынын көрсетті және оларды **қолайлы** сандар деп атады.

$14k + 1,\ 14k + 9,\ 14k + 11$ түріндегі тақ сандардың жай сан болуы үшін олардың $x^2 + 7y^2$ түрінде тек бірдей жолмен өрнектеуі дәлелденген, мұнда $(x, y) = 1$, 7 болса қолайлы сан.

Мысалдар.

$$1)\ 29 = 14 \cdot 2 + 1 = 1^2 + 7 \cdot 2^2,$$
$$37 = 14 \cdot 2 + 9 = 3^2 + 7 \cdot 2^2,$$
$$67 = 14 \cdot 4 + 11 = 2^2 + 7 \cdot 3^2,$$

2) $11 = x^2 + 7y^2$ (мұнда $A \cdot B = 7$), бұл жағдайда тек $x = 2,\ \ y = 1$ болғанда ғана болады. $41 = x^2 + 37y^2$. $A \cdot B = 37, \quad x = 2, \quad y = 1$;
$18518809 = 197^2 + 1848 \cdot 100^2$ жай сан. $A \cdot B = 1 \cdot 1848 = 1848$.

Эйлер анықтаған қолайлы сандар төмендегілер:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 18, 21, 22, 24, 25, 28, 30, 33, 37, 40, 42, 45, 48, 57, 58, 60, 70, 72, 78, 85, 88, 93, 102, 105, 112, 120, 130, 133, 165, 168, 177, 190, 210, 232, 240, 253, 273, 280, 312, 330, 345, 357, 385, 408, 462, 520, 760, 840, 1320, 1365, 1848.

Эйлер шыдамдықпен есептеуді 100 000 ға дейін жалғастырған болса да, көрсетілген 65 қолайлы саннан басқа қолайлы сан табылған жоқ. Қазіргі уақытта да сол 65 қолайлы сан бар.

Қолайлы сандардың шекті болатынын математик Чоула дәлелдеген. Бірақ, олардың нешеу болатынына анық жауап жоқ.

3. Дос сандар.

Пифагордан дос не деп сұраған кезде , «досым – менің өзім. Бұл 220 және 284 сандардың достығы» деп жауап берген екен. Бұл сандардың достығы неден құралған, деген сұраққа жауап берейік.

Араб математигі Собит ибн Корра (826-901 жылдар) дос сандардың пайда болу ережесін айтқан болатын. Кейінрек бұл ережені Ферма қайта қайталап, Декарт 1638 жылда басып шығарды.

Егер m және n сандар үшін біреуінің барлық тән бөлгіштері қосындысы екіншісіне тең болса, олар дос сандар деп аталады. Мұнда санның өзі бөлгіш ретінде қабылданбайды.

Мәселен, 220=1+2+4+71+142 (1, 2, 4, 71 және 142 сандары 284-ң тән бөлгіштері). $\sigma(n)$ мен n санының барлық тән бөлгіштері қосындысын белгілейміз. m және n дос сандар болғанда $\sigma(m) = n$; $\sigma(n) = m$ болады. 284=1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110, оң жақтағы қосылғыштар 220-ң тән бөлгіштері.

Егер m және n дос сандар болса, онда $m = 2^\alpha p$; $n = 2^\alpha q \cdot l$ болу қажеттігі дәлелденген. Мұнда α - натурал сан, p, q, l жай сандар болып,

$$p = (2^k + 1)^2 \cdot 2^{2\alpha-k} - 1; \quad q = 2^\alpha - 1 + 2^{\alpha-k}, \qquad l = 2^\alpha - 1 + 2^{\alpha+k}$$

ларге тең болу қажеттілігі де дәлелденген.

Бұл формуланы Собит ибн Корра жасап шыққан.

Егер $k = 1$ деп алынса, p, q, l жай сандар үшін $p = 3^2 \cdot 2^{2\alpha-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^{\alpha-1} - 1$, $l = 3 \cdot 2^\alpha - 1$ ларды құраймыз. αға әр түрлі мәндер беріп, $k = 1$ үшін келесі кестені құрастыру мүмкін:

α	p	q	l	m	n
2	71	5	11	284	220
4	1151	23	47	18416	17296
7	73727	191	383	4437056	9363584

Әрине кез-келген α үшін p, q, l жай сандар болмайды. Сондықтан α ны сондай тандау қажет, яғни пайда болған p, q, l дер жай сандар болсын. α мәні өсуі мен p, q, l нің мәндері, мұнда p ерекше тез өседі және соның үшін p жай немесе құрама болатынын анықтау кейде қиындық тудырады. Кейбір $k = 5,7,9, \ldots$ үшін жоғарыда келтірілген кестені құрастыру өте қиын болады.

Қарастырылған дос сандардан бөлек тағы бір неше жұп дос сандар мысалына тоқталайық:

2620 және 2924; 10744 және 10856;

5020 және 5564; 17296 және 18416;

6232 және 6368; 63020 және 76084;

66928 және 66992.

Дос сандарды құрастыруда негізгі қиыншылық α -ң қандай мәндерінде p, q, l жай сан болуын анықтауда. Сондықтан да барлық дос сандар жиынын елестете алмаймыз.

Қазіргі кезде 900 ге жуық дос сандар жұбы белгілі. Олар арасында өзара жай болған дос сандар жоқ. Анықталған көптеген m және n дос сандар үшін $m+n$ қосынды 9 санына бөлінуі анықталған. Мәселен, $m = 2620$ және $n = 2924$ болсын, $m + n = 5544$, бұл сан 9 ға бөлінеді. Анықталған m және n достардың тек 3 жұбы үшін $m+n$ қосынды 9ға бөлінбейді. Келтірілген мысалдарда барлық дос сандар жұп сандар болып шықты. Бірақ, екеуі де тақ болған дос сандар да бар:

$$m = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13; \quad n = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 139.$$

Бұл жағдайда $m + n = 18690$ саны 9ға бөлінбейді.

Эйлер дос сандардың 60 жұбын анықтаған. Олар арасында әр екеуі де жұп сан болғандар 34 және әр екеуі де тақ сандардан құралғандар 26. Біреуі жұп, екіншісі тақ болған дос сандар жұбы бар ма?

Бұл сұраққа жауап табылған жоқ. Егер мұндай дос сандар бар болса, олардың әр біреуі 10^{23} тен үлкен болып, $m \cdot n$ саны 20 дан артық жай бөлгіштерге ие болу керектігі дәлелденген.

$n, \ \sigma(n), \ \sigma\big(\sigma(n)\big), \ldots$ (а) ($\sigma(n)$ өрнек натурал n нен басқа бөлгіштер қосындысын белгілейді). (а) тізбекте n дос сандардың біреуі болғанда, онда тізбек тек екі әр түрлі мүшелерден құралған периодты тізбекке айналатынын дәлелдеу мүмкін.

Мысал. $n = 220$ болғанда (а) тізбек төмендегідей болады:

220, 284, 220, 284, ...

$n = 284$ болған кезде (а) тізбек 284, 220, 284, 220, ... болады.

Дос сандармен қатар дос айлар туралы да айтуға болады. Мәселен, сәуір мен шілде, наурыз бен қараша, қыркүйек пен желтоқсан айлары дос айлар деп аталады. Олардың достығы төмендегідей: сәуірдің кезекпен цифрлары аптаның қай күніне сәйкес болса, шілденің сол цифры аптаның сол күніне сәйкес болады. 2022 жыл 8 сәуір бейсенбі болса, 2022 жыл 7 шілде бейсенбі күніне сәйкес келеді. Сол мағынада да наурыз бен қараша, қыркүйек пен желтоқсан дос айлар болып есептеледі.

Мамыр айы болса, келесі жылдың қаңтар айымен жоғарыда келтірілген мағынада дос айлар.

4. **Тума сандар** деп келесі жолмен құрастырылған тізбектің сол жағындағы ең бірінші элементіне айтылады.

Мысал: 13 натурал санды алып оған өзінің цифрлар қосындысын қосамыз: 13+(1+3)=17. Бұл санға да өзінің цифрлары қосындысын қосамыз:

17+(1+7) = 25 және т.с.с., 13 және пайда болған сандардан тізбек құрастырамыз. Нәтижеде 13, 17, 25, 32, ... (1) тізбек пайда болады. Бұл тізбекті оң жағына шексіз жалғастыруға болады. (1) тізбектің сол жағына да сандар жазу мүмкін бе, деген сұрақ қоямыз. Ол үшін сондай сан табу керек, ол өзінің цифрлар қосындысымен 13 берсін. Мұндай сан 11. Енді сондай сан табу қажет, ол өзінің цифрлары қосындысымен 11 ді берсін. Мұндай сан 10. Енді 10 да өз кезегінде 5 және 5 цифрлары қосындысынан құралған. Бірақ, еш қандай сан өз цифрлары қосындысы мен 5 ті бере алмайды. Демек, (1) тізбекті сол жағын 5 ке дейін жалғастыру мүмкін.

Сонымен, 5, 10, 11, 13, 17, 25, 32, ... (2) тізбекті аламыз және берілген анықтамаға негізделіп 5 тума сан болады. (2) тізбектің барлық барлық элементтері 5 тен басқа белгілі заңға негізделіп пайда болады. 5 саны болса сан пайда болғанға дейін қалып, одан алдын сан пайда болмайды. Сондықтан да оны тума сан деп аталған болса керек.

Бір разрядты тума сандар 1, 3, 5, 7, 9 болатынын көрсету оңай. Сонымен, келесі тізбектің бірінші мүшесі тума сандардан құралған:

1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, 38, 49, ...

3, 6, 12, 15, 21, 24, 30, ...

5, 10, 11, 13, 17, 25, 32, ...

7, 14, 19, 29, 40, 48, ...

10 нан 19 ға дейін болған екі разрядтық сандардың ешқайсысы тума сан бола алмайды.

Бірінші екі разрядтық тума сан 20, себебі цифрларының қосындысы 20 болған натурал сан жоқ. Нәтижеде 20 тума саннан бастап төмендегі тізбек пайда болады: 20, 22, 26, 34, ...; енді 21 ден 30 ға дейін болған екі разрядтық сандардың біреуі де тума сан бола алмайды. Екі разрядтық тума сандар төмендегілер: 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97. Бұлардың тума сан болатынын есептеу арқылы анықтау оңай.

Көп таңбалы тума сандар да бар: 132, 143, 233, 929, 1952, 874531 және басқалар.

2.3 Егіз жай сандар.

Белгілі болғандай,

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, ... (1)

жай сандар тізбегі шексіз.

Бұл тізбекте бірінен соң бірі орналасқан бір жұп жай сандар бар: 2 және 3. Басқа мұндай реттілікпен орналасқан жай сандар табылмайды. Бірақ, айырымы 2 ге тең болған жай сандар бар болып, олар **егіз жай сандар** жұбы деп аталады. Сонымен, бір уақытта жай болған p және $p+2$ сандар егіз. Мәселен, 3 және 5, 5 және 7, 11 және 13, 17 және 19 және тағы басқа 100 000 ға дейін болған натурал сандар арасында 1224 егіз жай сандар жұбы, 1 000 000 ға дейін болған натурал сандар арасында болса 8164 егіз жай сандар жұбы бар.

Англия математигі Глешер есептеу нәтижесінде 8 000 000 және 8 100 000 сандар арасында 518 егіз жай сандар жұбы бар болатынын көрсетті.

30 000 000 ға дейін болған натурал сандар тізбегінде 152 892 егіз жай сандар жұбы бар.

$p = 8\,004\,119,$ $p = 10\,006\,427,$ $p = 1\,000\,000\,009\,649$ және $p = 1000\,000\,000\,149\,341$ жай сандар үшін p және $p+2$ лер егіз жай сандар жұбын құрастырады. (1) де егіз жай сандар жұбы қанша, деген сұраққа англиялық математик Харди және Литлвудтардың айтуы бойынша, егіз жай сандар жұбы шексіз көп. Мұны қазіргі уақытта егіз жай сандар гипотезасы деп аталады.

$\pi_2(n)$ мен натурал n санына дейін болған егіз жай сандар жұбы санын белгілеп, $n = 37 \cdot 10^6$ ға дейін болған натурал сандар арасында әр бір миллионда $\pi_2(n)$-ң санын төмендегі кестемен көрсетуге болады (бұл кестені 1959-жылда Д.Х.Лемер электрон есептеуіш машинасы көмегімен құрастырған):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	8164	14871	20932	26860	32465	37916	43259	48618	53837	58980
10	64040	69011	73897	78784	83660	88534	93302	98306	10^208	10 707
20	112103	116685	121301	125920	13012	135050	139526	143978	148154	152892
30	157355	161810	166157	170577	174945	179257	183728			

Демек, 37 млн.ға дейін 183 728 егіз жай сандар жұбы бар.

Жай сандар тізбегінде егіз жай сандар жұбының орналасуы тура натурал сандар тізбегінде жай сандардың орналасуы сияқты бірдей. Мұны төмендегі мысалмен түсіндіру мүмкін:

Егер жай сандар тізбегін нөмірлеп шығып, барлық нөмірлерде тек қана егіз жай сандардың кішісіне тиісті нөмерлер қалдырылса және ол нөмірлерден тізбек құрастырылса, нәтижеде жай сандар тізбегіне ұқсас тізбек пайда болады:

2, 3, 5,7 ,10, 13, 17, 20, 21, 28, 33, 41, 43, 45, 52, 57, 60, ...

Егерде егіз жай сандар жұбы шексіз көп болатыны дәлелденсе, онда $2 = p_2 - p_1$ теңдеу шексіз көп шешімге ие болады немесе 2 шексіз көп әдіспен жай сандар айырмасы түрінде өрнектеу мүмкін болады.

Кез –келген жұп санды шексіз көп әдіспен екі бірінен соң бірі орналасқан жай сандар айырмасы түрінде өрнектеу мүмкін, деген болжам бар. Бірақ, біз кез-келген жұп санды кемінде бірдей әдіспен екі бірінен соң бірі орналасқан жай сандар айырымы түрінде дәлелдей алмаймыз. Бұл болжам көптеген жұп сандар үшін тексеріп көрілген:

2=5-3; 4=11-7; 6=29-23; 8=97-89; 10=149-139; 12=211-199; 14=127-113; 16=1847-1831; 18=541-523; 20=907-887.

Бірақ, кез-келген тақ санды екі тақ сандар айырмасы түрінде өрнектеуге болатынын дәлелдеу оңай:

n тақ сан p және q жай сандар айырымы түрінде өрнектелген болсын:

$n = p$-q, мұнда q жұп сан болып, 2-ге тең болатыны анық.

p тақ жай сан; p-ң орнына 3, 5, 7, 11, ... жай сандарды қойып, тақ натурал сандарды құрастырамыз.

Кейбір арифметикалық прогрессияда егіз жай сандар жұбы бірдей орналасқан, мәселен, 1 ден 2 000 000 дейін болған натурал сандар арасында:

$10k$ +7 прогрессияда 5006,

$10k$ +1 прогрессияда 4944,

$10k + 9$ прогрессияда 4919 егіз жай сандар жұбы бар.

n^3 және $(n+1)^3$ арасында кемінде бір жұп егіз жай сандар бар.

n^3 және $(n+1)^3$ арасындағы жай сандар жұбының кестесі төмендегідей:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	2	2	3	3	5	5	4	6	5	11
10	9	12	11	12	9	17	16	19	16	18
20	24	23	17	22	26	32	36	34	25	35
30	39	45	36	36	38	52	42	51	40	59

Мысал. $n = 2$ болғанда 8 және 27 арасында 2 жұп егіз жай сандар бар: 11 және 13, 17 және 19, $n = 5$ болғанда 125 және 216 арасында 5 жұп егіз сандар бар.

Натурал сандардың квадраттары егіз жай сандар жұбының санына қатысты баяу өседі. $n = 100\,000$ ға дейін болған натурал сандардың квадраттары 1000 та, егіз жай сан жұбы болса, 8164 та, $n = 36 \cdot 10^6$ дейін болған натурал сандардың квадраттары 600 та болып, егіз жай сандар жұбы 179 257 дана болады. Сонысы қызық, кейбір $n \leq 122$ үшін n^2 және $(n+1)^2$ арасында ешқандай да егіз жай сандар жұбы кездеспеуі мүмкін:

$n = 9, 19, 26, 27, 30, 34, 39, 49, 53, 77, 122$лер үшін мұндай n-ң біреуі де жоқ.

Төмендегідей болжам бар:

Кез-келген $n > 122$ үшін n^2 және $(n+1)^2$ арасында кемінде бір жұп егіз жай сандар бар болады.

1969 жылда англиялық математик Рисел Ханс электрон есептеуіш машинасы көмегінде егіз жай сандардың 6 жұбын тапты; олардан ең үлкені $p = 9 \cdot 2^{111} - 1$ және $p + 2 = 9 \cdot 2^{111} + 1$ болды. p және $p + 2m$ (m -натурал сан) түріндегі жай сандар жұбы да бар. Мәселен, $p = 3$, $m = 4$ болғанда 3 және 11сандар жұбы және т.с.с. Бұл түрдегі жай сандар туралы төмендегілерді айтуға болады:

1) p және p+4, p және $p + 8$, ... , p және $p + 2^k$ түріндегі жай сандар саны 1 ден n дейін болған натурал сандар арасында $\pi_2(n)$ ге жуық.
2) p және p+6, p және $p + 12$, ... , p және $p + 3 \cdot 2^k$ түріндегі жай сандар саны болса 1 ден n дейін болған натурал сандар арасында $\pi_2(n)$ ге қарағанда шамамен 2 есе көп.

Ретімен орналасқан жай сандардың сондай 4 еуін көрсету мүмкін, олар 2 жұп егіз жай сандар жұбын құрайды, мәселен, 11, 13, 17, 19 және 179, 181, 191, 193. p және p+2 және $p + 6$ немесе p, p+4, p+6 бір уақытта жай сандар болған кездер де бар. Оларды 3 жай сандар немесе **қос үшеуліктер** деп аталады. Мәселен, 5, 7, 11. Қазірге дейін белгілі болған қос үшеулік жай сандардың ең үлкені 100014491, 100 014 493 және 10014497 болатыны анықталған.

1 ден 10^6 дейін болған натурал сандар арасында p және p+2 және $p + 6$ түріндегі үшеулік жай сандар 1392 және 1 ден $2 \cdot 10^6$ дейін болған натурал сандар арасында болса 2378 болатыны есептелген.

p, p +4, p +6 түріндегі үшеулік жай сандар да жоғарыда келтірілген шекараларда шамамен p, p+2, p+6 үшеуліктер санына тең.

p, p+2, p+6, p+8 түріндегі жай сандарда да бар. Олар төртеулік егіз сандар немесе **қос төрттіктер** деп аталады. 11, 13, 17, 19 немесе 191, 193, 197, 199 қос төрттіктер болады. 1957 жылда математик А.Феррье мұндай төрттік жай сандардың ең үлкені $p = 2863308731$ болғанда пайда болатынын анықтаған. $p = 5, 101, 191, 821, 1481, 3251$ болғанда да төрттік жай сандар пайда болады.

В.А.Голубев $n = 1\,000\,000$ ға дейін болған натурал сандар арасында төрттік жай сандар 166 және $n = 2\,000\,000$ ға дейін 295 болатынын, 1959 жылда болса 10 000 000 және 15 000 000 ға дейін сәйкесінше 899 және 1209 болатынын көрсетті.

p, p+2, p+6, p+8, p+12 және p, p+4, p+6, p+10, p+12 түріндегі жай сандарға бірінші және екінші түрдегі бестік егіз жай сандар немесе **қос бестіктер** деп аталады.

Мысал. 5, 7, 11, 13, 17 және 7, 11, 13, 17, 19 бестік егіз жай сандар болады. Бірінші түрдегі қос бестіктер $n = 15 \cdot 10^6$ шекараға дейін төмендегідей болатынын В.А.Голубев есептеген.

n	$2 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$	$6 \cdot 10^6$	$7 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^6$	$9 \cdot 10^6$	$10 \cdot 10^6$	$11 \cdot 10^6$	$12 \cdot 10^6$	$13 \cdot 10^6$	$14 \cdot 10^6$	$15 \cdot 10^6$
Бірінші типтегі қос бестіктер	55	73	89	103	111	126	135	146	160	173	180	187	194	203

Демек, $15 \cdot 10^6$ ға дейін 203 қос бестіктер бар екен.

p, p+4, p+6, p+10, p+12, p+16 жай сандар **қос алтаулықтар** деп аталады.

Мысал. 7, 11, 13, 17, 19, 23. $n = 20 \cdot 10^6$ ға дейін болған ең үлкен қос алтаулықтар 19 800 367, 19 800 371, 19 800373, 19 800 377, 19 800 379 және 19 800 383 болатыны есептелген. p, p+4, p+6, p+10, p+12, p+16, p+24 және p, p+8, p+12, p+14, p+18, p+20, p+24 түріндегі жай сандар сәйкесінше бірінші және екінші типтегі **қос жетіліктер** деп аталады.

Мысал. 7, 11, 13. 17, 19, 23, 31.

$n \leq 2 \cdot 10^7$ дейін болған натурал сандар арасында $p =$7, 43777, 2839927, 3 400 207, 6 005 887, 14 812 867, 16 025 827 және $p =$1954 349, 7 187 759, 8 741 129, 14 856 749 болғанда сәйкесінше бірінші және екінші типтегі қос жетіліктер пайда болатыны есептелген.

p, p+4, p+6, p+10, p+12, p+16, p+24, p+30 дар $p = 7$ және $p = 8\,741\;123$ болғанда, p, $p + 6$, p+14, p+18, p+20, p+24, p+30 болса $p = 1\,954\,343$ және $p = 8\,741\,123$ болғанда сәйкесінше бірінші және екінші типтегі қос сегіздіктер пайда болатынын есептеген.

p, p+4, p+6, p+10, p+12, p+16, p+24, p+30, p+34 тер $p = 7$ және $p = 2\,839\,927$ болғанда, p, $p + 4$, p+10, p+18, p+22, p+24, $p + 28$, p+30, p+34 тер болса $p = 8\,741\,119$ болғанда сәйкесінше бірінші және екінші типтегі қос тоғыздықтар пайда болатынын есептелген.

$2q$ жай сандар немесе $2q$ қос сандар деп айырымы $2q$ ға тең болған жай сандарды айтады.

$q = 1$ болғанда әдеттегі егіз жай сандар пайда болады. Кез-келген q үшін сондай $2q$ болатын жай сандардың кемінде бір жұбы бар екендігі туралы гипотеза айтылған болса да, бұл гипотеза дәлелденбеген.

Кез-келген q үшін $2q$ жай сандар саны шексіз көп болатыны дәлелденбеген.

2.4 Үлкен және кіші сандар

1) Ерте дәуірде Архимед есімімен байланысты болған құм түйірлерін санауға байланысты болған төмендегідей мәселе бар.

Радиусы жерден Күнге дейін (бұл қашықтық 150 миллион километр) болған сфера құммен толтырылған деп елестетейік. Бұл сферадағы құм түйірлері қанша?

Әрине бұл мәселені бірінші рет есіткен адам «құм түйірлері шексіз көп» деп айтады. Архимед өзі ойлап тапқан жүйеге негізделіп мұндай сферадағы құм түйірлерінің саны 10^{63} тен аз болатынын есептеген.

2) $\alpha = 0{,}0001''$ бұрыш өте кіші бұрыш болады ма?

Егер 1 тиындік темір ақшаға 4000 км қашықтықтан қаралса, ол ақша $0{,}0001''$ бұрыш астында көрінеді.

3) Егер бір адам 1920 жыл 1- қаңтардан бастап әр күні 10 сағаттан және бір жылда 300 күн барысында бір секундта 1 сан санау жылдамдығымен тізбекті сандарды бірден бастап санаса 1970 жыл 1-қаңтарға дейін қанша цифр санайды. Есептеулер 540 000 000 цифрдың немесе шамамен 0,5 миллиард цифрдың саналуын береді.

4) Мысырдағы Хеопс пирамидасының көлемі 2678257 куб м, салмағы болса 7231294 тонна. Сондай пирамиданы жасау үшін қажетті материалдарды жеткізіп беруде неше тонна жүк поездын пайдалану қажет?

Егер әр бір вагонға 16 тонна материал жүктеу мүмкін болып, бір құрамда 50 сондай вагондар бар болса, туындаған мәселені шешімін табуда 9000 сондай құрам қажет болады.

Бұл өте үлкен сандар. Енді ойланып көріңіз, Хеопс пирамидасын жасау үшін қанша адам күш жұмсаған? Хеопс пирамидасының биіктігі 150 м, негізінің ауданы болса 40 000 кв.м. Бұл пирамида 200 қатар үлкен тастардан құралған болып, оны 30 жыл барысында 10 мың құл бұдан 5000 жыл алдын жасаған.

Егер пирамида негізінің периметрін (931, 22м) пирамида биіктігінің екі еселенгеніне бөлсек, (2×148, 208 м), 3,14159 пайда болады, бұл π -ң шамалас мәні болады.

Пирамида биіктігі Жерден Күнге дейін болған қашықтықтың миллиардтан бір бөлігіне тең болатыны да анықталған.

5) Германияда 1 жылда 80 миллиард дана темекі шегілген. Бұл сан азба, әлде көп пе?

Егер әр бір темекінің ұзындығы 6,5 см болса, 80 миллиард дана темекі 5200000 км. ұзындықта болады. Бұл ұзындықпен Жер экваторын 130 рет айналып шығу мүмкін.

6) Астрономияда жарық жылы етіп 1 секундта 300000 км. қашықтыққа тарайтын сәуленің 1 жылда өткен қашықтығы қабылданған. Бұл әрине өте үлкен қашықтық. Сіздің ойыңызша ең «жақын» жұлдыз (Сириус) Жерден қанша жарық жылы қашықтығында тұрады? Есептеулер нәтижесінде бұл қашықтық 4 жарық жылына тең.

   Қарапайым көзбен көрінетін жұлдыздар Жерден 1000, 10000 жарықтық жылы қашықтығында тұрады.
7) 1-жылдан 1970 жылға дейін сіздің ойыңызша қанша секунд уақыт өткен? Есептеп, барлығы болып 70 миллиард секунд уақыт өткендігін анықтау мүмкін(2022 жылға дейін секунд бойынша қанша уақыт өткендігін есептеңіз).

Гамбургте өмір сүрген математик Г.Шуберттің есептеуі бойынша эраміздің басталуынан 1902 жыл 29 сәуір сағат 10:40 минутқа дейін 1 миллиард минут уақыт өткен.

Күн сыртының жарықтығы толық ай сыртының жарықтығынан $6 \cdot 10^5$ есе көп.

1куб см. ауада $n_0 = 3 \cdot 10^9$ дана ауа молекулалары бар. Бұл сан үлкен әлде кіші болады ма? Джинс деген математиктің есебі бойынша, бүгінгі күнде дем алған кісінің өкпесінде Юлий Цезардың ең соңғы дем шығарған ауа молекулаларының кейбірі болуы мүмкін.

М.Мое және Ф.Вейнестердің есептері бойынша 1 электронның өмірі $2 \cdot 10^{21}$ жылға тең. Бұл уақыт көп пе әлде аз ба? Бұл $2 \cdot 10^{21}$ жыл Жердің өмірінен 400 миллиард есе, біздің галактикамыздан болса 100 миллиард жыл үлкен болатыны есептелген.

Жоғарыда келтірілген есептердің біреуінде 1 миллиард минут уақыт 1902 жыл ішінде өткенін айтқан болатынбыз. Әрине, бұл есептеулерді жүргізу үшін бірінен соң бірін есептеудің қажеті жоқ және мұндай есептеулер үшін адамның өмірі жетпейтіні бәрімізге белгілі. Мұндай үлкен сандарды есептеу үшін есептеу әдістері бар. Ұлы неміс математигі Ф.Гаусс пен оның 1-сыныпта оқыған кезде болған оқиғаны еске алайық. Мұғалім Ф.Гаусс оқыған сынып оқушыларына 1 ден 100 ге дейінгі болған натурал сандар қосындысын есептеу үшін беріп, өзі жарты сағатқа сыныптан шығайын деген кезде Гаусс нәтижесі 5050 болатынын айтқан (сол кезде Гаусс 6 жаста болған). Мұғалім ол қалай есептеді деп ойланып қалған. Гаусс болса, 1 ден 100 дейінгі натурал сандардың қосындысы 50 та 101 лердің көбейтіндісіне теңдігін айтқан (кейінірек арифметик прогрессияның n та мүше қосындысы формуласын Гаусс келтіріп шығарған).

Тағы бір қызықты мәселе туралы айтсақ.

Әлемде бастағы шаштар саны тең болған кемінде 2 адам бар ма, деген сұраққа ойланбастан ондай екі адам жоқ, деп жауап беру мүмкін.

Бірақ, мұндай адамдардың бір нешеуі болатынын көрсету оңай. Оның үшін адамдардың басындағы шашын санаудың қажеті жоқ. Бір адамның басында 200000 нан артық шаш болмайтынына сенуге болады. Демек, егер 200001 кісі жиыны алынса, олар ішінде кемінде екеуінің басындағы шаштар саны тең болатыны келіп шығады. Егер бүтін әлемде 4 миллиардтан артық адамдар болатынын есепке алсақ, бастағы шаштар саны тең болған адамдардың да көп болатыны келіп шығады.

Поляк математигі Серпинскийдің $x^2 - 991y^2 = 1$ теңдеудің ең кіші натурал шешімдері

$$x_1 = 397\ 516\ 400\ 906\ 811\ 930\ 638\ 014\ 896\ 080,$$
$$y_1 = 12\ 055\ 735\ 790\ 331\ 359\ 447\ 442\ 538\ 767$$

болатынын көрсетті. Егер

$$x = \sqrt{991y^2 + 1} \text{ ке } \quad y = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

мәндерді біртіндеп қойып, әрбір есептеуде 1 секунд уақыт кетеді, деп ойласақ, жоғарыда келтірілген мәндерді анықтау үшін 10^{18} жыл уақыт жетпейтін еді. Егер $400 \cdot 10^{18}$ жыл уақыт кетсе, жоғарыда келтірілген x және y шешімдері табылатын еді.

Тағы бір мысал қарастырайық.

Шахмат ойынын ойлап тапқан адамға Үнді патшасы өте үлкен сыйлық беруді уәде береді. Ол адам оған тек шахмат тақтасының ұяшықтарына төмендегі ереже бойынша бидай дәнін беруді сұрайды: 1-ұяшыққа 1 дана, 2-ұяшыққа 2 дана, 3- ұяшыққа $2^2 = 4$ дана, 4- ұяшыққа $2^3 = 8$ дана және т.с.с. Соңғы ұяшыққа дейін сол заңдылық бойынша бидай беруді сұрайды. Сонда патша: «Сен меннен ештеңке сұрамадың», - деп ренжіген. Бізге белгілі, тек 64 – ұяшық үшін беруі қажет болған 2^{63} дана бидай өте көп. Егер сонша дана бидай жер бетінің суы жоқ жеріне себілсе, 9 мм. биіктіктегі бидай болады.

Қалыңдығы 0,07 мм. болған үлкендеу бір блок қағазды алып, алдымен 2 ге, кейін тағы 2 ге және т.с. 40 рет бүктейміз. Бір ойлап көріңіз, 40 рет бүктелгенде, қандай қалыңдықтағы қағаз пайда болды? Сондай қалыңдықтағы қағаз 100 000 км. ден артық.

Білесіз бе, 2^{400} қандай үлкен сан?

$2^{400} = 2582249878086908589655919172003011874329705792829223512830$ $6593565406476220168411946296543532801378314359031719727474933 76.$

Біздің заманымыздан 1700 жыл бұрын Ахместің құрастырған қолжазбасы бүгінгі Англия музейінде сақталады. Онда өте бұрыңғы қызықты мәселелер қатарында төмендегі мәселе де бар: 7 адамның әр біреуінде 7 мысық болып, әр бір мысық 7 тышқанды, әр бір тышқан 7 бидай масағын жейді. Егер әр бір масақта жеті бидай болса, қанша бидай жойылады? Бұл мәселені есептеумен 7^5 масақ бидай жойылатын болатынын анықтау оңай.

Әр бір адам екі ата-ана, 4 ата-әже, сегіз үлкен ата-әже және т.с. туыстарға ие. Егер 40 әулет кейінге қайрылса (шамамен 1200 жыл алдын) әр бір бүгінгі адамның 2^{40} , яғни 1095911627776 тадан әулеті болған.

Тағыда бір мәселені қарастырамыз. Заманымыздың бірінші жылында бір тиын ақша әр жылы 5% пайда беру шартымен аманат кассасына қойылды. Берілген проценттерді өспелі процент деп есептеп, сол 1 тиын 2000 жыл барысында неше теңгеге айналады?

Өспелі процент формуласымен есептеу нәтижесі 2000 жыл барысында бір тиын 2^{139} тиынға айналуын көрсетеді. 2^{40} тиынның өзі 10 миллиард теңге болады. 2^{139} болса 2^{40} қа қарағанда 2^{99} есе үлкен. 2^{139} тиын 47 таңбалы сан. Сонша ақша бүтін әлемдегі ақша байлығынан да бір неше есе көп.

Шахмат ойынымен барлығымыз қызықамыз. Барлығы болып әр түрлі шахмат партияларының неше түрі бар? Есептегенде, әр түрлі шахмат партияларының барлығы болып $10^{10^{70,5}}$ артық емес.

Белгілі болғандай x-ң өсуімен $\lg x$ өте баяу өседі. $\lg x > 100$ болуы үшін $x > 10^{100}$ болуы керек. Бұл сан қыры 70 миллион жарықтық жылына тең болған кубтағы су молекулалары санынан үлкен.

Архимед төмендегі мәселені де қойған:

Ауданы Күн ауданына тең болған далаға қанша қара малды орналастыру мүмкін? 1880 жылда математик Амторомның есебі бойынша ол $N \approx 77 \cdot 10^{206543}$ ке тең.

Мұндай мәселелердің өте көбін келтіруге болады. Бұлардың барлығы үлкен сандарға мысал болады. Үлкен сандарды үш цифрлы класстарға болып оқытуда төмендегілерді аламыз(мұндай санау Америка, Франция және оңтүстік Европа елдерінде қазірге дейін қолданылады):

мың	10^3
миллион	10^6
биллион	10^9
триллион	10^{12}
квадриллион	10^{15}
квинтилион	10^{18}
секстилион	10^{36}
септиллион	10^{42}
октиллион	10^{48}
нониллион	10^{54}

децииллион 10^{60}

эндекалион 10^{66}

додекалион 10^{72}

центетилион 10^{600} .

Егер адам шашы биллион есе жуан болса, ол Жер диаметрінен 8 есе жуан болатын еді. Қазіргі таңда бүтін ғаламда белгілі болған жұлдыздар және планеталардың ауырлығы 20 нониллион: $20 \cdot 10^{54}$ граммға тең.

Адамның жүрегі оның қысқа өмірінде үздіксіз көп миллиард рет соғады.

Енді келесі жалпы мәселені қарастырайық: 3 та 9 дан құралған сандардың ең үлкені қайсы: 999 ба? әлде 9^{99} ба? 99^9 ба? немесе 9^{9^9} ба? Мұнда 9^{99} дың 99^9 дан үлкен екендігі анық. Бірақ бұлардың барлығынанда 9^{9^9} саны өте үлкен сан. Бұл сан 369693100 цифрлы сан болады(1 секундта 1 цифр жазылады деп шамалайық , сонда бір күнде тоқтамастан 10 сағат жазылса 9^{9^9} санды жазып шығу үшін 28 жыл 48 күн уақыт кетеді).

Жоғарыда келтірілген 2^{400} ге ұқсас бұл санды қатар жолдармен жазуға бола ма? Бұл санның алдыңғы цифрлары 428124773175747048038987115930563521339055482211443514174753 болып, кейінгі цифрлары 2417879935968142262717289 болады. Бұл цифрлар арасында қалған цифрлар белгісіз.

Егер бұл санның цифрлары бірін-кетін жазылса, 1478 км. ұзындықтағы жазу алынады. Егер бұл жазу кітапқа жазылса, әр бірі 800 беттен тұратын 33 томдық кітап пайда болады.

Көлемі 1 куб км. болған қорапқа неше сіріңке данасын орналастыру мүмкін? Мұндай қорапқа 5000 биллион сіріңке данасы орналасады. Егер сіріңке фабрикасында әр күні бір миллион сіріңке данасы жасалса, сонша сіріңке данасын 14 миллион жылда жасайтын еді және оны 10 миллион вагоннан тұратын және ұзындығы миллион км. болған поездге орналастыру мүмкін.

Тағыда үлкен сандарға байланысты мысал келтірейік.

Электрон құм түйіршесіне қарағанда өте кіші мөлшер болатыны белгілі. 1 дана құм түйіршесі Жер шарынан неше есе кіші болса, 1 дана электрон құм түйіршесінен сонша есе кіші болады. Өте мықты телескоптар көмегімен көрінетін ғалам радиусы 1 миллиард жарықтық жылына немесе 10^{20} км. ге тең. Мұндай радиусты шардың көлемі 10^{81} куб см. болады. Егер сондай шар уран электрондарымен толтырылса, оған тек 10^{106} дана уран электроны сиятын еді. Бұл сан 107 цифрдан құралған. Ал 9^{9^9} саны 370 миллионға жуық цифр болады.

1874 жылда математик Крениг жазған кітапта 2^2, 3^{3^3}, $4^{4^{4^4}}$, ... қатар сандар туралы айтылады. Егер $4^{4^{4^4}}$ см. ұзындықтағы қима бойынша жарық нұр жіберілсе, оның бұл қимадан толық өтуі үшін 10^{21} жыл уақыт керек болады. Радиусы $4^{4^{4^4}}$ см.ге тең болған шарға сия толтырылған деп елестетейік. Мұндай мөлшердегі сия $4^{4^{4^4}}$ санын жазуға жетпейтін еді. Әрине, бұдан басқа үлкен сандар өте көп, олар алдында бұл сандар өте кіші болып қалады.

Енді факториал түсінігімен байланысты болған бір неше үлкен сандарды қарастырамыз. 15 шашка даналарымен болған шашка ойынында әр түрлі жағдайлар болуы мүмкін. Бұл жағдайларды 15! болуын оңай есептеп көруге болады. 15!=1307674368000. Демек, 15 шашка данасын бір биллион, яғни 10^{13} тен көбірек орын ауыстыру мүмкін. 16! саны болса 20922789888000 ге тең болып, 15! дан 16 есе үлкен.

Санның өсуімен оның факториалының да тез өсетінін сезу оңай. 9^{9^9} саны өте үлкен сан болатынын жоғарыда айтқан болатынбыз. Егер әр бір 9 жанына факториал жазылса, нәтижеде $9!^{9!^{9!}}$ саны алынып, бұл сан алдында 9^{9^9} саны өте кіші сан болып көрінеді.

Математик Мольтерар 100! санын есептеген, ол
93326215443994152681699238856266700490715968264381621468592963895217599993229915668941463976156518286253697920827223758251185210916844000000000000000000000000 ге тең болады.

Бұл сан 24 нөлмен аяқталып, 158 цифрлы. Ол 9^{9^9} ға салыстырғанда өте кіші сан болады.

3!!! саны $3!!! > 10^{1242}$ болып, мыңнан артық цифрға ие. 3!!! санының соңында 178 нөлдер болып, оның жіктелуінде 2^{360} және 5^{178} дәрежелер енеді. $\frac{996!}{10^{246}}$ есептеп, оның 2310 цифрлы сан болатынын, $\frac{1000!}{10^{249}}$ есептеп, оның 2319 цифрлы сан болатыны анықталған.

449! және 751! сандар арасындағы

500! 550! 563! 600! 603! 650! 652! 700! 750!

барлық 9 та санның анық мәні бар.

10000! санның 35660 цифрлы сан болатынын, 100000! дің болса, 456574 цифрлы сан болатынын, 1000000! дің 8565709 цифрлы сан болатыны есептелген.

Енді өте кіші сандарды қарастырайық.

Белгілі болғандай, егер n үлкен сан болса, $\frac{1}{n}$ өте кіші сан болады.

Біз өте кіші уақыт және өте кіші аралықтарға қатысты мәселелермен танысамыз.

1 секунд уақыт бірлігінің кіші бірліктерінен. Мысал үшін кинода 1 секундта 16 дан 24 ке дейін кадр ауысып тұрады. Соған қарамай адамның көз сезгі мүшесі кино кадрларының үздіксіз өзгеруін сезінгендей болады. Мұның негізгі себебі, адамның көз сезгі мүшесі 0,1 секундтан кем уақыт сезу қабілетіне ие болмауы.

Әрекетпен байланысты болған оқиғалар уақытпен де байланысты. Өте кіші мөлшерде өлшеу 1 мм.ді 1000 бөлікке бөліп, оның 1 бөлігін 1 микрон ($1\ \mu$) деп алынады, 1 микрон өз кезегінде 1000 бөлікке бөлініп, 1 миллимикрон ($\mathrm{m\mu}$) алынады.

Кадмий элементінің қызыл толқын спектрінің ұзындығы ($\lambda_{\text{с}}$ мен белгіленеді), Криптон элементінің қызғылт толқын спектрінің ұзындығы (λ_k мен белгіленеді) өте кіші ұзындықтар:

$$1\mu = 1555164, \qquad 13\lambda_{\text{с}}$$
$$1\mu = 1769557, \qquad 93\lambda_k.$$

Өте күшті микроскоптар 200 мμ ға дейін болған элементерді көру қабілетіне ие. $6{,}022 \cdot 10^{23}$ мөлшерге Лошмитд саны деп аталады. 18 г. суда сонша молекула бар.

Егер сонша молекуланы әлемдегі 1370 куб км. океан суына салып, ол молекулалар бірдей тегіс таралды деп елестетсек, ол уақытта океаннан алынған 1 литр суда салынған молекулалардың 440 данасы бар болатын еді.

Водород молекуласының диаметрі 0,4 мμ , 1 см^3 ыдыстағы водород молекулаларын бірінен соң бірін орналастырса, 11 миллион *км.* ұзындықтағы молекулалар шынжыры алынатын еді. Бұл шынжырмен экваторды 300 есе айналуға болады. Егер ені 0,5 м. болған ағашқа бұл молекулалар орналастырылса, мұндай ағаштың ұзындығы 8,8 метр болатын еді.

Водород атомының радиусы 10^{-8} см.ге тең болып, водород ядросының радиусы 10^{-13} см, электронның радиусы болса $3 \cdot 10^{-13}$ см.ге тең болады.

Денк деген математик төмендегілерді есептеп тапқан: қарапайым көз бен көрінетін ғаламның радиусы $3 \cdot 10^{28}$ см.ге тең. Егер сол радиус бойынша шынжыр түрінде электрондар орналастырылса, мұндай квадраттың қабырғасы 100 км. болатын еді. Егер оларды куб ішіне орналастырса, мұндай кубтың қыры 30 см.ге тең болаты екен.

Егер атом түйіршігі миллион есе үлкейтилсе, ол қандай болып көрінеді? Сонысы ғажап, үлкен сандар туралы елес бұл мөлшерді өте үлкен деп ойлауға мәжбүрлейді. Ол сөз соңында қойылатын нүктедей болады.

Электрон водород атомының айналасында 1 секундта $7 \cdot 10^{15}$ рет айналады. Салыстыру үшін соны да айту қажет, ұшақ пропеллері 1 секундта 25 рет айналады. 1 м^3 қорғасынның ауырлығы 11,34 тонна болады. Оның атомдары арасындағы арақашықтық болмағанда ол тек 1см. көлемді иеленген болып, бұл көлемге 11,34 тонна салмақ орналасқан болатын еді. Өкінішке орай, біздің планетамыздағы айтарлы барлық металдардың атомдары арасында бостық бар.

1 секунд өте кіші уақыт аралығы, $\frac{1}{1000}$ секунд болса өте кіші уақыт бірлігі болып, бұл уақыт ішінде ешқандай өзгеру алаңға келмейді, деп елестету мүмкін. Бірақта $\frac{1}{1000}$ секунд ішінде өте көп өзгерістер болуы мүмкін. Сондай уақыт аралығында 36 км/сағат жылдамдықпен жүретін поезд 1 см арақашықтықты өтеді. Дыбыс $\frac{1}{1000}$ секундта 33 см. арақашықтықты, қару оғы болса сонша уақыт ішінде 70 см. арақашықтықты басып өтеді. Жер планетасы сонша уақыт ішінде өзінің Күн айналасындағы айналуында 30 м. арақашықтықты басып өтеді.

1 секундтің миллионнан бір бөлігінде, әрине, ешқандай өзгеріс болмайды деп елестету мүмкін. Бірақ ондай емес. Жарық сәулесі сонша уақыт ішінде ($\frac{1}{10^6}$ секундта) 300 м. арақашықты басып өтеді. $\frac{1}{10^6}$ секунд уақыт ішінде біздің көзімізге 400 миллион қызыл жарық толқыны түседі. Демек, 1 дана қызыл жарықтық толқыны біздің көзімізге түсуі үшін қажет болған уақыт $\frac{1}{400000000000000}$ секундқа тең. Сондай уақыт аралықтары да бар, олар үшін жоғарыда келтірілген өте кіші уақыттар үлкен болып көрінеді. Физикада рентген сәуле жарық толқындарының бір секундтағы әрекеттері 2500 биллион рет болатыны есептелген.

Үлкен және өте кіші сандар туралы талдауымызды аяқтап, қиял әлеміне «саяхат» жасаймыз.

Елестетейік, алыптар әлемі бар болып, ол әлемде әрбір адамның бойы 10 м. болсын. Сол әлем адамдары өз елінде өзін алыппын деп сезіне ме ? Немесе ергежейлі адамдар (олардың бойы 10см.) өз елінде өзін ергежейлімін деп ойлай ма? Әрине олай емес. Бірақ тура Гулливерге ұқсас алыптар әлемінде біз ергежейлі болып көрінеміз немесе ергежейлілір әлемінде алып болып көрінеміз.

Тағы да қиял әлеміне тереңірек кіріп, төмендегілерді елестетіп көрейік.

Ядро айналасында әрекеттенген электрондар да тура біз жерде өмір сүрген сияқты кіші адамдар болып, олар да математикамен айналысады деп елестетейік. Ондағы аралық және уақыт біздің ойымызша өте кіші сандар. Ол адамдар үшін болса бұл мөлшерлер өте үлкен сандар сияқты көрінеді.

Енді елестетіп көрейік: Күн, планета және жұлдыздар қандайдыр қиял жандіктерінің молекула және атомдары болсын. Ол ғаламдада адамдар математика мен айналысатын болсын. Онда олар әлеміндегі сандар біздер үшін өте үлкен сандар есептелсе, олар үшін болса әдеттегідей қарапайым сандар болады.

Адамдардың математика саласында жеткен үлкен жетістіктерінің бірі, олар айналадағы «шектілік» тосығын жарып, «шексіздік» түсінігін қиялдан нақты пән әлеміне жариялады.

2.5 Алгебралық және трансцендент сандар.

Орта мектепте сан түсінігі натурал сандардан басталып, рационал, иррационал, комплекс сандармен аяқталады. Бұлар алгебралық және трансцендент сандар деп аталған сандардың дербес жағдайы.

Кез-келген $\frac{a}{b}$ $\left((a,b)=1, a-\text{кез келген бүтін сан},\ b-\text{натурал сан}\right)$ рационал сан $bx-a=0$ теңдеудің түбірі болады. Керісінше, коэффициенттері бүтін сандардан құралған кез-келген $bx-a=0$ – бірінші дәрежелі теңдеудің түбірі $(b\neq 0)$ $x=\frac{a}{b}$ рационал сан болады.

Ең қарапайым иррационал сандар $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0, b, c$ – бүтін сандар) квадрат теңдеудің түбірі болады.

Мысал. $x=\pm\sqrt{5}$ иррационал сан $x^2-5=0$ теңдеудің түбірі, $x=\pm\left(\sqrt{2}-1\right)$ болса $x^2+2x-1=0$ теңдеудің түбірі болады.

Бірақ коэффициенттері бүтін сандардан құралған кез-келген квадрат теңдеудің түбірі иррационал сан бола бермайды.

$x^2-x+5=0$ теңдеудің түбірлері $\frac{1\pm i\sqrt{19}}{2}$ комплекс сан болады.

Жоғарыда келтірілгендерден барлық рационал сандар, кейбір иррационал сандар және комплекс сандар коэффициенттері бүтін сандардан құралған теңдеудің түбірлері болатыны келіп шығады. Сондай сандарды алгебралық сандар деп аталады. Жалпы айтқанда, коэффициенттері бүтін сандардан құралған

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \quad (1)$$

теңдеудің түбірі болған нақты және комплекс сандарға алгебралық сандар деп аталады.

Сонымен, алгебралық сандар барлық рационал сандар (5,-$\frac{2}{7}$, 0,21(5) секілді), кейбір иррационал сандар $\left(\sqrt{2},-\sqrt[3]{7},1+3\sqrt{2}\right)$ сияқтылар) және кейбір комплекс сандар $\left(3-i,\ \ 2-3i,\ \frac{2}{3}-1.4i\right)$ енеді. Не себептен барлық иррационал және барлық комплекс сандар алгебралық сандар бола алмайтынын кейінрек көрсетеміз.

Алгебралық сандар бірінші, екінші және жалпы n-дәрежелі алгебралық сандар болады.

Егер α алгебралық сан (1) түрдегі n-дәрежелі теңдеудің түбірі болып, дәрежесі n нен кіші болған сондай теңдеудің түбірі болмаса, онда n-дәрежелі алгебралық сан деп аталады.

Мысалдар.

1)Барлық рационал сандар бірінші дәрежелі алгебралық сан болады, себебі $x = \frac{b}{a}$ рационал сан $ax - b = 0$ теңдеудің түбірі болады.

2) $x^2 - 4x + 4 = 0$ теңдеудің түбірі болған $x = 2$ рационал санды екінші дәрежелі алгебралық сан деп қарастыруға болмайды, себебі $x = 2$ саны $x - 2 = 0$ бірінші дәрежелі теңдеудің де түбірі болады.

3) $x = \sqrt[7]{3}$ сан жетінші дәрежелі алгебралық сан болады, себебі ол $x^7 - 3 = 0$ теңдеудің түбірі болып, дәрежесі жетіден кіші болған және коэффициенттері бүтін сандардан құралған теңдеудің түбірі болмайды.

4)$x = cos\frac{\pi}{n} + isin\frac{\pi}{n}$ комплекс сан болса n-дәрежелі алгебралық сан, себебі ол $x^n + 1 = 0$ теңдеудің түбірі болады.

$$\left(cos\frac{\pi}{n} + isin\frac{\pi}{n}\right)^n + 1 = \cos\pi + isin\pi + 1 = -1 + 0 + 1 = 0$$

(Муавр формуласының негізінде).

$n = 5$ болғанда $x = cos\frac{\pi}{5} + isin\frac{\pi}{5}$ сан 5-дәрежелі алгебралық сан болады.

Теорема. m, n – дәрежелі α және β алгебралық сандардың қосындысы $\alpha + \beta$, айырмасы $\alpha - \beta$, көбейтіндісі $\alpha \cdot \beta$ және бөліндісі $\frac{\alpha}{\beta}$ $(\beta \neq 0)$ көбімен $m \cdot n$ дәрежелі алгебралық теңдеу болады.

Мысалдар.

1)$\alpha = \sqrt{2},\ \beta = \sqrt{3}$ екінші дәрежелі алгебралық сан болады, бірақ $\alpha + \beta = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ болса 4-дәрежелі алгебралық сан, себебі

$(\alpha + \beta)^2 = 5 + 2\sqrt{6}$; $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ саны $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ теңдеудің түбірі болады.

2)$\alpha = \sqrt{3},\ \beta = \sqrt{12}$ екінші дәрежелі алгебралық сан болады, бірақ

$\alpha \cdot \beta = \sqrt{36} = \pm 6$ болса бірінші дәрежелі алгебралық сан болады.

3)$\alpha = \sqrt[6]{3}$ және $\sqrt[6]{12}$ алтыншы дәрежелі алгебралық сан болса да, $\alpha \cdot \beta = \sqrt[6]{36} = \sqrt[3]{6}$ үшінші дәрежелі алгебралық сан болады.

Егер $\beta \neq 0$ алгебралық сан болса, $\frac{1}{\beta} = \beta^{-1}$ да алгебралық сан болады.

Мысал. $\frac{1}{\sqrt[7]{11}}$ алгебралық сан болады, себебі $\sqrt[7]{11}$ да алгебралық сан .

Жалпы рационал сандар және рационал сандардан алгебралық амалдар көмегінде алынатын сандар алгебралық сандар болады.

Мысалдар. 1) $\alpha = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{7}}{1+2\sqrt[5]{11}}}$ алгебралық сан болады.

2) $x^3 + 1 = 0$ теңдеудің түбірі

$$x = \sqrt[8]{-1} = \sqrt[8]{cos\pi + isin\pi} = cos\frac{\pi + 2\pi k}{8} + isin\frac{\pi + 2\pi k}{8}$$

$(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ түрінде өрнектеліп, алгебралық сандардан құралған.

$$x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}x + \alpha_n = 0 \quad (2)$$

теңдеудің түбірі α бүтін алгебралық сан деп аталады (мұнда $a_0 = 1$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ -бүтін рационал сандар).

Сонымен, барлық бүтін рационал сандар бүтін алгебралық сандарға енеді, себебі олар $x + a = 0$ теңдеудің түбірі болады(a -бүтін сан).

Сонымен қатар, $1 + i$, $1 + \sqrt{2}i$, $\pm\sqrt{3}$ да бүтін алгебралық санға енеді, себебі олар сәйкесінше $x^2 - 2x + 2 = 0$, $x^2 - 2x + 3 = 0$ және $x^2 - 3 = 0$ теңдеулердің түбірлері болады.

Нақты алгебралық сан сондай рационал немесе иррационал сан болуы мүмкін, себебі ол сан коэффициенттері бүтін сандардан құралған теңдеудің түбірі болса. α-бүтін алгебралық сан болғанда $\sqrt{\alpha}$ да бүтін алгебралық сан болады.

Алгебралық сандар теориясында жеткен жетістіктер неміс математигі Куммер, Дедекинд және орыс математигі Е.М.Золотарев аттарымен байланысты.

Алгебралық болмаған сандар бар ма, деген сұраққа барлығы алгебралық сандар деп айтылатын еді.

Тек 1844 жылда француз математигі Ж.Лиувилл алгебралық болмаған сандар бар деген теореманы дәлелдеді. Бірақ бұл теореманың дәлелі өте күрделі болды. Ол жоғары математика көмегінде коэффициенттері бүтін сандардан құралған ешқандай теңдеудің түбірі бола алмайтын сандардың болатынын дәлелдеді. Кейінрек мұндай сандар **трансцендент сандар** деп аталды.

1873 жылда ұлы неміс математигі Г.Кантор өзі негіздеген жиындар назариясы көмегінде трансцендент сандар болатынының түп дәлелін берді. Біз Кантордың келтірген дәлеліне тоқталамыз. Оның үшін жиындар теориясына тиісті кейбір мағлұматтармен танысамыз.

Жиындар жалпы үш түрлі: шекті жиын, бос жиын және шексіз жиын.

Мысалдар. 1) Осы беттегі әріптер жиыны, бүтін әлемдегі адамдар жиыны, біздің галактикамыздағы жұлдыздар жиыны шекті жиындар болады, себебі

олардың элементтер саны белгілі бір натурал саннан үлкен болмайды. Элементтер саны нешеу болатыны белгісіз шекті жиындар да бар. Мәселен, $2^{2^{17}}+1$ дің натурал бөлгіштер саны белгісіз, себебі бұл санның жай немесе құрама болатынын білмейміз.
2) $x^2+1=0$ теңдеудің нақты түбірлер саны, 12 натурал санның 20 дан үлкен болған бөлгіштер саны бос жиындарға мысал болады, себебі $x^2+1=0$ теңдеудің нақты түбірі жоқ, 12-ң болса 20 дан үлкен болған бөлгіші болмайды.
3) Натурал сандар жиыны, жұп сандар жиыны, тақ сандар жиыны, жай сандар жиыны шексіз жиындарға мысал болады.

Г.Кантор шексіз жиындар да тура шекті жиындар сияқты бірдей болатынын көрсетті.

Бірінші типтегі шексіз жиындар санақты жиындар деп аталады. Мұндай жиындарға барлық натурал сандар жиыны, жұп сандар жиыны, тақ сандар жиыны, жай сандар жиыны мысал болады. Бұдан басқа рационал сандар жиыны, алгебралық сандар жиыны да санақты жиынға мысал болады.

Екінші типтегі шексіз жиындар санақсыз жиындар деп аталады. Олардың санақсыз болуы элементтерін ешқандай жолмен натурал сандар көмегінде нөмірлеуге болмайды.

Кез-келген кесіндідегі барлық нақты нүктелер жиыны және жалпы барлық нақты сандар жиыны санақсыз жиынға енеді.

Шексіз жиынның элементтер санын натурал санмен белгілеуге болмайды. Мұндай жиындардың элементтер санын өрнектеу үшін **кардинал** сандар деп аталатын сандар енгізілген (кардинал- шектіден кейін мағынаны береді).

Мысал. Санақты жиындардың элементтер санын $\varkappa_0$(алеф нөль) кардинал санымен, нақты сандар жиынының элементтер санын С (континуум) карди-нал санмен белгілеу қабылданған. $2^{\varkappa_0}=C$ болатынын дәлелдеу мүмкін. Сонымен, $C>\varkappa_0$ болады.

Г.Кантор төмендегі сұрақты қойған болатын. Элементтер саны $\varkappa_0$ ден үлкен, бірақ C дан кіші болған шексіз жиын бар ма? Осыған континуум-гипотеза деп аталады. Көп жылдар барысында мұндай жиынның бар немесе болмайтыны дәлелденбеген.

Неміс математигі Гильберт 1900 жыл Парижде болып өткен бүкіл дүние математиктерінің кеңесінде 23 шешімі табылмаған мәселені баяндаған еді. Осы мәселенің біріншісі континуум-гипотезасы болатын. Тек 1963 жылда америкалық математик П.Ж.Коэн $\varkappa_0$ ден үлкен және С дан кіші болған кардинал санның бар немесе болмайтынын дәлелдеу мүмкін емес деп көрсетті.

Келтірілген пікірлерді қолданып, алгебралық болмаған сандардың болатынын оңай дәлелдеу мүмкін.

Егер

X -нақты сандар жиынын,

R- рационал сандар жиынын,

I- иррационал сандар жиынын

өрнектесе, $X = R + I$ болатыны анық. Нақты сандар жиыны санақсыз жиын. Рационал сандар жиыны болса санақты жиын.

Егер иррационал сандар жиыны тек нақты алгебралық сандардан құралған болса, онда барлық нақты сандар жиыны санақты жиынды құрайтын еді. Демек, иррационал сандар құрамында алгебралық болмаған нақты сандар бар (себебі жоғарыда барлық алгебралық сандар жиыны санақты жиын болатыны туралы айтқан едік).

Сонымен, трансцендент сандардың болатыны және олар нақты сандардың негізгі бөлігін құрайтыны келіп шығады.

Лиувилл және Канторлар трансцендент санның болатынын теориялық дәлелдеген, бірақ ешқандай мысал көрсетпеген. Бұрынғы заман математиктерін дөңгелектің квадратурасы туралы мәселе қызықтырған болатын (циркуль және сызғыш көмегінде берілген дөңгелектің ауданына тең болған квадраттың жасалу мәселесі).

Егер дөңгелектің радиусы бірге тең болса, онда оның ауданы π ге тең болады тағы да мәселе циркуль және сызғыш көмегінде ұзындығы π ге тең болған кесіндіні салу мәселесіне айналады. Көп ғалымдар бұл мәселемен айналысқан болса да, бірақ ешқандай нәтиже болмаған. Тек Л.Эйлер дөңгелектің квадратурасы мәселесі шешілмейтін мәселе болатынын дәлелдеген және π^* саны коэффициенттері бүтін сандардан құралған теңдеудің түбірі боламайтыны туралы пікірін баяндаған. Бірақ π санының трансцендент сан болатынын алғаш рет 1882 жылда француз математигі Линдеман дәлелдеді. 1873 жылда француз математигі Ш.Эрмит

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots$$

трансцендент сан болатынын дәлелдеген. e және π сандарының иррационал сан болатынын 1761 жылда математик Ламберт дәлелдеген. π және e сандар математикада өте маңызды. π саны көбірек геометрияда, ал e саны талдауда кездеседі.

Математик Линдеман $e^{\pi i} = -1$ және $e^{\pi} = i^{-2i}$ теңдеудерді алумен e және π арасындағы байланысты көрсетті.

Жоғарыда айтылған Д.Гильберт гипотезаларының ретімен алғанда 7-гипотезасы төмендегіден құралған:

«Біз арифметикада сырттан келген π және e сандардың арифметик жағдайын дәлелдеген болсақ та, бірақ арифметиканың ішінде болған кейбір сандардың арифметик жағдайларын білмейміз. $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{3}^{\sqrt{5}}$, 3^{π}, $e^{\sqrt{5}}$, e^{π} қандай сандар?». Бұл сұраққа көп жылдар барысында жауап табылмады.

Тек 1934 жылда кеңес математигі А.О.Гельфонд (1906-1968) өте маңызды келесі теореманы дәлелдеді:

Егер $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ алгебралық сан болып, β рационал сан болмаған кез-келген алгебралық сан болса, α^{β} түріндегі сан трансцендент сан болады.

Сонымен, жоғарыда келтірілген мысалдардың барлығы және i^{π}, $(2-i)^{3+i}$, $\pi^{\sqrt{3}+i\sqrt{5}}$ сияқты сандар трансцендент сан болады.

Сонымен қатар, рационал сандардың ондық логарифмдері де (егер олардың өзі рационал сан болмаса) трансцендент сан болатынын дәлелдеу мүмкін.

Сонымен қатар

$$\alpha = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \cdots = 0{,}121122\ldots\underbrace{11\ldots12}_{n}\underbrace{2\ldots2}_{n}\ldots;\ \beta = \frac{1}{2^{1!}} + \frac{1}{2^{2!}} + \cdots$$

секілділердінда трансцендент сан болатынын көрсету мүмкін (α санына Лиувилл саны деп аталады).

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{2^{k-1}}} = 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}000, +0{,}00000001 + \cdots$ санының трансцендент сан болатыны анықталған. $z = \alpha + \beta i$ комплекс сан үшін α және β нақты трансцендент сандар болса, онда z комплекс трансцендент сан болады.

Мысал. $z = 2^{\sqrt{3}} + i\pi$ комплекс трансцендент сан болады.

Теорема. Кез-келген шексіз ондық бөлшектің сондай кез-келген ұзындықтағы бөліктері табылып, олар сол ондық бөлшекте шексіз көп рет қайталанады.

Бірақ, мысал үшін $\sqrt{2}$, π және e сандардың шексіз ондық бөлшек жіктелуінде қандай сан шексіз көп рет қайталатынын білмейміз.

1950 жылда $\sqrt{2}$ нің үтірден кейінгі 1000 нан артық цифрлары есептелген болса да, бұл цифрлардың бірінен соң бірі келу заңдылығы туралы ештеңе айта алмаймыз.

π дің шексіз ондық бөлшек жіктелуінде 123456789 саны болмағанда ең болмағанда бір рет кездесуін білмейміз.

Теорема. $\boldsymbol{b} > 1$ ***натурал сан болып,*** $\boldsymbol{u_0}, \boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_n}, \ldots$ ***Фибоначчи сандары болса,*** $\boldsymbol{E_n} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{b^{n_0}} + \frac{1}{\boldsymbol{b^{n_1}} + \cdots}}$ ***трансцендент сан болады.***

$\theta = 0{,}1234567891011\ldots$ (0 ден кейін бірінен соң бірі барлық натурал сандар жазылған) және $\theta_1 = 0{,}23571113171923\ldots$ (0 ден кейін барлық жай сандар жазылған) трансцендент сандар болатыны дәлелденген.

Трансцендент сандар туралы шешімі табылмаған гипотезалар да бар.
Мысал. $e + \pi, e - \pi, e \cdot \pi$ немесе $\frac{e}{\pi}$ түріндегі сандардың арифметик жағдайын және оларды иррационал сан болатынын білмейміз.

2.6 Математикадағы кейбір сиқырлы сандар.

Грек ғалымы Пифагор математикаға негізделетін құпия ілімнің негізін қалады. Ол сандардың барлық нәрсе екенін және математиканың көмегімен кез келген құбылысты түсіндіруге болатынын дәлелдеген [1].

Танымал математик Пифагор өзінің шәкірттерімен өткізілген кездесудің бірінде былай депті: «Кез келген санның өзіне тән ғажайыптығы бар!». Осы кездесуге келген Пифагордың шәкірттерінің біреуі сұрапты: « Жай сан болған 17 –нің қандай ғажайыптығы бар? ». Пифагор мынадай жауап берген екен: 17 өте ғажайып сан . Ол екі квадраттардың және екі төртінші дәрежелі сандардың қосындысынан құралған:

$$17 = 1^2 + 4^2 = 1^4 + 2^4 .$$

17 ден алдын келетін 16 ның да және кейін келетін 18-дің да ғажайтып қасиеттері бар: 16 толық квадрат және төртінші дәрежеден құралған болса, ал 18 саны екі рет толық квадраттардың қосындысы болуымен бірге периметрі және ауданы 18 кв.бірлікке тең болған тіктөртбурышқа ие болған фигураны береді(төмендегі сызба).

18 ден басқа натурал сандар мұндай қасиетке ие емес. Әрине өзінің мысалдарында Пифогор тек қана натурал сандарды назарда ұстаған.

Енді осындай ғажайтып қасиеттерге ие болған кейбір сандарды оқушылар назарына ұсынамыз.

1) Егер бірінші мүшесі және айырмасы 15873 -ке тең болған тоғыз мүшелі прогрессияның барлық мүшелерін біртіндеп 7 санына көбейтсек төмендегідей заңдылықтағы ғажап сандар пайда болады:

$$\begin{aligned}
15873 \cdot 7 &= 111111\\
31746 \cdot 7 &= 222222\\
47619 \cdot 7 &= 333333\\
63492 \cdot 7 &= 444444\\
79365 \cdot 7 &= 555555\\
95238 \cdot 7 &= 666666\\
111111 \cdot 7 &= 777777\\
126984 \cdot 7 &= 888888\\
142857 \cdot 7 &= 999999.
\end{aligned}$$

2) Егер $7^2 = 49$ санның цифралар арасына 48 жазылып төмендегідей тәсілмен сандар құралса , нәтижеде барлық уақыт квадратты сандар пайда болады:

$$\begin{aligned}
49 &= 7^2,\\
4489 &= 67^2,\\
444889 &= 667^2,\\
44448889 &= 6667^2
\end{aligned}$$

және тағыда басқалар.

3) 9 санымен байланысты болған мынадай ғажайып заңдылықтар бар:

$$\begin{aligned}
9 \cdot 7 &= 63\\
99 \cdot 77 &= 7623\\
999 \cdot 777 &= 776223\\
9999 \cdot 7777 &= 77762223
\end{aligned}$$

және тағыда басқалар.

Бұл мәндердің үшіншісінен бастап әр бір кейінгі көбейтіндіні алу үшін алдынғы көбейтіндідегі бірінші 7 алдына тағыда 7 жазып, 3 алдына 2 ні жазу жеткілікті.

4) 9 саны мен байланысты болған төмендегідей пирамидалар бар:

$$\begin{gathered}
1 \cdot 9 + 2 = 11\\
12 \cdot 9 + 3 = 111\\
123 \cdot 9 + 4 = 1111\\
1234 \cdot 9 + 5 = 11111\\
12345 \cdot 9 + 6 = 111111\\
123456 \cdot 9 + 7 = 1111111\\
1234567 \cdot 9 + 8 = 11111111\\
12345678 \cdot 9 + 9 = 111111111
\end{gathered}$$

және

$$9 \cdot 9 + 7 = 88$$
$$98 \cdot 9 + 6 = 888$$
$$987 \cdot 9 + 5 = 8888$$
$$9876 \cdot 9 + 4 = 88888$$
$$98765 \cdot 9 + 3 = 888888$$
$$987654 \cdot 9 + 2 = 8888888$$
$$9876543 \cdot 9 + 1 = 88888888$$
$$98765432 \cdot 9 + 0 = 888888888$$
$$987654321 \cdot 9 - 1 = 8888888888$$

5) 9^2=81 ден пайдаланып, кез келген 9 дардан құралған санның квадратын жазу мүмкін: 81 санындағы 8 алдына 9 дар санынан 1 кем 9 және 1 алдында сонша нөл санын жазу жеткілікті:

$$9^2 = 81$$
$$99^2 = 9801$$
$$999999^2 = 999998000001$$

6) Тек қана бірлерден құралған сандардың квадраттарын төмендегі пирамида көмегімен жазу мүмкін:

$$1^2 = 1$$
$$11^2 = 121$$
$$111^2 = 12321$$
$$1111^2 = 1234321$$
$$11111^2 = 123454321$$
$$111111^2 = 12345654321$$
$$1111111^2 = 1234567654321$$
$$11111111^2 = 123456787654321$$
$$111111111^2 = 12345678987654321$$

7) Егер 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27 арифметикалық прогрессияның барлық мүшелерін сәйкес ретінде 37 ге көбейтілсе, 111, 222, 333, 444, ... , 999 болған ғажайтып арифметикалық прогрессия пайда болады.

Егер 37 ні өзінің цифралары қосындысына көбейтірілсе, цифралардың кубтар қосындысы пайда болады және егер 37 ны цифрлар көбейтіндісіне арттырылса, цифрлардың квадраттар қосындысы пайда болады :

$$37\cdot(3+7)=3^3+7^3,$$
$$37+3\cdot 7=3^2+7^2.$$

Және де $37\cdot 3\cdot 7=777$.

Гори қаласындағы әесқой математик А.Хабалашвили өз цифрларының кубтары қосындысына тең болған төмендегідей үш топтағы сандар барлығын және цифрлар қосындысы мен цифрлар көбейтіндінің көбейтіндісіне тең болған екі үш таңбалы сандар барлығын көрсетті:

$$153=1^3+5^3+3^3,$$
$$371=3^3+7^3+1^3,$$
$$407=4^3+0^3+7^3,$$
$$135=(1+3+5)\cdot 1\cdot 3\cdot 5,$$
$$144=(1+4+4)\cdot 1\cdot 4\cdot 4.$$

Мәскеулік математик В.Ульянов:

$1233=12^2+33^2$, $234256=(2+3+4+2+5+6)^2$,

$8833=88^2+33^2$, $52521875=(5+2+5+2+1+8+7+5)^2$,

$81=(8+1)^2$

сандар бар екендігін көрсетті.

Инженер Киберов (Харьков қаласы)

$$2427=2^1+4^2+2^3+7^4$$
$$1306=1^1+3^2+0^3+6^4$$
$$1676=1^1+6^2+7^3+6^4$$

теңдіктердің орындығын көрсетті.

Сондай натурал сандардың жұбы бар болып, олардың қосындысы және көбейтіндісі тек қана цифраларының орналасу реті мен ғана айырмашылыққа ие екендігін көрсетті:

$9+9=18$	және	$9\cdot 9=81$
$24+3=27$	және	$24\cdot 3=72$
$47+2=49$	және	$47\cdot 2=94$
$263+2=265$	және	$263\cdot 2=526$
$497+2=499$	және	$497\cdot 2=994$

Сондай екі таңбалы сандар жұптығы бар болып, олардың көбейтіндісі ғажайып қасиетке ие (олардың пайда болуына мән беріңдер) :

$12\cdot 42=21\cdot 24$,	$24\cdot 63=42\cdot 36$
$12\cdot 63=21\cdot 36$,	$24\cdot 84=42\cdot 48$
$12\cdot 84=21\cdot 48$,	$26\cdot 93=62\cdot 39$
$13\cdot 62=31\cdot 26$,	$36\cdot 84=63\cdot 48$
$23\cdot 96=32\cdot 69$,	$46\cdot 96=64\cdot 69$

Осындай қасиетті екі цифрлы сандардың тағыда 4 жұптығы бар.

234256 саны мынадай ғажайып қасиеттерге ие:

1) $234256=(2+3+4+2+5+6)^4$
2) $23+42+56=121=11^2$
3) $65+24+32=121=11^2$.

Бұндай қасиетке ие болған тағыда басқа сандардың болуы белгісіз. Осындай сандарды сыныптан тыс сабақтарда оқушыларды өздігінен ізденуге бағыт береміз.

1, 2, 3, 6, 7, 11, 13, 17, 18, 21, 22, 23 сандарды 6 тадан етіп екі бөлікке ажыратылса, әр бір бөліктегі сандардың бірінші, екінші, үшінші, төртінші және бесінші дәрежелері қосындысы тең болады:

$1+6+7+17+18+23=2+3+11+13+21+22=72$

$1^2+6^2+7^2+17^2+18^2+23^2=2^2+3^2+11^2+13^2+21^2+22^2=1288$

$1^3+6^3+7^3+17^3+18^3+23^3=2^3+3^3+11^3+13^3+21^3+22^3$

$1^4+6^4+7^4+17^4+18^4+23^4=2^4+3^4+11^4+13^4+21^4+22^4$

$1^5+6^5+7^5+17^5+18^5+23^5=2^5+3^5+11^5+13^5+21^5+22^5$

және осындай қасиетке ие сандар барма?

$(m-11)^n+(m-6)^n+(m-5)^n+(m+5)^n+(m+6)^n+(m+11)^n=(m-10)^n+(m-9)^n+(m-1)^n+(m-1)^n+(m+9)^n+(m+10)^n$ теңдіктен қалаған m және n=1, 2, 3, 4, 5 тер үшін шексіз көп сандарды табу мүмкіндігі анықталған.

$a^n+(a+4b+c)^n+(a+b+2c)^n+(a+9b+4c)^n+(a+6b+5c)^n+(a+10b+6c)^n = (a+b)^n+(a+c)^n+(a+6b+2c)^n+(a+4b+4c)^n+(a+10b+5c)^n+(a+9b+6c)^n$ теңдік те a,b,c сандардың кез келген бүтін мәндері және n=1, 2, 3, 4, 5 тер үшін жоғарыда келтірілген қасиетті сандар пайда болады.

Төмендегі формула көмегімен өте ғажайып сандар жиынын жазу мүмкін: Егер $x_1, x_2, \dots, x_n$ және $y_1, y_2, \dots, y_n$ бүтін сандар үшін

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$$

орынды болса ,

$(10x_1+y_1)^2+(10x_2+y_2)^2+\dots+(10x_n+y_n)^2=(10y_n+x_n)^2+(10y_{n-1}+x_{n-1})^2+\dots+(10y_1+x_1)^2$ болады. Бұл теңдікті жақшаларды ашу жолы мен дәлелдеу мүмкін.

Мысал. $4^2 + 5^2 + 6^2 = 8^2 + 3^2 + 2^2$ теңдіктен пайдаланып, $48^2+53^2+62^2 = 26^2 + 35^2 + 84^2$, $43^2 + 52^2 + 68^2 = 86^2 + 25^2 + 34^2$ теңдікті алу мүмкін.

Бұл екі таңбалы сандар үшін келтірілген теңдіктер ғажайтып қасиетке ие: оң жақтағы сандар сол жақтағы сандарды орын ауыстырудан пайда болған және олар теңдік таңбасына қарағанда симметриялы орналасқан.

1,2,3,4,5,6,7 және 8 сандардан жоғарыдағыларға ұқсас жаңа сандар топтарының пайда болуына әрекет жасап көріңіз?

8) Енді төмендегілерді көреміз.

Бізге белгілі, егер қарапайым қысқармайтын бөлшектің бөлімі 10 мен өзара жәй сан болса, бұндай қарапйым бөлшекті сандар шектеулі периодты бөлшекке айналады.

Мысал. $\frac{1}{7} = 0$ (142857)

Мұнда период ұзындығы (периодтағы цифрлар саны) 6 ға тең. Бөлімі 7 ге тең болған дұрыс қысқармайтын бөлшектер саны 6 ға тең.

Басқа дурыс қарапайым бөлшектер 1/7 ның период ұзындығынан төмендегідей пайда болады:

$$\frac{1}{7} = 0,(142857), \qquad \frac{6}{7} = 0,(857142),$$

$$\frac{3}{7} = 0,(428571), \qquad \frac{4}{7} = 0,(571428)$$

$$\frac{2}{7} = 0,(285714), \qquad \frac{5}{7} = 0,(714285).$$

Әр бір кейінгі бөлшектердің периодын табу үшін алдыңғы бөлшек периодындағы бірінші цифраны соңына өткізу жеткілікті.

$\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}$ бөлшектерінің алымындағы бірді 7 ге бөлгендегі тізбекті қалдықтардан туындаған. Екінші мысал ретінде бөлімі 13 ке тең болған барлық дұрыс бөлшектерді қарастырамыз. Мұндай бөлшектер 12. Олардың да период ұзындықтары 6 ға тең. Соның үшін олар 12:2 = 6 топқа бөлінеді.

I топтағы бөлшектерге мыналар кіреді:

$\frac{2}{13} = 0,(153846)$, $\frac{11}{13} = 0,(846153)$,

$\frac{7}{13} = 0,(538461)$, $\frac{6}{13} = 0,(461538)$,

$\frac{5}{13} = 0,(384615)$, $\frac{8}{13} = 0,(615384)$.

Қалғандары болса екінші топқа кіреді. Олардың да период ұзындыңы 6 ға тең болып жоғарыдағылардан өзгеше болады.

Сонымен II топ бөлшектерге мыналар кіреді:

$\frac{1}{13} = 0,(076923)$, $\frac{12}{13} = 0,(923076)$,

$\frac{10}{13} = 0,(769230)$, $\frac{3}{13} = 0,(230769)$,

$\frac{9}{13} = 0,(692307)$, $\frac{4}{13} = 0,(307692)$.

Бөлімі 11 ге тең болған дұрыс бөлшектер 5 топқа бөлініп, олардың период ұзындығы 2 ге тең екендігін есептеп көру мүмкін:

I $\begin{cases} \frac{1}{11} = 0,(09), \\ \frac{10}{11} = 0,(90), \end{cases}$ II $\begin{cases} \frac{2}{11} = 0,(18), \\ \frac{9}{11} = 0,(81), \end{cases}$

III $\begin{cases} \frac{3}{11} = 0,(27), \\ \frac{8}{11} = 0,(72), \end{cases}$ IV $\begin{cases} \frac{4}{11} = 0,(36), \\ \frac{7}{11} = 0,(63), \end{cases}$

V $\begin{cases} \frac{5}{11} = 0,(45), \\ \frac{6}{11} = 0,(54) . \end{cases}$

Бөлімі 61 ге тең болған жәй бөлшектердің период ұзындығы қаншаға тең?

Есептеп көріп, мұндай бөлшектердің период ұзындығы 60 қа теңдігін көру мүмкін. Жалпы айтқанда, $\frac{1}{p}$ түрдегі жәй бөлшектердің (p- жай сан) ондық бөлшекке айналдырғандағы период ұзындығы (p-1) дің бөлгішісі болады.

Және бір неше мысал келтірейік:

$\frac{1}{29}$ = 0, (0344825862078965517243179З1). Сонымен тағыда $\frac{k}{1913}$ санның период ұзындығы 1912 ге теңдігін көрсету мумкін (k ≤ 1913 болған натурал сан):

$\frac{1}{1913}$ = 0, (000522739131…9012023) ,

$\frac{1912}{1913}$ = 0, (9994772608468 … 0987976).

9) Егер 1 ден 9 ға дейінгі болған бірінен кейін бірі келетін сандардан пайда болған сандарды (8 ден басқа) 9, 18, 27, 36, 45, 63, 72, 81 арифметикалық прогрессияның мүшелеріне біртіндеп көбейтсек, нәтижеде 9 та бірдей цифрлардан құралған сандар пайда болады:

12345679 · 9 = 111111111
12345679 · 18 = 222222222
12345679 · 27 = 333333333
12345679 · 36 = 444444444
12345679 · 45 = 555555555
…………………………….
12345679 · 81 = 999999999.

10) Төмендегідей ғажайып пирамидал сандардыңда бар екендігін ескеріп өткеніміз жөн:

12345678 · 8 + 8 = 98765432
1234567 · 8 + 7 = 9876543
123456 · 8 + 6 = 987654
12345 · 8 + 5 = 98765
1234 · 8 + 4 = 9876
123 · 8 + 3 = 987
12 · 8 + 2 = 98
1 · 8 + 1 = 9.

11) Келесідегңдей ғажайып кері көбейтінділер де бар:

12·12=144	және	21·21=441
13·13=169	және	31·31=961
102·102=10404	және	201·201=40401
103·103=10609	және	301·301=90601
112·112=12544	және	211·211=44521
122·122=14884	және	221·221=48841.

Екі таңбалы әр түрлі сандардан құралған кері көбейтінділер төмендегі теңдіктен келіп шығады:

$$(10x+y)\cdot(10a+b)=(10y+x)\cdot(10b+a)$$

(мұнда $ax=by$ болуы шарт).

Мұндай кері көбейтінділердің тек 14 жұбы ғана бар.

12·42=21·24, 13·62=31·26,

12·63=21·36, 13·93=31·39,

12·84=21·48, 14·82=41·28,

23·64=32·46, 26·93=62·39,

23·96=32·69, 34·86=43·68,

24·63=42· 36, 36·84=63·48,

24·84=42·48, 46·96=64·69.

$(10^n x+y)\cdot(10^n a+b)=(10^n y+x)\cdot(10^n b+a)$ теңдеуден $ax=by$ шартқа негізделіп, көп разрядтық кері көбейтінділерді алуға болады.

Мысал.

$12\cdot 42=21\cdot 24$ дан

$102\cdot 402=201\cdot 204$,

$1002\cdot 4002=2001\cdot 2004$ ларды аламыз.

$(100a+10b+c)\cdot(100x+10y+z)=(100c+10b+a)(100z+10y+x)$ теңдеуден, $ax=cz$ және $y=b\cdot\frac{x-z}{c-a}$ шартқа негізделіп, үштаңбалы кері көбейтінділер аламыз.

$213\cdot 936=639\cdot 312,$

$223\cdot 966=669\cdot 322,$

$233\cdot 996=699\cdot 332,$

$963\cdot 246=642\cdot 369,$

$993\cdot 266=662\cdot 399.$

Төмендегідей көп таңбалы кері көбейтінділер де бар:

$$4626\cdot 9396=6939\cdot 6264,$$

$$2246\cdot 9633=3369\cdot 6422,$$

$$43421\cdot 24868=86842\cdot 12434.$$

Мәскеулік математик А.Беспрозванний кері квадраттардың 4 жұбын тапқан:

$13^2=169.$ $31^2=961,$

$113^2=12769,$ $311^2=96721,$

$1113^2=1238769,$ $3111^2=9678321,$

$11113^2=123498769,$ $31111^2=967894321.$

Жоғарыда келтірілген кері квадраттар 3 цифрымен басталады немесе 3 цифрымен аяқталады. Басқа цифрлар болса бірлерден құралған.

Екі цифрымен басталып, 2 цифрымен аяқталатын және басқа цифрлары бірлерден құралған кері квадраттардың 12 жұбы табылған; олардың ең кіші жұбы 12^2=144 және $21^2=441$ болып, ең үлкен жұбы болса,

$1111112^2 = 1234569876544$ және $2111111^2 = 445678654321$ болатыны есептелген.

Көп таңбалы кері квадраттардың төмендегілері анықталған:

$122^2 = 14884,$ $221^2 = 48841,$

$1122^2 = 1258884,$ $2211^2 = 4888521,$

$1212^2 = 1468944,$ $2121^2 = 4498641,$

$11122^2 = 123698884,$ $22111^2 = 488896321.$

Сондай көбейтінділер бар, онда 0 ден 9 ға дейін болған барлық бір таңбалы сандар қатысады.

$2 \cdot 3485 = 1 \cdot 6970,$ $8 \cdot 1735 = 20 \cdot 694,$

$4 \cdot 1957 = 38 \cdot 206,$ $3 \cdot 4158 = 6 \cdot 2079,$

$7 \cdot 1406 = 38 \cdot 259,$ $6 \cdot 1485 = 30 \cdot 297,$

$2 \cdot 4589 = 13 \cdot 706,$ $9 \cdot 2754 = 81 \cdot 306.$

$5 \cdot 2968 = 40 \cdot 371,$

Төмендегідей кері теңдеу де бар:

$$96 - 76 - 54 - 32 + 1 = 1 + 23 - 45 - 67 + 89.$$

$\sqrt{321489} = 567$ және $\sqrt{729316} = 854$ теңдіктерде 1 ден 9 ға дейінгі барлық цифрлар қатысқан.

11) 1948 жылда француз математиктерінен бірі Америкада шығатын математикалық журналдардың біріне хат жазып, төмендегі мәселені баяндаған: Сондай натурал n сан табылып, оның үшін $n^3 = 19\,000\,458\,461\,599\,776\,807\,277\,716\,631$ болып, бұл 29 таңбалы санның цифрларын басынан соңына біреуден өткізу нәтижесінде алынатын 28 та 29 таңбалы сандардың барлығы да n -ге бөлінсін.

Көп ізденістер нәтижесінде $n = 2\,668\,423\,111$ болатыны анықталған.

12) Ташкенттік студент Н.Н.Головин өзінің цифрларының факториалдары қосындысына тең болған екі санның болатынын көрсетті:

1) 145=1!+4!+5!,

2) 40585= $4! + 0! + 5! + 8! + 5!$

$0! = 1$ деп қабылданған. ($1! = 1$ және $2! = 2$ бұл есепке енбейді.)

13) 376 және 625 үш таңбалы сандардың квадраты, кубы, төртінші дәрежелері және жалпы кез-келген $n -$ дәрежелері сол сандармен аяқталады:

$376^2 = 141376,$ $625^2 = 390625,$

$376^3 = 53157376,$ $625^3 = 244140625.$

Төмендегі теорема да дәлелденген:

Егер қандай да $\boldsymbol{n}$ ***таңбалы санның квадраты ол санның бірінші дәрежесімен аяқталса, онда оның кез-келген дәрежесі де сол санмен аяқталады.***

Мысал.

$76^2 = 5776,$ сондықтан 76^k да 76 мен аяқталады.

14) 2 мен аяқталатын сондай сандар бар, егер соңындағы 2 ні санның басына өткізіп жіктелсе, алдыңғысынан 2 есе артық болған сан алынады. Бұл санның $n = 105263157894736842$ болатынын анықтау мүмкін. Сонысы

ғажап, егер табылған n бірінен кейін бірі екі рет, үш рет, төрт рет және тағы сол сияқты жіктелсе де, тағы сондай қасиетке ие сан алынады.

Сондай сан да бар, егер онда 4 ті соңынан басына өткізіп жіктелсе, алдыңғысынан 4 есе артық сан алынады:

102564 және 410256.

Бұл санды да бірінен кейін бірін бір неше рет жіктегенде айтылған қасиет өз күшін сақтайды.

Соңындағы цифрды басына өткізіп жазғанда өзінен 3 есе кіші сан пайда болатын екі сан бар:

428571, 857142.

Сондай сандар да бар, оларды 4 ке бөлу үшін берілген санды соңынан басына қарай жазып қою жеткілікті:

$$8712:4 = 2178.$$

Егер 8712 бір неше рет тізбек жазылса да, жоғарыда келтірілген қасиет сақталады:

8712871287128712:4=2178217821782178.

225 ті бірінші мүшесі 1 ге тең болған үш арифметик прогрессияларға жіктеу мүмкін:

225 =1+75+149,

225=1+23+45+67+89,

225=1+7+13+19+25+31+37+43+49.

Тура сол жолмен 225 ті 7 мүшелі арифметик прогрессияға жіктеуге бола ма(ойлап көріңіз)?

228 санын бірінші мүшесі 18 ге тең болған басқа сондай прогрессияларға жазып көруді ұсынамыз.

Натурал сандар тізбегінен пайдаланып, квадраттар кестесін құрастыру мүмкін:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	

Кубтар кестесін болса төмендегі жолмен құрастыру мүмкін:

	6	12	18	24	30	36	42
1	7	19	37	61	91	127	
0	1	8	27	64	125	116	343

Натурал сандардың кубтарын жай сандардан пайдаланып, төмендегі жолмен де құрастыруға болады:

Натурал сандар тізбегінен қандайда p санға еселі болған барлық сандарды өшіріп, қалғандарынан келесі жолмен жаңа тізбек құрастырамыз: алдын бірді жазамыз және әр бір кейінгі мүшесін табу үшін алдыңғы мүшелердің қосындысын аламыз; алынған жаңа тізбектен де бұрын таңдап алынған p санға еселі болған сандарды өшіріп, қалғандарынан жоғарыда келтірілген жолмен жаңа тізбек құрастырамыз және тағы да солай. Егер сол

әдіспен p рет қайталанса (соңғы рет өшіру өткізілмесе), нәтижеде тек натурал сандардың кубтары алынады.
Мысал. $p = 3$;

$$1\ 2\ \cancel{3}\ 4\ 5\ \cancel{6}\ 7\ 8\ \cancel{9}\ 10\ 11\ \cancel{12}\ 13\ 14\ \cancel{15}\ 16\ 17\ \cancel{18}$$

тізбектен 3 еселі элементтер өшірілсе,

1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, ...

алынады және одан жаңа тізбек құрастырамыз:

$$1\ \cancel{3}\ 7\ \cancel{12}\ 19\ \cancel{27}\ 37\ \cancel{48}\ 61\ \cancel{75}\ 91\ \cancel{108}\ 127$$

Бұл тізбекте де $p = 3$ еселі болған элементтер өшірілсе және көрсетілген әдіспен жаңа тізбек құрастырылса,

1, 8, 27, 64, 125, 216, 123, ...

кубтар тізбегін аламыз.

Натурал сандар кубтарының арифметик прогрессия элементтері қосындысы түріндегі ғажайып жіктеулері бар:

$$1 = 1^3 = 1$$
$$2 + 6 = 2^3 = 3 + 5$$
$$3+9+15 = 3^3 = 6+9+12$$
$$4+12+20+28 = 4^3 = 10+14+18+22$$
$$5+15+25+35+45 = 5^3 = 15+20+25+30+35.$$

Бұл кестенің сол жағында жазылған прогрессиялардың бірінші мүшелері 1, 2, 3, 4, 5, ... натурал сандар тізбектерінен, оң жақта жазылған прогрессиялардың бірінші мүшелері 1, 3, 6, 10, 15, ... үшбұрышты сандардан құралған.

Келесідегідей жіктелулер де бар:

$$1^3 = 1$$
$$2^3 = 3 + 5$$
$$3^3 = 7+9+11$$
$$4^3 = 13+15+17+19$$
$$5^3 = 21+23+25+27+29$$

және тағы басқа.

Бұл санды пирамиданың құрылымына мән беріңіз.

$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 + f^2$ теңдікті қанағаттандыратын a, b, c, d, e, f натурал сандарды табу оңай емес.

Мәскеулік инженер Н.Катин сондай сандардың алтауын тапты, онда олардың біреуден алдыңғы цифрларын тастап жазғаннан пайда болған сандар да, біреуден кейінгі цифрларды тастап жазғаннан пайда болған сандар да $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 + f^2$ (a, b, c, d, e, f - натурал сандар) теңдікті қанағаттандыратын сондай 6 сандарды анықтады.

$$123789^2 + 561945^2 + 642864^2 = 242868^2 + 761943^2 + 323787^2$$
$$23789^2 + 61945^2 + 42864^2 = 42868^2 + 61943^2 + 23787^2$$
$$3789^2 + 1945^2 + 2864^2 = 2868^2 + 1943^2 + 3787^2$$

$$789^2+945^2+864^2=868^2+943^2+787^2$$
$$89^2+45^2+64^2=68^2+43^2+87^2$$
$$9^2+5^2+4^2=8^2+3^2+7^2$$
және
$$123789^2+561945^2+642864^2=242868^2+761943^2+323787^2$$
$$12378^2+56194^2+64286^2=24286^2+76194^2+32378^2$$
$$1237^2+5619^2+6428^2=2428^2+7619^2+3237^2$$
$$123^2+561^2+642^2=242^2+761^2+323^2$$
$$12^2+56^2+64^2=24^2+76^2+32^2$$
$$1^2+5^2+6^2=2^2+7^2+3^2 .$$
Сондаяқ тағыда,
$$123789^2+561945^2+642864^2=242868^2+761943^2+323787^2$$
$$2378^2+6194^2+4286^2=4286^2+6194^2+2378^2$$
$$37^2+19^2+28^2=28^2+19^2+37^2.$$

81= $(8+1)^2$,

512= $(5+1+2)^3$,

2401= $(2+4+0+1)^4$,

17210368= $(1+7+2+1+0+3+6+8)^5$,

68719476736= $(6+8+7+1+9+4+7+6+7+3+6)^6$,

6722988818432; 248155780268521; 3904305912313344 ларда сәйкесінше өзінің цифрлары қосындысының 7, 8, 9 –дәрежелеріне тең. Бұларды да Н.Катин тапқан.

56277101136604432398319244384765625=

=562-77+10-11+36-60+43-2·3+98-31+92-44+38-47+65-62+5

сияқты ғажайып жіктелу де бар.

Бақытты билет деген мәселе барлығымызға таныс: 6 таңбалы нөмерлерден құралған билеттер үшін жұп және тақ орында орналасқан цифрлар қосындысына тең болса, оларды **бақытты сандар** деп аталады.

Мысал. 134101 бақытты: 1+4+0=3+1+1.

000000 ден 999999 ге дейін болған неше 6 таңбалы сандар арасында неше бақытты сандар бар?

Бақытты сандар саны $2\ (1^2+3^2+6^2+10^2+15^2+21^2+28^2+36^2+$ $+45^2+55^2+63^2+69^2+73^2+75^2)=55252$ ге теңдігін есептеу мүмкін. Келесі сұрақ туындайды: 1 ден N ге дейін бірінен соң бірі орналасқан натурал сандарды жазуда неше цифр қолданылды?

Егер N нің жазылуында қолданылған цифрлар саны n болса, онда 1 ден N ге дейін болған натурал сандардың жазылуында
$$k=(N+1)n-\frac{10^n-1}{9}$$
цифр қолданылуы дәлелденген.

Мысал. $N=7654$ болсын.

$$k=(7654+1)\cdot 4-\frac{10^4-1}{9}=30620-1111=29509$$

цифр.

1 ден 9999...9 ға дейін болған натурал сандардың жазылуында (... 54321)$\cdot$ 9 цифр қолданылған. (... 54321) $\cdot$ 9 санын алу үшін оңнан солға қарай, 999...9 санында неше 9 болса, сонша тізбекті натурал сандарды жазу жеткілікті.

Мысал.

1 ден 999999999 ға дейін тізбекті орналасқан натурал сандардың жазылуында (10987654321) $\cdot 9 = 98888888889$ цифр қолданылады.

Қайталанбайтын цифрлардан құралған 4938271605 санын 9 ға бөлгенде орта цифрға қарағанда симметрик сан пайда болады:

4938271605:9=548696845.

Сондай сандардан қазірге тек екеуі белгілі:

2165904378:9=240656042,

2934815607:9=326090623.

Әр біреуінде нөль цифр кездеспейтін сондай екі бүтін сан бар болып, олардың көбейтіндісі 10^9 дың дәрежесін береді.

$$512\cdot 1953125=(10^9)^1,$$

$$262144\cdot 814697265625=(10^9)^2=10^{18}.$$

Сондай көбейтінділерден тағы құрастыру мүмкін. Өзіңіз ойланып көріңіз?

Цифрлары әр түрлі болған 10 таңбалы сандардың нешеуін құрастыруға болады?

Мұндай 10 таңбалы сандар 3265920 болатынын есептеп табылған.

100 ден 200 ге дейін болған натурал сандарды (128$=2^7$ ден басқа) тізбекті натурал сандар қосындысы түрінде өрнектеу мүмкін:

100=18+19+20+21+22,

101=50+51,

102=33+34+35,

103=51+52,

104=2+3+4+5+…+13+14,

105=52+53,

……………

(Қалғандарын өзіңіз жазуға әрекеттеніп көріңіз).

100 000 000 000 000 001 және 2 000 000 000 000 000 000 сандар арасында тек $2^{60}=1152921504606846976$ санның тізбекті натурал сандар қосындысы түрінде өрнектелмейтіні анықталған.

Сондай бөлшектер де бар, олардың квадраттар және кубтар қосындысы тең болады:

$$\left(\frac{5}{9}\right)^2+\left(\frac{10}{9}\right)^2=\left(\frac{5}{9}\right)^3+\left(\frac{10}{9}\right)^3,$$

$$\left(\frac{5}{14}\right)^2+\left(\frac{25}{14}\right)^2=\left(\frac{5}{14}\right)^3+\left(\frac{25}{14}\right)^3.$$

Тағы сондай бөлшектерді анықтаңыз?

91 ді 1 ден 9 ға дейін болған тізбекті натурал сандарға көбейту нәтижесінде сондай 3 таңбалы сандарды аламыз, онда олардың жүздіктер разрядында 0 ден 8 ге дейін, ондықтар разрядында 9 дан 1 ге дейін және бірліктер разрядында болса 1 ден 9 ға дейін тізбекті орналасқан натурал сандардан құралған болады:

$$91\cdot 1=091,$$
$$91\cdot 2=182,$$
$$91\cdot 3=273,$$
$$91\cdot 4=364,$$
$$91\cdot 5=455,$$
$$91\cdot 6=546,$$
$$91\cdot 7=637,$$
$$91\cdot 8=728,$$
$$91\cdot 9=819.$$

Барлық таңбалары жұп сандардан құралған болып, толық квадратты беретін төрт таңбалы сандардың тек төртеуі бар:

$$4624=68^2$$
$$6084=78^2$$
$$6400=80^2$$
$$8404=92^2.$$

Сондай сандар да бар, онда өзі толық кубтан құралған болып, олардың цифрлар қосындысы болса сол толық кубтың дәреже негізіне тең. Олар төмендегілер:

$512=8^3$, 5+1+2=8 ;

$4913=17^3$, 4+9+1+3=17 ;

$5832=18^3$, 5+8+3+2=18 ;

$17576=26^3$, 1+7+5+7+6=26 ;

$19687=27^3$, 1+9+6+8+3=27.

Мәскеулік инженер Катин төмендегі ғажайыпп «қысқарту» лардың орынды болатынын көрсеткен:

$$\frac{3544}{7531}=\frac{344}{731}, \quad \frac{143165}{17016560}=\frac{1435}{170560}, \quad \frac{4251935343}{91819355185}=\frac{4255343}{91855185}$$

Бұл мысалдарда өшірілген сандарды қайталап жазылса да сондай қасиетке ие бөлшектер алынады:

$$\frac{355544}{755531}=\frac{344}{731}; \quad \frac{143181818185}{17018181818560}=\frac{1435}{170560}.$$

Ленинградтық О.Недзвецк және оның қызы Танялар төмендегі ғажайып бөлшектерді анықтаған:

$$\frac{2199978}{8799912}=\frac{21978}{87912}=\frac{2178}{8712}; \quad \frac{4399956}{6599934}=\frac{43956}{65934}=\frac{4356}{6534}$$

$$\frac{3299967}{7699923}=\frac{32967}{76923}=\frac{3267}{7623}; \quad \frac{1099989}{9899901}=\frac{10989}{98901}=\frac{1089}{9801}.$$

Мұндай бөлшектердің тағыда бір ғажабы сонда, олардың бөлімдері алымдарының кері ретпен жазылғандығына тең.

Мәскеулік Н.Катин және М.Гректер келесі түрдегі бөлшектерді «қысқарту» мүмкіндігін дәлелдеді:

$$\frac{\overbrace{abmm\ldots mcd}^{n}}{\underbrace{dcmm\ldots mba}_{n}}=\frac{\overbrace{abmm\ldots mcd}^{n-1}}{\underbrace{dcmm\ldots mba}_{n-1}}=\cdots=\frac{abcd}{dcba}$$

Мұнда $a+c=b+d,\ a<d,\ m=2,3,4,5,6,7,8,9.$

Мысал. $\frac{10888578}{87888501}=\frac{108878}{878801}=\frac{1078}{8701}$,

$a+c=b+d, a<d$ шарттар негізге алынса, мұндай бөлшектерден 120 та болатынын есептеу мүмкін. Оқырман, сіз сондай бөлшектердің нешеуін анықтадыңыз?

$$\frac{\overbrace{amm\ldots mb}^{n}}{\underbrace{bmm\ldots ma}_{n}}=\frac{\overbrace{amm\ldots mb}^{n-1}}{\underbrace{bmm\ldots ma}_{n-1}}=\cdots=\frac{ab}{ba};\ a+b=m;\ \ a<b.$$

«қысқарту» лар өткізу мүмкін:

$$\frac{1998}{8991} = \frac{198}{891} = \frac{18}{81} = \frac{2}{9};$$
$$\frac{273}{728} = \frac{327}{872} = \frac{3}{8};$$
$$\frac{244}{427} = \frac{424}{742} = \frac{4}{7};$$
$$\frac{182}{819} = \frac{218}{981} = \frac{2}{9};$$
$$\frac{364}{637} = \frac{436}{763} = \frac{4}{3};$$
$$\frac{127}{427} = \frac{424}{742} = \frac{4}{7};$$
$$\frac{182}{819} = \frac{218}{981} = \frac{2}{9};$$
$$\frac{364}{637} = \frac{438}{763} = \frac{4}{3};$$
$$\frac{127}{217} = \frac{412}{721} = \frac{4}{7};$$
$$\frac{545}{654} = \frac{5}{6};$$
$$\frac{284}{847} = \frac{2}{7}.$$

Сондай мысалдар тағыда ойлап табыңыз?

$991n^2 + 1$ өрнек ешқандай n үшін толық квадрат бола алмайды, деген болжам бар. Бірақ, кейінрек мұндай n өте көп болып, олардың ең кішісі

$$n = 12\ 055\ 735\ 790\ 331\ 359\ 447\ 442\ 538\ 767$$

болатыны анықталған.

Кеңес математигі Н.Т.Чеботарев төмендегі гипотезаны қойған болатын: $x^n - 1$ өрнекті көбейткіштерге жіктегенде көбейткіштер коффициенттерінің абсолют мәндері бірден өзгеше болуы мүмкін бе? Математик В.К.Ивановтың көрсетуі бойынша, $x^n - 1$ өрнектің барлығы $n < 105$ үшін көбейткіштерге жіктегенде, барлық көбейткіштер коэффициенттерінің абсолют мәні бірге тең болып, $n = 105$ үшін бұл қасиет орындалмайды. $x^{105} - 1$ көбейткіштерге жіктегенде көбейткіштердің біреуі төмендегідей болатынын есептеді:

$x^{48} + x^{47} + x^{46} - x^{43} - 2x^{41} - x^{40} - x^{39} + x^{26} - x^{24} - x^{22} - x^{20} + x^{17} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} - x^9 - x^8 - 2x^7 - x^6 - x^5 + x^2 + x + 1.$

Енді қырсық теңдіктер деп аталатын теңдіктермен танысайық.

Сондай теңдеулер бар болып, олардың цифрларына кейбір өзгертулер енгізсе, теңдік таңбасы өзгермейді. Мұндай теңдіктер қырсық теңдіктер деп аталады.

Мысал. 123789+561945+642864 = 242868+761943+323787.

Әрбір қосылғыш квадратқа өзгертілсе де, теңдік таңбасы өзгермейді:
$123789^2+561945^2+642864^2=242868^2+761943^2+323787^2$.

Әрбір қосылғыштағы тақ орында тұрған цифрлар өшірілсе немесе әрбір қосылғыштағы бір немесе бір неше цифрларды басынан соңына өткізілсе де, теңдеу таңбасы өзгермейді:

$$279+695+484=488+693+277,$$
$$279^2+695^2+484^2=488^2+693^2+277^2,$$
$$378912+194556+286464=286824+194376+378732,$$
$$378912^2+194556^2+286464^2=286824^2+194376^2+378732^2.$$

Жоғарыда келтірілген қырсық теңдіктерді А.Марин, П.Цагаевтар тапқан.

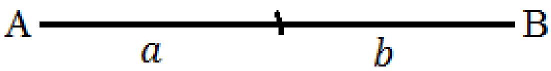
Алтын қима деп аталатын кесіндімен байланысты болған ғажайып сандар да бар. Математик С.М.Коксетер өзінің «Геометрияға кіріспе» деген кітабында ұлы астроном Кеплердің төмендегі сөздерін келтірген:

«Геометрия пәні негізі екі үлкен байлыққа ие: бірі алтынмен бағаланатын **Пифагор теоремасы** болса, екіншісі асыл таспен бағаланатын **алтын қима**».

АВ кесіндінің «алтын қима» деп оны сондай екі a және b бөліктерге бөлінуіне айтады(40-сурет), ал бұл бөліктер төмендегі қатынаста болады:

$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b} ,$$

мұнда $b=1$ болғанда $\frac{a+1}{a}=a$ және $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ болады.



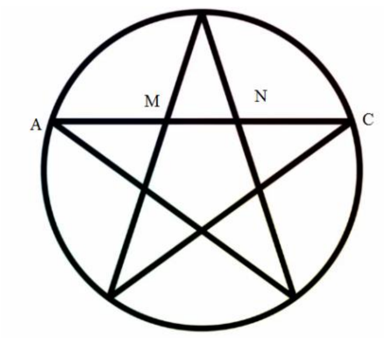
40-сурет

$a=\varphi=1{,}61803398\ \dots$ иррационал саны алтын сан деп аталған.

$\frac{1}{\varphi}=0{,}61803398\ \dots$ $\qquad \varphi=1+\frac{1}{\varphi}$ және

$$\varphi=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}} \ .$$

Пифагордықтардың құрастырған фигурасы – пентаграмманың кесінділері алтын қатынаста болады (41-сурет): $\frac{AC}{AN}=\frac{AN}{NC}$



41-сурет

Дөңгелек радиусының оған ішкі сызылған тең қабырғалы үшбұрыш қабырғасына болған қатынасы φ ге өте жақын болатынын көрсетуге болады.

Тағы бір ғажайып мәселемен танысайық.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 цифрлардан үшінші ретті детерминант құрастыру мүмкін. Бұл детерминанттың мәні жоғарыда жазылған цифрлардың орналасу ретіне байланысты.

Мысал.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 7 \\ 5 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 1, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 4 & 9 & 7 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 3, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 4, \qquad \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 5.$$

Бірінші 9 та натурал сандардан құралған үшінші ретті детерминанттардың ең кіші мәні 0 және ең үлкен мәні

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 3 & 6 \\ 4 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 412$$

болатыны дәлелденген.

Сондай сұрақ туындайды: 0 ден 412 дейін барлық натурал сандарды беретін мұндай детерминанттарды табуға бола ма?

Кейбір әесқой математиктер бұл бағытта көп есептеулер жүргізген. Харьковтік инженер В.И.Кибирев 9 000 ға жұық мұндай детерминанттарды есептеп,

324, 329, 355, 357, 358, 362, 364, 365, 367, 373, 375, 378,
381, 383, 386, 387, 394, 397, 399, 401, 403, 406, 409, 411

лерге тиісті 24 та детерминантты таба алмаған.

Сонысы ғажап, кейбір детерминанттардың мәні сол детерминантта ғажайып түрде орналасқан:

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 6 \\ \underline{3} & \underline{2} & \underline{7} \\ 8 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 327, \quad \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ \underline{3} & \underline{2} & \underline{8} \\ 9 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 328, \quad \begin{vmatrix} 7 & 8 & 2 \\ \underline{3} & \underline{5} & \underline{9} \\ 6 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 359,$$

$$\begin{vmatrix} \underline{3} & 5 & 8 \\ 9 & \underline{4} & 6 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 341, \quad \begin{vmatrix} 4 & 1 & \underline{9} \\ 7 & \underline{6} & 2 \\ \underline{3} & 8 & 5 \end{vmatrix} = 369.$$

Натурал 30 санымен байланысты болған келесі ғажайып қасиет орынды болады: $n = 10$ болғанда n нен кіші және n мен өзара жай болған сандар 1, 3, 7, 9 болып, олардан ішінде тек 9 құрама сан болады. Сондай натурал n сандар бар болып, одан кіші болған және онымен өзара жай болған сандардың барлығы да (әрине 1 ден басқа) жай болады.

Мысал.

$n = 18$ болған 5, 7, 11, 13, 17 лер 18 бен өзара жай болып, өздері де жай сан болады.

Сондай қасиетке ие болған сандар 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24 және 30 (*) болатынын тексеріп көруге болады. 30 дан үлкен болған сондай сандар табылмаған. Кейінрек дәлелден болып, (*) тізбектің ең үлкен элементі 30 екен, яғни егер $n > 30$ болса, онда n нен кіші және n мен өзара жай болған сандар арасында барлық уақыт құрама сан бар болады.

$\boldsymbol{\pi = 3,1415926535897932384642433832715028 84\ldots}$ саны туралы

Шеңбер ұзындығы мен оның диаметріне қатынасын өрнектеу үшін π белгі қабылданған.

Бұл белгіні алғаш рет 1706 жылда англиялық математик У.Жонс енгізген болса-да, бірақ математикада толық қолдану Л.Эйлердің бұл салада жасаған жұмыстарынан басталады (1736 жылда).

π санының мүмкіндігінше көбірек ондық үлестерін есептеуде, бұрыңғы заманнан бастап, әр түрлі ғалымдар айналысқан.

Вавилонда (б.з.дан екі мың жыл алдын) $\pi \approx 3$ деп қабылданған. Ежелгі грекияда $\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3{,}16049 \ldots$ деп қабылданған.

Ежелгі грек ғалымы Архимед (б.з.дан 3 ғасыр бұрын) $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ болатынын анықтаған. Сондықтан $\frac{22}{7}$ Архимед саны деп аталған.

Біздің заманымыздың 263- жылында өмір сүрген Қытай математигі Лю-Ху-Эй $3{,}1401 < \pi < 3{,}1427$ болатынын көрсеткен.

Қытай астрономы Цзу-Чун-Чжи (430-501) болса $\pi \approx \frac{355}{113} = 3{,}1415929 \dots$ болатынын анықтады.

Егер $\pi \approx \frac{355}{113} = \frac{377-22}{120-7}$ түрінде жазылса, π үшін $\frac{377}{120}$ ді Птоломей, $\frac{22}{7}$ ді болса Архимед көрсеткені көрінеді.

$\pi \approx \frac{377}{120}$ болса Лиция саны деп аталады. XV ғасырда өмір сүрген самарқанттық ғалым Жамшид ибн-Маъсуд ал-Каши π дің 17 ондық үлесін тапқан.

XVII ғасырда өмір сүрген математик Лудольф π -дің 35 ондық үлесін есептеп тапқан.

Кейінрек 1699 жылда π -дің 72 ондық үлестерін, 1719 жылда π -дің 127 ондық үлестерін, 1841 жылда π -дің 208 ондық үлестерін, 1853 жылда π -дің 261 ондық үлестері қатарлар теориясын қолданып табылды. 1853 жылдан 1873 жылға дейін өткен 20 жыл барысында математик Вильям Шенкс π санының 707 ондық үлестерін тапқан, 1947 жылда π -дің 808 ондық үлестері табылған.

1949 жылдың маусым айында электрон есептеуіш машинасы көмегінде π -дің 1120 ондық үлестері табылды. Сол жылдың қыркүйек айында электрон есептеуіш машинасы 70 сағат үздіксіз жұмыс нәтижесінде π -дің 2037 ондық үлестері, 1955 жылда электрон есептеуіш машинасы 13 минутта π -дің 3093 ондық үлестерін және де 1958 жыл қаңтар айында 100 минут үздіксіз жұмыс нәтижесінде π -дің 10 000 ондық үлестері анықталды.

1961 жылдың шілде айында англиялық математик Д.Шенкс және Ж.Вренчтер π -дің 100 265 ондық үлестерін есептеу үшін бағдарлама құрастырып, 8 сағат 13 минутта бұл бағдарлама сәтті орындалды. π -дің 16000 ондық үлестеріне талқылау арқылы тексеру нәтижесінде 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 және 0 цифрларының орналасуында ешқандай реттілік өзгермегенін көреміз, онда әр бір цифр шамамен 10% орынды иелеген.

π -дің ондық үлестерінде қандай да белгілі цифрдың шекті немесе шексіз рет кездесуін білмейміз.

Мысал. π -дің ондық үлестерінде 5 цифрдың шекті немесе шексіз рет кездесуі белгісіз.

π саны қандайда квадрат теңдеудің түбірі бола алмайтыны белгілі.

Бірақ $15x^2 - 78x + 97 = 0$ және $19x^2 - 39x - 65 = 0$ теңдеудердің түбірлерінен бірі сәйкесінше $x \approx 3{,}14160$ және $x = 3{,}14158805$ болатыны есептелген. Бұл мәндер π-дің негізгі мәніне жақын.

π санын шексіз үздіксіз бөлшекке жіктегенде төмендегі бөлшек алынатыны көрсетілген:

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}}}}}}}$$

Бұл үздіксіз бөлшектің тиісті сәйкес бөлшектері есептелсе, π үшін төмендегі рационал жақындасуды табуға болады:

$$\frac{3}{1}, \quad \frac{22}{7}, \quad \frac{333}{106}, \quad \frac{355}{113}, \quad \frac{103993}{33102}, \dots$$

$1{,}49^{2{,}83} \approx \pi$. $\sqrt[3]{31}$ -дің мәні 3,1413... немесе көлемі 31 куб см. болған кубтің қыры 0,001 шамамен π ді өрнектейді.

π -дің қатарлар көмегінде алынған өрнектеріде бар.

1593 жылда Виет

$$\frac{2}{\pi} = cos\frac{\pi}{4} \cdot cos\frac{\pi}{8} \cdot cos\frac{\pi}{16} \cdot cos\frac{\pi}{32} \cdots$$

өрнекті көрсеткен. Математик Валлис өзінің «Шексіздер арифметикасы» кітабында

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \dots}$$

қатарын көрсеткен.

Шотландиялық математик Жеймс Григори және кейінрек 1673 жылда француз математигі Лейбниц

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

қатарын көрсеткен.

$e = 2,7182818284459045$ ... саны туралы

Шотландиялық математик Непер $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ өрнектің болатынын дәлелдеп, оны e әрпімен белгілеген. Өткен бөлімдердің бірінде алдымен e -ң иррационал, кейінрек болса трансцендент сан болатынын көрсетті.

Негізі әр түрлі болатын логарифмдер бар. Егер логарифмнің негізі e —Непер санына тең деп алынса, мұндай логарифмге натурал логарифм деп аталып, N санының натурал логарифмі $\ln N$ арқылы белгіленеді.

1622 жылда англиялық математик Ж.Слейдел бірінші рет 1 ден 1000 ға дейін болған сандардың натурал логарифмдер кестесін құрастырды.

e санының ондық үлестері де тура π саны сияқты есептеліп ұзайтылған.

1961 жылда электрон есептеуіш машинасы көмегінде 8 сағат 13 минут барысында үздіксіз жұмыс жасап, e санының 100625 ондық үлестері анықталған.

$$27x^2 - 55x + 50 = 0$$
$$35x^2 - 83x - 33 = 0$$

теңдеулердің түбірлерінен бірі сәйкесінше $x \approx 2{,}71829$ және $x \approx 2{,}71828582$ болатыны есептелген. Бұл мәндер e -ң мәніне жуық болады. e саны шексіз үздіксіз бөлшек түрінде де өрнектелуі мүмкін.

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cdots}}}}}}}}$$

Бұл жіктелуді алғаш рет Л.Эйлер көрсеткен.

e ні рационал сандар көмегінде дөңгелектеу мүмкін:

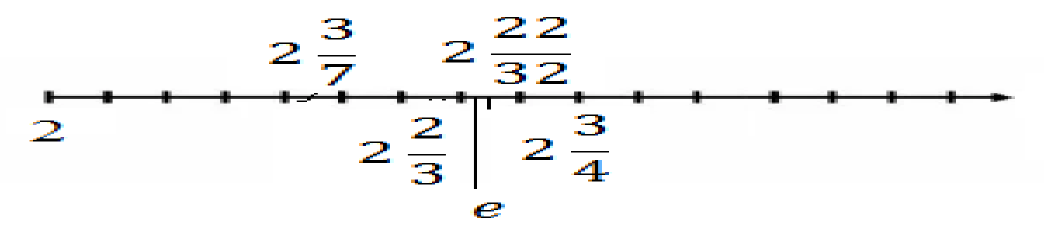
кемімен:

$$\frac{2}{1}; \frac{8}{3}; \frac{19}{7}; \frac{106}{39}; \frac{1264}{465}, \dots \qquad (1)$$

көбімен

$$\frac{3}{1}; \frac{11}{4}; \frac{87}{32}; \frac{193}{71}; \dots \qquad (2)$$

Егер бұл мәндер сандар осіне орналастырылса, төмендегі жағдайды көру мүмкін (42-сурет). (1) және (2) рационал сандар тізбегінің шегі e санын беретенін дәлелдеу мүмкін.



42-сурет.

2.7 Арифметик прогрессиядағы жай сандар

Арифметик прогрессиялардағы бар болған жай сандар санын анықтау мәселесімен ғалымдар көп ғасырлар барысында айналысып келген. Сол жолда жеткен кейбір жетістіктермен танысамыз.

Алдымен мүшелерінің саны шектеулі болған арифметик прогрессиялармен айналысамыз. Мүшелерінің саны 3-у әр түрлі жай сандардан құралған арифметик прогрессиялардың саны шексіз көп болатыны дәлелденген. Мысалы, жай 3 санымен басталатын, үш мүшесі де жай сандардан құралған прогрессиялар бар:

3, 5, 7; 3, 11,19; 3, 13, 23; 3, 17, 31;

3, 23, 43; 3,31, 59; 3, 37,71; 3,41,79; 3, 43, 83.

Мұндай прогрессиялардың саны шекті немесе шексіздігі белгісіз. Бірінші мүшесі жай 2 санына тең болған және үш мүшесі де жай сандардан құралған прогрессиялардың болмайтынын оңай дәлелдеуге болады(дәлелдеп көріңіз).

Айырмасы 2 ге, 4 ке тең болған және үш мүшесі де жай сандардан құралған үш мүшелі прогрессиялар екеу: 3, 5, 7 және 3, 7, 11. Бірақ айырмасы тақ сан болып, үш мүшесіде жай сандардан құралған прогрессиялар шексіз көп деген болжам бар. Мұндай прогрессиялардан төмендегілерді көрсетуге болады:

5, 11, 17; 11, 17 23; 17, 23, 29; 47, 53, 59.

Соңғы мысалда үш жай сан да жай сандар тізбегінде бірінен соң бірі орналасқан жай сандар.

Айырмасы 6 ға тең болған және төртеуі де жай сандар кестесінде тізбектей орналасқан 4 мүшелі прогрессиялар да бар:

251, 257, 263, 269 және 1741, 1747, 1753, 1759.

Айырмасы 6 ға тең болған және бес мүшесі де жай сандардан құралған прогрессия тек біреу:

5, 11, 17, 23, 29.

Бес тізбекті жай сандардан құралған бес мүшелі прогрессиялардың біреуі де белгілі емес.

Үшеуі де фибоначчи сандарынан құрылған үш мүшелі өсетін арифметик прогрессиялар да бар. Мысалы, 2, 3, 5 және 3, 8, 13 фибоначчи сандарынан құралған арифметик прогрессия болады.

Төртеуі де фибоначчи сандарынан құрылған төрт мүшелі арифметик прогрессияның болмайтынын дәлелдеу мүмкін.

Ферма теоремасы: Арифметик прогрессияны құрастырушы 4 әр түрлі натурал сандардан құралған квадраттар болмайды. Бірақ, 3 әр түрлі жай сандардың квадраттарынан құралған прогрессиялар бар:

$$\mathbf{7^2 = 49}, \quad \mathbf{13^2 = 169}, \quad \mathbf{17^2 = 289}, \quad \boldsymbol{d} = \mathbf{120}, \quad \div \mathbf{49}, \quad \mathbf{169}, \quad \mathbf{289};$$

$$\mathbf{7^2 = 49}, \quad \mathbf{17^2 = 289}, \quad \mathbf{23^2 = 729}, \quad \boldsymbol{d} = \mathbf{240}, \quad \div \mathbf{49}, \quad \mathbf{289}, \quad \mathbf{729}.$$

Мұндай прогрессиялар шексіз көп деген болжам бар.

Математик Вокулич үш әр түрлі кубтардан құралған прогрессиялардың болмайтынын дәлелдеген.

Үш әр түрлі биквадраттардан құралған прогрессияның бар немесе болмайтыны дәлелденбеген.

Кез-келген ұзындыққа ие болған және әр түрлі жай сандардан құралған прогрессиялар бар, деген болжам айтылған.

Бірінші мүшесі 23143 болып, айырмасы 30030 болған әр түрлі жай сандардан құралған 12 мүшелі прогрессия бар. Бұл прогрессияны Кеңес математиктерінен В.А. Голубев және В.Н.Сердинский көрсеткен.

10 мүшесі де жай сандардан құралған 10 мүшелі прогрессия бар: 199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089, мұнда айырма $d = 210$. Бірінші мүше 4943, айырма болса, 60060 болған әр түрлі жай сандардан құралған 12 мүшелі арифметик прогрессия да бар.

В.А. Голубев жай сандардан құралған 10 мүшелі прогрессияның 49 тасын, 11 мүшелі прогрессияның 18 тасын , 12 мүшелі прогрессияның 3 уін , 13 мүшелі прогрессияның біреуін эксперименталь жолмен анықтады.

Мысал.

Бірінші мүшесі 67709 ға, айырмасы 25410 ға тең болған және бірінші мүшесі 179351 ға, айырмасы 69300 ге тең болған прогрессиялар 12 мүшелі прогрессиялар болады;

бірінші мүшесі 2913971 ге, айырмасы болса 510510 ға тең прогрессиялар 13 мүшелі прогрессиялар болады.

1969 жылда В.Н.Сердинский, американдық математик Е.Карст және С.С.Рутлер жай сандардан құралған келесі прогрессиялардың болатынын көрсетті:

Элементтері саны 10 нан кем болмаған прогрессиялардың 35 тасы, атап айтсақ, бірінші мүшесі 55117 болып, айырмасы 60060 қа тең болған 14 мүшелі прогрессия, бірінші мүшесі 2236133941 , айырмасы болса, 223092870 ке тең болған 16 мүшелі прогрессия табылған.

100 та әр түрлі жай сандардан құралған 100 мүшелі прогрессияның болатыны белгісіз. Егер сондай 100 мүшелі прогрессия бар болса, мұндай прогрессиялардың мүшелері (бірінші мүшесінен басқа) кемінде 24 цифрлы сан болатынын дәлелдеу мүмкін.

Элементтері үшбұрышты сандардан құралған 3 мүшелі арифметик прогрессиялар болатыны дәлелденген.

Енді шексіз арифметик прогрессияда кездесетін жай сандар саны туралы мәселені қарастырайық.

Егер прогрессияда бірінші мүше және айырма өзара жай сандар болса, мұндай прогрессияны примитив прогрессия деп аталады.

Кейбір примитив прогрессияларда жай сандар саны шексіз көп болатынын дәлелдеу оңай.

Мысал.

5, 11, 17, 23, 29, 35, ... (6m-1), …

3, 7, 11, 15, ... (4m-1), …

5, 9, 13, 17, ... (4m +1), …

13, 21, 29, 37, ... (8m+5), …

прогрессиялардың әр бірінде де жай сандар шексіз көп болады.

Жоғарыда айтылған, (4m +1) және (4m +3) түріндегі жай сандар саны да шексіз көп.

Натурал n санына дейін болған (4m +1) және (4m +3) түріндегі жай сандар саны $\pi_1(n)$ және $\pi_3(n)$ мен белгілейміз.

Мысал.

$$\pi_1(10) = 1, \qquad \pi_3(10) = 2,$$
$$\pi_1(17) = 3, \qquad \pi_3(17) = 3,$$
$$\pi_1(100) = 11, \qquad \pi_3(100) = 13.$$

$n < 26861$ болғанда $\pi_1(n) \leq \pi_3(n)$ болатыны көрсетілген. Кез-келген n үшін барлық уақыт $\pi_1(n) \leq \pi_3(n)$ болуы қажет, деген болжам бар.

Бірақ 1914 -жылда Англия математигі Литлвуд төмендегі теореманы дәлелдеді:

$\boldsymbol{\pi_1(n) > \pi_3(n)}$ және $\boldsymbol{\pi_1(n) < \pi_3(n)}$ теңсіздіктерді қанағаттандыратын шексіз көп натурал $\boldsymbol{n}$ сандар бар.

Бірақ $\pi_1(n) > \pi_3(n)$ теңсіздікті қанағаттандыратын біреу де натурал сан көрсетілмеген. Тек 1957 жылда Д.Ж.Линч $n = 26861$ болғанда $\pi_1(n) = 1473$ және $\pi_3(n) = 1472$ болатынын көрсетті.

$n = 623681$ болғанда $\pi_1(n) = 25444$, $\pi_3(n) = 25436$.

616000 және 634000 сандар арасында тағы да сондай n мәндер болатынын көрсетті. $n = 3 \cdot 10^6$ ға дейін көрсетілген n нен басқа сондай n болмайтыны дәлелденді.

Демек, $n > 3\,000\,000$ натурал сандар үшін $\pi_1(n) > \pi_3(n)$ қанағаттандыратын n дер шексіз көп болады. Бірақ қазірге дейін мұндай n -ң біреуін де білмейміз. Осыдан келесі сұрақ туындайды:

Кез-келген шексіз примитив арифметик прогрессияда қанша жай сан бар?

1788 жылда француз математигі Лежандр:

Кез-келген шексіз примитив арифметик прогрессияда шексіз көп жай сан бар, деген теореманы айтты. Бірақ ол бұл теореманы дәлелдей алмады. Тек 1837 жылда неміс математигі Лежен Дирихле алғаш рет бұл теореманы дәлелдеді.

Кейінгі уақыттарда бұл теореманың дәлелін көп ғалымдар қарапайым түрге келтірді.

1949 жылда норвегиялық математик А.Сельберг және одан кейінгі математик А.О.Гельфонд бұл теореманың «элементар» дәлелін ұсынды.

Көп жылдар барысында берілген шексіз примитив прогрессиядағы ең кіші жай сан қандай болуы туралы мәселе қойылған еді. Бұл мәселені 1944 жылда ленинградтық академик Ю.В.Линник шешті.

Линниктің көрсетуі бойынша, егер арифметик прогрессияның айырмасы d болса, кез-келген примитив прогрессиядағы ең кіші жай сан $p < d^c$ болады. Мұндағы c сан d ға байланысты болмаған абсолют өзгермейтін тұрақты болады.

1958 жылда Қытай математигі Пан-Чен-Тонг Линник тәсілін пайдаланып, $c \leq 5448$ болатынын көрсетті. 1965 жылда Қытай математигі Чен-ин-Рун $c \leq 777$ болатынын дәлелдеді.

Сондай шексіз примитив болмаған арифметик прогрессиялар бар, оларда бірде бір Фибоначчи сандары болмайды:

4, 12, 20, 28, ... жалпы мүше $8k + 4$,

6, 14, 22, 30, ... жалпы мүше $8k + 6$.

Құрамында бірде бір Фибоначчи сандары болмайтын шексіз примитив арифметик прогрессиялар болатынын дәлелдеу мүмкін. Мысалы, жалпы мүшесі $11k$+4 болған 4, 15, 26, 37, ... прогрессияда бірде бір Фибоначчи сандары болмайды.

Математик Серпинский 1, q, q^2, $q^3, \ldots$ геометрик прогрессияның құрамында тек q иррационал сан болғанда ғана, 3 мүшелі арифметик прогрессия бар болуы мүмкіндігін дәлелдеді.

$q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ болғанда q^m, q^{m+1}, q^{m+3} ($m \geq 0$ -бүтін сан) арифметик прогрессияны береді.

$m = 1$ болғанда $\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$ үшмүшелі арифметик прогрессия алынады (мұнда $d = 2 - \sqrt{5}$).

$1^2, 2^2, 3^2, \ldots, k^2, \ldots$ тізбек құрамында арифметик прогрессия қалыптастырушы x^2, y^2, z^2 тар бар.

Мысал. $1^2, 5^2, 7^2$ - үшмүшелі арифметик прогрессия болып, айырмасы $d = 24$ ке тең.

$n!, m!, p!$ дар ешқашан арифметик прогрессия құрастырмайтыны дәлелденген (n, m, p натурал сандар).

Арифметик прогрессия $f(t) = kt + l,\ t = 1, 2, 3, \ldots$ сызықты функция мәндерінен құралған болады.

Егер $f(t)$ сызықты функция орнына қандайда басқа функция алынса, онда ол уақытда төмендегі мәселе туындайды.

$f(1),\ f(2),\ f(3), \ldots$ тізбекте қанша жай сан бар?

Мысалы, $f(t) = t^2 + 1$ болса, 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82, 101, ... тізбекте қанша жай сан бар?

Жоғарыдағы тізбектің алдыңғы 3500 мүшелерінде 300 жай сан кездеседі. Бұдан кейінгі мүшелерінде де тағы жай сан кездеседі ме, жоқ па, деген сұраққа жауап бере алмаймыз және сондықтан тізбекте қанша жай сан болатыны белгісіз.

3 Арифметикадағы кейбір аддитив мәселелер.

Үндістандық Рамануджан (1887-1920) қабілетті математик ретінде танымал. Кеңес математигі Линник оны «математика Паганинисі» деп аталған.

Бір күні англиялық математик Харди аурып жатқан Раманутжанның үйіне таксімен барады. Раманутжанмен кездесіп, «досым кешіккенім үшін кешір, асығып таксіде келдім» дейді. Раманутжан қандай нөмерлі таксімен келгенін сұраған. Ол машинаның нөмері 17-29 болатынын айтады. Раманутжан бұл нөмерді есітіп ойланып қалады. Харди оған «Неге сонша ойланып қалдыңыз, бұл санның ешқандай қызықты ерекшілігі жоқ?» дейді. «Досым, сіз қате ойладыңыз»,- дейді оған Раманутжан, - бұл сан ғажап сан, ол екі жолмен – екі әр түрлі натурал сандардың кубтарының қосындысы түрінде жазылған сандардың ең кішісі» дейді:

$$1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3 = 7 \cdot 13 \cdot 19.$$

Математиктердің басқа бір кездесуінде сол болған оқиға туралы Харди айтқан кезде, сол кездесуге қатысқан басқа бір математик: «Бұл сан мені ойымша жай сан болуы керек» деген болатын және шамалы уақыттан соң: «Сұраған адам ұлы ғалым болса да, екі кубтың қосындысы жай сан болмайтынын жылдам анықтай алмапты», - депті.

1729 санының ғажайып қасиетті сан болатынын тағы төмендегі жіктеу арқылы көрсету мүмкін:

1729=1+8+13+21+34+55+89+144+377+987,

яғни 10 әр түрлі фибоначчи сандар қосындысынан құралған.

Бұл қарастырылған мәселелер арифметиканың кейбір аддитив мәселелеріне қатысты.

Математиканың сандар теориясы саласындағы арифметиканың аддитив мәселелерін зерттейтік. Берілген натурал санның белгілі қасиеттеріне ие болған және белгілі сандардан құралған мүшелердің қосындысы ретінде жазылуына **аддитив мәселе** деп аталады. Аддитив сөзі латын тілінен алынған болып, «қосынды» мағынасын береді. Кейбір аддитив мәселелерге тоқталайық. Алдымен, жай сандармен байланысты болған аддитив мәселелер, яғни қосындылары жай сандардан құралған мәселелермен танысамыз.

3.1 Гольдбах-Эйлер гипотезасы

Петербург академиясының академигі Х.Гольдбах 1742 жылы 7-маусымда Л.Эйлерге жазған хатында «Менің ойымша кез келген

$n \geq 6$ натурал сан үш жай санның қосындысынан құралған» деген пікір білдірген. Л.Эйлер болса өзінің жауап хатында: «Кез келген $n > 2$ жұп сан екі жай сан қосындысынан құралған, бірақ өкінішке орай қаншалықты әрекет жасасам да мен дәлелдей алмай жатырмын» деп жазған болатын.

Бұл гипотезалар біргелікте Гольдбах-Эйлер гипотезалары деп аталады. С.Галашевский бұл гипотезаларды жай сандар кестесінен пайдаланып $n < 50\,000$ натурал сандар үшін, кейінірек $n \leq 100\,000$ натурал сандар үшін тексеріп растаған.

Егер Гольдбах гипотезасы тақ сандар және жұп сандар үшін жеке айтылған болса, онда Гольдбах және Эйлер гипотезалары арасындағы байланыс төмендегідей болады:

$$Э \begin{matrix} \nearrow & Г^{тақ} & \\ & & \uparrow \\ \searrow & Г_{жұп} & \end{matrix}$$

мұндағы Э - Эйлер, Г – Гольдбах, $\rightarrow$ - келіп шығу белгілері.

1. Егер $n \geq 4$ жұп санына 2 жай саны қосылса, онда барлық $n \geq 6$ жұп сандар пайда болады. Сол себепті Эйлер гипотезасы шешімін тапқанда, жұп сандар үшін Гольдбах гипотезасы да шешімін тапқан болады.
2. Егер жұп сандар үшін Гольдбахтың гипотезасы шешімін тапса, Эйлер гипотезасы да шешімін тапқан болады. Бұл жағдайда жұп сандар үшін Гольдбах гипотезасындағы қосындылардың біреуі 2 жай сан болуы қажет және қалған екеуі тақ жай сан болып, кез келген жұп санды екі жай сандар қосындысы ретінде өрнектеуге болады, яғни Эйлер гипотезасы келіп шығады.
3. Эйлер гипотезасы немесе оған эквивалент болған жұп сандар үшін Гольдбах гипотезасы шешілгенде, $n \geq 6$ тақ сандар үшін Гольдбах гипотезасы шешімін тапқан болады, яғни әр бір $n \geq 4$ жұп санға 3 жай саны қосылса, тақ сандар үшін Гольдбах гипотезасы келіп шығады.

Мысалы, 8$= 3 + 5$ тен 11$= 3 + 8 = 3 + 5 + 3$ екендігі келіп шығады.

4. Тақ сандар үшін Гольдбах гипотезасынан Эйлер гипотезасы келіп шықпайды, одан тек қана кез келген жұп санның 4 та жай сандар қосындысынан құралғаны келіп шығады.

Сонымен, егер $n \geq 6$ жұп сандар және $n \geq 9$ тақ сандармен шектелінсе, онда Эйлер және Гольдбах гипотезалары төмендегідей болады:

Эйлер гипотезасы: кез келген $n \geq 6$ жұп сан екі жай сан қосындысынан құралған.

Гольдбах гипотезасы: кез келген $n \geq 9$ тақ сан үш жай сан қосындысынан құралған.

1912 жылда болып өткен математиктердің халықаралық конгресінде атақты неміс математигі Э.Ландау «Гольдбах мәселесін қәзіргі заман математикасымен шешу мүмкін емес» деген болатын.

Гольдбах мәселесін шешу жолындағы бірінші жетістіктер атақты кеңес математигі Л.Г.Шнирельманға (1905-1938) тиесілі. Ол 1930 жылда математикаға сандық тізбектерді қосу тәсілі деген жаңа ұғым еңгізді.

Л.Г.Шнирельман өзінің тәсілімен төмендегі теореманы дәлелдеді:

Кез келген $n > 1$ натурал сан үшін сондай С тұрақты сан табылады, сол n саны көбімен С дана жай сандар қосындысынан құралғанболады.

Бұл С саны Шнирельман тұрақтысы деп аталады.

Шнирельман С мәнінің 800 000 нан артық еместігін дәлелдеді. Сонымен, Шнирельман теоремасы бойынша кез келген $n > 1$ саны көбімен 800 000 жай сандар қосындысынан құралғаны келіп шығады. Әрине бұл тұрақты өте үлкен болсада , бырақ бұл уақыт үшін үлкен жетістік еді.

Математик Пип $9 < n < 360749$ болған барлық тақ сандардың 3 та тақ жай сандардың қосындысы түрінде өрнектелген кестені және $n \leq 100\,000$ болған барлық жұп сандардың екі тақ жай сандар қосындысы түрінде өрнектеу кестесін берді. Шнирельман теоремасынан 9^{9^9} санының және $10^{10^{34}}$ үлкен санның да 18 жай сандар қосындысынан құралғаны келіп шығады. Шнирельман константасы жұп сандар үшін $C \leq 10$ болатынын, тақ сандар үшін $C \leq 9$ болатыны дәлелденді.

1937 жылда кеңестер академигі И.М.Виноградов Гольдбах гипотезасының шешімін тапты. Ол өзінің тригонометрик қосындылар теориясын пайдаланып, кез келген $n > n_0$ тақ сан үш жай сандар қосындысынан құралғанын дәлелдеді. Ол Гольдбах гипотезасының n_0 санынан бастап дұрыс екенін көрсетті. Бұл сан көп уақыттан бері анықталмай келген еді.

1939 жылы кеңес математигі К.Г.Бородкин $n_0 \leq e^{e^{e^{41.96}}}$ екендігін анықтап, кейінрек бұл сан $n_0 < e^{e^{16.038}}$ дейін қысқарды(мұндағы $e = 2{,}718281828459045 \ldots -$ трансциндент сан). Бұл өте үлкен сан. Дегенмен, n_0 ге дейін болған сандар үшін Гольдбах гипотезасының дұрыс болатынын анықтау мәселесі бұл гипотезаның барлық $n > n_0$ сандары үшін дұрыс болатынын анықтауға қарағанда оңай.

Математик Минковский кез келген $\mathrm{n} > 55$ натурал сан $4k + 3$ түріндегі әр түрлі жай сандар қосындысынан құралғандығын дәлелдеді.

Мысалы, 60=7+11+19+23;

мұнда 7=4$\cdot 1+3$, 11=4$\cdot 2+3$, 19=4 $\cdot 4+3$ 23=4$\cdot 5+3$.

Кез келген жұп сан екі жай санның айырмасының құрастырылған, деген гипотеза да бар.

1938 жылы кеңес математигі Н.Г.Чудаков төмендегі теореманы дәлелдеді: ***дерлік барлық жұп сандар екі жай сандар қосындысынан құралған.***

Бұл теореманы мынадай түсіну қажет. Егер $\lambda(x)$ арқылы x тен кіші және екі жай сан қосындысы түрінде өрнектелмейтін жұп сандар саны өрнектелсе, онда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\lambda(x)}{x}=0$$

болады.

Сонымен, Гольдбах гипотезасысы шешімін тапқан болса да, Эйлер гипотезасы (кез келген $n>2$ жұп сан екі жай санның қосындысына тең) дәлелденбеген.

Ленинградтық академик Линник әдісінен пайдаланып, 1948 жылы венгриялық математик А.Реньи кез келген n жұп сан үшін $n=p+p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_l$ (барлық p жай сан) теңдеу орынды болатынын дәлелдеді ($l\le k,\ k-$ белгілі константа болатыныда анықталды). Егер $k=1$ болса, Эйлер гипотезасы дәлелденетін еді. 1956 жылы академик И.М.Виноградов төмендегі теореманы дәлелдеді***: кез келген $\boldsymbol{n}$ жұп сан $\boldsymbol{k_1+k_2}$ ге тең, мұнда $\boldsymbol{k_1}$ және $\boldsymbol{k_2}$ лер көбімен 3 жай сан көбейтіндісіне тең.***

Төмендегі ғажайып теорема да дәлелденген:

Кез келген үлкен $\boldsymbol{n}$ жұп сан $\boldsymbol{n=a_{(r)}+b_{(s)}}$ түрінде өрнектеледі. $\boldsymbol{a_{(r)}}$ және $\boldsymbol{b_{(s)}}$ сандар сәйкес ретінде $(\boldsymbol{r})$ және$(\boldsymbol{s})$ тадан артық болмаған жай көбейтінділерге ие.

Мысалы, математик Брун $r=s=9$, математик Радемахер $r=s=7$, Эстерман $r=s=6$, математик Риччи

$$r=5,\ \ s=7,$$
$$r=4,\ \ s=9,$$
$$r=3,\ \ s=15,$$
$$r=2,\ \ s=366,$$

математик Бухштаб $r=s=4$, математик А.Сельберг $r=2,\ \ s=3$ болатынын көрсетті.

Түсініктеме. $r=2,\ \ s=3$ ті мынадай түсіну қажет: кез-келген үлкен жұп сан біреуі 2 та, екіншісі болса 3 та жай сандар көбейтіндісінен артық болмаған екі натурал сандар қосындысынан құралған болады.

1958 жылда кеңес математигі Бухштаб кез келген n саны $n = p + \ l$ түрінде (мұнда p жай сан, l болса көбімен 3 жай сандар көбейтіндісінен құралған) өрнектеу мүмкіндігін дәлелдеді.

Бірақ бұлардың барлығы да Эйлер гипотезасын шешпейді.

3.2 Варинг гипотезасы

1770 жылда ангиялық математик Э.Варинг төмендегі аддитив мәселені қойды:

Кез-келген натурал $n \geq 2$ сан үшін сондай натурал $r = g(n)$ сан табылып, кез-келген натурал N сан $x_1, x_2, \ldots, x_r$ теріс болмаған бүтін сандардың n- дәрежелерінің қосындысынан құралған болады, яғни

$$N = x_1^n + \ x_2^n + x_3^n + \cdots + x_r^n, \qquad x_r \geq 0.$$

мұнда r n ге байланысты болып, N ге байланысты емес.

XVIII ғасырда француз математигі Лагранж қарапайым жолмен Варинг гипотезасының төмендегідей дербес жағдайын көрсеткен еді:

$n = 2$ болғанда $r = 4$ болады, яғни кез-келген натурал сан теріс болмаған 4 бүтін сандар квадраттары қосындысы түрінде өрнектеледі.

Мысал.

$$27 = 4^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2,$$
$$250 = 14^2 + 7^2 + 2^2 + 1^2,$$
$$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2.$$

Кейбір сандар үшін $n = 2$ болғанда $r < 4$ болатыны да көрсетілген.

Ферма теоремасы:

а) р= $4k + 1$ түріндегі кез-келген жай сан тек бір ғана тәсілмен екі натурал сандар квадраттары қосындысы түрінде өрнектеледі.

Есеп.

$$5 = 1^2 + 2^2, \qquad 37 = 1^2 + 6^2,$$
$$13 = 2^2 + 3^2, \qquad 41 = 4^2 + 5^2,$$
$$17 = 1^2 + 4^2, \qquad 53 = 2^2 + 7^2,$$
$$29 = 2^2 + 5^2, \qquad 61 = 5^2 + 6^2,$$
$$73 = 3^2 + 8^2, \qquad \text{және т.б.}$$

Бірақ екі натурал сандар квадраттары қосындысына бөлектенген сан барлық кезде жай сан болмайды.

Мысал.

$$10 = 1^2 + 3^2,$$
$$18 = 3^2 + 3^2,$$
$$45 = 3^2 + 6^2$$

және т.б.

Сондай натурал сандар бар болып, оларды бір неше түрлі әдіспен екі натурал сан квадраттарының қосындысы түрінде өрнектеу мүмкін.

Мысал.

$$65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2,$$
$$1105 = 4^2 + 33^2 = 9^2 + 32^2 = 12^2 + 31^2 = 23^2 + 24^2.$$

б) $\boldsymbol{p = 4k + 3}$ ***түріндегі кез-келген жай санды екі натурал сандар квадраттарының қосындысы түрінде өрнектеуге болмайды.***

в) ***Құрама*** $\boldsymbol{m}$ ***санның екі натурал сан квадраттарының қосындысы түрінде өрнектеу үшін оның жай көбейткіштері құрамында*** $\boldsymbol{4k + 3}$ ***түріндегі жай сандар не мүлдем болмауы, не тек жұп дәрежелерде болуы қажетті және жеткілікті.***

Мысал. $58 = 3^2 + 7^2$, $58 = 2 \cdot 29$.

2 және 29 жай сандар болып, $4k + 3$ түрінде болмайды.

245=$7^2 + 14^2$, $245 = 5 \cdot 7^2$, мұнда $5 = 4k + 1$ түріндегі жай сан. Бірақ, $7 = 4k + 3$ түріндегі жай сан болса да, ол сан 245 тің жай көбейткіштері құрамында 2 дәрежеге ие.

Төмендегідей теоремалар да орынды:

Егер қандайда да бір санның екі сан квадраттары қосындысы түрінде 2 түрлі жіктелуі бар болса, ол құрама сан болады.

Мысал.

$$2501 = 1^2 + 50^2,$$
$$2501 = 10^2 + 49^2.$$

Сондықтан, 2501 құрама сан.

Жоғарыда келтірілген теоремалар француз математигі Ферма айтқан болса да, олардың қарапайым дәлелін алғаш болып Эйлер көрсеткен.

Егер $\boldsymbol{n}$ ***тақ санның екі өзара жай сандар квадраттары қосындысының тек бірдей жіктелуі бар болса, онда*** $\boldsymbol{n}$ ***жай сан болады.***

Бұл теореманы қолданып, Варшава техника институтының электрон есептеу машинасы көмегінде $2^{39} - 7$ санның жай болатынын және

$$2^{39} - 7 = 64045^2 + 738684^2 \ , (65045, 738684) = 1$$

болатыны дәлелденді.

$n = 4, 5, 6, \dots, 38$ болғанда $2^n - 7$ түріндегі сандар құрама сан болады. $n = 40, 41, 42, 43, \dots, 50$ болғанда $2^n - 7$ құрама сан болып, сәйкесінше 3, 5, 3, 107, 3, 5, 3, 11, 3, 61, 3 -терге бөлінетіні дәлелденген. Шексіз көп p жай сан үшін $2^{\mathrm{p}} - 7$ түріндегі сандар құрама болатынын дәлелденген, $n \neq 39$ болғанда $2^n - 7$ сандар ішінде басқа жай санның болатыны белгісіз.

Қандай сандар үш натурал сан квадраттарының қосындысына жіктеледі деген сұрақ қойылған.

$m = 4^n(8k+7)$ $(m, n, k -$ натурал сандар$)$ түріндегі сандардың үш натурал сан квадраттарының қосындысына жіктелуі дәлелденген. Кез-келген $m \neq 4(8k+7)$ сан үш натурал сан квадраттарының қосындысына бөлектенуі дәлелденген. Мұның қарапайым дәлелі жоқ.

Мысал.

$$m = 61 \neq 4^n(8k+7), \quad 61 = 3^2{+}4^2 + 6^2 .$$

Үшта квадраттардың қосындысынан құралған жай сандардың шексіз көп болатыны және үш та квадраттарға бөлектенбейтін жай сандардың да шексіз көп болатыны дәлелденген.

Мысал . p < 100 арасында:

$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$,
$11 = 1^2 + 1^2 + 3^2$,
$17 = 2^2{+}2^2 + 3^2$,
$19 = 1^2 + 3^2 + 3^2$,
$29 = 2^2 + 3^2 + 4^2$,
$41 = 1^2 + 2^2 + 6^2 = 3^2{+}4^2 + 4^2$,
$43 = 3^2 + 3^2 + 5^2$,
$53 = 1^2 + 4^{2+}6^2$,
$59 = 1^2{+}3^2 + 7^2$,
$61 = 3^2 + 4^2 + 6^2$,
$67 = 3^2 + 3^2{+}7^2$,
$73 = 1^2 + 6^2 + 6^2$,
$83 = 1^2{+}1^2 + 9^2 = 3^2{+}5^2{+}7^2$,
$89 = 2^2 + 2^2 + 9^2 = 2^2 + 6^2 +$
$+7^2 = 3^2 + 4^2 + 8^2$,
$97 = 5^2 + 6^2 + 6^2$.

$m = 60 = 4^1(8 \cdot 1 + 7)$ үшта квадраттар қосындысы түрінде өрнектелмейді.

$\boldsymbol{p \neq 2, 3, 5, 11, 17, 29}$ ***және 41 жай сандар тек 4 натурал сандар квадраттарының қосындысы түрінде өрнектеледі.***

Бұл теорема Лагранж теоремасына қарама-қайшы болмайды.

Мынаныда дәлелдеу мүмкін , яғни кез-келген жай сан (2, 3, 7 лерден басқа) 5 та натурал сандар квадраттарының қосындысынан құралған.

Мысал.

$$31 = 4^2 + 3^2 + 2^2{+}1^2 + 1^2.$$

Егер 1 саны жай сандар қатарына енгізілсе, математик И.Човлдің мынадай гипотезасы бар:

Кез-келген натурал сан 8 немесе оданда кем жай сандар квадраттарының қосындысынан құралған.

Бұл гипотеза $n \leq 288000$ үшін тексеріліп бекітілген.

Енді қандай сандарды екі сан кубтарының қосындысы түрінде өрнектеу мүмкіндігі туралы мәселені қарастырайық.

$p = 2 = 1^3 + 1^3$ жай саннан басқа ешқандай басқа жай сан екі натурал сан кубтарының қосындысы түрінде өрнектеуге болмайды.

Келесідегідей гипотезада да бар:

Үшта кубтар қосындысынан құралған жай сандар шексіз көп. Бұл 1923 жылда Харди және Литлвудтар жағынан айтылған.

$n^3 + 2 = n^3 + 1^3 + 1^3$ түріндегі жай сандар шексіз көп (n- натурал сан):

$$3 = 1^3 + 2 = 1^3 + 1^3 + 1^3,$$
$$29 = 3^3 + 2 = 3^3 + 1^3 + 1^3,$$
$$127 = 5^3 + 2 = 5^3 + 1^3 + 1^3,$$
$$24391 = 29^3 + 2 = 29^3 + 1^3 + 1^3.$$

Үштә кубтар қосындысына тең болмаған жай сандар шексіз көп. 1, 8, 27, 64, 125, ... сандар кубтар тізбегін құрастырады. Кез-келген натурал санды кемінде неше кубтар қосындысы түрінде өрнектеу мүмкін, деген сұрақ орынды.

Мысал.

$7 = 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3$ - 7 тә кубтар қосындысынан;

$15 = 2^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3$ - 8 тә кубтар қосындысынан;

$23 = 2^3 + 2^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3$ -9тә кубтар қосындысынан;

$31 = 3^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3$ - 5 тә кубтар қосындысынан құралған.

Ұлы неміс математигі Якоби өзінің Дозе деген шәкіртіне кез-келген санды кемінде неше кубтар қосындысы түрінде өрнектеу мүмкіндігін ойлануды тапсырған. Ол есептеу жолымен төмендегілерді көрсеткен:

1-ден 12 000 ға дейін болған сандар арасында 23 және 239 дар 9 кубтар қосындысынан; 15, 22, 50, 114, 167, 175, 186, 212, 231, 238, 364, 420, 428, 454 тер 8 кубтар қосындысынан; 7, 14, 21, 42, 47, 61, 77, 85, 87, 103, ... , 5306, 5318, 8042 лер болса 7 кубтар қосындысынан құралған.

Биферих деген жас математик кез-келген сан көбімен 9 та кубтар қосындысынан құралғанын дәлелдеген. Кейінрек ұлы неміс математигі Ландау, белгілі бір натурал саннан бастап барлық натурал сандарды 8 тә кубтар қосындысы түрінде өрнектеу мүмкіндігін дәлелдеген.

Дерлік кез-келген үлкен натурал сан 8 тә натурал сандардың қосындысынан құралған болып, олардың кемінде 7-еуі жай сан болады деген теореманы 1951 жылда К.Ф.Рот дәлелдеген. Сонымен бірге бір уақытта екі натурал санның: әрі квадраттар қосындысынан , әрі кубтар қосындысынан құралатын сандардың ең кішісі $n = 65$ болады:

$$65 = 1^3 + 4^3 = 1^2 + 8^2.$$

Мұндай қасиетке ие болған натурал сандар шексіз көп. $n > 1$ болғанда $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = k^2$ ті беретін бір ғана $n = 24$ натурал сан болатыны дәлелденген:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 24^2 = 70^2.$$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ тің кез-келген n үшін квадратты сан болатынын көрсетуге болады:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = k^2 \quad (1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2).$$

Бірақ мұндай кубтар қосындысы ешқандай n үшін жай сан бола алмайтынын дәлелдеу мүмкін.

1, 16, 81, 256 ... лар натурал сандардың 4-дәрежелерінен құралған тізбек болады.

Кез-келген натурал санның кемінде неше биквадраттар қосындысы түрінде өрнектеу мүмкін деген мәселемен көптеген ғалымдар айналысқан.

15 үшін 15 биквадраттар қосындысы қажет:

$$15 = 1^4 + 1^4 + 1^4 + \cdots + 1^4,$$

$31 = 2^4 + 1^4 + 1^4 + \cdots + 1^4$, қосындылар саны 16 болады.

47 үшін 17, 63 үшін 18, 79 үшін 19 биквадраттар қосындысы қажет. $81 = 3^4$ болғаны үшін оған 1 биквадрат жеткілікті.

Кез-келген натурал сан үшін 19 биквадрат жеткілікті болмай ма?

Лиувиль қарапайым жолмен 53 тә биквадраттар жеткілікті болатынын дәлелдеген. Кейінрек ғалымдар 53 ті кемейтіп, 47, 45, 41, 39, 38 дерге келтірілген. Бұл мәселеде математик Биферих рекорд қойды: ол 37 ге дейін кемейтті. Харди мен Литлвудтар математиканың күшті әдістерін пайдаланып, кез-келген натурал сан, қандайда $N > N_0$ ден бастап, 19 биквадраттар қосындысынан құралған болатынын дәлелдеді. Бірақ, N_0 саны сондай үлкен болып, олар оның мәнін табумен айналыспады. Мәселе шешімін табу үшін N_0 санына дейін болған барлық сандарды 19 биквадраттар қосындысы түрінде өрнектеу мүмкіндігін көрсету қажет еді. Бірақ, қазірге дейін Харди мен Литлвудтар айтқан N_0 саны өте үлкен бойынша қалды.

А.Калмарчик төмендегіні дәлелдеді: Сондай a саны табылып, барлық $n > a$ лар 16 биквадраттар қосындысынан құралған.

Тек екі биквадраттар қосындысынан құралған жай сандар да бар:

$$2 = 1^4 + 1^4; \qquad 17 = 2^4 + 1^4;$$
$$97 = 2^4 + 3^4; \qquad 257 = 1^4 + 4^4;$$
$$641 = 2^4 + 5^4.$$

Сондай жай сандар саны қанша деген сұрақ қойылған болатын? Математик Шинцель мұндай жай сандардың саны шексіз, деген болжамды айтқан болса да, бұл болжам дәлелденбеген.

Егер қандай да натурал k сан a^b ($a > 1;\ b > 1$ - натурал сан) түріндегі сандардың қосындысынан құралған болса, k саны дұрыс дәрежелер қосындысы түрінде өрнектелген деп аталады.

$k = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 19, 23$ сандардан басқа кез-келген натурал k сан a^b түріндегі дұрыс дәрежелер қосындысынан құралғандығын дәлелдеу мүмкін.

Мысал. $k = 12$ болғанда $12 = 2^3 + 2^2$;

$k = 17$ болғанда $17 = 3^2 + 2^3$; $93 = 3^4 + 2^3 + 2^2$.

Сонымен қатар, $k \leq 10$ сандардың барлығы ($k = 6$ дан басқа) екі дұрыс дәрежелер айырмасы түрінде өрнектеледі:

$1 = 3^2 - 2^3$, $4 = 5^3 - 11^2 = 2^3 - 2^2$, $8 = 2^4 - 2^3$,

$2 = 3^3 - 5^2$, $5 = 3^2 - 2^2$, $9 = 5^2 - 4^2$,

$3 = 2^7 - 5^2$, $7 = 2^7 - 11^2$, $10 = 13^2 - 3^7$,

$k = 6$ үшін мұндай айырма бар болатынын білмейміз.

Жалпы, Варинг тұжырымдамасындағы қосылғыштар саны $r = g(n)$ нің $2^n + \left[\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] - 2$ ден кем бола алмайтынын дәлелдеу мүмкін, яғни

$$r = g(n) \geq 2^n + \left[\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] - 2.$$

Мысал. $n = 2$ болғанда $g(2) \geq 2^2 + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right] - 2 = 4 + 2 - 2 = 4$,

яғни кез-келген натурал санды квадраттар қосындысы түрінде жазу үшін 4 немесе одан да артық қосылғыш жеткілікті. Бұл жағдайда қосылғыштар саны 4 ке теңдігін Лагранж дәлелдеген.

$n = 3$ болғанда $g(3) \geq 2^3 + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\right] - 2 = 8 + 3 - 2 = 9$,

$n = 4$ болғанда $g(4) \geq 2^4 + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^4\right] - 2 = 16 + \left[\frac{81}{16}\right] - 2 = 16 + 5 - 2 = 19$,

яғни кез-келген натурал санды биквадраттар қосындысы түрінде жазуда кемінде 19 қосылғыш болуы қажет.

Төмендегідей гипотеза да бар: кез-келген $n \geq 2$ үшін

$$g(n) = 2^n + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\right] - 2 \qquad (1)$$

ге тең. Біракта, кез-келген $n \geq 6$ және

$$3^n - (2^n - 1)\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\right] \leq 2 \qquad (2)$$

дер үшін

$$g(n) = 2^n + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\right] - 2$$

теңдігі дәлелденген. (2) теңсіздікті қанағаттандырмайтын бірде бір n саны жоқ. Мысалы, $n = 6, 7, 8$ үшін (2) теңсіздік орынды және олар үшін $g(n)$ -ң нақты мәні (1) формуламен табылады. $g(6) = 73$, $g(7) = 143$, $g(8) = 278$ ге тең. $g(4)$ және $g(5)$ лардың нақты мәні табылмаған; $g(4) \leq 21$ дәлелденген (жоғарыдағы $g(4) = 19$ өте үлкен N_0 ден бастап орындалатыны туралы айтқан болатынбыз), $g(5) \leq 40$ дәлелденген (1) формула болса $g(5) = 37$ ді береді.

Варинг гипотезасы жалпы жағдайда көп жылдар барысында шешілмеген, тек 1909 жылда ұлы неміс математигі Гильберт бұл гипотезаның шешімін тапты. Бірақ оның дәлелдеген әдісі өте қиын.

1920-1925 жылдарда Харди мен Литлвудтар Гильберт ұсынған дәлелді ықшамдады. 1959 жылда кеңес математигі И.М.Виноградов Варинг гипотезасының қарапайым дәлелін берді.

Алдын берілген n үшін Варинг гипотезасы қосындылар санының ең кішісі $r = g(n)$ мен белгіленген еді. Енді берілген n үшін Варинг гипотезасы r қосындылар санының ең кішісін де барлық N үшін емес, қандайда $N_0 > N$ нен бастап қажет болған қосындылар санының ең кішісін $G(n)$ мен белгілейміз.

Төмендегілер анықталған:

$$n = 2 \text{ үшін } g(2) = G(2) = 4,$$
$$n = 3 \text{ үшін } g(3) \neq G(3).$$

$g(3) = 9$ болып (тек 23 және 239 үшін 9 та кубтар қосындысы қажет).

$n > 239$ болғанда $G(3) = 8$ болатынын жоғарыда көрсеттік. Бірақ Ландау $G(3) \leq 8$ болатынын, Линник болса $G(3) \leq 7$ болатынын көрсетті. $G(4) = 16$, $G(5) = 23$; $G(6) \leq 36$; $G(7) \leq 52$, $G(8) \leq 73$ (Давенпорт), $g(4) \leq 35$ (Л.Динкенс), $g(5) \leq 40$ (Чен Цзин-Жунь), $g(6) = 73$ (Пиллин) мәндер бүгінгі күнде дәлелденген.

$G(5) \leq 23$ кез-келген үлкен болған $N_0 > N$ сандарды теріс болмаған бүтін сандардың 5-дәрежелерінің қосындысы түрінде өрнектеу үшін ең көбімен 23 қосылғыш қажет; $g(4) \leq 35$ кез-келген натурал N санды теріс болмаған қосындыларының төртінші дәрежелері қосындысы түрінде өрнектеу үшін ең көбімен 35 қосылғыш қажет, деген мағынаны береді және тағы басқа.

Варинг гипотезасы туралы ой жинақтап, өзі аддитив мәселе болмаса да, бірақ оған келтірілетін кейбір мәселелермен танысамыз.

Кез-келген $p \neq 2$ жай санды бір ғана тәсілмен екі квадраттар айырмасы түрінде өрнектеу мүмкін.

Мысал. $13 = 7^2 - 6^2$.

Жалпы $p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ (*) дан мұндай есептерді шексіз жазуға болады.(*) формуладан $\frac{p+1}{2} - \frac{p-1}{2} = 1$ келіп шығады. Яғни, егер $p = x^2 - y^2$ болып, p жай сан болса, $x - y = 1$ болуы қажеттілігі келіп шығады; бірақ керісінше болмайды, яғни $x - y = 1$ болғанда, $x^2 - y^2$-ң жай сан болуы шарт емес; 14-13=1, бірақ $14^2 - 13^2 = 27$ құрама санға тең. Жоғарыда келтірілген теоремадан, егер натурал n саны екі түрлі әдіспен квадраттар айырмасы түрінде өрнектелсе, n құрама сан болады. Жоғарыда келтірілген есептен 27 санын $27 = 6^2 - 3^2$ түрінде де өрнектеу мүмкін. Кейбір тақ құрама сандарды да екі квадраттар айырмасы түрінде өрнектеу мүмкін.

Мысал. $9 = 5^2 - 4^2$.

Егер тақ құрама сан тек бір ғана әдіспен екі квадраттар айырмасы түрінде өрнектелсе, онда тақ сан жай санның квадраты болуы қажеттілігін дәлелдеу мүмкін: $9 = 5^2 - 4^2 = 3^2$.

Кез-келген n бүтін санды шексіз көп жолдармен $n = x^2 + y^2 - z^2$ ($x, y, z -$ натурал сандар) түрінде өрнектеу мүмкін. Бұл теорема төмендегі теңдіктерден келіп шығады:

$$2k - 1 = (2t)^2 + (k - 2t^2)^2 - (k - 2t^2 - 1)^2,$$

$$2k = (2t + 1)^2 + (k - 2t^2 - 2t)^2 - (k - 2t^2 - 2t - 1)^2.$$

p-жай санды $x^2 + 2y^2$ түрінде өрнектеу үшін ($x, y, z -$ натурал сандар) оның $p = 8k + 1$ немесе $p = 8k + 3$ түріндегі жай сан болуы қажетті және жеткілікті. Бұл жағдайда $p \neq x^2 + 2y^2$ түрінде тек бір ғана жолмен өрнектеледі.

Мысал

$$p = 3 = 1^2 + 2 \cdot 1^2,$$
$$p = 11 = 8 \cdot 1 + 3 = 3^2 + 2 \cdot 1^2,$$
$$p = 17 = 8 \cdot 1 + 1 = 3^2 + 2 \cdot 2^2,$$
$$p = 19 = 8 \cdot 2 + 3 = 1^2 + 2 \cdot 3^2.$$

Төмендегідей гипотезада бар:

$p = 1^2 + 2y^2$ және $p = x^2 + 2 \cdot 1^2$ түрінде өрнектелетін $p = 8k + 1$ және $p = 8k + 3$ түріндегі жай сандар шексіз көп болады. ($x, y -$ натурал сандар).

Мысал. $73 = 1^2 + 2 \cdot 6^2$, $83 = 9^2 + 2 \cdot 1^2$, $73 = 8 \cdot 9 + 1$; $83 = 8 \cdot 10 + 3$.

Бұл гипотеза дәлелденбеген.

Эйлердің төмендегідей гипотезасысы бар:

Кез-келген $8k + 3$ түріндегі натурал сан квадратты санмен жай сан екі еселенгеннінің қосындысынан құралған:

$$k = 8k + 3 = m^2 + 2 \cdot p.$$

Бұл гипотеза дәлелденбеген.

Эйлер бұл гипотезаны $k = 200$ ге дейін тексеріп тастықтады. Лемер бұл тұжырымды $k = 1000$ ға дейін тексеріп бекітті.

Мысал.

$$11 = 1 \cdot 8 + 3 = 1^2 + 2 \cdot 5,$$
$$19 = 2 \cdot 8 + 3 = 3^2 + 2 \cdot 5,$$
$$27 = 3 \cdot 8 + 3 = 1^2 + 2 \cdot 13,$$
$$35 = 4 \cdot 8 + 3 = 1^2 + 2 \cdot 17 = 5^2 + 2 \cdot 5,$$
$$43 = 8 \cdot 5 + 3 = 3^2 + 2 \cdot 17,$$
$$51 = 8 \cdot 6 + 3 = 5^2 + 2 \cdot 13,$$
$$59 = 8 \cdot 7 + 3 = 1^2 + 2 \cdot 2a = 5^2 + 2 \cdot 17 = 7^2 + 2 \cdot 17,$$
$$67 = 8 \cdot 8 + 3 = 3^2 + 2 \cdot 29,$$
$$75 = 8 \cdot 9 + 3 = 1^2 + 2 \cdot 37 = 7^2 + 2 \cdot 13,$$
$$83 = 8 \cdot 10 + 3 = 3^2 + 2 \cdot 37 = 5^2 + 2 \cdot 29 = 7^2 + 2 \cdot 17.$$

1937-1938 жылдарда кеңес математигі В.А.Голубев $x^2 + 27y^2$ түрінде өрнектелетін $p < 30\,000$ жай сандар және $x^2 + 64y^2$ түрінде өрнектелетін $p < 24\,000$ жай сандар кестесін ұсынған еді.

1963 жылда В.Н.Сердинский, американдық Е.Карст және С.Кравицтер $x^2 + 27y^2$ түрінде өрнектелетін $p < 190\,000$ жай сандар және $x^2 + 64y^2$ түрінде өрнектелетін $p < 120000$ жай сандар кестесін ұсынды.

Теорема. ***$p = 6k + 1$ түріндегі барлық жай сандарды $x^2 + 3y^2$ түрінде тек бірдей әдіспен өрнектеу мүмкін. (x, y - натурал сандар).***

Мысал. $7 = 2^2 + 3 \cdot 1^2,$ $31 = 6 \cdot 5 + 1 = 2^2 + 3 \cdot 3^2,$

$13 = 1^2 + 3 \cdot 2^2,$ $37 = 6 \cdot 6 + 1 = 5^2 + 3 \cdot 2^2,$

$19 = 4^2 + 3 \cdot 1^2,$ $43 = 6 \cdot 7 + 1 = 4^2 + 3 \cdot 3^2$

$$p = 1^2 + 3y^2 \text{ және } p = x^2 + 3 \cdot 1^2$$

түрінде өрнектелетін $p = 6k + 1$ түріндегі жай сандар шексіз көп болады ($x, y -$ натурал сандар).

Мысал.

$$17 = 1^2 + 4 \cdot 2^2 = 4 \cdot 4 + 1,$$
$$61 = 4 \cdot 15 + 1 = 5^5 + 4 \cdot 3^2.$$

Теорема. $\boldsymbol{p}$ ***жай сан*** $\boldsymbol{x^2 - 2y^2}$ ***түрінде өрнектелуі үшін*** ($\boldsymbol{x, y}$ – натурал сандар) $\boldsymbol{p \neq 8k + 1}$ ***немесе*** $\boldsymbol{8k + 7}$ ***түріндегі жай сан болуы қажетті және жеткілікті.*** Бұл теореманы да Серпинский дәлелдеген.

Қандай жай сандар екі кубтардың айырмасынан құралған болады?

Егер $p = x^3 - y^3$ жай сан болса, $x - y = 1$ болатынын көрсету оңай, себебі $p = (x - y)(x^2 + x\,y + y^2)$. Демек, $p = x^2 + xy + y$; $x - y = 1$,

$y = x - 1$ болғаны үшін $p = x^3 - (x-1)^3 = 3x^2 - 3x + 1$.

Сонымен, p жай сан екі кубтардың айырмасы болуы үшін p

$$3x^2 - 3x + 1 = 3x(x-1) + 1$$

түріндегі жай сан болуы керек ($x > 1 -$ натурал сан).

Мұндай жай сандар шексіз көп, деген болжам да бар. $x = 2, 3, 4, 5$ болғанда $7 = 2^3 - 1^3$; $19 = 3^3 - 2^3$; $37 = 4^3 - 3^3$; $61 = 5^3 - 4^3$ - жай сандар пайда болады. $x = 6$ болғанда $91 = 6 \cdot 3(6-1) + 1 = 6 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 7 \cdot 13$ - құрама сан; $x = 7$ болғанда $127 = 7^3 - 6^3$ - жай сан; $x = 8$ болғанда $169 = 13^2$; $x = 9$ болғанда $217 - 7 \cdot 31$ құрама сан; $x = 10, 11, 12$ болғанда $271 = 10^3 - 9^3$, $331 = 11^3 - 10^3$, $397 = 12^3 - 11^3$ - жай сандар; $x = 13$ болғанда $469 = 7 \cdot 67$ - құрама сан; $x = 14$, 15 болғанда $547 = 14^3 - 13^3$; $631 = 15^3 - 14^3$ - жай сан; $x = 16, 17$ болғанда $721 = 7 \cdot 103$, $817 = 19 \cdot 43$ - құрама сан; $x = 18$ болғанда 919=$18^3 - 17^3$- жай сан пайда болады.

Сонымен, екі кубтар айырмасынан құралған және 1000 нан кіші болған жай сандар 7, 19, 37, 61, 127, 271, 331, 379, 547, 631 және 919 болады.

Екі кубтар айырмасынан құралмаған 6k+1 түріндегі жай сандардың шексіздігін дәлелдеу мүмкін.

Мысал. 31=6·5+1, 67=6·11+1, 103=6·17+1, 139=6·23+1, 157=6·26+1 жай сан болып, оларды екі кубтар айырмасы түрінде өрнектеу мүмкін болмайды.

$\left.\begin{matrix} x + y = k^2, \\ x^2 + y^2 = l \end{matrix}\right\}$ болатын x және y сандар бар ма (мұнда x, y, k, l - натурал сандар) ?

Ферма бір жұп $x = 1061652393520$ және $y = 4565486027761$ лер көрсетілген қасиетке ие болған x және y тердің ең кішісі деп айтты. Кейінрек бұл пікір дәлелденді.

Енді Харди және Раманутжандар көрсеткен бір аддитив мәселені көрсетеміз.

Натурал n санның натурал сандар қосындысы түрінде сипатталу саны $p(n)$ мен белгіленеді. Раманутжан n арқылы $p(n)$ ді анықтау формуласын ұсынды. Кейінрек бұл формулаға Харди жөндеу енгізіп, n -ң өсуі мен $p(n)$-ң тез өсуін дәлелдеді.

Мысал. $p(200) = 3972999029388$, яғни 200-ң натурал сандар қосындысы түрінде жазылу саны жоғарыда көрсетілген санға тең.

Натурал n санды $2^{n-1} = p(n)$ жолмен түрлі қосылғыштар қосындысы түрінде өрнектелу мүмкіндігі дәлелденген.

Мысал. $n = 5$ болғанда $p(5) = 2^{5-1} = 2^4 = 16$. Демек, 5-ң натурал сандар қосындысы түрінде жазылу саны 16 ға тең:

5=5,	5=2+2+1,
5=4+1,	5=2+1+2,
5=1+4,	5= 1+2+2,
5=2+3,	5=2+1+1+1,
5=3+2,	5=1+2+1+1,
5=3+1+1,	5=1+1+2+1,
5=1+3+1,	5=1+1+1+2,
5=1+1+3,	5=1+1+1+1+1 .

Кез-келген n санның t та қосылғыштар қосындысы түрінде жазылу саны C_{n-1}^{t-1} ға тең болатынын дәлелдеу мүмкін (мұнда қосылғыштар реті мен бөлектенген жазуларды әр түрлі жазылулар деп есептелінеді).

Мысал.

1) $\left.\begin{matrix} n = 4, \\ t = 2 \end{matrix}\right\}$ болғанда $C_{4-1}^{2-1} = C_3^1 = 3$.

$$4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1;$$

2) $\left.\begin{matrix} n = 4, \\ t = 3 \end{matrix}\right\}$ болғанда $C_{4-1}^{3-1} = C_4^2 = 3$.

$$4 = 2 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 2;$$

3) $\left.\begin{matrix} n = 5, \\ t = 2 \end{matrix}\right\}$ болғанда $C_{5-1}^{2-1} = C_4^1 = 4$,

$$5 = 1 + 4 = 3 + 2 = 4 + 1 = 2 + 3;$$

4) $\left.\begin{matrix} n = 5, \\ t = 3 \end{matrix}\right\}$ болғанда $C_{5-1}^{3-1} = C_4^2 = 4$,

$$5 = 3 + 1 + 1 = 1 + 3 + 1 = 1 + 1 + 3 = 1 + 2 + 2 = 2 + 1 + 2 = 2 + 2 + 1$$

5) $\left.\begin{matrix} n = 9, \\ t = 5 \end{matrix}\right\}$ болғанда $C_8^4 = 70$, яғни 9-ң 5 натурал сандар қосындысы түрінде жалылыну саны 70 ке тең болады.

$T(n)$ мен n санның тізбектелген тақ сандар қосындысы түрінде жазылыну санын көрсетеміз:

1) $n \neq k^2$ тақ сан болса, $T(n) = \frac{\tau(n)}{2}$.

Мысал.

$$n = 15: T(15) = \frac{\tau(15)}{2} = \frac{4}{2} = 2, \quad 15 = 15,$$

$$15 = 3 + 5 + 7;$$

$$n = 45: T(45) = \frac{\tau(45)}{2} = \frac{6}{2} = 3, \qquad 45 = 45,$$

$$45 = 13 + 14 + 15,$$

$$45 = 5 + 7 + 9 + 11 + 13.$$

2) Егер $n = k^2$ тақ сан болса, $T(n) = \frac{\tau(n)+1}{2}$.

Мысал.

$$T(9) = \frac{\tau(9)+1}{2} = 2, \quad 9 = 1 + 3 + 5, \quad 9 = 9;$$

$$T(49) = \frac{\tau(49) + 1}{2} = 2, \quad 49 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13, \quad 49 = 49.$$

3) $n = 2k$ болып, $4 T n$ болса, онда $\tau(n) = 0$.

Мысал.

$n = 14 = 2 \cdot 7, 4 T 14$ болғанда $\tau(14) = 0$, яғни 14 санының тізбек тақ сандар қосындысы түрінде бейнелеу саны нөлге тең.

4) $n = 4k \neq l^2, \quad T(n) = \frac{\tau\left(\frac{n}{4}\right)}{2}$.

Мысал.

$$n = 48 = 4 \cdot 12 \neq l^2,$$

$$T(48) = \frac{\tau(12)}{2} = \frac{6}{2} = 3,$$

48=3+5+7+9+11+13=9+11+13+15=23+25.

5) $n = 4k = l^2, \quad T(n) = \frac{\tau\left(\frac{n}{4}\right)+1}{2}$.

$$T(16) = \frac{\tau(4)+1}{2} = 2, \quad 16 = 7 + 9 = 1 + 3 + 5 + 7.$$

Натурал n санының 2, 3, 4 және т.б. әр түрлі натурал қосылғыштар қосындысы түрінде жазылу саны қаншаға тең, деген сұрақты Эйлер қойған болатын.

Бұл мәселені шешуде ол төмендегі теңдеудің орынды болатынын дәлелдеді:

$$(1 + xz)(1 + x^2 z)(1 + x^3) \ldots = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots.$$

Мұнда $A = x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots,$

$B = x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 3x^8 + \cdots$

$C = x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 4x^{10} + 5x^{11} + \cdots$

B ның коэффициенттері ондағы x тің көрсеткіштерін екі әр түрлі натурал сандар қосындысы түрінде жазылу санын, C ның коэффициенттері болса ондағы x тің көрсеткіштерін үш әр түрлі натурал сандар қосындысы түрінде жазылу санын көрсетеді.

Мысал. B да x^8 дің коэффициенттері 3 ке тең. Демек, 8 ді 2 әр түрлі натурал сандар қосындысы түрінде 3 түрлі жазу мүмкін:

$$8=1+7=2+6=3+5;$$

С да x^{11} дің коэффициенттері 5 ке тең. Демек, 11 ді 3 әр түрлі натурал сандар қосындысы түрінде 5 түрлі жазу мүмкін:

$$11=1+10=2+9=3+8=4+7=5+6.$$

B және C ның кез-келген мүшесінің коэффициенттері жалпы жағдайда анықталмаған, сондықтан бұл мәселенің соңына дейін шешімі табылмаған.

3.3 Гаусс сандарының арифметикасы

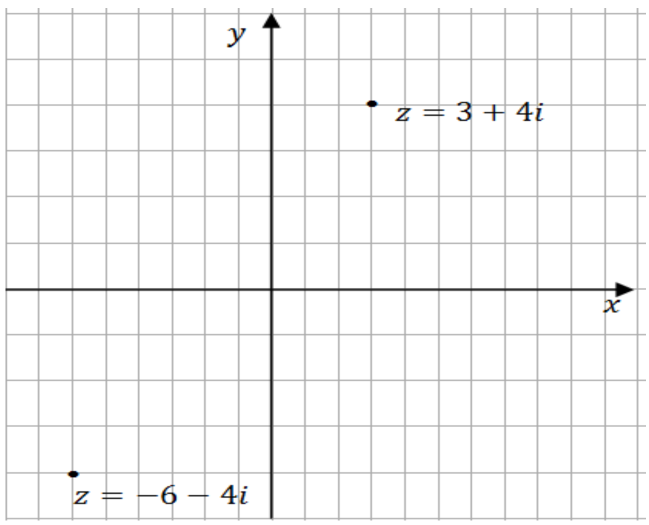
Ұлы неміс математигі К.Ф.Гаусс $z = a + bi$ түріндегі комплекс сандардың кез-келген a және b рационал сандар үшін дербес жағдайын қарастырып, олардың арифметикасын жасады. Мұндай түрдегі комплекс сандар кейінрек Гаусс сандары деп аталды.

a және b бүтін рационал сандар болғанда $z = a + bi$ бүтін Гаусс сандары деп аталады.

Мысал. $z_1 = -3 + 5i,\ z_2 = -3i;\ z_3 = 5$ бүтін Гаусс сандары болады.

Сонымен, кез-келген бүтін рационал сан бүтін Гаусс саны болады.

Егер жазықтықты координата остеріне параллель болған түзу сызықтармен қабырғасы 1 бірлікке тең болған квадраттарға бөлсек, мұндай квадраттардың төбелері бүтін Гаусс сандарының геометрик бейнесін береді (37-сурет).



37-сурет

$z = a + bi$ комплекс санның нормасы деп $N(z) = a^2 + b^2$ теріс болмаған санға айтылады. Бүтін Гаусс санының нормасы да теріс болмаған бүтін сан болады. Комплекс санның нормасы берілген және оған түйіндес болған комплекс санның көбейтіндісіне тең болады:

$$z = a + bi;\ \overline{z} = a - bi;\ z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 = N(z).$$

Мысал. $N(3 - 4i) = 9 + 16 = 25;\quad z = 1 - 2i;\ \overline{z} = 1 + 2i;$

$$\overline{z} \cdot z = (1 - 2i)(1 + 2i) = 1 + 4 = 5 = N(z).$$

$$z_1 = a + bi,\qquad N(z_1) = a^2 + b^2;\ \ z_2 = c + di,\qquad N(z_2) = c^2 + d^2;$$

$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + ac)i;$

$N(z_1 \cdot z_2) = (ac - bd)^2 + (ad + ac)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = N(z_1) \cdot N(z_2).$

Демек, көбейтіндінің модулі көбейткіштер модулдерінің көбейтіндісіне тең болады. Бұл қасиетке норманың мультипликативтік қасиеті деп аталады.

Мысал. $z_1 = 1 - i,\ N(z_1) = 1; z_2 = 2 + i,\ N(z_2) = 5;$

$$z_1 \cdot z_2 = (1 - i)(2 + i) = (2 + 1) + (1 - 2)i = 3 - i;\ \ N(z_1 \cdot z_2) = 10.$$

z - бүтін Гаусс саны болғанда, $N(z)$ теріс болмаған бүтін рационал сан болады. Бірақта кез-келген теріс болмаған бүтін C сан қандайда бүтін Гаусс санының нормасы болуы шарт емес, себебі оның үшін $C = N(z) = a^2 + b^2$ болуы қажет. Сондықтан кез-келген бүтін сан бұл шартты қанағаттандырмауы мүмкін.

Мысалдар.

1) 7, 11, 15 ешқандай бүтін Гаусс сандарының нормасы болмайды, себебі олар екі бүтін санның квадраттары қосындысына тең болмайды.

2) 5, 10, 13 болса, $1 \pm 2i, 1 \pm 3i,\ 2 \pm 3i$ бүтін Гаусс сандарының нормалары болады.

Теорема: Тақ t санның $t = x^2 + y^2$ болуы үшін $t = 4k + 1$ болуы қажет.

$t = x^2 + y^2$ дан $x = 2n$ жұп сан; $y = 2m + 1$ тақ сан келіп шығады, демек

$$t = (2n)^2 + (2m + 1)^2 = 4(n^2 + m^2 + 1) + 1 = 4k + 1.$$

Норма келесі қасиеттерге ие:

1) $N(\alpha) = 0$ болса, $\alpha = 0$ болады және керісінше.

$\alpha = a + ib$; $N(\alpha) = a^2 + b^2 = 0$, демек, $a = b = 0$, яғни $\alpha = 0$. Егер $\alpha = 0$ болса, $a = b = 0$ және $N(\alpha) = 0$ болады.

2) $N\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) = \frac{N(\alpha_1)}{N(\alpha_2)}$, мұнда $\alpha_2 \neq 0$.

Бүтін Гаусс сандар арифметикасы бүтін рационал сандар арифметикасының қасиеттеріне ұқсас қасиетке ие.

Егер $\beta = \alpha \cdot \gamma$ теңдікте β, α, γ бүтін Гаусс сандары болса, онда β – бүтін Гаусс саны, γ немесе α -бүтін Гаусс санына бөлінеді және ол $\beta \vdots \gamma$ немесе $\beta \vdots \alpha$ ретінде жазылады.

Мысал. $3 - i = (2 + i)(1 - i)$, $(3 - i) \vdots (2 + i)$ немесе $(3 - i) \vdots (1 - i)$.

Бүтін Гаусс сандарының мультипликативтік қасиетінен $\beta \vdots \gamma$ болғанда $N(\beta) \vdots N(\gamma)$ болатыны келіп шығады.

Мысал. $(3-i) \vdots (1-i)$,

$$N(3-i) = 10, \quad N(1-i) = 2, \qquad 10 \vdots 2.$$

Түсініктеме. $N(\beta) \vdots N(\gamma)$ дан $\beta \vdots \gamma$ болмауы мүмкін.

Мысал. $\beta = 1+2i,\ N(\beta) = 5;\ \gamma = 1-2i,\ N(\gamma) = 5;\ N(\beta) \vdots N(\gamma)$. Бірақ β саны γ бөлінбейді. Себебі, егер $1+2i = (1-2i)\cdot(x-iy)$ деп алынса,

$\left.\begin{array}{c} x-2y=1 \\ -(2x+y)=2 \end{array}\right\}$ жүйенің түбірі x және y бүтін сан болмайды.

Бүтін рационал сандар жиынында +1 және -1 тривиал (ашықтан-ашық) белгілі бөлгіштер болады; бүтін комплекс сандар үшін мұндай тривиал бөлгіштер тек $\pm 1,\ \pm i$ болатынын дәлелдейміз.

Айталық, ε- бүтін Гаусс саны кез-келген бүтін Гаусс санының бөлгіші болсын. $1 \vdots \varepsilon$ (ε саны бұл жағдайда бірдің бөлгіші деп аталады). $N(1) \vdots N(\varepsilon)$ немесе $1 \vdots N(\varepsilon)$. $\varepsilon = x+iy$ болғанда $N(\varepsilon) = 1$деп есептелінсе, $x^2+y^2=1$ болады.

Демек,

$\left.\begin{array}{c} x=1 \\ y=0, \end{array}\right\}$ немесе $\left.\begin{array}{c} x=-1 \\ y=0, \end{array}\right\}$ немесе $\left.\begin{array}{c} x=0 \\ y=1, \end{array}\right\}$ немесе $\left.\begin{array}{c} x=0 \\ y=-1 \end{array}\right\}$

болады және бұдан $\varepsilon = x+iy = +1, -1, +i, -i$ келіп шығады.

Сонымен, кез-келген z -бүтін Гаусс саны үшін

$$z = 1\cdot z;\ z = -1\cdot(-z);\ \ z = i-(-iz); z = -i(iz)$$

екендігі келіп шығады.

Бүтін Гаусс сандары үшін ортақ бөлгіш, ең үлкен ортақ бөлгіш, ортақ еселік, ең кіші ортақ еселік, өзара жай Гаусс бүтін сандары және жай бүтін сандар түсініктері бар.

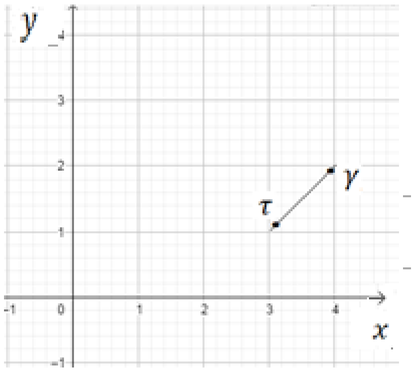
Бүтін Гаусс сандар жиынында бөлу амалы барлық кезде орындала бермейді.

Егер бүтін Гаусс саны бүтін Гаусс санына бөлінбесе, онда бүтін рационал сандар жиыныда орынды болған қалдықпен бөлу теоремасы орындалады.

Теорема. Егер $\boldsymbol{\beta}$ − бүтін Гаусс саны $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$ бүтін Гаусс санына бөлінбесе, онда сондай $\boldsymbol{\gamma}$ және $\boldsymbol{\delta}$ бүтін Гаусс сандары табылып, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha\gamma} + \boldsymbol{\delta}$ орынды болып, $\boldsymbol{N(\delta)} < N(\boldsymbol{\alpha})$ болады.

Дәлел.

Комплекс жазықтықтың кез-келген τ нүктесі үшін сондай γ бүтін комплекс нүкте табылып, $N(\tau-\gamma) < 1$ болады(38-сурет).



38-сурет

Айталық $\tau = \frac{\alpha}{\beta}$ болсын. Мұндай τ үшін γ ны табамыз және $\delta = \beta - \alpha\gamma$ деп аламыз. $\delta = \alpha\left(\frac{\beta}{\alpha} - \gamma\right) = \alpha(\tau - \gamma)$; $N(\delta) = N(\alpha) \cdot N(\tau - \gamma) < N(\alpha)$; себебі $N(\tau - \gamma) < 1$. Сонымен, $\beta = \alpha\gamma + \delta$ болып, $N(\delta) < N(\alpha)$ болады.

Түсініктеме. Кез-келген $z = a + ib$ комплекс санды $z = \nu + z_1$ түрінде жазуға болады. Мұнда $\nu -$ бүтін Гаусс саны, z_1 сондай комплекс сан, $N(z_1) < N(z)$.

Мысал.

$$z = \frac{5}{2} - \frac{11}{3}i = \left(2 + \frac{1}{2}\right) - \left(3 + \frac{2}{3}\right)i = (2 - 3i) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)i;$$

$$N(z) = \frac{25}{4} + \frac{121}{9} = 19\frac{25}{36};$$

$$N(z_1) = \frac{1}{4} + \frac{4}{9} = \frac{9 + 16}{36} = \frac{25}{36};$$

$N(z_1) < N(z)$.

Енді қалдықпен бөлуге қатысты мысалдар қарастырамыз:

$\beta = 11 + 2i$ және $\alpha = 7 - i$ үшін қалдықпен бөлу орындалсын.

$$\frac{11 + 2i}{7 - i} = \frac{(11 + 2i)(7 - i)}{50} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}i = 1 + \frac{1}{2}(1 + i);$$

$11 + 2i = (7 - i).$ $\quad 1 + \frac{1}{2}(1 + i) \cdot (7 - i) = (7 - i) \cdot 1 + (4 + 3i),$

$\mathrm{N}(4 + 3i) = 25; N(7 - i) = 50, \quad 25 < 50.$

Өзіндік жұмыстар үшін мысалдар:

1)17-3i 8+5i бөлу орындалсын.

2)14+3i 1-2i бөлу орындалсын.

$\beta \vdots \alpha$ және $\gamma \vdots \alpha$ болғанда α саны N, β және γ тердің ортақ бөлгіші деп аталады. Әрине бұл жағдайда $N(\beta) \vdots N(\alpha)$, $N(\gamma) \vdots N(\alpha)$ болуы қажет.

Мысал. $\beta = 2 + 4i$; $\gamma = -1 + 3i$ үшін $\alpha = 1 + i$ ортақ бөлгіші болады, себебі $\frac{\beta}{\alpha} = 3 + i$; $\frac{\gamma}{\alpha} = -1 + 2i$; $N(\beta) = 20$; $N(\gamma) = 10$; $N(\alpha) = 2$ және $20 \vdots 2$, $10 \vdots 2$ болады.

β және γ - бүтін Гаусс сандарының ең үлкен ортақ бөлгіші деп төмендегідей шарттарды орындайтын δ бүтін Гаусс санына айтады:

1) δ саны β және γ ның ортақ бөлгіші болуы шарт.

2) δ саны β және γ ның кез-келген басқа ортақ бөлгішіне бөлінуі шарт.
Түсініктеме.
$\delta = (\gamma, \beta)$ болғанда $\varepsilon \cdot \delta$ да $(\varepsilon = \pm 1, \pm i)$ β және γ-ң ең үлкен ортақ бөлгіші болады.

Енді берілген бүтін Гаусс сандарының ең үлкен ортақ бөлгішін табайық.

1) Егер $\beta \vdots \gamma$ болса, $(\beta, \gamma) = \gamma$ болады.

Мысал. $\beta = 9 + 7i$; $\gamma = 2 + 3i$.
Бұл жағдайда $\big((9+7i), (2+3i)\big) = 2 + 3i$.

2) Егер β бүтін Гаусс саны, γ - бүтін Гаусс санына бөлінбесе, онда (β, γ) Евклид алгоритмі көмегінде табылады.

β және γ - бүтін Гаусс сандарының ең үлкен ортақ бөлгіші Евклид алгоритмі бойынша тізбекті бөлудегі ең соңғы нормасы нөлден өзгеше болған қалдық болады:

$$\left.\begin{array}{c} \beta = \gamma\alpha + \delta \\ \gamma = \delta\alpha_1 + \delta_1 \\ \delta = \delta_1\alpha_2 + \delta_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \delta_{k-1} = \delta_k\alpha_{k+1} + \delta_{k+1} \\ \delta_k = \delta_{k+1}\alpha_{k+2} \end{array}\right\} \qquad (*)$$

(*) $N(\alpha) > N(\delta) > N(\delta_1) > N(\delta_2) > \cdots$ натурал сандар болып, барған сайын азаяды. Сондықтан $\delta_k = \delta_{k+1} \cdot \alpha_{k+2}$ және $N(\delta_{k+2}) = 0$. $\delta_{k+1} = (\beta, \gamma)$ болатынын көрсетеміз. Оның үшін, λ саны β және γ тің қандайда ортақ бөлгіші болса, онда $\delta_{k+1} \vdots \lambda$ болатынын көрсету жеткілікті.
(*) дағы тізбекті бөлу жүйесінен $\beta \vdots \lambda$, $\gamma \vdots \lambda$ болғандықтан $\delta \vdots \lambda$ болатыны көрінеді. Кейінгі теңдіктен $\delta_1 \vdots \lambda$, одан кейінгісінен $\delta_2 \vdots \lambda$ және тағы басқа $\delta_{R+1} \vdots \lambda$ келіп шығады. Ең үлкен ортақ бөлгіштің анықтамасына негізделіп $(\beta, \gamma) = \delta_{k+1}$ болады. Сонымен теорема дәлелденді.
Мысалдар.
1) $\beta = 11 - 27i$, $\gamma = 9 - 2i$ дің ең үлкен ортақ бөлгіші табылсын.
Қалдықпен бөлу алгоритміне негізделіп:

$$11 - 27i = (9 - 2i)(2 - 3i) + (-1 + 4i),$$
$$9 - 2i = (-1 + 4i) \cdot (-1 + 2i).$$

Демек, $(\beta, \gamma) = -1 - 2i$.

Өзіндік жұмыстар.

1) $\beta = -13 - 21i$, $\gamma = 11 - 3i$ дің ең үлкен ортақ бөлгіші табылсын.
2) $\beta = 35 + 4i$, $\gamma = 5 - 14i$ дің ең үлкен ортақ бөлгіші табылсын.

Егер β және γ - бүтін Гаусс сандарының ең үлкен ортақ бөлгіші тривиал бөлгіштерден бірі болса ($\varepsilon = \pm 1, \pm i$), мұндай бүтін Гаусс сандары өзара жай Гаусс сандары деп аталады.

Мысалдар.

1) $\beta = 1 - i, \quad \gamma = 1 - 2i$ дің ең үлкен ортақ бөлгіші i.

2) $\beta = 11 - 2i, \quad \gamma = 2 + 3i$ дің ең үлкен ортақ бөлгіші 1.

Егер α және β_1, α және β_2 өзара жай болса, α және $\beta_1 \cdot \beta_2$ де өзара жай сан болады.

$\beta \vdots \alpha$ және $\beta \vdots \gamma$ болғанда β бүтін Гаусс саны α және γ бүтін Гаусс сандарының ортақ бөлгіші деп аталады.

Мысалдар.

$$\left.\begin{aligned} \beta &= 7 - 9i, \\ \alpha &= 2 - 3i \\ \gamma &= -1 + i \end{aligned}\right\} \text{үшін } \beta \vdots \alpha = -1 + 3i, \qquad \beta \vdots \gamma = 1 - 8i,$$

демек, $7 + 9i$ саны $(2 - 3i)$ және $(-1 + i)$ ортақ бөлгіші болады.

α және γ бүтін Гаусс сандарының ең кіші ортақ еселігі деп келесі шарттарды орындайтын Δ бүтін Гаусс санына айтады.

Егер μ бүтін Гаусс саны α және γ кез-келген ортақ еселігі болса, $\mu \vdots \Delta$ болады.

$[\alpha, \gamma] = \Delta - \alpha$ және γ лардың ең кіші ортақ еселігі болады.

Бүтін Гаусс сандарының ең кіші ортақ еселігі бүтін рационал сандардың ең кіші ортақ еселігін табу сияқты анықталады.

Келесі заң орынды:

$[\alpha, \gamma] = \frac{\alpha \cdot \gamma}{(\alpha, \gamma)}$, яғни α және γ бүтін Гаусс сандарының ең кіші ортақ еселігі α және γ лар көбейтіндісін олардың ең үлкен ортақ бөлгішіне бөлген қатынасқа тең.

Мысал.

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= 11 - 27i, \\ \alpha &= 9 - 2i \end{aligned}\right\} \text{ ең кіші ортақ еселігі табылсын.}$$

$$[\alpha, \gamma] = \frac{(11 - 27i)(9 - 2i)}{(\alpha, \gamma)} = \frac{45 - 265i}{-1 + 4i} = -65 + 5i$$

$$-65 + 5i = (11 - 27i)(-1 - 2i),$$

$$-65 + 5i = (9 - 2i)(-7 - i).$$

Енді жай Гаусс саны түсінігіне өтеміз.

Егер $\pi \neq 0$ бүтін Гаусс санының кез-келген $\pi = \tau \cdot \sigma$ жіктелуінде (τ *және* σ - бүтін Гаусс сандары) τ *немесе* σ біреуі бірдің бөлгіші болса, онда π санына жай Гаусс саны деп аталады. (Бірдің бөлгіштері болған $\varepsilon = \pm 1, \pm i$ жай Гаусс саны есептелмейді). Керісінше (яғни τ *және* σ ешқайсысы бірдің бөлгіші болмаса) π құрама Гаусс саны деп аталады.

Жай Гаусс санына басқаша да анықтама беру мүмкін:

Егер $\pi \neq 0$ үшін $N(\pi) > 1$ болып, π дің кез-келген $\pi = \tau \cdot \sigma$ - бүтін Гаусс сандар көбейтіндісі түріндегі жіктелуінде $N(\tau)$ және $N(\sigma)$ лар $N(\pi)$ дан кіші болмаса, онда ол жай Гаусс саны, $N(\tau)$ және $N(\sigma)$ лар $N(\pi)$дан кіші болса, π құрама Гаусс саны деп аталады.

Сонымен, π жай Гаусс саны болғанда ол тек $\varepsilon = \pm 1, \pm i$ тривиал бөлгіштерге ие, π құрама Гаусс саны болғанда ол $\varepsilon = \pm 1, \pm i$ травиал бөлгіштерден басқа, тағы басқа бүтін Гаусс саны бөлгіштерге ие болады.

Сондай сұрақ туындайды:

Кез-келген рационал санның жай Гаусс саны болуы қажет пе?

Келесі теорема орынды:

1-теорема. 2 жай сан жай Гаусс саны болмайды.

$2 = -i(1+i)^2$ болатынын оңай көруге болады. $1+i$ жай Гаусс саны болады: $N(1+i) = 1^2 + 1^2 = 2$. Елестетейік, $(1+i) \vdots \delta$ болсын, $N(1+i) \vdots N(\delta)$ немесе $2 \vdots N(\delta)$. Демек, $N(\delta) = 1$ және $\delta = 1$ немесе $N(\delta) = 2$, онда $N\left(\frac{1+i}{\delta}\right) = \frac{2}{2} = 1$. Сондықтан $\frac{1+i}{\delta} = \pm 1$ немесе $\pm i$; $\frac{1+i}{\varepsilon} = \delta$, яғни $1+i$ тек $\varepsilon = \pm 1, \pm i$ бөлгіштері бар. Сондықтан $1+i$ жай Гаусс саны болады.

2-теорема. $\boldsymbol{p = 4k+3}$ түріндегі жай рационал сандар жай Гаусс сандары болады.

$\delta = x + iy$ және $p \vdots \delta$ болсын. $N(p) \vdots N(\delta)$ немесе $p^2 \vdots N(\delta)$ демек, 1)$N(\delta) = 1$; 2)$N(\delta)p^2$; 3) $N(\delta) = p, N(\delta) = 1$ болғанда $\delta = 1$; $N(\delta) = p^2$ болғанда $N\left(\frac{p}{\delta}\right) = \frac{N(p)}{N(\delta)} = \frac{p^3}{p^2} = 1, \frac{p}{\delta} = \varepsilon$, яғни $\delta = \varepsilon = \pm 1, \pm i$.

$N(\delta) = p$ болғанда $x^2 + y^2 = p$ тақ болғандықтан $x = 2k; y = 2k_2 + 1$ немесе $4k_1^2 + (2k_1 + 1)^2 = p$, яғни $p = 4n + 1$ түріндегі сан. Бірақ шарт бойынша $p = 4n + 3$ түріндегі сан болады. Сондықтан $\delta = \varepsilon$ және p жай Гаусс саны болады.

$p = 4n + 1$ жай рационал сан жай Гаусс саны болмайтынын дәлелдеу мүмкін.

Мысалдар.

1) p=13=4· 3+1 жай рационал сан жай Гаусс саны болмайды, шынында да p=13=$(3-2i)\cdot(3+2i)$=$3^2 + 2^2$.

2) p=23=4· 5+3 саны екі бүтін рационал сандардың квадратына жіктелмейді, ол жай Гаусс саны болады.

$N(p) = N(\pi) \cdot N(\gamma) = p^2$, демек, $N(\pi) = N(\gamma) = p$ немесе $N(\pi) = p^2$; $N(\gamma) = 1, N(\gamma) = 1$, $\gamma - 1$ дің бөлгіші болады, яғни $\gamma = \pm 1, \pm i$. Демек, $\pi = p, , \pi = -p, , \pi = -i\,p, \pi = i\,p$.

$N(p) = p = \pi \cdot \overline{\pi}$, $p = \pi \cdot \gamma$, $\overline{\pi} = \gamma$, демек, бұл жағдайда p -жай рационал сан екі жай қос Гаусс сандарының көбейтіндісінен құралған: $p = \pi \cdot \overline{\pi}$.
Мысалдар: 1) $p = 5 = (2 - i) \cdot (2 + i) = 4k + 1$ - жай рационал сан. Бірақ 5 – жай Гаусс саны болмайды.

2) $\pi_1 = 1 + 2i$ - жай Гаусс саны болады, себебі $N(\pi_1) = 5$ жай рационал сан.

3) $\pi_2 = 4 + 3i$ - жай Гаусс саны болады, себебі $N(\pi_2) = 25 = 5^2$ жай рационал санның квадраты.

4)$\pi_3 = 9 + 7i$, $N(\pi_3) = 81 + 49 = 130 \neq p^2$, демек, π_3 құрама Гаусс саны.

Енді бүтін рационал сандар үшін орынды болған негізгі теореманың бүтін Гаусс сандары үшін де орынды болатынын көрсетеміз.

Кез-келген $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \varepsilon$ бүтін Гаусс саны жай Гаусс сандар көбейтіндісіне жіктеледі және мұндай жіктелу біреуғана болады.

Дәлел. 1) Егер α жай Гаусс саны болса, онда теорема дәлелденген болады. Егер α құрама бүтін Гаусс саны болса, онда оның сондай тривиал болмаған ең кіші нормалы η_1 жай Гаусс бөлгіші табылып, $\alpha = \eta_1 \cdot \alpha_1$ және
$N(\alpha_1) < N(\alpha)$ болады , сондықтан $\alpha = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \alpha_2$ орынды.

Сол сияқты жалғастырсақ, $\alpha = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \ldots \cdot \eta_k$ болады. Бұдан η_k да жай Гаусс саны болады.

2) Енді теореманың екінші бөлігін дәлелдейміз.

Айталық $\alpha = \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \ldots \cdot \theta_e$ болсын, мұнда θ_1 жай Гаусс саны.
Демек, $\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \ldots \cdot \eta_k = \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \ldots \cdot \theta_l$. Бұл теңдіктің сол жағы η_1-ге бөлінеді және сондықтан $(\theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \ldots \cdot \theta_l) \cdot \eta_1$ болуы қажет.
Барлық θ және η жай Гаусс сандары болғандықтан $\theta_i = \eta_i \cdot \varepsilon$ болады. Нәтижеде $\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \ldots \cdot \eta_k = \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \ldots \eta_1 \cdot \theta_2 \ldots \eta_1 \cdot \varepsilon \ldots \theta_e$ болады. Әр екі жағын η_1 қысқартсақ, жоғарыдағы айтылғандардан $k = l$ және θ және η дан бірдің бөлгіштерімен айырмашылығын көруге болады. Нәтижеде α нің екі түрлі жіктелуіне емес, керісінше бұл жіктелулер тек ε мәндері мен айырмашылық болатын жағдайға келеміз.
Теорема дәлелденді.

$\alpha = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \pi_3$ және $\alpha = -\pi_3 \cdot i\pi_2 \cdot i\pi_1$ ларды α нің екі түрлі жай көбейткіштер жіктелуі деп есептеуге болмайды, себебі $-\pi_3$, $i\pi_2$ және $i\pi_1$дің кез-келген π_1, π_2, π_3 тердің біреуі және 1дің бөлгіштері көбейтіндісінен алынады.
Мысал. $\alpha = 11 - 3i$ сан құрама Гаусс саны болады,себебі

$$N(\alpha) = 11^2 + 3^2 = 121 + 9 = 130 \neq p^2,$$
$$\alpha = (1 - i) \cdot (2 - i) \cdot (2 + 3i),$$
$$\alpha = (-2 - 3i) \cdot (1 - 2i) \cdot (1 + i).$$

Бірақ бұл жіктеулер екі түрлі жіктеу емес, себебі $-2-3i=-1\cdot(2+3i)$, $2-i=-i\cdot(1-2i)$, $1-i=-i\cdot(1+i)$.

Мұндай Гаусс сандарына ассоциативленген сандар деп аталады. Жалпы β кез-келген Гаусс саны болса, $\beta, -\beta, i\beta, -i\beta$ лар ассоциативленген Гаусс сандары деп аталады.

Енді берілген құрама Гаусс санын жай Гаусс сандар көбейтіндісі түрінде өрнектеу тәсілімен танысамыз.

Оның үшін құрама Гаусс санының нормасын жай рационал көбейткіштерге жіктеп, әрбір мұндай көбейткішке тиісті жай Гаусс санын анықтау жеткілікті.

Мысал.

1) z=7 $\pm 9i$ жай көбейткіштерге жіктелсін. $N(z)=49+81=130$, z −құрама Гаусс саны.

130=$z\cdot\overline{z}=(7-9i)\cdot(7+9i)=2\cdot 5\cdot 13,\ 2=-(1+i)^2=(1-i)\cdot(1+i)$,

$$5=4n+1=1^2+2^2=(1-2i)\cdot(1+2i)=(2-i)\cdot(2+i),$$

$$13=4n+1=2^2+3^2=(2-3i)\cdot(2+3i)=(3-2i)\cdot(3+2i).$$

Демек, $(7-9i)\cdot(7+9i)=i(1-i)^2\cdot(2-i)\cdot(2+i)\cdot(3-2i)\cdot(3+2i)$.

$1-i,\ 2-i,\ 2+i,\ 3-2i,\ 3+2i$ көбейткіштер жай Гаусс сандары, себебі олардың нормасы жай рационал сан болады. $\frac{7-9i}{1-i}=8-i$ бүтін Гаусс саны, бірақ $\frac{7-9i}{(1-i)^2}$ бүтін Гаусс саны болмайды. Демек, $1-i$ саны $7-9i$ дің құрамына бірінші дәрежеде енген болады. 8- i болса 2+ i ге бөлініп, 2- i ге бөлінбейді: $\frac{8-i}{2+i}=3-2i$. Демек, 7-9$i=(1-i)\cdot(2+i)\cdot(3-2i)$,

7+9$i=i(1-i)\cdot(2-i)\cdot(3+2i)=(1-i)\cdot(2-i)\cdot(-2+3i)$.

2) z=5$\pm 11i$ көбейткіштерге жіктелсін.

$$N(z)=25+121=146=2\cdot 73$$

$$146=z\cdot z=(5+11i)\cdot(5-11i)=2\cdot 73,$$

$$2=-i(1+i)^2,\ \ 73=4\cdot 18+1=3^2+8^2=(3-8i)\cdot(3+8i).$$

$3-8i$ және $3+8i$ -ң нормасы 73- жай рационал болғаны үшін олар жай Гаусс сандары деп аталады. Сонымен, $(5+11i)\cdot(5-11i)=i(1-i)^2(3-8i)\cdot(3+8i)$, $\frac{5+11i}{1-i}=-3+8i$. Бірақ $\frac{5+11i}{(1-i)^2}$ бүтін Гаусс саны болмайды. Демек, $1-i$ жай Гаусс саны $5+11i$ дің құрамына бірінші дәрежеде енген болады. Сонымен, $5+11i=(1-i)\cdot(-3+8i)$,

$$5-11i=(1-i)\cdot(3+8i)\cdot(-i)=-(1+i)\cdot(3+8i).$$

Енді кез-келген сандар арифметикасында арифметиканың негізгі теоремасы орынды болмайтынын көрсетеміз.

1) 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, ... (1)

$(4k-1)$ түріндегі шексіз прогрессиядағы кез-келген екі элемент көбейтіндісі тағыда $(4k+1)$ түрінде болып, сол тізбекке тиісті болады, бірақ қосындысы $(4k+1)$ түріндегі элемент болмайды.

Егер (1) тізбектің элементі сол жүйеде көбейткіштерге жіктелмесе, онда оны псевдо жай сан және сол жүйеде көбейткіштерге жіктелсе, оны құрама сан деп атаймыз.

5, 9, 13, 17, 21, 33, 37,... лар псевдо жай сандар, $25 = 5^2$ болса құрама сан, себебі оның канондық жіктелуіне (1) дегі 5 саны енеді.

(1) тізбектегі сандар жиынында арифметиканың негізгі теоремасы орынды болмайды: $693 = 4 \cdot 173 + 1 = 21 \cdot 33 = 9 \cdot 77$ – екі түрлі көбейткіштерге жіктелді, ол көбейткіштер псевдо жай сандар болады.

2) $z = x + \sqrt{-5y}$ түріндегі комплекс сандар жиынында ($x, y -$ бүтін рационал сандар) қосу, азайту және көбейту амалдары орындалады.

Барлық бүтін рационал сандар жиыны $x + iy\sqrt{5}$ сандар жиынының дербес жағдайы $(y = 0)$. Бүтін рационал сандар жиынындағыдай мұндай сандар жиынында норма, бөлу түсінігі, бірлік, құрама, жай сан түсініктері бірдей. Бірақ, $x + iy\sqrt{5}$ сандар жиынында тек ± 1 тривиал бөлгіштер бар:

$x^2 + 5y^2 = 1$ теңдеу тек $\left.\begin{matrix} x = 1 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$ және $\left.\begin{matrix} x = -1 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$

бүтін шешімдерге ие және сондықтан $\varepsilon = x + i\sqrt{5y} = -1$ болады.

2, 3, $1 + i\sqrt{5}$ сандар $x + iy\sqrt{5}$ сандар жиынындағы жай сандар, егер δ санын 2 нің бөлгіші деп алынса, яғни $2 = \delta \cdot \delta_1$; $\delta = \alpha + i\beta\sqrt{5},$

$N(2) = 4 = N(\delta) \cdot N(\delta_1)$ болса, $4 \vdots N(\delta)$ болады.

Онда 1) $N(\delta) = 2$, 2) $N(\delta) = 4$, 3) $N(\delta) = 1$ болуы қажет.

1) $N(\delta) = 2$, $\alpha^2 + 5\beta^2 = 2$ теңдеудің α және β бүтін шешімдері жоқ.

2) $N(\delta) = 4$, $N\left(\frac{2}{\delta}\right) = \frac{N(2)}{N(\delta)} = \frac{4}{4} = 1$. Онда δ және 2 ассоциацияланатын сандар болады.

3) $N(\delta) = 1$ болса, $\delta = \pm 1$ болады. Демек, 2 саны $x + iy\sqrt{5}$ сандар жиынындағы жай сан болатыны анықталды, тура сол жолмен 3тің де сол сандар жиынында жай сан болатыны анықталады.

$1 \pm i\sqrt{5}$ санның да $x + iy\sqrt{5}$ сандар жиынындағы жай сан болатынын көрсетеміз.

$\left(1 \pm i\sqrt{5}\right) \vdots \delta$ болсын. $N\left(1 \pm i\sqrt{5}\right) = 6 \vdots N(\delta)$. Демек,

1) $N(\delta) = 3$, 2) $N(\delta) = 2$, 3) $N(\delta) = 6$, 4) $N(\delta) = 1$. Егер $\delta = \alpha + i\sqrt{5\beta}$ түріндегі сан болса, $N(\delta) = \alpha^2 + 5\beta^2$ болады.

$\alpha^2 + 5\beta^2 = 3,\ \alpha^2 + 5\beta^2 = 2$ теңдеулер α және β бүтін шешімдерге ие емес. Егер $N(\delta) = 6$ болса, $N\left(\frac{1\pm\sqrt{5}\,i}{\delta}\right) = \frac{6}{6} = 1$ болып, $1 \pm i\sqrt{5}$ және δ ассоциацияланатын сандар болады. $N(\delta) = 1$ болғанда $\delta = \pm 1$ болады.

$1 \pm i\sqrt{5}$ сандар $\delta = \pm 1$ тривиал бөлгіштерден басқа бөлгішке ие емес, олар $x + iy\sqrt{5}$ сандар жиынындағы жай сандар болады.

$x + iy\sqrt{5}$ сандар жиынында сол түрдегі u және v сандардың $u \cdot v$ көбейтіндісі π жай Гаусс санына бөлініп, олардың әр бірі жай u және v сандарына бөлінбеуі де мүмкін (Бұл жағдай рационал сандар жиынында болуы мүмкін емес).

Мысал. $2 \cdot 3 = 6 = (1 + i\sqrt{5}) \cdot (1 - i\sqrt{5})$; $2 \cdot 3 = 6$ саны $1 \pm i\sqrt{5}$ бөлінеді (оларды жай сан болатынын жоғарыда көрсеттік). Бірақ 2 және 3 сандары $1 \pm i\sqrt{5}$ сандарына бөлінбейді:

$$\frac{2}{1 \pm i\sqrt{5}} = \frac{2(1 \pm i\sqrt{5})}{6} = \frac{1}{3} \pm i\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Бұл сандар $1 \pm i\sqrt{5}$ түрдегі сандар емес, себебі $\frac{1}{3}$ және $\frac{\sqrt{5}}{3}$ бүтін рационал сандар болмайды.

Сонымен, $6 = 6 + 0 \cdot i\sqrt{5}$ түріндегі сан $6 = 2 \cdot 3$ және

$$6 = (1 + i\sqrt{5}) \cdot (1 - i\sqrt{5})$$

түріндегі екі жай көбейткіштерге бөлінеді.

Бұдан $x + iy\sqrt{5}$ сандар жиынында арифметиканың негізгі теоремасы орындалмайтыны келіп шығады.

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Абылкасымова А.Е. Методики преподавания математики. Учебное пособие.- Алма-ата: Санат, 1993. - 68с.
2. Әбілқасымова А.Е., Көбесов А.К., Рахымбек Д., Кенеш Ә.С. Математиканы оқытудың теориясы мен әдістемесі. – Алматы: Білім, 1998,- 208 б.
3. «Мұғалімге арналған нұсқаулық» «Назарбаев Зияткерлік мектептері» ДББҰ Педагогикалық шеберлік орталығы, 2016
4. «Математическая энциклопедия». М. 1977. Том I, стр. 94, статья «Аддитивные проблемы».
5. Прахар К. П. Распределение простых чисел. — М.: «Мир», 1967. — 512 с.
6. «Математиканы оқытудың теориясы мен әдістемесі: дидактикалық-әдістемелік негіздері» А.Е.Әбілқасымова, Алматы, Мектеп, 2014
7. Афонина С.И., Математика и кросата. «Оқытушы», Т., 1999.
8. Ягудаев Б.Я. В мире прекрасных чисел. М. 1996.
9. Доморяд А.П. Математические игры и развлечения. М.,1981.
10. Брадис В.М. Минковский В.Л., Харчева А.К. Математикалық мәселелердегі жағдайлар, Т., « Орта және жоғарғы мектеп», 1994.
11. Қ. Қожабаев «Математиканы оқыту әдістері» Алматы-1998 ж.
12. Рахымбек Д. «Математиканы оқыту әдістері» Шымкент-2006ж.
13. Қаңлыбаев Қ. Бекбаулиева Ш. Меңдіғалиева М. Математикадан кластан тыс жұмыстар-Алматы: Мектеп, 1993-160 б.
14. Мұқашев Ә.Қ, 5-6 сыныптарда математиканы оқытудың кейбір мәселелері. –Алматы: Рауан. 1991.-144 б.
15. Оразалиев А. Математикалық сөйлемдер. – Алматы, 1966, -68 б.
16. Рахымбеков Д., Кенешов Ә Математикалық ұғымдарды оқыту. – Жезқазған : ЖҮ, 1997 -61 б.
17. Қаңлыбаев Қ. Медеуов Е, Төлеева К. Геометрия есептерін шешу әдістемесі - Алматы: рауан, 1996-104 б.
18. Алдамұратова Т. А. Математика: Жалпы білім беретін мектептің
19. 5-сыныбына арналған оқулық-Алматы: Атамұра, 2001-288 б.
20. Груденов Я.И. Совершенствование методической работы учителя математики. Кн. Для учителя. – М.:Просвещение, 1990. – 224 с.
21. Гурьевич В.Ю.. Сорокин Б.В. Абрамович А.И. Изучение сложных тем школьного курса иатематики – Минск,. Нар. Асвета, 1985. -96 с.
22. Алдамұратова Т. А. Математика: Жалпы білім беретін мектептің
23. 6- сыныбына арналған оқулық-Алматы: Атамұра, 2002-368 б.
24. Бидосов Ә. Математиканы оқыту әдістемесі (жалпы методикасы)- Алматы: Мектеп, 1989-224 б.
25. Икрамов Д. Ж. Математическая культура школьника - Ташкент: Уқитувчи. 1981-280 с.

Байжуманов А.А.

ҒАЖАЙЫП САНДАР ӘЛЕМІ
Оқу құралы

Пішімі 60х100 1/16
Тығыздығы 80 гр/м^2. Қағаздың ақтығы 95%.

________ баспасында басылымға
дайындалды
ҚР, Шымкент, Байтұрсынұлы к., 22.
тел.: 8 (727) 233 83 89, 233 83 43,
233 80 45, 233 80 42
e-mail: evero08@mail.ru